FÍSICA

UNA VISIÓN ANALÍTICA DEL MOVIMIENTO

VOLUMEN I

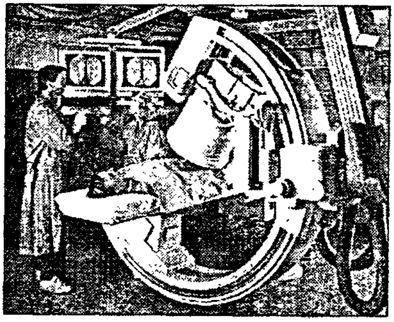
LUMBRERAS
Editores

I

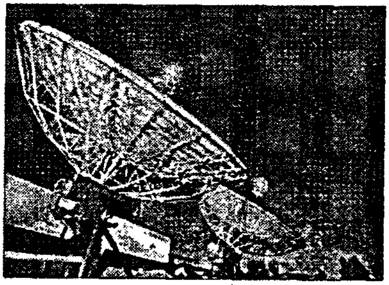
CAPÍTULO

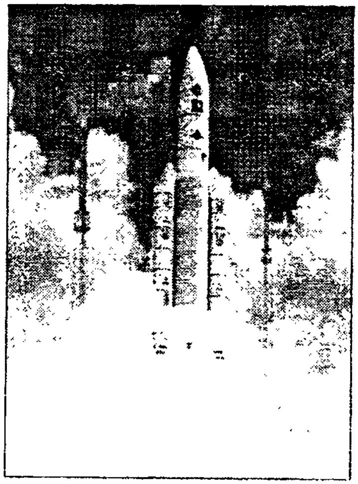
Introducción a la Física

(a)



(b)





(c)

La Física como ciencia fundamental permite descubrir las leyes y principios mediante los cuales se logra una mayor comprensión del comportamiento de la materia. Estas leyes y principios encuentran aplicaciones. **Fig. (a)** En la medicina, con la elaboración de equipos de diagnóstico. **Fig. (b)** En las telecomunicaciones. **Fig. (c)** En la exploración del espacio.

LECTURA

LA ESCUELA PITAGÓRICA. EL NÚMERO, BASE PARA LA CIENCIA

Los científicos griegos eran miembros del grupo jónico que floreció en la costa del Asia Menor. Algunos de sus trabajos serían ahora clasificados como de ingeniería. Se dice que el mismo Thales supervisó la construcción de un dique para evitar la inundación de Mileto. En la cercana isla de Samos, el dictador Polícrates, empeñado en mejorar la capital, contrató a un ingeniero para abrir un túnel a través de una colina y sirviera como acueducto. Comenzado desde ambos extremos, el túnel tuvo 900 yardas de longitud. Excavaciones recientes muestran que las dos perforaciones separadas fallaron de coincidir en el centro por sólo casi dos pies. Es evidente que en el siglo VI a.n.e. ya existía un desarrollo significativo en geometría como para realizar tan asombrosa hazaña.

Otro jónico que contribuyó en gran parte a nuestro punto de vista moderno fue Pitágoras. Alrededor de 530 a.n.e., cuando la conquista persa de Jonia amenazó la ciudad de Samos, Pitágoras se mudó a otra próspera ciudad griega, comercial, Crotona, en el sur de Italia. Allí tuvo bastante influencia y estableció un grupo de pensadores que dieron una contribución importante al estudio contemporáneo de la Naturaleza. Él y su escuela creían que la clave para el entendimiento del Universo radicaba en los números y sus relaciones entre sí. Por ejemplo: Pitágoras decía que la armonía que advertimos cuando dos tonos musicales suenan simultáneamente depende de las longitudes de las cuerdas que los producen (manteniendo iguales la tensión y el diámetro). Una cuerda del doble de longitud que la otra produce un tono una octava más baja. El intervalo llamado quinta se produce por dos cuerdas cuyas longitudes están en la relación 6:4. Esta contribución a la acústica parece haber sido el resultado de experimentos, observaciones planeadas y repetidas a voluntad.

Además de su apología acerca de la importancia de los números y de las matemáticas como instrumento para entender el mundo físico, vemos en los trabajos de los pitagóricos los primeros rudimentos del enfoque experimental.

Por otra parte, adelantaron la ciencia de la geometría deductiva, arreglando en secuencia lógica muchos de los teoremas que un siglo después fueron incorporados en la geometría de Euclides, incluyendo el famoso Teorema llamado después como de Pitágoras. La regla para trazar un ángulo recto por medio de una cuerda o cordel se descubrió probablemente en Egipto, pero es fácil que Pitágoras o alguno de los miembros posteriores de su escuela haya dado la primera demostración deductiva general de que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados.

Sería demasiado suponer que los griegos del siglo VI a.n.e. estuvieran libres de inclinaciones místicas, aunque los naturalistas jónicos señalaron el camino hacia una comprensión materialista de la Naturaleza.

Pitágoras, además de haber sido un político y un matemático científico, encabezó una secta religiosa cuyas creencias estaban vinculadas con las matemáticas. Las matemáticas no eran solamente para proporcionar la solución al rompecabezas del mundo natural; eran también los medios para que los hombres contemplaran lo misterioso y lo eterno, lo cual definía su posición metafísica.

FUENTE: Ciencia Física. AUTOR: R. Lageman. Editorial UTEHA. Pág.: 16

Introducción a la Física

OBJETIVOS

- Motivar el estudio de la Física como ciencia fundamental dentro de las ciencias naturales.
- Conocer la relación que existe entre la Física y otras ciencias.
- Establecer la importancia de la Física para el fortalecimiento de una concepción científica del mundo.
- Conocer la relación de la Física con la tecnología y su importancia en la producción y progreso social.
- Deducir y fijar algunos conceptos básicos para iniciar el estudio de la Física.
- Entender cómo se lleva a cabo la investigación científica aplicando el método científico.

TRODUCCIÓN

Las ciencias estudian las leyes del desarrollo del mundo material, pero cada una de ellas abarca determinado campo de la realidad. El primer campo lo constituye la naturaleza, formada por los jetos inanimados y los organismos vivos cuyas leyes y fenómenos son estudiados por las ciencias turales, como la Física, la Química, la Biología, la Geología y la Astronomía, etc. Estas ciencias son perimentales y están relacionadas con la tecnología y la producción material, contribuyendo tanto progreso como al desarrollo del hombre. El segundo campo de la realidad lo constituyen los objetos istemas de la sociedad humana, formado por las personas con todos los productos de su actividad »oral; las leyes y fenómenos que en ella se presentan son estudiados por las ciencias sociales. que caracterizan por no ser experimentales y son históricamente muy importantes para entender la ciedad en la que nos desenvolvemos.

Por último, las ciencias del pensamiento, tratan de explicar cómo la inteligencia le permite al hombre render e interpretar la realidad y a la vez plantear alternativas para transformarla; se caracterizan por r teóricas y no experimentales. Estos tres campos de la realidad están estrechamente ligados entre y en su conjunto constituye la ciencia.

Dentro de las ciencias naturales contemporáneas se halla la Física. Si bien es cierto que las ciencias turales están muy relacionadas, también es cierto que cada ciencia tiene objetivos y características erentes; por ello es necesario definir el objetivo de la Física, es decir, delimitar el círculo de problemas e actualmente estudia y aclarar en qué se distingue de las otras ciencias naturales.

Nuestros conocimientos de la naturaleza han aumentado progresivamente lo que paralelamente ha desarrollado ciertas técnicas de producción así como su continuo perfeccionamiento en bien del desarrollo de la sociedad, allí tenemos los vehículos de transporte, los radares, submarinos, los diferentes artefactos electrodomésticos, los teléfonos celulares, etc. todos estos van generando a su vez nuevas necesidades, permiten desarrollar nuevas técnicas y a su vez adquirir nuevos conocimientos de la naturaleza, ello finalmente permite la evolución de nuestro pensamiento y criterio científico.

El trabajo como agente transformador, en los albores de la civilización, permitió que el hombre adquiera un conocimiento precientífico

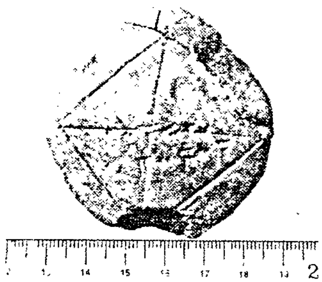
La ciencia apareció en forma incipiente **(conocimiento precientífico)**, desde el momento en que el hombre empezó a sistematizar sus conocimientos alcanzados. Inicialmente, esta sistematización estaba compuesta de datos obtenidos a través de los sentidos (sensaciones), llamado "conocimiento empírico", característico del mundo Antiguo (sociedad esclavista) y de la Edad Media (sociedad feudal). En esta etapa del conocimiento y de la sociedad germinaron algunas ciencias, tales como:

La Matemática

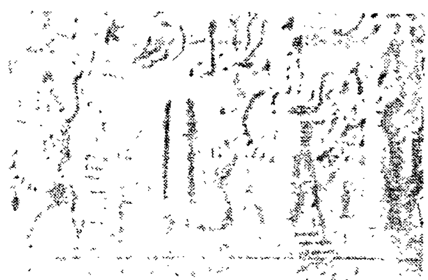
Las primeras referencias de matemática avanzada y organizada datan del tercer milenio a.n.e., en Babilonia y Egipto. Esta matemática estaba dominada por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos relacionados con la agricultura y la ganadería.

La Astronomía

Se inicia con la descripción del **movimiento de los astros** y la construcción de mapas estelares y calendarios. La astronomía solucionó los problemas que inquietaron a las primeras civilizaciones (Egipto, Mesopotamia), acerca de la necesidad de establecer con precisión las épocas adecuadas para sembrar, cosechar, realizar las celebraciones, así como para orientarse en los viajes.



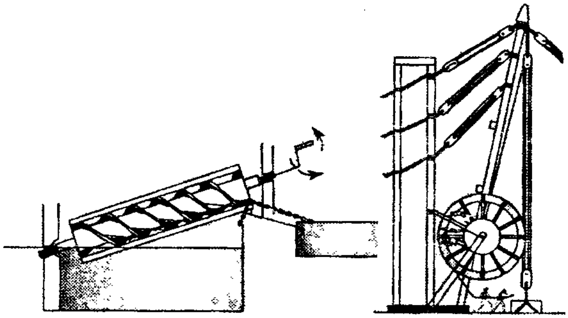
Este pedazo de roca nos muestra la numeración seguida por los babilónicos.



Objetos usados por astrónomos en un grabado asirio del siglo IX a n.e

La Mecánica

Actualmente forma parte de la Física. Nace con la construcción de grandes estructuras y canales para el regadío (Egipto, Mesopotamia). Asimismo se hizo necesaria para la navegación y la guerra. El problema del movimiento ya preocupaba a los antiguos filósofos de Grecia. Por ejemplo, el filósofo griego Aristóteles pensaba que una piedra cae porque su posición natural está en el suelo; el Sol, la Luna y las estrellas describen circunferencias alrededor de la Tierra, porque los cuerpos celestes se mueven por naturaleza así. Arquímedes realizó estudios de hidrostática y descubrió el principio de flotación de los cuerpos, además fue inventor de numerosos ingenios mecánicos.



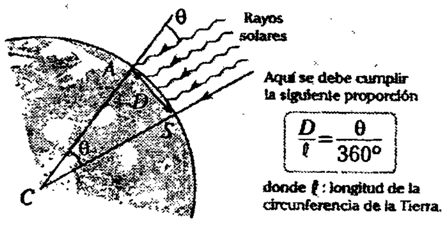
Los adelantos en mecánica se ven reflejados por el tornillo de Arquímedes (Grecia) y el sistema de poleas (Egipto) en las culturas antiguas

.a Biología

Aunque el término *Biología* apareció a principios del siglo XIX, el estudio de los seres vivos es muy anterior. Comienza con la descripción de plantas y animales, y rudimentos de fisiología humana que se remontan a la antigua Grecia. Surgió de manos de naturalistas como Hipócrates, Aristóteles, Galeno y Teofrasto.

a Geografía

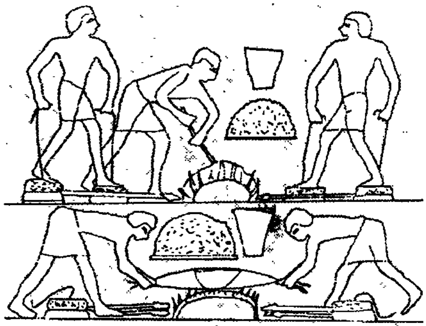
Se inicia con la descripción de la forma de la superficie de la Tierra. Fue una importante fuente de información para los jefes militares y los administradores públicos del Imperio grecoromano.



El gráfico muestra el método de Eratóstenes (Grecia) para calcular las dimensiones de la Tierra.

La Química

Desde los primeros tiempos, y más aun luego de descubrir el fuego, los seres humanos observaron la transformación de las sustancias: la carne cocinándose, la madera quemándose, la obtención de los metales a partir de la fundición de minerales, la preparación de tintes para los distintos tipos de tejidos, los alfareros aprendieron a preparar barnices y más tarde a fabricar vidrio. Siguiendo la tradición aristotélica, los artesanos pensaban que los metales de la Tierra tendían a ser cada vez más perfectos y a convertirse gradualmente en oro, esta idea dominaba la mente de los filósofos y los trabajadores del metal, y se escribió un gran número de tratados sobre el arte de la transmutación que empezaba a conocerse como **alquimia** (precursora de la química actual). Aunque nadie consiguió hacer oro, en la búsqueda de la perfección de los metales se descubrieron muchos procesos químicos.



El dibujo muestra el grabado de un mural egipcio, en donde se está fundiendo metales.

LA FÍSICA

La Física es una de las ciencias más antiguas. Durante el largo proceso de su desarrollo su concepto y objetivo se ha ido modificando en concordancia con la creciente información que se obtenía de la naturaleza, las relaciones que se descubría entre uno y otro fenómeno y las técnicas de producción alcanzadas.

Los primeros físicos fueron los filósofos griegos que vivieron centenares de años antes de nuestra era. Estos filósofos fueron los primeros que intentaron explicar los fenómenos de la naturaleza. Aristóteles fue el que introdujo la palabra Física, con el vocablo griego *Physis*, que significa naturaleza, y por ello la Física se entendía como todo el conjunto de informaciones sobre la naturaleza; razón por la cual también se le llamaba *filosofía de la naturaleza*.

En esta época la fuente de información era básicamente los sentidos del hombre, por ejemplo, la visión, permitía obtener datos acerca del movimiento y de la luz; la audición, acerca del sonido; y el tacto, sobre el calor. Así, ya a finales del siglo V a.n.e., Pitágoras y su escuela poseían algunas nociones sobre acústica (sonido). Tolomeo resume en su *Óptica* los fenómenos luminosos conocidos de los griegos y Arquímedes, en base a la observación, descubre varias propiedades de los líquidos.

A partir del siglo XVI, se retomó con mayor auge y profundidad el estudio del movimiento, del nido, de la luz y del calor, a los cuales posteriormente se añaden los fenómenos eléctricos y magnéticos e si bien eran conocidos desde la antigüedad, no habían sido estudiados con profundidad, ya que no tenía la suficiente información como tampoco las herramientas y las técnicas necesarias, que a rtir de esta época recién empiezan a producirse. Por ello, hasta el siglo XIX se comprendía a la Física mo la ciencia que estudia los fenómenos físicos, ya que, en los fenómenos que estudiaba, la estructura erna de las sustancias no era alterada, a diferencia de los fenómenos químicos, que se caracterizan, ecisamente, por presentar una alteración a este nivel. Toda la estructura teórica alcanzada por la ,ica hasta ese entonces se conoce ahora como **Física clásica**.

\E QUÉ SE OCUPA LA FÍSICA?

La Física estudia los fenómenos mecánicos, acústicos, térmicos, electromagnéticos, luminosos, etc. resumen a todos aquellos que son considerados fenómenos físicos, los cuales se llevan a cabo en la turaleza, descubriendo las leyes que los rigen, a fin de utilizarlas en aplicaciones prácticas para que tas, luego satisfagan las necesidades del hombre y la sociedad. Pues bien, siendo amplio el espectro de s fenómenos físicos, el contenido lo podemos fraccionar y resumir en las siguientes partes:

ecánica

Estudia el movimiento mecánico de una partícula, de los cuerpos rígidos y de los fluidos (sobre do los líquidos), incluye el estudio de las ondas mecánicas, como el sonido, que es una parte de la ústica y el análisis de las condiciones de equilibrio, etc.

Los forjadores de la mecánica como ciencia son el inglés Isaac Newton (1643 - 1727) y el italiano Galileo Galilei (1564 - 1642). Además estos hombres de ciencia hicieron aportes en otros campos por ejemplo la óptica. Cada uno fabricó su propio telescopio, el primero de refracción y el segundo de reflexión.

rmodinámica

Estudia el calor y las leyes que gobiernan los procesos de transformación de la energía de una rma a otra.

Física Molecular

Estudia las propiedades de los cuerpos considerando que están formados por una gran cantidad de moléculas en movimiento e interacción.

Mecánica Estadística

Explica y predice teóricamente las propiedades macroscópicas y el comportamiento de un sistema de muchos componentes como es el caso de cualquier sustancia, cuando se le analiza a nivel molecular, para ello se basa en las características ya conocidas de la forma como interactúan sus componentes microscópicos.

Electromagnetismo y óptica

Estudia y describe los fenómenos eléctricos y magnéticos, demostrando que son fenómenos de una misma naturaleza así como también estudia el comportamiento de las ondas electromagnéticas, usadas actualmente en un sinnúmero de aplicaciones como las telecomunicaciones, mientras que la óptica estudia la propagación, el comportamiento y los fenómenos que experimenta la luz.

El médico escocés Joseph Black (1728 - 1799) con sus estudios de los cambios de fases y sus aportes como capacidad calorífica de un cuerpo, hicieron de la física molecular una rama importante de la física

El francés Sadi Carnot (1796 - 1832) con su libro Reflexiones sobre la fuerza motriz (trabajo) brinda un aporte muy importante a la termodinámica.

El físico austriaco Ludwig Boltzmann (1844–1906), físico molecular y la termodinámica y a través de su famosa constante pudo relacionar lo que pasa en el micro y macro mundo

(1831 - 1879) fue un físico teórico escocés, su contribución al desarrollo del electromagnetismo es comparable al trabajo de Newton en la Mecánica

Campos de estudio de la Física actual

A toda la teoría física establecida y contrastada con la práctica, hasta antes de 1900 es denominada hoy en día Física clásica. A finales del siglo XIX, la Física procuraba reducir las causas de todos los fenómenos a las leyes de la mecánica de Newton; esta Física obtuvo una mayor aceptación y confianza con la integración de la mecánica newtoniana y la termodinámica en la mecánica estadística, y de la electricidad y la óptica a través de las ondas electromagnéticas. Parecía que solo quedaban por resolver unos pocos problemas, como la sorprendente constancia de la velocidad de la luz, la explicación de los espectros de emisión y absorción de las radiaciones térmicas en los sólidos y gases. Sin embargo, estos fenómenos contenían las semillas de una gran revolución científica, cuyo estallido se vio acelerado por una serie de asombrosos descubrimientos realizados en la última década del siglo XIX: en 1895, Wilhelm Conrad Roentgen descubrió los rayos X; ese mismo año, Joseph John Thomson descubrió el electrón; en 1896, Antoine Henri Becquerel descubrió la radiactividad; entre 1887 y 1899, Heinrich Hertz, Wilhelm Hallwachs y Phillip Lenard descubrieron diversos fenómenos relacionados con el efecto fotoeléctrico. Los datos experimentales de la Física, unidos a los inquietantes resultados del experimento de Michelson-Morley sobre la velocidad de la luz, y el descubrimiento de los rayos catódicos, (chorros de electrones) desafiaban a todas las teorías disponibles, ya que no podían ser explicadas dentro del marco de la Física clásica.

Dos importantes avances producidos durante el primer tercio del siglo XX –la teoría cuántica y la teoría de la relatividad – explicaron estos hallazgos, llevaron a nuevos descubrimientos y cambiaron el modo de comprender la Física, así como también de la realidad; obligaron a replantear muchas de las concepciones dando lugar al surgimiento de nuevas ramas, agrupadas usualmente bajo el nombre genérico de **Física moderna**. Estas ramas son:

Mecánica Cuántica

Estudia el comportamiento de sistemas extremadamente pequeños (moléculas, átomos, núcleos, etc.) y establece las propiedades que caracterizan el comportamiento del micromundo.

Erwin Schrödinger (1887 - 1961) físico teórico austriaco, desarrolló la mecánica cuántica dándole un tratamiento ondulatorio.

El alemán Werner Heinsenberg (1901 - 1976) elaboró su mecánica cuántica en base a matrices y determinantes.

Física Atómica

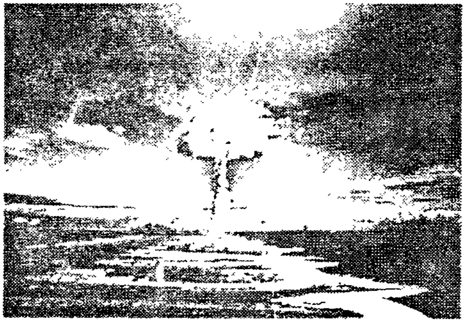
Estudia la estructura y las propiedades del átomo, las características de los electrones y otras partículas elementales de que se compone el átomo. Asimismo establece la disposición de los estados de energía del átomo, y los procesos de transición electrónica implicados en la radiación de la luz y de los rayos X.

Física Nuclear

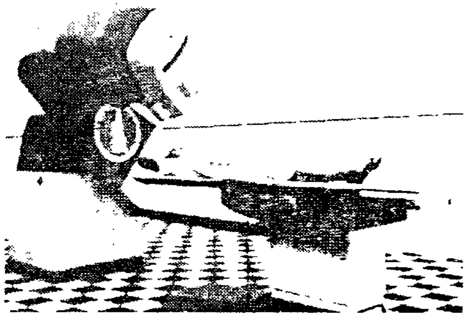
Analiza las propiedades y estructura del núcleo atómico. Nos permite comprender los fenómenos de fisión y fusión nuclear, así como también la radiactividad natural y artificial. Asimismo el desarrollo de la Física nuclear hace que hoy en día tenga múltiples aplicaciones, más allá del uso bélico, como por ejemplo en medicina, ingeniería, agricultura, etc.

Física de Partículas

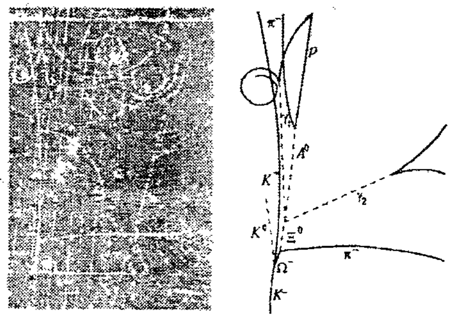
Se dedica a la investigación de las propiedades, comportamiento y estructura de las partículas a nivel sub atómico, especialmente mediante el estudio de las colisiones o desintegraciones acompañadas de una liberación de una gran cantidad de energía. Para ello se hace uso de los llamados aceleradores de partículas, cámaras de niebla, que no solo han permitido conocer más de las partículas ya conocidas sino también mediante él se han descubierto nuevas partículas.



La construcción y detonación de la bomba atómica es una muestra de que el desarrollo de la ciencia es el resultado de la necesidad de quienes usufructúan sus logros y beneficios



El decaimiento radiactivo del núcleo del cobalto 60 se utiliza para tratamientos del cáncer en la medicina, un aporte de la física nuclear.

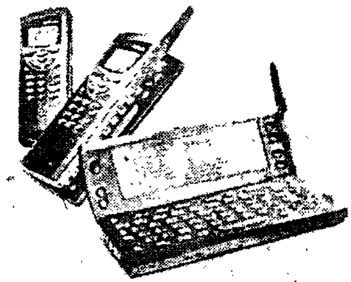


La foto refleja los trazos de partículas elementales despues de choques entre ellas en una camara de burbujas de hidrógeno líquido. La figura de la derecha expresa la representación del fenómeno.

Física del estado sólido

Estudia las propiedades físicas de los materiales sólidos; trata usualmente de las propiedades de los materiales cristalinos, pero algunas veces se extiende para que incluya las propiedades de los polímeros. La física del estado sólido ha permitido la mejora de las propiedades de los materiales ya conocidos y el descubrimiento de nuevos materiales que han sido la base para el vertiginoso desarrollo de la tecnología actual.

Esto permitió el descubrimiento de los denominados materiales semiconductores como son: el silicio, germanio, etc. que dieron el impulso en la construcción de transistores, diodos, chips, microchips, etc. los cuales son usados en las computadoras, los celulares, etc.



El estudio que se ha llevado a cabo con los semiconductores ha permitido un avance tecnológico sin comparación, ello lo vemos en la fabricación de nuevos dispositivos portátiles como un teléfono, un computador, etc.

Criogenia

Estudia el comportamiento de la materia a temperaturas extremadamente bajas, e incluso actualmente se investiga la posibilidad de conservar seres vivos mediante esta técnica para luego revivirlos en un futuro, al cual no podrían llegar de forma natural (aunque esto presenta ciertas limitaciones).

Física del Plasma

Estudia el comportamiento de los gases altamente ionizados (con carga eléctrica), tener en cuenta que como plasma, es como más abunda la sustancia en el universo (sol, estrellas, etc.)

En el Sol se producen explosiones termonucleares que le permiten alcanzar temperaturas muy elevadas (por encima de 6000 °C). En estas condiciones la materia existe en forma de plasma

Los campos de actividad de la física actual, se puede ampliar aun más, por ejemplo podemos mencionar a la astrofísica, la relatividad, la óptica no lineal, etc. Como vemos los campos de estudio son diversos y dentro de ellos mismos el contenido es cada vez mas amplio. Esto es consecuencia de nuestro acelerado desarrollo y cambiante conocimiento sobre la naturaleza.

Tradicionalmente, la Física suele presentarse según las ramas de la Física clásica y moderna. Además para un mejor entendimiento y explicación esa misma subdivisión se establece en la mayoría de los textos de enseñanza. No se trata de ramas independientes, porque todas ellas están relacionadas entre sí, y unas se toman prestados de las otras conocimientos, herramientas y hasta objetos de estudio. Así con las aplicaciones de todas sus ramas, la Física nos permite adquirir una comprensión detallada y a la vez unitaria de la naturaleza, logrando adquirir como ciencia una estructura lógica y congruente.

Hay grupos de fenómenos completos que no pertenecen totalmente a ninguna de las ramas tradicionales, aunque se sirven de ellas, por ejemplo, el comportamiento de los fluidos da lugar a un número suficiente de fenómenos para poder erigirse en rama independiente de la Física; sin embargo, por su dependencia directa de la mecánica, se incorpora como subdivisión de ésta, aun cuando un estudio profundo de los líquidos y de los gases requiere la utilización de la Física molecular, la Termodinámica y de la acústica.

Los físicos han encontrado un enorme número de fenómenos que se pueden sintetizar en leyes que rigen el comportamiento de la naturaleza. Con el desarrollo de las diversas ramas, la Física ha adquirido una estructura que facilita el estudio sistemático. No debe creerse, sin embargo, que esta estructura se mantiene inalterada: a la luz de los nuevos hechos experimentales y de los avances teóricos surgen nuevas ramas, se funden unas con otras y cambian la relación entre ellas.

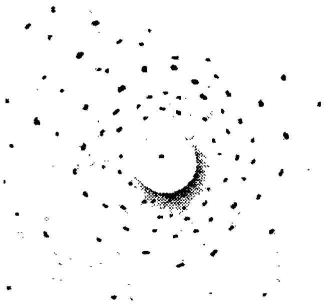
Actualmente la Física no se dedica a estudiar solamente los fenómenos físicos clásicamente definidos, sino como acabamos de ver en las diferentes ramas en que se divide, también estudia las propiedades y leyes fundamentales del movimiento de las partículas elementales, de los átomos y las moléculas en la materia inanimada, o las manifestaciones de las mencionadas leyes en los organismos vivos.

IMPORTANCIA DE LA FÍSICA Y SU RELACIÓN CON OTRAS CIENCIAS

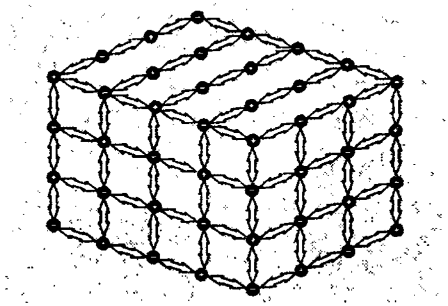
Los conocimientos adquiridos en el campo de la Física son tan amplios que los físicos llegan a entrar en contacto con temas tan disímiles como: los organismos vivos o partes de ellos y con la estructura del universo. En este siglo ya se avizora una ciencia Física en contacto con problemas provenientes de la Química, la Biología, la Astronomía, las ciencias de la salud, etc; por ello, la importancia de la Física se comprende con respecto a su relación con otras ciencias y su aporte a la actividad práctica del hombre. Su desarrollo continuo le proporciona su base conceptual y su estructura teórica y experimental; la Física está estrechamente relacionada con las demás ciencias naturales, y en cierto modo las engloba a todas. Veamos:

CON LA QUÍMICA

La Química se ocupa dentro de muchos temas, de la interacción de los átomos para formar moléculas; está muy relacionada con la Física y ambas se han desarrollado y correspondido mutuamente: por ejemplo, son de interés común para estas dos ciencias la estructura atómica y molecular; la termodinámica y las propiedades de los gases, líquidos y sólidos. Actualmente la fisicoquímica abarca todas estas relaciones estudiando las propiedades químicas de los átomos y moléculas en función de su estructura; estudia el enlace químico, la estructura de los cristales, de los metales, etc.



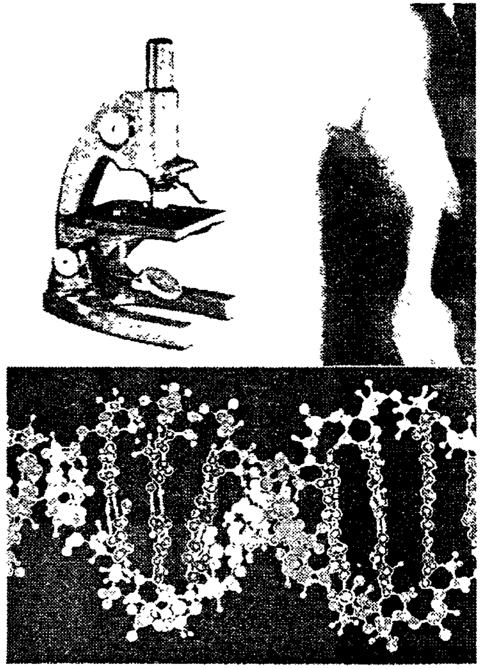
La fotografía muestra el patrón de difracción de rayos X en el cloruro de sodio (sal).



La difracción de rayos X ha permitido un gran avance en cristalografía. Esta rama afín a la Física y la Química permitió establecer las propiedades de diferentes estructuras cristalinas.

CON LA BIOLOGÍA Y LA MEDICINA

La Biología molecular, que comprende la biofísica y la bioquímica, ha constituido un gran aporte a la biología moderna. La biofísica estudia los fenómenos físicos que tienen lugar en los seres vivos. Los sistemas vivos están constituidos por partículas fundamentales que siguen el mismo tipo de leyes que las partículas más sencillas estudiadas tradicionalmente por los físicos. Por ello, cada vez más, el estudiar la estructura de las moléculas en los seres vivos requiere de las técnicas de análisis físico como la difracción con rayos X; donde a partir de los datos obtenidos se formulo el modelo del ADN que es el material que contiene la herencia genética. El estudio de las enzimas, los ácidos nucleicos y en general el estudio físico de las macromoléculas se realizan mejor con las leyes y las técnicas de la Física actual. A nivel celular, con la ayuda de la Física se estudia las membranas, los mecanismos de obtención de energía, los intercambios energéticos, los mecanismos de autorregulación, etc. y a nivel de los organismos pluricelulares, estudia la transformación de la energía a través de la actividad muscular y la transmisión de información en forma de impulsos en las células nerviosas mediante una acertada combinación de la electroquímica, la electrónica moderna y los modelos matemáticos.



El microscopio óptico hizo que la Biología se desarrollase de manera impetuosa. Una importante aplicación de los rayos X a la medicina es en las radiografías que permiten diagnosticar problemas en los órganos internos, como fracturas óseas. La difracción de rayos X le permitió a los médicos desentrañar la molécula del ADN (la doble hélice).

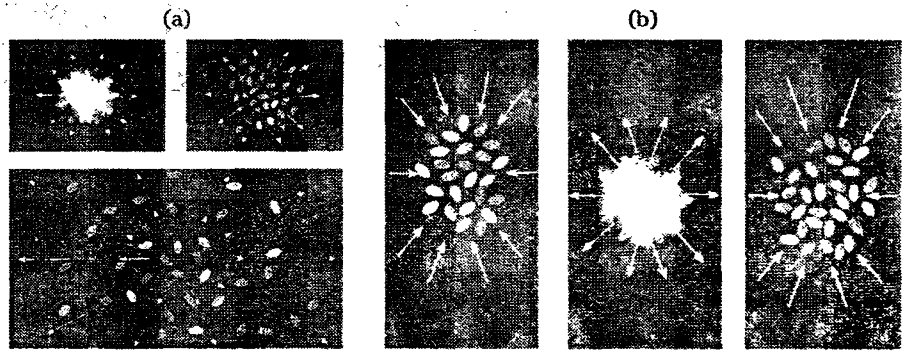
Por otro lado, también se aplica la Física nuclear en los sistemas biológicos, incluyendo la investigación de los efectos de la radiación sobre la materia viva. Entre los diversos instrumentos utilizados en las investigaciones biológicas cabe citar el uso del microscopio óptico y también electrónico, centrifugadora y ultracentnfugadora, la radiografía con rayos X y los isótopos radiactivos.

CON LA GEOLOGÍA

Gran parte de la Geología moderna es en esencia un estudio de la Física de la Tierra y se conoce como **Geofísica**; en ella se aplican los principios físicos al estudio de la Tierra. Los geofísicos examinan los fenómenos naturales y sus relaciones con el interior terrestre; entre ellos se encuentran el campo magnético terrestre, los flujos de calor, la vulcanología, la propagación de ondas sísmicas y la fuerza de la gravedad. El campo de la Geofísica, tomada en un sentido amplio, estudia también los fenómenos extraterrestres que influyen sobre la Tierra, como las manifestaciones de la radiación cósmica y del viento solar.

CON LA ASTRONOMÍA

La Astronomía es la ciencia que trata de las estrellas y del espacio exterior. Debido a los adelantos de la Física moderna, la **Astrofísica** es actualmente la parte más importante de la Astronomía, ya que busca la comprensión del nacimiento, evolución y destino final de los objetos y sistemas cósmicos, basándose en las leyes Físicas que los rigen. En cada objeto o sistema cósmico estudiado, los astrofísicos miden las radiaciones electromagnéticas emitidas y las variaciones de éstas a través del tiempo. Las medidas se utilizan para valorar la distribución y condiciones de la energía de los átomos, así como las clases de átomos que componen el objeto. La temperatura y presión del objeto se pueden evaluar utilizando las leyes de la radiación térmica.



Esquema del Big-Bang. (a) La materia se encuentra primero extremadamente concentrada y a gran temperatura Al continuar la expansión, se condensa en galaxias Las galaxias se alejan unas de las otras, lo que corresponde a la fase actual. (b) El universo oscilante. La expansión iniciada en cada big-bang llega a un límite máximo, tras el cual se produce una contracción seguida de una nueva explosión Según esta teoría el universo actual sería una nueva versión de otros anteriores.

CON LA MATEMÁTICA

El desarrollo de la Matemática y la Física están muy vinculados entre sí. Sin conocer las matemáticas hay limitaciones para profundizar el estudio de la Física, al menos porque casi todas las leyes físicas se expresan por medio de ecuaciones. Con ayuda de los medios matemáticos pueden comprenderse mejor las leyes que se descubren en los fenómenos físicos. Galileo Galilei, señaló con acierto la importancia de la matemática en el estudio de la Física:

La Filosofía está escrita en ese grandioso libro, siempre abierto ante nuestros ojos (me refiero al universo), pero que es imposible comprender si no aprendemos de antemano su lengua y no conocemos de antemano las letras con que está escrito. Su lengua es la de las matemáticas y las letras son triángulos y otras figuras geométricas, sin las cuales no se puede comprender ni siquiera una palabra en él; sin ellas solo podemos andar a ciegas por un oscuro laberinto.

La matemática es una herramienta fundamental de la Física. Otras ciencias también la utilizan en menor grado. Sin embargo la Física destaca notoriamente, pues un nuevo avance en la Física implica la aparición de nuevos problemas matemáticos, que en el mejor de los casos origina nuevas teorías matemáticas.

Por ejemplo, la descripción de algunos movimientos mecánicos iniciado por Galileo fue mejor estudiada aplicando la geometría analítica creada por René Descartes, sin embargo quedaba el problema de crear una matemática que permitiera describir de forma general cualquier tipo de movimiento mecánico, este problema fue resuelto por Isaac Newton y Leibniz al sistematizar cada uno por su parte lo mejor de su entorno y época en el **cálculo diferencial e integral**. Así, hoy en día apreciamos que las matemáticas más abstractas encuentran aplicación en la Física como lo muestran las teorías modernas de la relatividad y la mecánica cuántica.

CON LA FILOSOFÍA

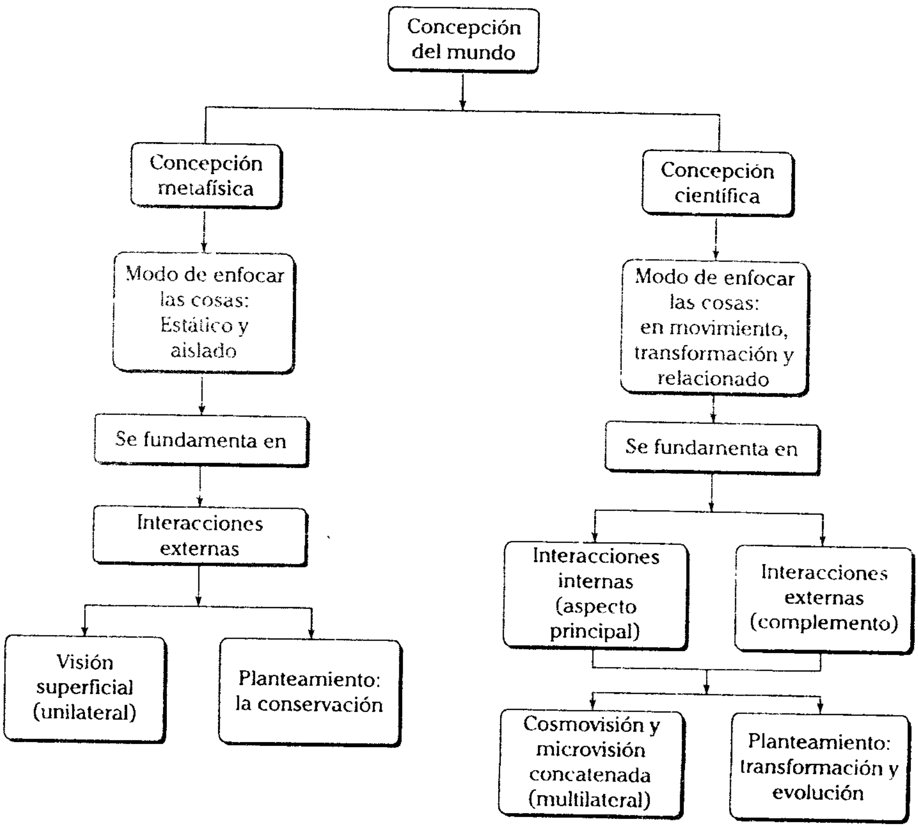
La admiración de los hombres ante lo nuevo y lo desconocido los lleva a buscar una explicación y plantearse interrogantes ¿qué es esto?, ¿por qué sucede así?, ¿por qué tiene esa característica?, ¿por qué no es de otra manera? Toda persona quiere indagar o conocer superficial o profundamente todo lo que nos rodea: sociedad, naturaleza y pensamiento. Partiendo de esta realidad afirmamos que toda persona sin excepción asume una actitud filosófica, hace filosofía tratando de explicar aquello que le es extraño, planteándose así una serie de interrogantes que lo motivan a descubrir y avanzar.

Respecto al vínculo entre la Física y la Filosofía es necesario recordar que estaba comprendida dentro de lo que se llamó Filosofía de la Naturaleza. Los primeros filósofos fueron hombres de ciencia polifacéticos que analizaban la esencia de los fenómenos, pero es lógico que de acuerdo a su época superando las limitaciones, descubren nuevos acontecimientos y leyes que modifican de modo radical los conocimientos anteriores concernientes a los fenómenos de la naturaleza y de la vida social, vemos cómo en el siglo XX la Física, desató una dura lucha entre la filosofía idealista con su método metafísico de abordar los fenómenos y la filosofía científica que se apoya y sustenta en las ciencias.

En el siglo XX, la lucha filosófica con respecto de la esencia del espacio y del tiempo giró ante todo, en torno a la teoría de la relatividad, formulada por Einstein en 1905 (teoría especial) y en 1916 (teoría general). Es lógico que haya ocurrido así, pues esta teoría es una doctrina física moderna acerca del espacio y del tiempo, de las leyes que rigen los movimientos de los cuerpos, efectuados a velocidades próximas a la de la luz. La teoría de la relatividad dio un paso muy importante en la comprensión de las leyes de la gravitación y proporcionó una descripción nueva de la gravitación, más profunda y exacta que la de Newton. Planteó de un modo nuevo varios problemas capitales de la física moderna, sobre todo en cuanto al espacio y el tiempo, lo que tiene gran importancia en la Filosofía.

FÍSICA Y CONCEPCIÓN DEL MUNDO

Durante el proceso de desarrollo del conocimiento humano, se ha podido apreciar diversos planteamientos que han generado enfrentamientos en el ámbito ideológico. Esta lucha hoy en día ha quedado entre dos concepciones acerca de las leyes del desarrollo del Universo, ¿cuáles son? La concepción metafísica y la concepción científica. ¿En qué se fundamentan? estos fundamentos lo podemos resumir en el siguiente cuadro:



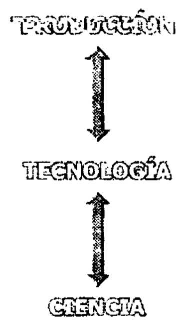
La concepcion metafísica se trasmite mediante las costumbres, la cultura, a través de los medios de comunicacion y la educación para preservar lo ya existente; pero la naturaleza es cambiante, está en desarrollo y la concepción científica nos ha permitido, permite y permitirá ver en la historia de la sociedad no solo los cambios cuantitativos, sino además cambios cualitativos, las contradicciones (en las diferentes etapas del desarrollo en sociedad); nos enseña a observar y analizar en la vida y en la sociedad, tomando en cuenta el pasado para conocer el presente y proyectar el futuro.

En la formación de la concepción científica influyeron un conjunto de grandes descubrimientos que se dieron en las ciencias naturales y en particular en la Física, por ejemplo la ley de conservación y transformación de la energía, que descubre el nexo interno que existe en la naturaleza entre las distintas clases de movimiento de la materia, mecánico, térmico, electromagnético y otros. Nos muestra las transiciones de una forma de movimiento a otra, las diferencias cualitativas entre ellas y su concatenación.

También podemos mencionar a la teoría de la relatividad, el principio de incertidumbre, etc. Por consiguiente estas leyes descubiertas por los físicos y otros hombres de ciencia nos sustenta el carácter cambiante de los fenómenos naturales y a partir de aquí el hombre mejora los métodos aprendidos de la naturaleza y los proyecta para estudiar fenómenos sociales. En buena cuenta las ciencias naturales con la concepción científica se concatenan, se fusionan y fortalecen, de modo que constituyen una herramienta para el hombre en su lucha por liberarse del oscurantismo y la metafísica.

RELACIÓN DE LA FÍSICA CON LA TECNOLOGÍA

La ciencia es el producto del desarrollo histórico de la sociedad humana, es el saber humano comprobado a través de la práctica de muchos milenios; su sistematizacion ha requerido de hombres dedicados exclusivamente a la investigación, formulando y reformulando respuestas a la realidad para transformarla. La ciencia es universal es válida para todos los hombres, sea cual sea su condición. El problema radica en su utilización, sea con fines privados e intereses personales, al servicio de pequeños grupos, o como función social al servicio de toda la humanidad. La Física forma parte de ese desarrollo y no debemos desligarla de esa realidad.



La investigación científica revierte sus descubrimientos hacia la tecnología y ésta se orienta a mejorar la producción.

Los conocimientos acerca de la naturaleza tienen un significado práctico importantísimo; ellas permiten conocer con anticipación el transcurso de uno u otros fenómenos, proceso sin los que actualmente se hace imposible toda producción. Por ejemplo, antes que la máquina sea construida, el ingeniero sabe (en teoría) cómo va a funcionar, ya que al elaborar su proyecto hizo uso de los datos que ofrecen las ciencias y ante todo la Física. La tecnología justamente abarca estos conocimientos cuya aplicación práctica permite transformar la naturaleza para la satisfacción de las necesidades humanas por medio de ciertos procedimientos específicos: las técnicas.

La tecnologia es básicamente un conocimiento sobre cómo producir bienes o servicios útiles para la sociedad.

En la historia de la humanidad el avance incesante de la ciencia y tecnología no está aislado de la vida social. Los descubrimientos tecnocientíficos ejercen un efecto directo en los procesos sociales a través de la modificación de la conciencia social, de las diversas formas de entender a la naturaleza y a la sociedad.

Históricamente la tecnología fue anterior a la ciencia, ya que ella no requería necesariamente de un conocimiento sistemático de las leyes causales de los fenómenos naturales o de los atributos últimos de los materiales. Inventar un proceso de transformación o de producción es hasta cierto punto posible sobre las bases enteramente empíricas, sin necesidad de apelar al método científico. Pero el desarrollo de la tecnología permitió mejorar la capacidad de los instrumentos de medición y observación de los científicos.

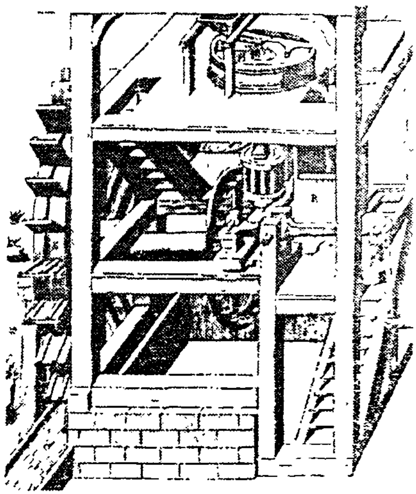
Ello permitió al mismo tiempo, que la ciencia fuera descubriendo nuevas leyes generales y propiedades específicas de los materiales que abrieron nuevos espacios de desarrollo a la inventiva técnica y a la aparición de tecnologías más eficientes.

Nuestros antepasados, los incas, desarrollaron cierta técnica para la construcción, lo refleja la gran ciudadela inca Macchupicchu.

En la época romana, la contribución científico-técnica fue poco significativa. La invasión de los bárbaros significó un estancamiento en el desarrollo de los conocimientos en occidente. El legado cultural de la antigüedad griega se desplazó hacia Oriente, donde perduró el trabajo de conservación.

En la Edad Media, la sociedad esclavista fue suplantada por la sociedad feudal, basada en la posesión de la tierra y del trabajo de los campesinos y artesanos, sometidos por el señor feudal. Los campesinos y artesanos al tener que producir para ellos y para el señor feudal, estaban interesados en el perfeccionamiento de los instrumentos y métodos de trabajo en la agricultura y la artesanía. Así la Edad Media fue una época de innovaciones técnicas, se inventaron los molinos de agua y de viento, en la producción textil: el torno de hilar, el telar de cintas y la máquina torcedora. La agricultura y la ganadería se realizaban con más esmero, aumento el cultivo de nuevas variedades de plantas, y la ganadería comenzó a ser intensiva.

Sin embargo, este avance técnico no estaba emparejado con el desarrollo de nuevos conocimientos acerca de la naturaleza, debido a la gran oposición de ideas por parte de la religión y la Iglesia. Se creía que todo estaba dicho y descubierto y se encontraba en las sagradas escrituras (la Biblia). Las personas eran perseguidas por la Inquisición si manifestaban argumentos diferentes a los impuestos por la Iglesia. Se dio cierto desarrollo en la técnica, mas no en la ciencia.



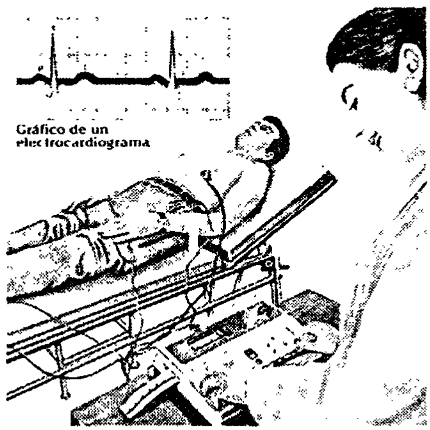
Los molinos de agua que se usaban para la obtención del papel, nos muestra cierto grado de tecnología aplicada por el hombre en el medioevo

Mientras tanto, los descrito transcurría en Europa, los árabes guardaron y desarrollaron el caudal científico-filosófico griego de Oriente, que tras los conflictos internos del imperio bizantino pudo haber quedado definitivamente separada del occidente europeo. A partir del siglo XI, lo reintrodujeron en Occidente; a la vez que hacían importantes aportes en el campo de la Matemática y de la Alquimia. El mundo musulmán no se limitó a transmitir conocimientos aprendidos en otras culturas, ya que los propios musulmanes investigaron y aportaron novedades originales en casi todas las ciencias.

Es así, que a partir del siglo XVI, con los descubrimientos geográficos, el crecimiento demográfico y las innovaciones técnicas, se inició una revolución científica que abarcó tres siglos (XVI-XVIII) dentro del marco del progreso de la burguesía y el paso a la sociedad capitalista. Esta revolución dio origen a una nueva concepción del mundo heliocéntrica y dinámica frente a la antigua inmovilista y geocéntrica, gracias sobre todo a Copérnico, Galileo, Brahe y Newton, y a una nueva metodología científica basada en la observación, experimentación, inducción y matematización. En esta época se desarrolla la Anatomía, la Fisiología, la Biología, la Física, la Astronomía, etc., lo cual coincide con un periodo de diversificación y especialización de las ciencias.

En los siglos XVIII-XIX, la revolución industrial (maquinismo, uso del vapor, etc.); impulsó y transformó la ciencia, vinculándola cada vez más a la producción y a los intereses de la sociedad. Este fenómeno produjo un espectacular desarrollo de la Química, la Física, la Biología y la Matemática. En el siglo XIX, también se desarrollan las ciencias sociales, y las ciencias del hombre en general: Antropología, Psicología, Economía, Historia.

El desarrollo de las ciencias ha continuado en el siglo XX (radioactividad, teoría cuántica, relatividad, teoría atómica, cibernética, etc.) con su entrada a gran escala en la industria y con la creación de centros de investigación, todo ello potenciado por las dos guerras mundiales y sus consecuencias.



El desarrollo de la electrónica, como campo de la Física, se ve reflejado en la Medicina con equipos muy sofisticados.

En cuanto a la Física, la aplicación de sus principios a los problemas prácticos ha dado lugar a las diferentes ramas de la Ingeniería: electrónica, mecánica, civil, nuclear, etc. Una vez que se descubren y comprenden los aspectos fundamentales de un nuevo campo, este pasa a ser de interés para los ingenieros y otros científicos. Por ejemplo:

- Los descubrimientos del siglo XIX en electricidad y magnetismo forman hoy parte del terreno de los ingenieros electrónicos y de comunicaciones.
- Las propiedades de la materia descubiertas a comienzos del siglo XX han encontrado aplicación en superconductividad y superfluidez.
- Los descubrimientos de la Física nuclear, muchos de ellos posteriores a 1950, son la base de los trabajos de los ingenieros nucleares y de la medicina nuclear.
- La Física proporciona también técnicas que se utilizan en cualquier área de investigación pura o aplicada: astronomía, geología, oceanografía, meteorología, sismología, medicina.

A la inversa, existen desarrollos tecnológicos con repercusiones en la Física, como es el caso del mejoramiento de las bombas de vacío a partir de 1855, lo cual dio lugar a los tubos de vacío para albergar dispositivos en los cuales se produjeron los primeros rayos X y rayos catódicos. Del estudio de estos últimos surgió el descubrimiento de electrón.

El desarrollo tecnológico actual está ligado principalmente a la producción, permite la reducción de costos de producción y eleva la productividad. Se difunde que las empresas deben aprovechar los recursos que ofrece Internet, la tecnología de redes y la automatización de la producción utilizando robots, sin embargo, en este sistema, esto solo beneficia a un determinado grupo de la sociedad. La tecnología también debe ser orientada de acuerdo al medio en que se desenvuelve la sociedad. En nuestro país, la multiplicidad de espacios geográficos, ecológicos y deformaciones geológicas, la excepcional variabilidad genética animal, vegetal y microbiológica, la multitud de zonas climáticas, constituyen entornos muy singulares para las diversas comunidades humanas que pueblan nuestro territorio y nos hacen ver la necesidad de un desarrollo científico y tecnológico acorde con nuestro medio.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

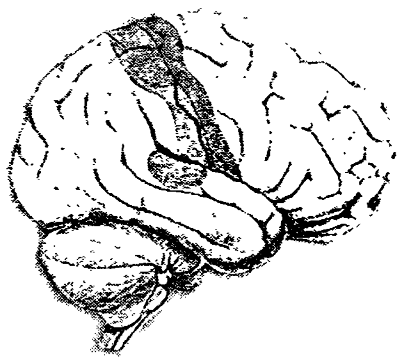
Antes de iniciar propiamente el estudio de la Física, es necesario precisar algunos conceptos fundamentales que nos ayudarán a diferenciar la Física de otras ciencias, el lugar que ocupa dentro de las ciencias en general, su marco de estudio actual.

LA MATERIA

Son de materia la enorme diversidad de cuerpos que nos rodea. Desde las partículas de polvo hasta las grandes montañas, los planetas y las estrellas. También los cuerpos vivos desde los más simples hasta los más complejos. A unos los percibimos a simple vista; para percibir otros usamos aparatos e instalaciones complicadísimas.

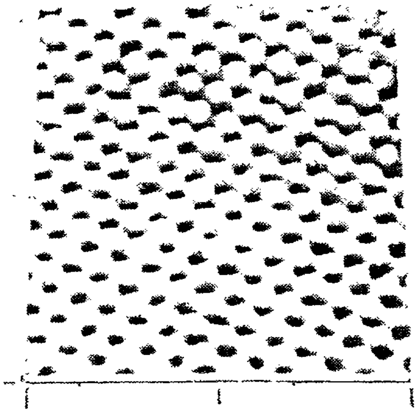
La ciencia ha demostrado que la Tierra existió muchos millones de años antes de que los primeros seres vivos existieran en ella, y pasaron cientos de miles de años para que, desde los primeros seres vivos, a través de una larga evolución apareciera el hombre y con él la conciencia. Así la conciencia se adquiere, se desarrolla producto del largo proceso interactivo y evolutivo de la materia. Esto significa que la materia siempre ha existido y seguirá existiendo aun si el hombre nunca hubiese existido o dejase de existir.

Por lo tanto, todo lo que existe independientemente de nuestra conciencia se llama materia.

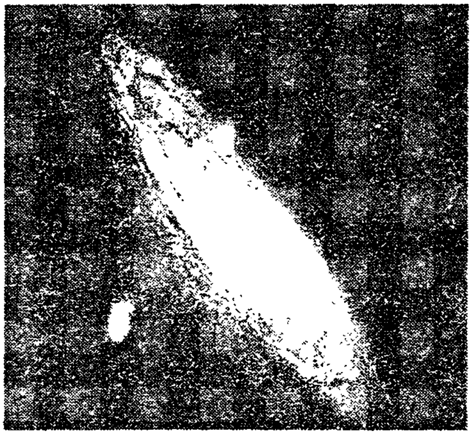


El cerebro humano.
Es potencialmente la materia mejor organizada para reflejar la realidad. Producto de una larga evolución, llega a ser el soporte biológico de la conciencia. Su desarrollo y la complejidad que alcanza, depende directamente de la rica y variada información social que activamente el individuo incorpora desde el grupo humano al que pertenece.

La materia existe al margen de la conciencia[1] del hombre, por ello, es realidad objetiva. Prueba de ello: la naturaleza existió primero que el hombre; es decir la sociedad humana es una parte de la naturaleza y por consiguiente el origen del hombre ha de hallarse, pues, en el desarrollo del mundo: el hombre se desarrolló a partir de formas previas de vida, y en el curso de su evolución fueron apareciendo el pensamiento y la acción consciente. Esto significa que la materia, es decir la realidad desprovista de consciencia, existía antes que el espíritu, que es la parte consciente de la realidad.



El micromundo es mostrado a través de esta fotografía hecha con un microscopio electrónico sobre una muestra metalica. Las esferas representan los átomos dispuestos regularmente.



El macromundo, fotografía hecha con ayuda de un telescopio nos muestra la galaxia más cercana a nosotros la galaxia de Andromeda

La materia existe en movimiento continuo y esto se debe a sus interacciones y/o contradicciones (internas y externas). Aquí tenemos pruebas diversas en la naturaleza, el desarrollo de las plantas se debe a su interacción con la tierra, la luz, el agua, el aire, etc. el movimiento mecánico de un balón debido a la interacción con las manos del hombre que lo lanza, el movimiento eléctrico (corriente eléctrica) debido a la acción de un campo eléctrico.

La materia existe sin fronteras; se le pueda o no percibir; no se le crea ni se le destruye, solo se transforma: la ley física de la conservación y transformación de la energía prueba esta afirmación; ¿cómo? en el análisis de los diversos fenómenos físicos, químicos, biológicos se confirma que la materia cambia continuamente y que ni una sola partícula componente puede convertirse en nada, cualquiera que sea el proceso al cual se le someta.

La definición de materia que hemos dado abarca toda la diversidad de formas del mundo material, en él existen la naturaleza inorgánica y la orgánica, los fenómenos químicos, físicos, los fenómenos de la vida en el mundo de las plantas y de los animales, la vida social. La diversidad infinita de procesos y fenómenos que tienen lugar en el mundo son estados y/o fases distintas de la materia, diversas propiedades y manifestaciones de la misma.

(1) Definimos la conciencia como el sistema, de origen social y de expresión individual, que organiza e integra los procesos psicológicos (cognitivo afectivo y motivacional) y sus productos (perceptos, recuerdos, conceptos, sentimientos, motivos, valores, moral, etc), los cuales constituyen el nivel de funcionamiento superior de nuestra personalidad Veáse el libro de *Psicología, una perspectiva científica* Lumbreras, editores. 2001, pag 135

La unidad real del mundo consiste en su materialidad. Esa unidad consiste también en que la conciencia pertenece al mismo mundo material que nos rodea; y no a ningún otro mundo del más allá, representando una propiedad de la materia organizada de modo muy especial.

Finalmente, afirmaremos que la materia es única en cuanto a su esencia, ya que es universal y absoluta; y constituye la fuente de todos los fenómenos y nuestros conocimientos. Pero al mismo tiempo, la materia es heterogénea, cualitativamente inagotabe e infinita. La investigación de esta unidad de contrarios constituye el problema filosófico esencial de la física y de otras ciencias. La materia hemos de considerarla en unidad con todas sus propiedades y formas de manifestación.

Formas de manifestación de la materia

La materia presenta de manera inherente el movimiento y su existencia es en el espacio y en el tiempo. Por otro lado la forma en que se manifiesta sobre nosotros es a través de la sustancia y el campo.

¿Qué es la sustancia?

Es el conjunto o agregado de diversas partículas (moléculas, átomos, electrones, protones, neutrones, etc.). En la naturaleza se encuentran diferentes tipos de átomos, moléculas y sus combinaciones proporcionan diversas sustancias.

Ejemplos

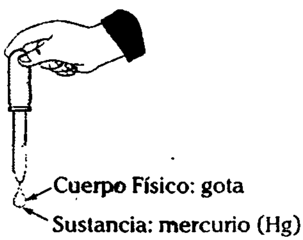
- El agua es una sustancia constituida por un conjunto de moléculas, las cuales a su vez están conformadas por la unión de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno (H_2O).

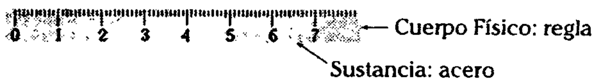
  La sal es otra sustancia constituida por un conjunto de moléculas conformada por un átomo de sodio y otro de cloro ($NaCl$).

Por otro lado, en la práctica trabajamos con cuerpos, **¿qué es un cuerpo físico?**

Es aquello que tiene volumen y forma. Contiene cierta(s) sustancia(s). Ejemplos: gota, regla, vaso, cuchara, lápiz, botella, silla, etc.

Ejemplo 1



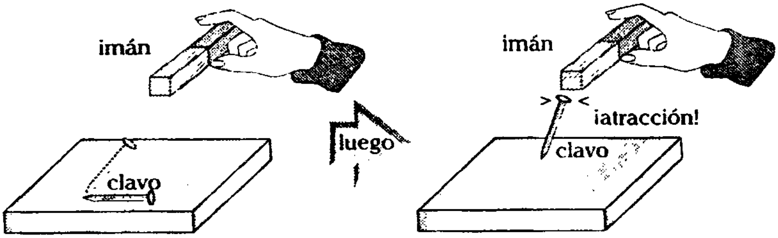


¿Qué es el campo?

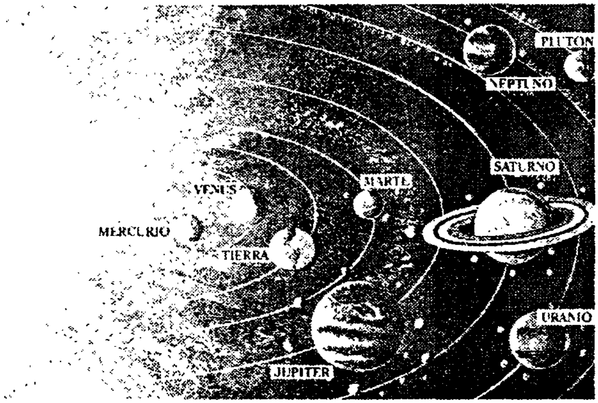
Es materia y se diferencia de la sustancia, ya que nosotros mediante nuestros sentidos no lo podemos percibir directamente. En el espacio el campo se encuentra dispersado de manera continua, el campo permite la interacción entre los cuerpos. Por ejemplo el campo eléctrico permite establecer la interacción entre los cuerpos electrizados, también el campo gravitatorio nos ayuda a describir la caída de los cuerpos que se diferencia de la sustancia, ocupando la región comprendida entre las partículas de una sustancia y establece las interacciones entre dichas partículas y el entorno al cuerpo físico. Efectivamente, los campos, inclusive ligan en algunos casos a diferentes cuerpos físicos.

Ejemplo 2

Si en la superficie de una mesa hay un clavo de acero y a cierta distancia ubicamos un imán, ¿qué ocurre?



La atracción ocurre habiendo separación sin que el clavo sea tocado por el imán, ¿cómo explicamos esto?; aparentemente no vemos nada en contacto entre el clavo y el imán, sin embargo es necesario que exista un agente transmisor, eso es el campo, que en este caso se llama campo magnético. Otro ejemplo es la luz que percibimos del Sol, esta viaja una gran distancia hasta llegar a la Tierra y en la mayor parte de su recorrido, entre el Sol y la Tierra, no hay sustancia, entonces, ¿por qué medio se propaga la luz?, la respuesta es: a través del campo electromagnético.



El campo gravitatorio asociado al Sol, le permite a éste mantener orbitando a los nueve planetas y demás cuerpos en torno de él.

Así como el campo liga los cuerpos que podemos observar a nuestro alrededor, también liga las partículas que componen a una sustancia o a un cuerpo, entonces **cualquier cuerpo está formado por sustancia y campo, lo cual refleja la unidad material del mundo**[2]. Así los protones y neutrones que forman parte del núcleo atómico están ligados por los campos mesónicos. El núcleo atómico y los electrones del mismo átomo están ligados por el campo electromagnético. Este campo también liga los átomos y moléculas de un cuerpo e inclusive liga diferentes cuerpos como el caso del imán y el clavo. En el universo, los planetas y las estrellas están ligados por el campo gravitatorio.

La ciencia descubre cada vez nuevas partículas que describen la base estructural de la materia. Esto significa que nuestras nociones sobre la estructura de la materia cambian sin cesar, y nuestro concepto de materia se amplia. Con ello estamos ante una ley dialéctica donde los nuevos descubrimientos superan los viejos conocimientos que teníamos acerca de la materia. Con lo anterior debemos marcar diferencias entre el concepto de materia, y las formas de manifestación de la materia que hasta ahora conocemos.

Y por mucho que cambien nuestros conocimientos del mundo, lo que realmente cambia es el límite hasta donde conocíamos a la materia.

MOVIMIENTO

Cuando hablamos de movimiento generalmente lo relacionamos con el cambio de lugar o de posición de un objeto. Si vemos un cuerpo en el mismo lugar, decimos que no se mueve, sin embargo, en su interior sus moléculas, átomos, electrones, etc. están dotados de movimiento.

También externamente, una casa, que vemos inmóvil, realmente no lo está, ya que está rotando y girando conjuntamente con la Tierra, alrededor del Sol, y junto con el Sol, alrededor del centro de la vía láctea. Usted cuando lee estas líneas, esta sentado, inmóvil, pero dentro de usted su sangre fluye, el aire que respira también; además ocurre una serie de procesos complejos: el jugo gástrico disuelve los alimentos que ha digerido, las células de su piel se regeneran constantemente. Todos estos cambios son considerados como movimiento.

En virtud al movimiento, los objetos que están a nuestro alrededor se dan a conocer, ya que excitan nuestros sentidos. El Sol, por ejemplo, irradia incesantemente al espacio cósmico inconmensurable cantidad de partículas en movimiento. Al llegar a la Tierra, esas partículas excitan nuestros órganos sensoriales y nos advierten de la existencia del Sol. Si no fuera por el movimiento de las partículas no sospecharíamos que el Sol existe, pues se encuentra a unos ciento cincuenta millones de kilometros de la Tierra. Del mismo modo existen todos los demás cuerpos; no se manifiestan mas que en el movimiento.

No solo se mueven las partículas elementales en los átomos, sino también los atomos en las moléculas y las moléculas en los cuerpos. Se mueven los incontables cuerpos terrestres y cosmicos sufren cambios los organismos vivos y la vida social.

(2) Inclusive en el nivel subatómico las particulas elementales presentan sustancia y campo y los limites que separan a estas forma de existencia de materia es relativo

Por lo tanto, estas expresiones objetivas de cambio, transformación continua, evolución, interacciones entre cuerpos y partículas (no existe partícula, ni cuerpo aislado); son modos incesantes de cómo universalmente la materia se manifiesta en la naturaleza, sociedad y el pensamiento.

Entonces, ¿qué es el movimiento? es el modo principal de existencia de la materia, la materia existe en movimiento. Sus formas de existencia es en el espacio y en el tiempo. A la materia le es inherente el movimiento, le es inseparable este atributo, se ve reflejado en todo proceso de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. El movimiento trae como consecuencia interacciones internas y externas o como se suele denominar contradicciones. Las contradicciones existen en unidad. Como ejemplos de ello tenemos:

En nuestro cerebro hay partes que reposan, pero que a su vez segregan hormonas, neurotransmisores, sangre, etc. Esta contradicción de reposo aparente y segregación o movimiento relativo forma parte de la unidad que es el cerebro; externamente también se manifiesta esta unidad como conocimiento e ignorancia, valor y temor, audacia y cautela, esta coexistencia determina el movimiento; también en una operación matemática hay suma y resta, multiplicación y división, derivación e integración, esta unidad de contrarios forma parte de la unidad que es la Operación Matemática.

El desarrollo actual de la ciencia ha revelado que el movimiento tiene diferentes formas, cada forma de movimiento tiene características cualitativamente diferentes, por ello podemos plantear:

Movimiento mecánico

Viene a ser el cambio de lugar de un cuerpo respecto de otro, es el más simple de todos. No se debe ligar el movimiento mecánico solo con el movimiento de cuerpos visibles. Este movimiento es inherente a cualquier tipo de materia y a cualquier otra forma de movimiento. Desde las partículas elementales hasta los organismos vivos.

Movimiento térmico

En la parte interna del cuerpo las moléculas, átomos y electrones cambian de posición uno respecto de otro **desordenadamente o caóticamente**, debido a sus múltiples interacciones, a ello se denomina movimiento térmico.

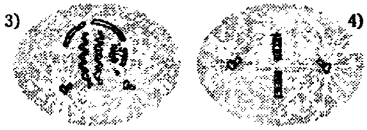
Movimiento químico

Es la unión y desunión de átomos, a causa de lo cual se forma o desintegran las moléculas que constituyen todas las combinaciones químicas. Los procesos químicos van acompañados del movimiento de los electrones, que forman la capa exterior de los átomos. Las transformaciones químicas están muy extendidas en la naturaleza orgánica como inorgánica.

Movimiento biológico

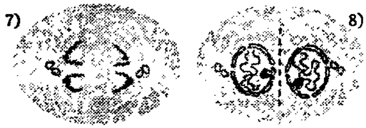
Una de las formas más complejas del movimiento de la materia. Comprende toda la variedad de procesos que transcurren en los organismos.

(1 y 2) **Profase**: los cromosomas se alargan y los dos centrosomas se alejan.



(3 y 4) Metafase: la membrana se disuelve y los cromosomas se sitúan en los polos opuestos de la célula.

(5 y 6) Anafase: los cromosomas están divididos en dos cromatidios.



(7 y 8) Telofase: cada cromatidio de cada cromosoma emigra hacia un polo y se produce la verdadera división de la célula.

La reproducción celular como forma de movimiento biológico.

Movimiento Social

La forma de movimiento de la materia más evolucionada, la vida social, la historia de la sociedad humana. Su particularidad más importante es el proceso de la producción material, que determina todos los otros aspectos de la vida social y está relacionada directamente con la conciencia, la cual determina los cambios en los propios individuos al relacionarse con la naturaleza y la sociedad.

En condiciones adecuadas una forma de movimiento se puede transformar en otra. Así en los ríos caudalosos donde se encuentran las centrales hidroeléctricas, el movimiento mecánico del agua se transforma en corriente eléctrica, es decir, en movimiento orientado de electrones. El movimiento térmico, como el calentamiento del agua debido al paso de una corriente eléctrica, produce la descomposición de las moléculas en átomos de oxígeno y nitrógeno, que es un tipo de movimiento químico. Los movimientos químicos, en determinadas condiciones, originan la vida.

FENÓMENO

Debido al movimiento continuo de la materia, en ella se manifiestan cambios de diversas formas, siendo algunos de ellos perceptibles a nuestros sentidos y otros escapan a nuestra percepción inmediata.

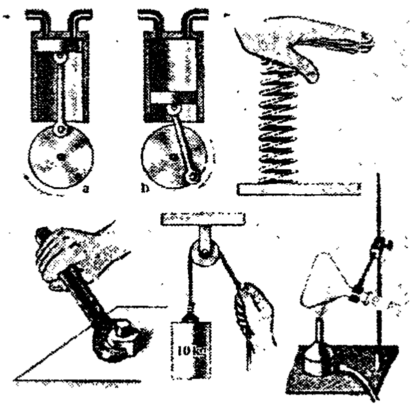
Aquellos cambios que son perceptibles directamente por nuestros sentidos, los denominamos fenómenos. Por ejemplo, la caída de una piedra, el andar de una persona y el vuelo de un avión son fenómenos, porque en todos ellos percibimos cambios de lugar. Igualmente ocurre un fenómeno cuando un bloque de hielo expuesto al sol se derrite, ya que percibimos su cambio de forma, asimismo son fenómenos el cambio del día en noche y el cambio de estaciones climáticas. Toda la diversidad de fenómenos conocidos pueden clasificarse según su naturaleza convencionalmente en

Fenómenos físicos

Relacionados con el movimiento mecánico y térmico, donde las sustancias no alteran su composición molecular. El sonido, el congelamiento del agua, el encendido de un foco, un relámpago son fenómenos físicos.

Fenómenos químicos

Relacionados con el movimiento químico, donde se altera la composición molecular de las sustancias. Por ejemplo, la oxidación de un clavo, la combustión del papel o la madera, la disolución de azúcar en el agua, la fermentación y descomposición de los alimentos.



Los gráficos muestran diversos ejemplos de fenómenos físicos.

La combustión del papel, es un típico ejemplo de fenómeno químico.

Fenómenos biológicos

Relacionados con el movimiento biológico, que implica todas la formas de vida existentes. El desarrollo, crecimiento y reproducción de los animales y plantas, su adaptabilidad al medio en que se desarrollan, la circulación de la sangre, los latidos del corazón, la respiración y las enfermedades son ejemplos de fenómenos biológicos.

Fenómenos sociales

Relacionados con el movimiento social, la historia de la humanidad y los acontecimientos sociales que actualmente vivimos. Por naturaleza el hombre es un ser social y en base a los procesos sociales en los cuales participa, se desarrolla en diferentes aspectos, por ejemplo en adquirir conocimientos objetivos con los cuales logra transformar a la naturaleza en función a sus necesidades.

Las protestas de la clase trabajadora por sus reinvindicaciones y un trato justo, expresa un fenómeno social.

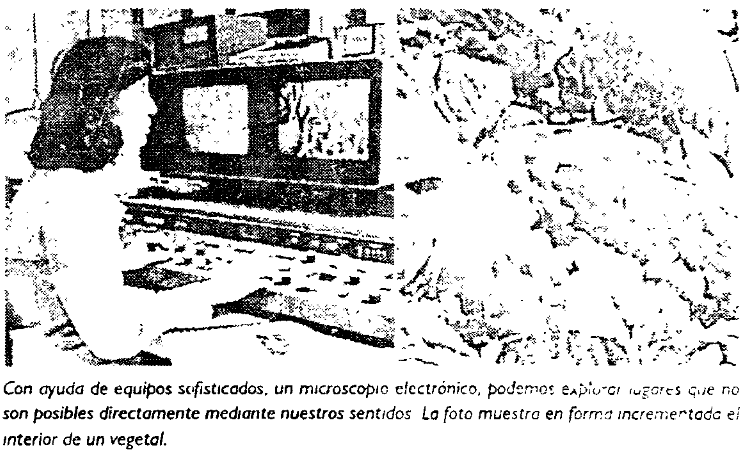
Los fenómenos nos dan una idea superficial de los objetos, ya que, tras las apariencias y cambios externos hay otros cambios que no son percibidos directamente por nuestros sentidos. Por ejemplo: El movimiento de los electrones, las radiaciones, los ultrasonidos y las reacciones nucleares.

De estos cambios solo percibimos sus efectos y muchos de estos son la causa de los fenómenos que observamos. Por ejemplo, nosotros no distinguimos los choques directos de las moléculas ni percibimos de manera inmediata la naturaleza de la gravitación, del magnetismo o de la electricidad. Nada podemos conocer directamente acerca de estos procesos. Sin embargo, notamos sus efectos, así vemos que los objetos lanzados al aire caen inevitablemente a tierra y que, al frotar las cosas sentimos que en mayor o menor grado se calientan. En cuanto a la electricidad nos percatamos de su existencia al calentarse un aparato por donde pasa la corriente eléctrica.

A través del análisis de los fenómenos se llega a describir algunos cambios no percibidos directamente por nuestros sentidos. He aquí una cualidad de los seres humanos y que se guían a través de ellos, resolviendo así sus necesidades más vitales; los seres humanos van más allá, porque tienen la capacidad de descubrir la esencia de los fenómenos, es decir, las leyes que explican su desarrollo y las relaciones causales entre uno y otro fenómeno. En estos tiempos vemos como esta capacidad, unida a las necesidades cada vez crecientes de la humanidad, hacen posible dominar las fuerzas de la naturaleza. Esto sirve de guía al hombre en su actividad práctica mucho más que en el simple conocimiento sensorial que proporcionan los fenómenos.

Somos conscientes que el conocimiento sensorial tiene sus propios límites. Nosotros no podemos ver todos los colores, oír todos los sonidos, oler todos los olores, distinguir los objetos más diminutos, etc

Podemos ciertamente ampliar los límites de nuestro conocimiento sensorial equipándonos con diversos instrumentos, algunos de los cuales elevan, en forma directa e inmediata, la capacidad de percibir los objetos, como el caso del microscopio o el telescopio.



Con ayuda de equipos sofisticados, un microscopio electrónico, podemos explorar lugares que no son posibles directamente mediante nuestros sentidos La foto muestra en forma incrementada el interior de un vegetal.

Al equiparnos con diversos instrumentos, podemos penetrar, con la mirada directa, en mundos lejanos, observar la vida de los organismos más pequeños y *arrancar gradualmente* al micromundo sus secretos.

Sin embargo, nuestro conocimiento sensorial, aunque está provisto con distintos instrumentos, no descubre la esencia de los fenómenos. Dicho conocimiento es una etapa inicial; solo en una segunda etapa, mediante el pensamiento lógico, se logra penetrar en la esencia de los fenómenos.

El pensamiento es aquel proceso que nos permite conocer aquello que a pesar que no lo percibimos existe. Es necesario tener en cuenta que el pensamiento es un proceso que nos permite representar nuestra realidad bajo la modalidad de conceptos, juicios y razonamientos. Agrupando y uniendo conceptos, juicios y razonamientos en complejas combinaciones, constituimos formas superiores del conocimiento como la hipótesis, la ley y la teoria.

El conocimiento sensorial y el pensamiento lógico van unidos, el pensamiento lógico es imposible sin el conocimiento sensorial porque los datos que los órganos de los sentidos proporcionan, constituyen el único material para formar conceptos. En consecuencia, en el pensamiento no puede haber nada que no sea dado al hombre por los órganos de los sentidos. Pero el pensamiento lógico cala más hondo que el conocimiento sensorial, enriquece y amplía sus límites. Las impresiones sensoriales, iluminadas con la luz de la razón, adquieren nuevo contenido.

No es difícil convencerse de ello si comparamos, por ejemplo, las percepciones que un ingeniero electricista obtiene del cuadro de aparatos indicadores de una central eléctrica moderna y las que recibe un hombre que las ve por primera vez. Los aparatos no dicen nada a éste, pero el especialista que observa esos mismos cuadrantes y las manecillas vislumbra en sus indicadores el complejo funcionamiento de los mecanismos de la central.

Como lo sensorial y lo lógico se manifiestan unidos, complementándose y enriqueciéndose uno a otro, en el conocimiento no se deben menospreciar las indicaciones de los sentidos ni las deducciones del pensamiento, reflejan un mismo mundo material y su base común es la práctica de la humanidad.

En resumen, el conocimiento pasa de lo sensorial a lo lógico en base a la práctica. Este paso requiere de un esfuerzo mental consciente para que a partir de los fenómenos lleguemos a captar su esencia. Por ello se hace necesario hallar los métodos que conducen mejor a este fin, los procedimientos más eficientes para realizar nuestra investigación. Esto lo conseguimos aplicando el método científico.

MÉTODO CIENTÍFICO

En el proceso del conocimiento y de la actividad práctica, los hombres se proponen determinados fines, se plantean diversas tareas. Pero proponerse un fin o formular una tarea no significa aún alcanzar lo concebido. Es muy importante hallar las vías que conducen mejor al fin propuesto, los modos eficientes de resolver las tareas planteadas.

Si queremos por ejemplo averiguar la composición química de cualquier sustancia, es necesario, ante todo, conocer el método de análisis químico, es decir, saber aplicar a esas sustancias los reactivos químicos precisos, descomponerlas en sus partes integrantes, determinar sus propiedades químicas, etc.

Si necesitamos fundir un metal, debemos conocer la tecnología de la fundición, o sea, los procedimientos prácticos que los hombres han elaborado en el proceso de la producción metalúrgica.

La misma necesidad se siente al investigar los fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc.

Estas vías, el conjunto de principios y procedimientos de investigación teórica y de actividad práctica, constituyen el método.

Método es el *camino hacia algo*. En su sentido más general es la manera de alcanzar un objetivo con determinados procedimientos para ordenar la actividad.

Sin aplicar un método determinado es imposible resolver ninguna tarea científica o práctica. Por eso los hombres dedican tanta atención a crear y a dominar los métodos de la labor teórica y práctica.

La práctica a través de la historia ha conducido al desarrollo de un método adecuado para el estudio de los fenómenos. Los métodos de investigación los podemos encontrar desde épocas muy remotas en diversos lugares China, India, Babilonia, Egipto, Grecia, Roma, etc.; pero donde se ve con mayor claridad es sin discusión en la sociedad griega, cuna de la cultura clásica. En esa época los conocimientos alcanzados no pasan de ser empíricos, netamente fenomenológico, se otorga poca importancia al pensamiento lógico para comprender la esencia de los fenómenos. Los pensadores de esta época como Aristóteles, Platón y otros utilizaban el método inductivo, en el cual, a partir de observaciones particulares llegaban a conclusiones generales. También usaban el método deductivo, donde a partir de algunos postulados generales se llega a conclusiones particulares. Sin embargo estos métodos de conocimiento no estaban sistematizados y las conclusiones o postulados generales en la mayoría de los casos se mezclaban con creencias sobre fuerzas sobrenaturales (dioses, mitos y leyendas). Pero aun con todo ello estos métodos ya aportan luces para lo que vendría más adelante.

En la Edad Media, se siguen usando los mismos métodos utilizados antiguamente por los griegos, pero enmarcado dentro de las creencias e ideas anticientíficas. Los argumentos de los cuales se valían era el pensamiento aristotélico. Tomás de Aquino fue quien realizó la mayor parte de la traducción de la obra de Aristóteles del griego al latín, pero las ideas de Aristóteles después de la traducción no se ajustaban a la realidad (como fue demostrado posteriormente), pero si estaban acorde a los propósitos y filosofía de la época, la cual consideraba sus ideas absolutas e inmutables, trayendo como consecuencia que nadie podía plantear argumentos en contra, siendo así a las personas se les perseguía, encarcelaba y hasta se les daba muerte mediante crueles torturas. Todo esto y otros hechos más, dificultaban intencionalmente el pequeño pero significativo avance realizado por muchos hombres dentro de las ciencias naturales.

El más influyente y versátil escritor inglés del siglo XVII, Francis Bacon, escribió sobre un amplio número de materias, incluidas la ética, filosofía, ciencia, derecho historia y política. Bacon fue decisivo para alcanzar la era del pensamiento científico moderno al sistematizar un proceso de razonamiento llamado inducción. La inducción es el proceso por el cual las conclusiones generales se extraen de situaciones particulares

En el mundo moderno se supera la etapa empírica, la razón permite descubrir en las relaciones sensoriales, lo que los sentidos no perciben: la esencia de los fenómenos. Esta etapa tiene su punto de partida en los grandes descubrimientos geográficos que llevaron a los hombres a que volvieran la vista hacia la naturaleza. Muchos científicos de esta época realizaron grandes avances en el desarrollo del conocimiento científico aun con la oposición de la iglesia cristiana, la cual todavía tenía aún cierto poder económico y político, e impedía que se desarrolle y divulgue el conocimiento científico.

Así el astrónomo y matemático polaco Nicolás Copérnico (siglo XVI) los profesores y matemáticos Galileo Galilei (1564–1642) y J. Kepler (1571–1630), con sus trabajos y teorías científicas, divulgadas gracias a la invención de la imprenta, rompieron, sin proponérselo, con muchos dogmas impuestos por la iglesia. En sus estudios ya se distingue una metodología de investigación científica, donde se confiere mucha importancia a la comprobacion experimental, como un criterio de verdad de las teorías planteadas. Estos métodos fueron consolidados con las teorías del método experimental e inicia el despegue de la ciencia como campo autónomo liberada de las trabas puestas, por el orden social que impero durante mucho tiempo.

Como vemos, a través de la historia la forma como se estudia los fenómenos se ha ido perfeccionando y actualmente se conocen muchos métodos; estos pueden ser diferentes de acuerdo al tipo de fenómeno que se estudie, sin embargo, también comparten rasgos en común. Hay pasos esenciales y generales a todo método. Estos pasos son parte de un proceso al cual se denomina el **método científico** y consiste en lo siguiente

La observación

En el método científico la observación consiste en el estudio de un fenómeno que se produce en sus condiciones naturales. La observación debe ser cuidadosa, exhaustiva y exacta. A partir de la observación surge el planteamiento del problema que se va a estudiar, lo que nos lleva al siguiente paso.

La hipótesis

Es una suposición ideada para explicar provisionalmente un determinado fenómeno o dar una respuesta provisional al problema planteado y predecir las consecuencias de la suposición. Sirven de ejemplos de hipótesis: las suposiciones acerca del origen de la vida en la Tierra, del surgimiento del sistema solar, etc.

La experimentación

Para comprobar la hipótesis se realizan experimentos. La experimentación consiste en el estudio de un fenómeno, reproducido generalmente en un laboratorio, en condiciones controladas, eliminando o introduciendo aquellos factores que puedan influir en él. Todo experimento debe ser reproducible, es decir, debe estar planteado y descrito de forma que pueda repetirlo cualquier experimentador que disponga de las mismas condiciones. En esta etapa es muy importante efectuar mediciones de las características observadas en el fenómeno. Los resultados de estas mediciones pueden describirse mediante tablas, gráficos y ecuaciones, de manera que puedan ser analizados con facilidad y permitan encontrar relaciones entre ellos que confirmen o no las hipótesis planteadas.

La conclusión o síntesis

Una hipótesis confirmada se puede transformar en una ley científica. Así la ley científica es una relación o regularidad constante, comprobada en la práctica.

Por ejemplo. Isaac Newton relacionó la caída de los cuerpos con el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra **(observación).**

Planteó que la causa de estos dos fenómenos es la fuerza de atracción que la Tierra ejerce a todos los cuerpos que están a su alrededor **(hipótesis).**

Posteriormente esta hipótesis fue confirmada mediante medidas del movimiento de la Luna y también con mediciones cuidadosas hechas en laboratorio **(experimento de Cavendish).**

Actualmente la conocemos como la *Ley de la gravitación universal.*

MÉTODO CIENTÍFICO
(Ejemplo ilustrativo)

OBSERVACIÓN

Los cuerpos metálicos en épocas de verano incrementan sus dimensiones.

↓

HIPÓTESIS

Una moneda es un cuerpo metálico, si la frotamos con la pared se debe calentar. El calentamiento del cuerpo, lo cual implica un incremento de su temperatura, es la razón, de este fenómeno.

↓

EXPERIMENTO

Calentamos la moneda ya sea por frotamiento o bien usando un mechero para que el calentamiento sea mayor. Si comparamos las dimensiones de la moneda antes y después del proceso de calentamiento notaremos que sus dimensiones se han incrementado ligeramente al aumentar la temperatura.

↓

CONCLUSIÓN (A NIVEL MACROSCÓPICO)

El calentamiento de un cuerpo metálico es la causa de su dilatación.

Casos especiales de leyes son el principio y el postulado. Un principio es una ley general, no deducida por razonamiento, sino se deduce de la observación o de la experimentación y sirve de punto de partida para explicar toda una serie de fenómenos ligados entre sí y de las cuales se deducen otras leyes que abarcan un campo más reducido. Un postulado es una proposición cuya verdad se admite sin pruebas y que es necesaria porque sirve de base para posteriores razonamientos de los cuales se desprenden leyes demostrables en la práctica.

Al estudiar un conjunto de leyes se puede hallar alguna relación entre ellas que lleven a plantear fundamentos generales con los cuales se forma una teoría. En consecuencia, **la teoría** es una estructura de conocimientos ordenados y sistematizados que tiene como base una serie de leyes (incluyendo principios y postulados) que sirven para explicar de manera más profunda y amplia el desarrollo de un aspecto determinado de la materia. Las teorías para que sean científicas deben ser comprobadas en la práctica.

Por ejemplo, la mecánica clásica es una teoría que explica el movimiento mecánico de los cuerpos a velocidades mucho menores que la luz y tiene como fundamento a las leyes de Newton y a la ley de la gravitación universal.

La Teoría de la relatividad especial y general, publicada en 1905 y 1916 respectivamente, cuyo autor es Albert Einstein se fundamenta en el principio de relatividad, en el principio de invariabilidad de la velocidad de la luz y en el principio de equivalencia.

La Teoría cuántica, que describe las propiedades dinámicas de las partículas subatómicas y las interacciones entre la materia y la radiación, se basa en los postulados planteados por el físico alemán Max Planck en el año 1900 y en el principio de incertidumbre, formulado por el físico alemán Werner Heisenberg en 1927

A través de estos pasos el método científico brinda una dirección correcta al trabajo del científico, disciplina en la marcha de la investigación, le ayuda a escoger el camino más corto para la obtención de auténticos conocimientos en el campo que le preocupa.

Es necesario entender que el método científico no es estático ni inmutable, tampoco es una suma mecánica de diversos procedimientos de investigación elegidos por los hombres a su antojo, sin relación alguna con los propios fenómenos investigados. Este se desarrolla en el mismo proceso de investigación, en el proceso de estudio, no es creación del hombre, él lo descubre de acuerdo a las necesidades de su investigación. Por eso cada campo de la ciencia o de la práctica elabora sus métodos particulares, sobre todo en la parte experimental; por ejemplo, los procedimientos experimentales de la Física, se distinguen de los de la Química y estos últimos se distinguen de los de la Biología. Actualmente, con base justamente en las necesidades que se presentan en la profundización de los fenómenos biológicos cada vez más complejos, se requiere coordinar los procedimientos experimentales de la Física, la Química y la Biología.

El método científico nos hace ver que un conocimiento científico es un conocimiento que parte de la realidad y se comprueba en la misma realidad, tiene una causa que lo origina y lo más importante, puede ser superado por un nuevo descubrimiento. Aquí se expresa el desarrollo del conocimiento científico, los nuevos descubrimientos y teorías no anulan los resultados anteriores, no niegan su veracidad objetiva sino que se limitan a puntualizar los límites de su aplicación y concretar su lugar en el sistema del saber científico.

LECTURA

LÍMITES DEL MÉTODO CIENTÍFICO

Al hombre le preocupaban siempre los *problemas eternos*: de la vida y la muerte, del bien y del mal, del Dios y de la eternidad, del objetivo final del ser y de nuestro lugar en el Universo. La religión no supo resolver estos problemas, solo mitigó por cierto tiempo el afán de resolverlos y proporcionó un fugaz consuelo en el olvido de las complejidades humanas de la existencia terrenal.

La ciencia tampoco está adaptada a dar respuestas acerca del sentido de la vida: tiene tareas más modestas. Ofuscados por los éxitos de las ciencias exactas, a menudo lo olvidamos y dejamos de tener en cuenta la simple posibilidad de que nuestro racionalismo y la fe en la ciencia les parecerán a las futuras generaciones tan poco convincentes e incomprensibles como a nosotros los ritos de los sacerdotes egipcios: sólo el conocimiento es ilimitado, pero no sus formas históricas.

La ciencia es capaz de conocer sólo los fenómenos, cuyas propiedades se pueden evaluar por medio de números. El trabajo de un hipnotizador no se puede describir mediante fórmulas matemáticas, no obstante, sus resultados son indudables y reproducibles. Los logros de los yoghi hindúes son un hecho experimental comprobado reiteradamente. Sin embargo, estos fenómenos no pueden convertirse en objetos de la ciencia exacta, puesto que es imposible describirlos cuantitativamente por medio de números y fórmulas. Igual que los fenómenos de la telepatía no serán fidedignos hasta que no se confirmen por experimentos científicos. Nuestra época reconoce únicamente tales pruebas; lo mismo que en el medioevo tomaban en consideración sólo las pruebas con alegación a autoridades.

No debemos afligirnos con este motivo: ello significa simplemente que el mundo es más rico y complejo que su imagen proporcionada por la ciencia. Una sonrisa no cuesta nada, mas por suerte, es insustituible.

Es útil recordarlo siempre para no atascarse en la ignorancia científica. Aquellos hombres de ciencia que intentan imaginarse el mundo como infinitas tablas de números y niegan la realidad de muchos fenómenos de la naturaleza basándose sólo en el hecho de que éstos no se pueden explicar por medios científicos, no difieren notoriamente de los curas que al ver una locomotora cerraban los ojos, pataleaban y murmuraban: ¡Esfúmate, satanás! Semejantes científicos no ven la diferencia entre una persona genial y un asesino, puesto que se puede demostrar con rigurosidad científica que ambos están formados de moléculas absolutamente idénticas.

Sobre el fondo de tales razonamientos, la mecánica cuántica, acerca de la cual ahora hemos conocido tantas cosas, debe parecer una ciencia muy simple. En efecto, del átomo de hidrógeno sabemos tanto que podemos predecir todas sus propiedades observables. Mucho más difícil, aunque posible es calcular las propiedades de la molécula de hidrógeno. En cambio, ya no podemos predecir las propiedades de las moléculas de proteína. Las proteínas no son muy abundantes, pero éstas estructuran a cada hombre en toda su individualidad.

En una palabra, la ciencia es útil e incluso indispensable, mas no se debe convertir la necesidad en virtud y subordinarle todo, sólo porque de momento no podemos prescindir de ella.

FUENTE: Alrededor del cuanto. AUTOR: L. Poromarlov. Pág.: 286

CAPÍTULO II

Análisis vectorial

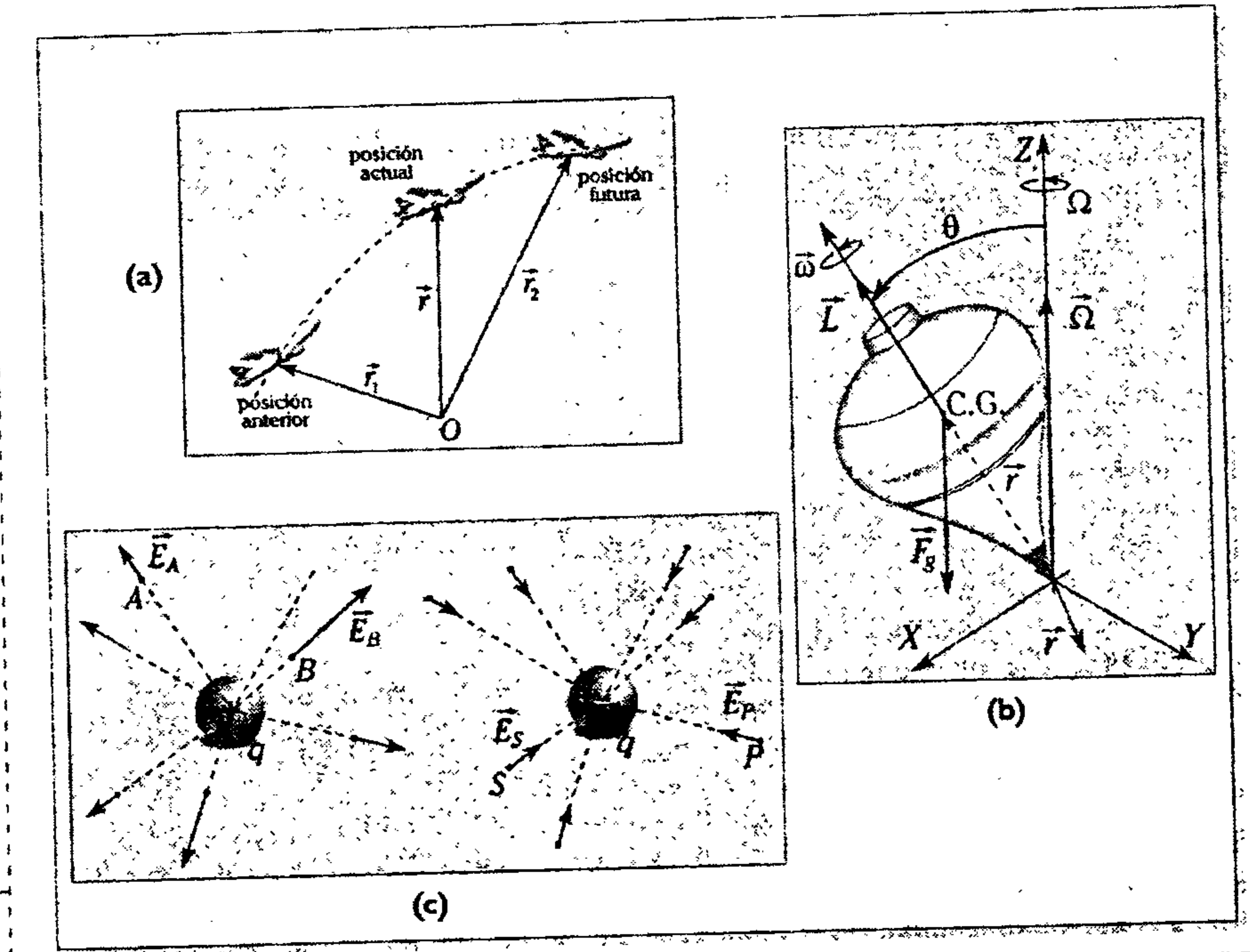


Fig. **(a)** El vector posición ($\vec{r}$) en la cinemática es de mucha utilidad, ya que nos permite indicar la ubicación de un móvil en cualquier instante de tiempo. **Fig. (b)** Giróscopo (trompo) sujeto a un torque externo. La descripción del movimiento de precesión lo hacemos con ayuda de la fuerza ($\vec{F}_g$), el momento angular ($\vec{\omega}$) y la velocidad angular ($\vec{L}$); estas son magnitudes vectoriales. **Fig. (c)** La intensidad de campo eléctrico ($\vec{E}$) asociado a una partícula electrizada positiva es saliente y por una partícula electrizada negativa es entrante. Esta magnitud vectorial nos permite tener una idea de cómo es el campo eléctrico en el espacio.

LECTURA

CON LOS VECTORES, NEWTON DEMOSTRÓ LA LEY DE LAS ÁREAS DE KEPLER

Para empezar, supongamos un objeto sobre el que no actúa ninguna fuerza, y que se mueva con velocidad constante a lo largo de la línea *ABCD*, como lo indica la figura *(a)*, cubre distancias iguales *AB*, *BC* y *CD*, en intervalos de tiempo iguales Δt. Una línea desde el punto *O* al objeto en movimiento recorta áreas iguales en intervalos iguales, puesto que según un teorema de geometría plana, los triángulos cuyas bases tengan la misma longitud y sus alturas sean iguales, tendrán áreas iguales, y los triángulos *OAB*, *OBC* y *OCD* tienen la misma altura *OA*, y las bases *A B*, *BC* y *CD*, respectivamente, tienen la misma longitud.

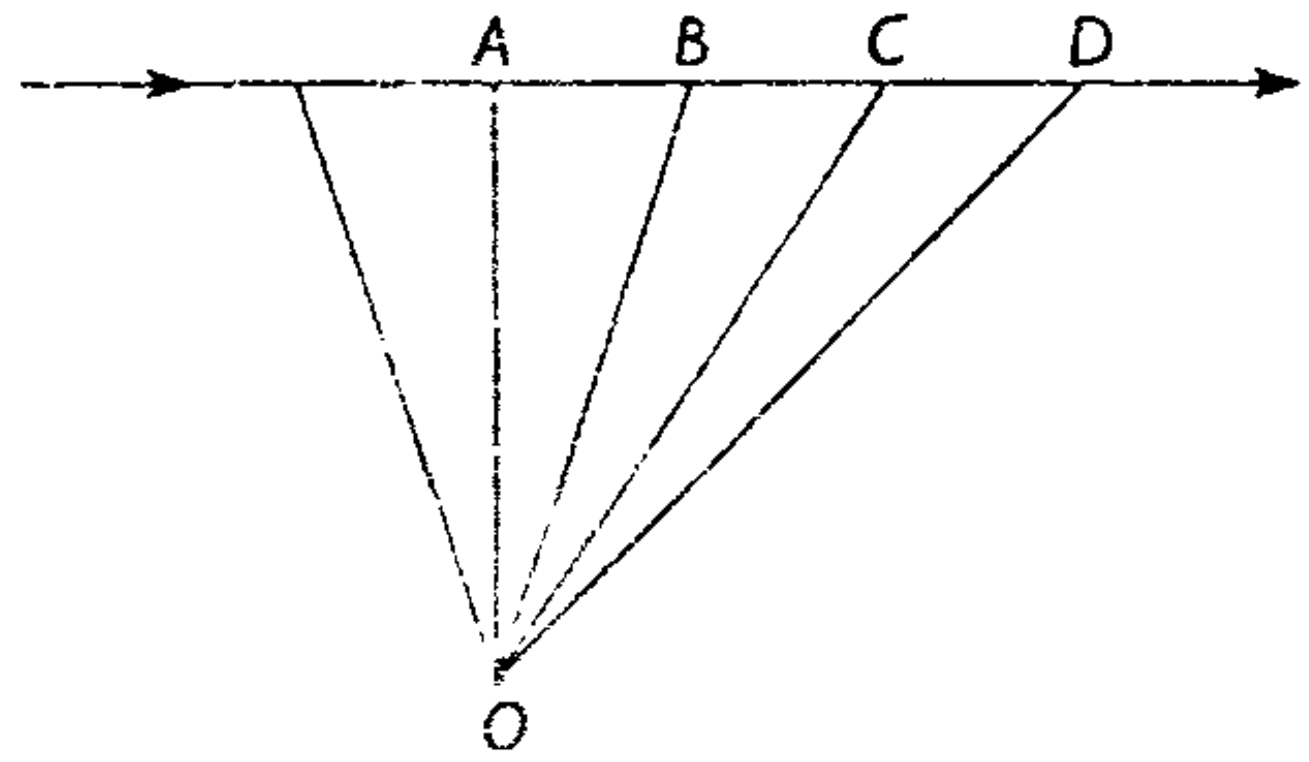


Fig. (a) *Los triángulos OAB, OBC y OCD tienen superficies iguales si AB = BC = CD.*

Supongamos ahora que el objeto está quieto en el punto *B*, cuando se le aplica una fuerza de corta duración, hacia *O*, como muestra la figura *(b)*. El objeto experimentará aceleración durante el breve tiempo de aplicación de la fuerza y adquirirá una velocidad hacia *O* que le hará trasladarse de *B* a *B'*, en el intervalo de tiempo Δt.

A continuación, supongamos que en vez de estar en reposo en el punto *B*, el objeto se mueve según la línea *ABCD* a velocidad constante cuando, en *B*, recibe un golpe que suministra una fuerza de la misma magnitud y duración como la que se dijo arriba y envía el objeto de *B* a *B'*.

En tanto que el movimiento original hubiese llevado al objeto a *C* y el golpe lo llevaría a *B'* en el tiempo Δt, el desplazamiento combinado es según la línea *BC'*, así que el objeto alcanza el punto *C'* después del tiempo Δt. El punto *C'* puede situarse usando el método del paralelogramo para combinar los vectores de desplazamiento *BC* y *BB'* en el vector resultante *BC'*.

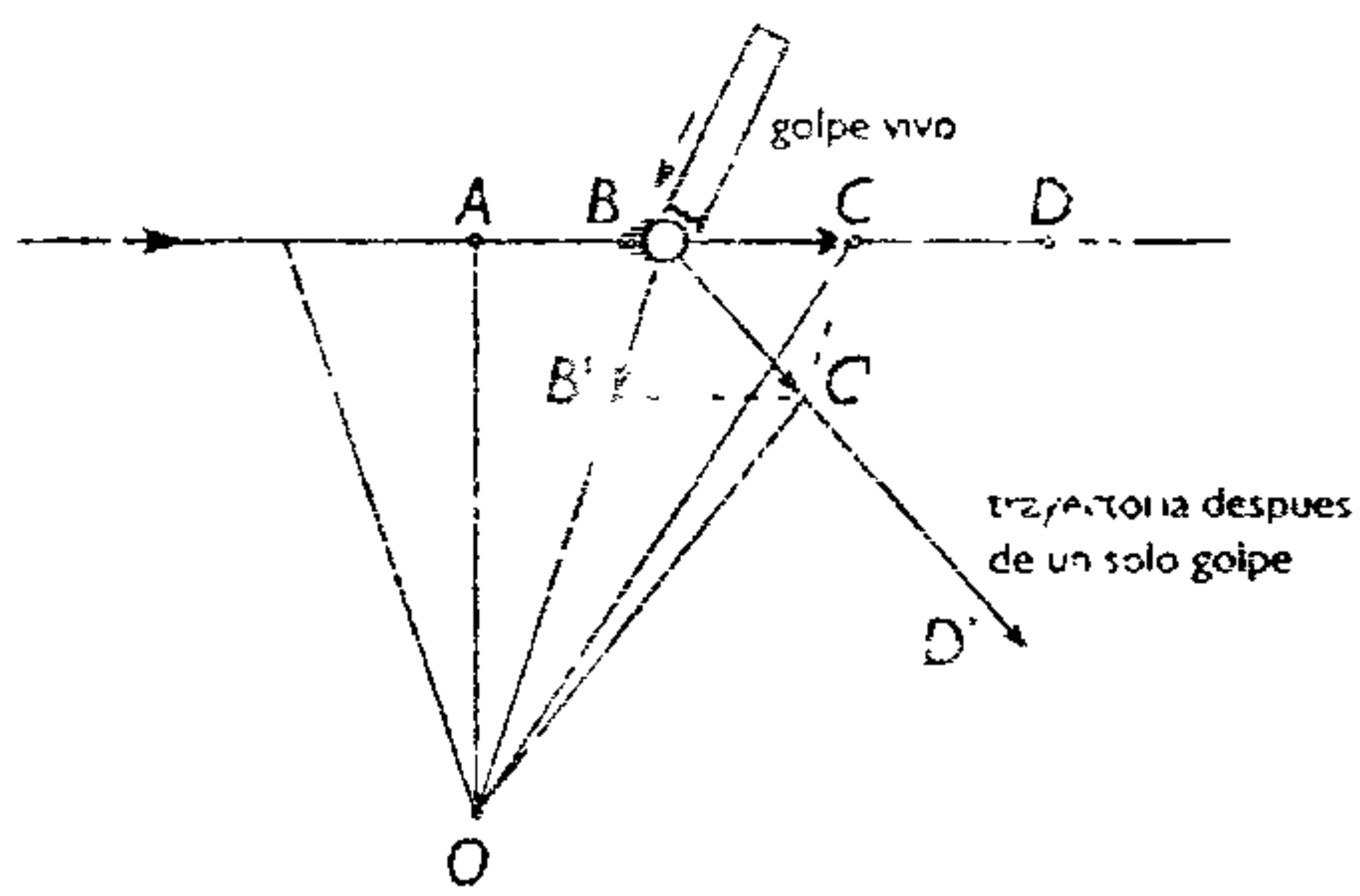


Fig. (b) *La ley de areas iguales se mantienen cuando una serie de golpes secos se dirige hacia el centro O.*

La línea que une el objeto con *O* ha recortado el área *OAB* en el intervalo Δt, y ha recortado el área *OBC'* en el mismo intervalo Δt. Las áreas de ambos triángulos son iguales, lo que puede demostrarse señalando que los dos tienen igual superficie que el triángulo *OBC*. Hemos dicho antes que *OAB* y *OBC* tienen la misma altura *OA* y bases *AB* y *BC* de la misma longitud, por consiguiente, su área es igual. También de la misma área son los triángulos *OBC* y *OBC'*. Comparten la línea *OB*, que podemos llamar la base de cada uno de ellos.

Poseen iguales alturas, puesto que las alturas son las distancias perpendiculares de los vértices *C* y *C'*, a la base *OB*, y puesto que *CC'* es paralela a *OB*, todos los puntos de *CC'* tienen la misma distancia perpendicular a la base *OB*. Podemos ver así que el área *OAB*, cubierta antes del golpe, es igual al área *OBC'* cubierta después del golpe. Se concluye que ambas áreas (*OAB* y *OBC'*) se cubren en intervalos de tiempo iguales.

Análisis vectorial

OBJETIVOS

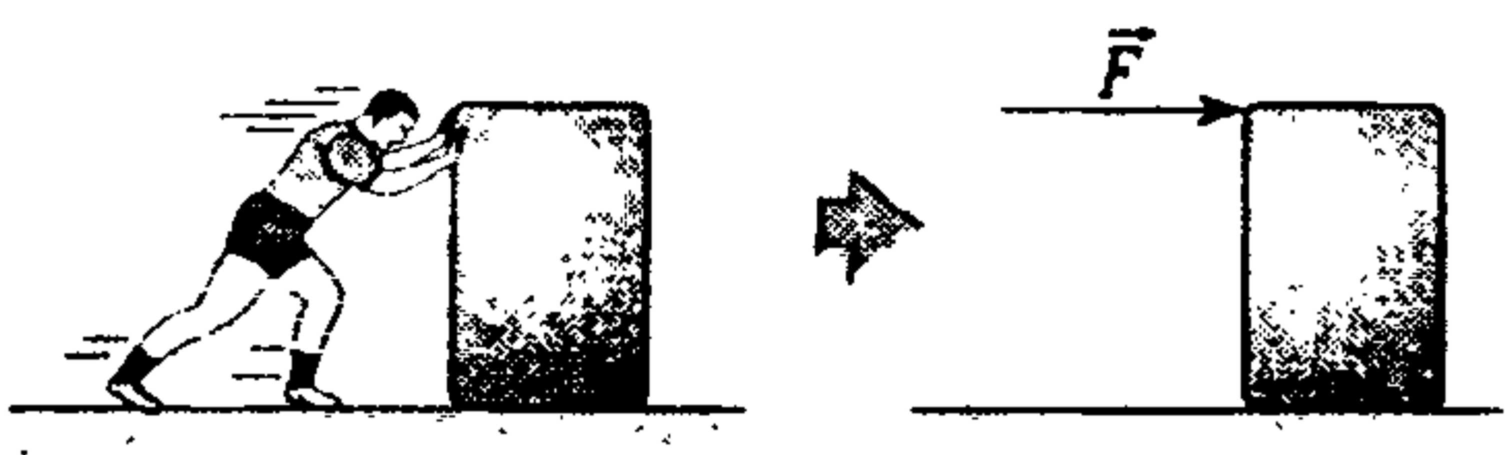
- Definir un vector como elemento matemático y establecer su importancia en la descripción de los fenómenos físicos y el establecimiento de leyes físicas.
- Diferenciar las operaciones matemáticas ordinarias (operaciones escalares), respecto de las operaciones vectoriales.
- Dar a conocer las propiedades de los vectores con uso del método inductivo - deductivo para ir explicando y comprendiendo las operaciones de adición, sustracción y multiplicación de vectores.
- Generalizar las reglas o leyes de las operaciones con vectores.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los vectores que desarrollaremos es una parte del álgebra vectorial y nos ayudará a explicar, comprender y evaluar algunos fenómenos físicos que requieren para su descripción, del uso de magnitudes vectoriales como el desplazamiento de un automóvil, la velocidad de un avión, la fuerza aplicada a un ladrillo, la cantidad de movimiento de una bola de billar, la velocidad angular del eje de una cassetera, etc.

Es sabido que Galileo Galilei (1564 - 1642) fue uno de los primeros científicos que, al estudiar el movimiento de los proyectiles, tuvo la necesidad de usar vectores con el fin de determinar para un instante, la velocidad de un proyectil, la composición de sus velocidades en la dirección horizontal y en la dirección vertical.

La importancia que tienen los vectores para la Física es que a través de ellos se representan las magnitudes vectoriales; lo cual permite una mejor descripción y comprensión de los fenómenos físicos. Por ejemplo, si una persona traslada un bloque empujándolo, sabemos que le ejerce fuerza; ahora surge la pregunta ¿cómo representamos esta fuerza?



El vector $\vec{F}$ representa la acción aplicada por la persona sobre el bloque.

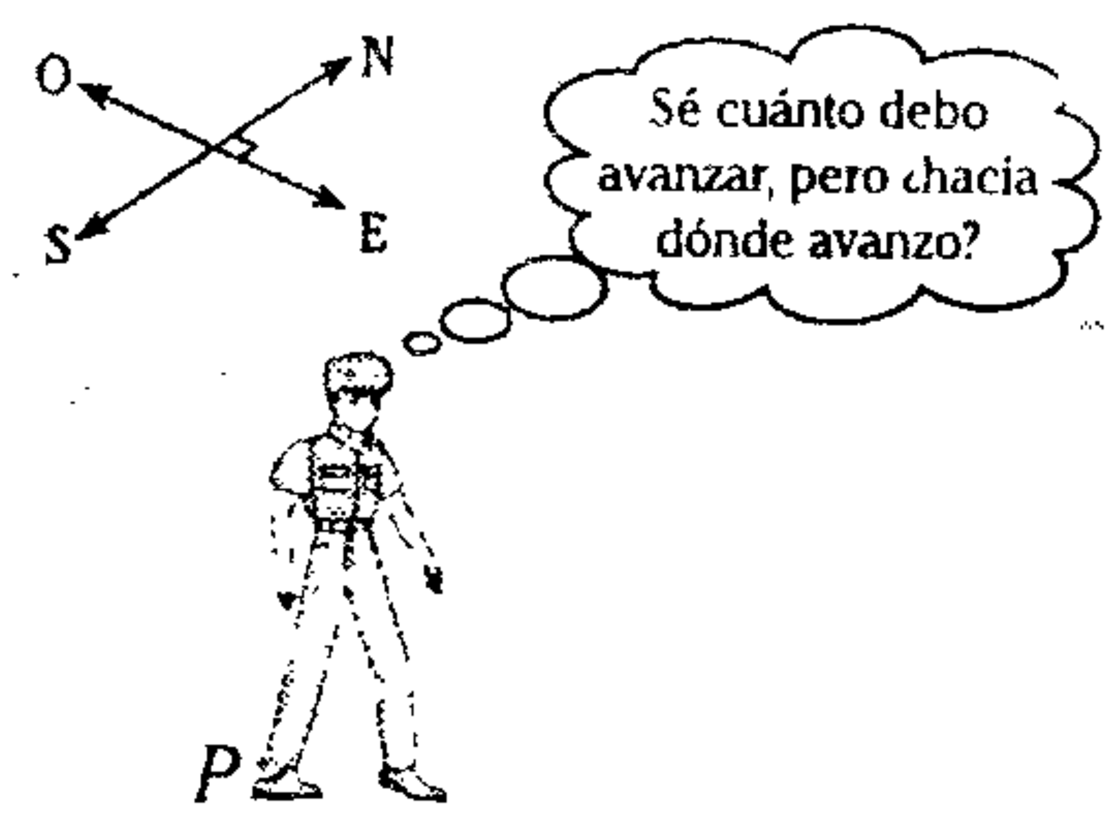
Para ello hacemos uso de un vector que nos permitirá no solo representar la fuerza, sino también establecer la forma en que actúa y, a partir de ello, los efectos que originará. Por todo esto, los vectores son de enorme utilidad.

Es importante no confundir la magnitud vectorial con el vector que la representa, por ejemplo, la fuerza es una magnitud vectorial que se representa mediante un vector y no podemos decir que la fuerza es un vector.

DEFINICIÓN DE VECTOR

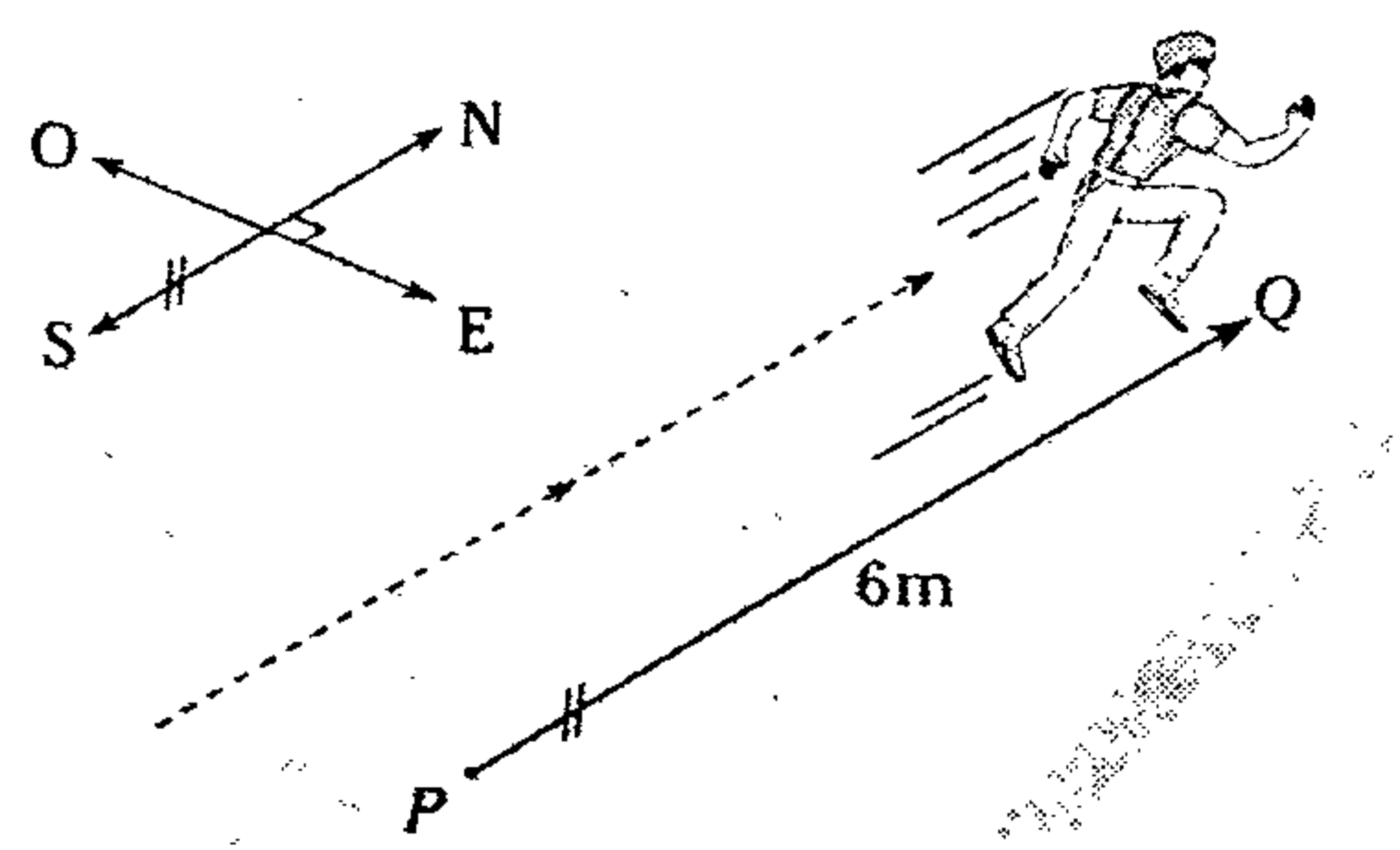
Empezaremos este estudio planteando una situación física objetiva que nos permita entender qué es un vector. Para esto consideremos a un joven situado en el plano de la figura, en la posición P.

Con el uso de un altavoz le decimos al joven que camine 6 m; el joven nos responde: *pero, ... ¿hacia dónde?,* pues puede ir hacia su derecha, su izquierda, hacia adelante, hacia atrás o en cualquier otra dirección. Entonces, será necesario indicar no solo la cantidad de metros que debe avanzar sino también la dirección que debe seguir.



Si le informamos al joven que debe avanzar 6 m hacia el norte, entonces el joven se moverá de P hacia Q 6 m, como se aprecia en la figura.

Geométricamente, observando la figura, ¿qué nos representa PQ? Es un segmento de recta que mide 6 m cuya dirección es hacia el norte. Estas características: **valor numérico, unidad de medida** (a estos dos elementos juntos lo llamaremos **módulo**) y **dirección** definen lo que es un vector.



Ahora respondamos la pregunta ¿qué es un vector? Es un ente matemático que posee módulo y dirección. Geométricamente, se le representa mediante un segmento de recta orientado (segmento dirigido).

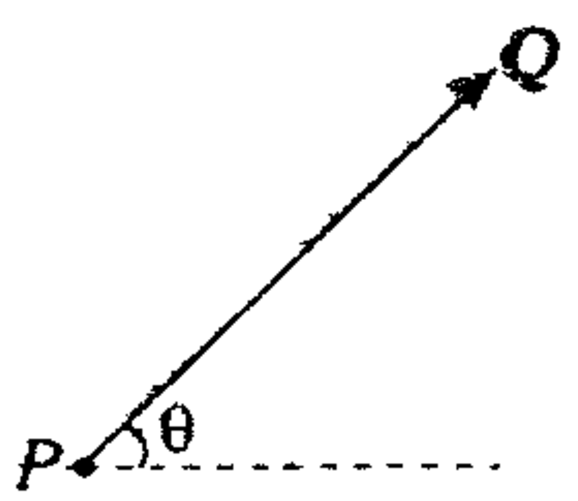
Ahora bien, desde otro ángulo, es decir, físicamente ¿qué nos representa PQ en la figura? Podemos decir:

- Es el cambio de posición del joven de P a Q.
- Es el desplazamiento realizado por el joven.

Por lo tanto, **podemos adelantar** que el desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ del joven es una **magnitud física vectorial**, la cual representamos gráficamente mediante un vector.

REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR

Un vector es un segmento de recta orientado, tiene un origen P y un extremo Q; su tamaño dependerá de su módulo y se le representa así



donde

$\overrightarrow{PQ}$: se lee vector PQ.

$|\overrightarrow{PQ}|$: se lee **módulo del vector** PQ.

θ : su medida nos indica la dirección del vector; se mide en sentido antihorario respecto de la horizontal (esto es en dos dimensiones).

En el ejemplo analizado, si consideramos el eje X paralelo con el eje este-oeste, tendremos:

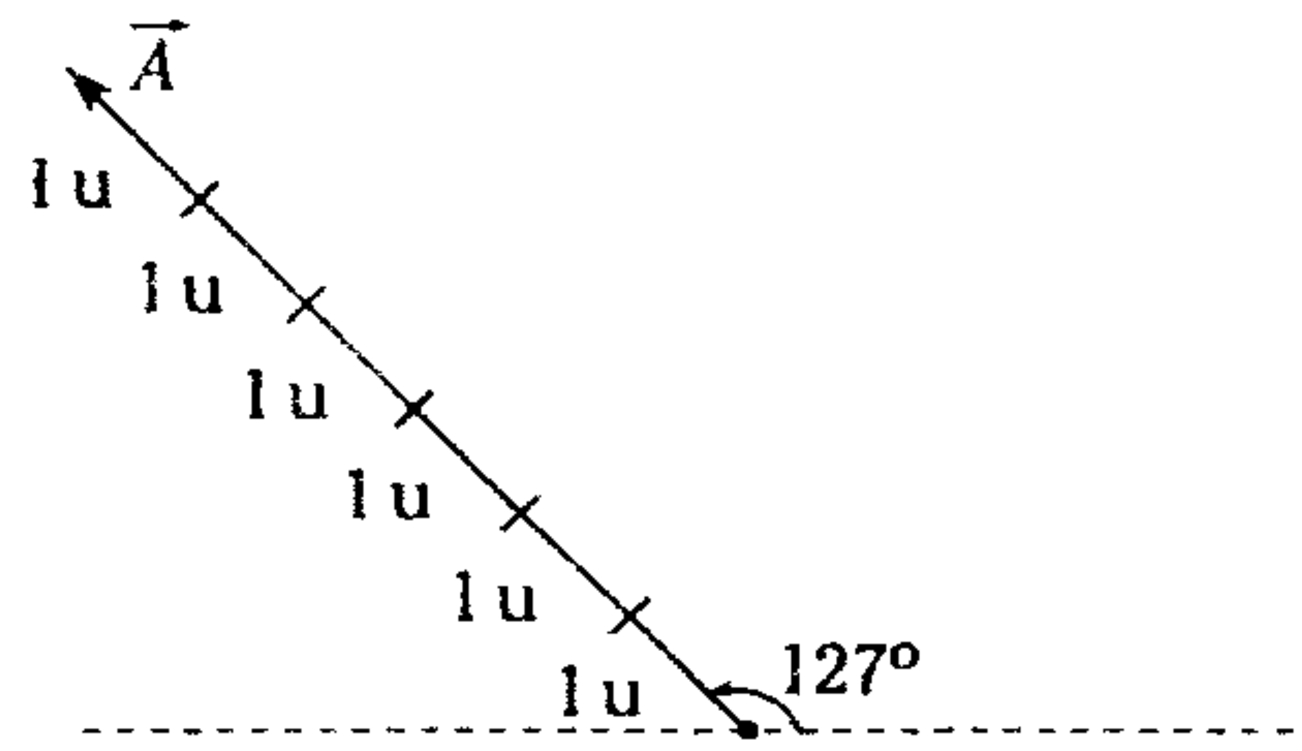
Módulo : $|\overrightarrow{PQ}| = 6\text{ m}$

Dirección : $\theta = 90°$

Vector : $\overrightarrow{PQ} = \underbrace{|\overrightarrow{PQ}|}_{\text{módulo}} \; \underbrace{\lfloor\theta}_{\text{dirección}} = 6\text{ m}\lfloor 90°$

Cuando se hace la notación de un vector se debe expresar su módulo y dirección.

Otro ejemplo:

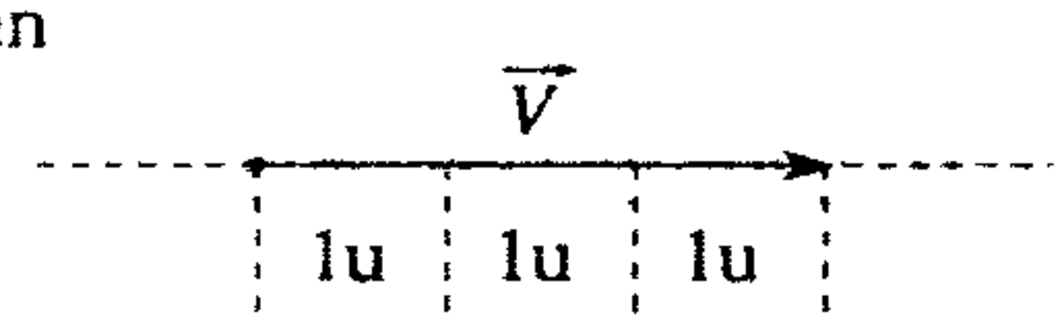


Módulo : $|\vec{A}| = 6\text{ u}$

Dirección : $\theta = 127°$

Vector : $\vec{A} = |\vec{A}|\lfloor\theta = 6\text{ u}\lfloor 127°$

También



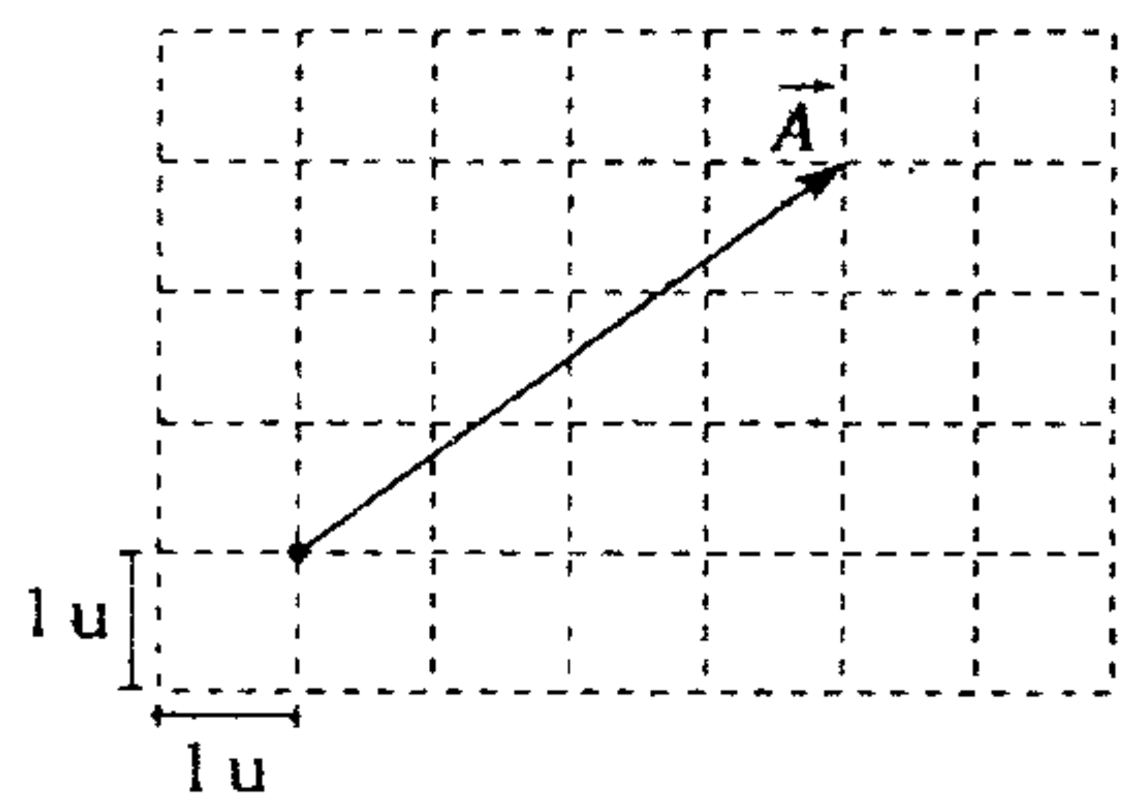
Módulo : $|\vec{V}| = 3\text{ u}$

Dirección : $\theta = 0°$

Vector : $\vec{V} = |\vec{V}|\lfloor\theta = 3\text{ u}\lfloor 0°$

Ejemplo 1

Determinemos el módulo y la dirección del vector dado.

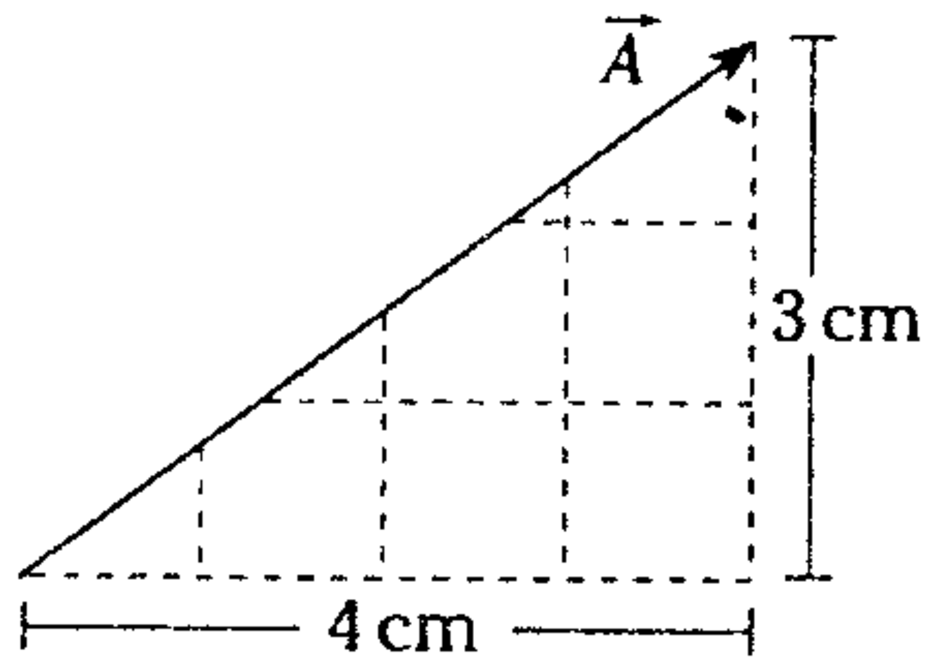


Resolución

El ejemplo se podría resolver en forma práctica y experimental con regla y transportador. El siguiente es el método matemático.

- *Para el módulo*

  Como se sabe es la longitud del segmento dirigido, el tamaño o lo que mide el vector.



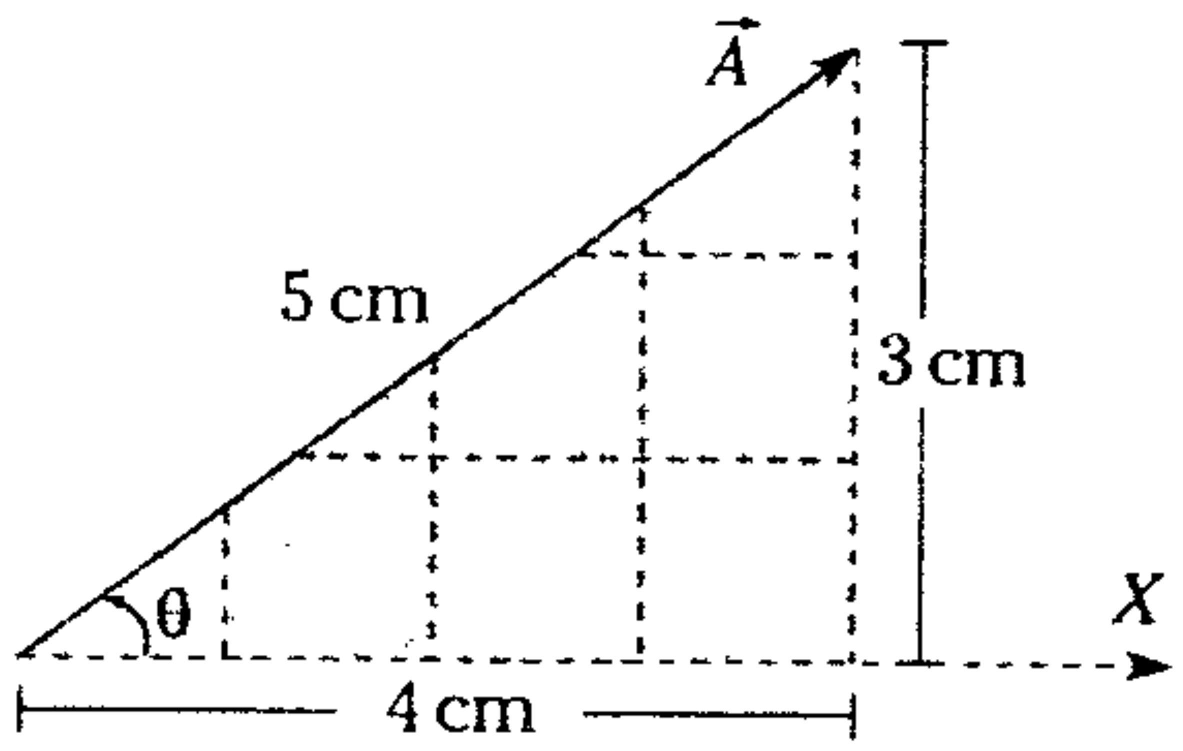
En el triángulo rectángulo formado, aplicaremos el Teorema de Pitágoras.

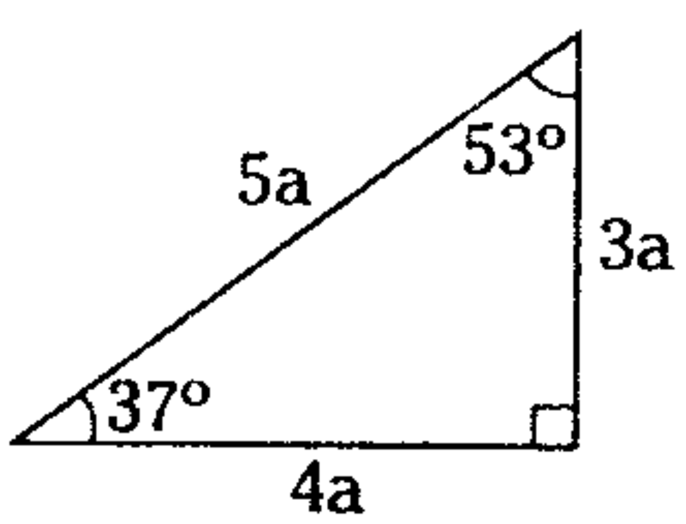
$$|\vec{A}|=\sqrt{(4)^2+(3)^2}$$

$$\therefore\ |\vec{A}|=A=5\text{ cm}$$

- *Para la dirección*

  Es la medida del ángulo que forma el vector con el eje X, por la relación entre sus catetos; se deduce que el triángulo rectángulo formado es notable (de 37° y 53°).



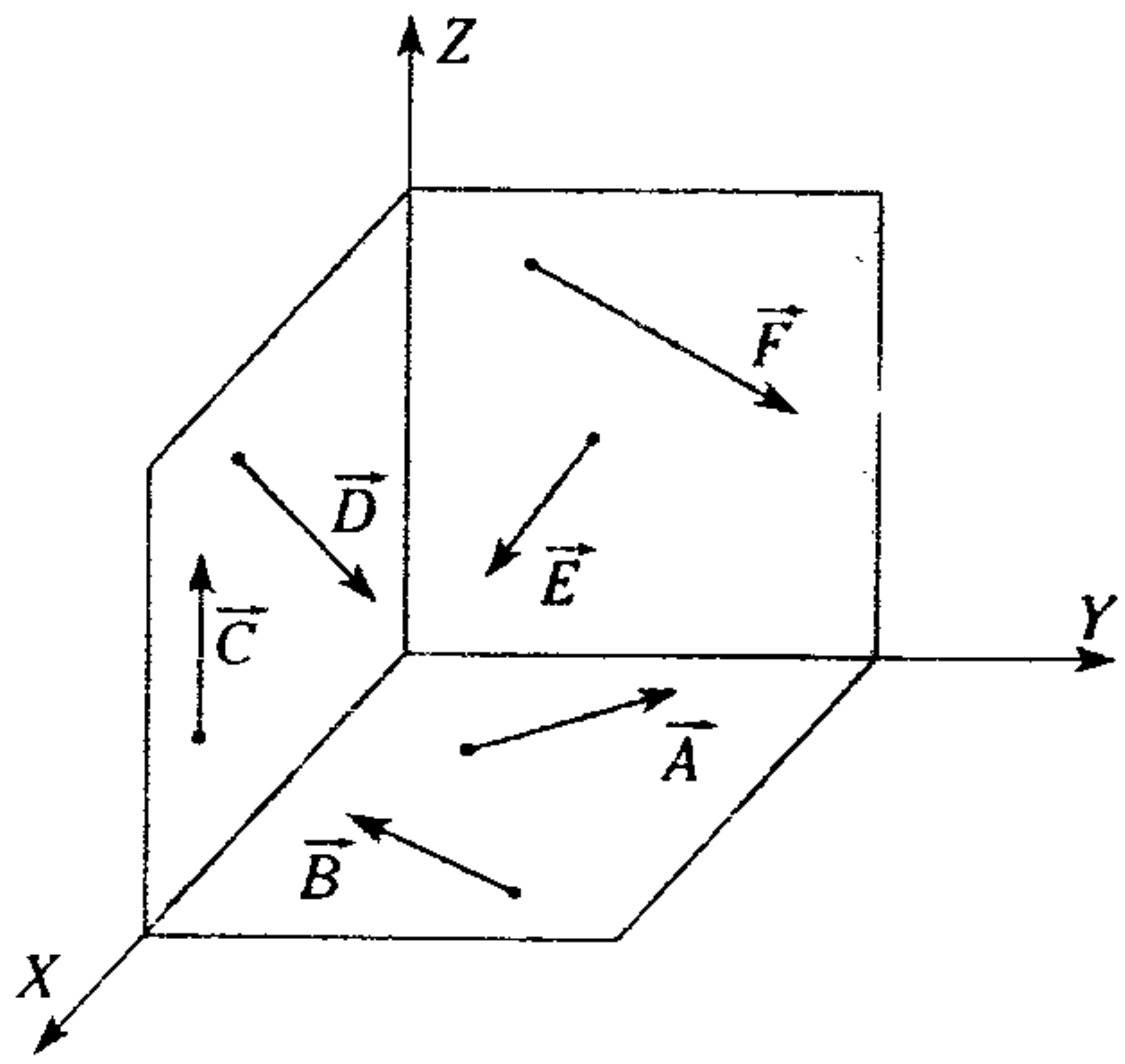


$\therefore\ \theta=37°$

Finalmente, tenemos que $\vec{A}=5\text{ cm}\,\underline{\lfloor 37°}$.

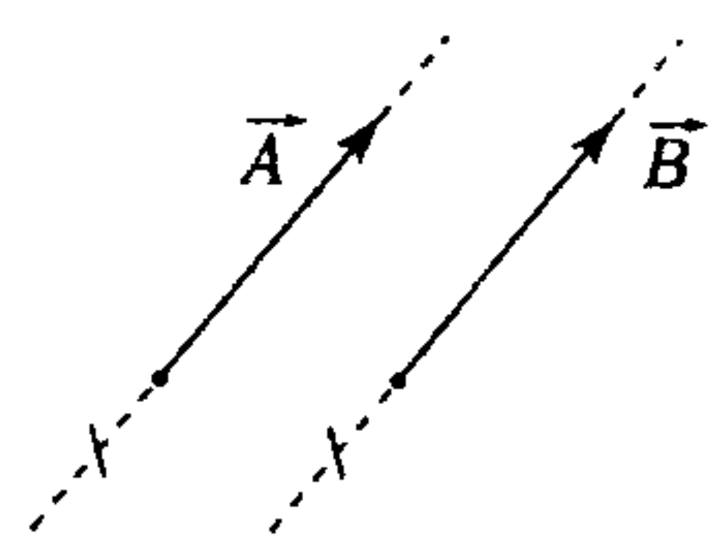
POSICIONES RELATIVAS Y PROPIEDADES DE LOS VECTORES

1. En el estudio de los vectores es común comparar un vector con otro. De esta manera, al encontrarles algunas similitudes les damos una denominación muy particular. Por ejemplo, a aquellos vectores que se encuentran contenidos en un mismo plano se les denomina **vectores coplanares**.

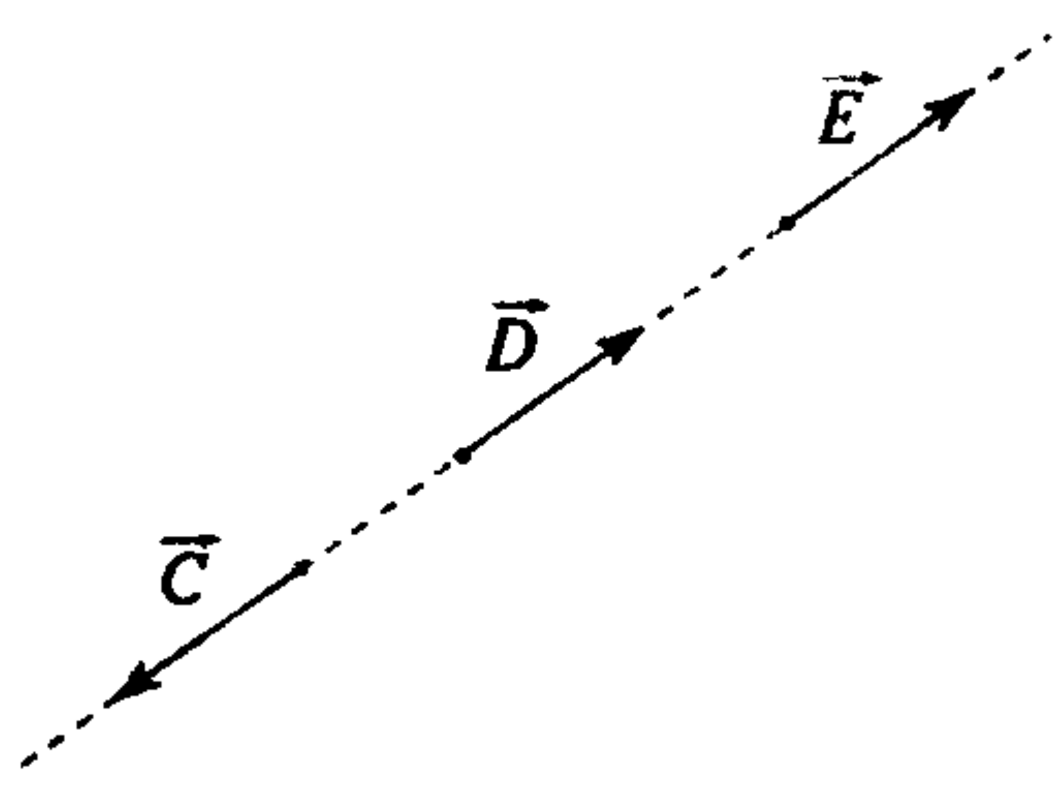


Los $\vec{A}$ y $\vec{B}$; $\vec{C}$ y $\vec{D}$; $\vec{E}$ y $\vec{F}$ vectores son coplanares, dos a dos, por encontrarse en el mismo plano XY, XZ y YZ respectivamente.

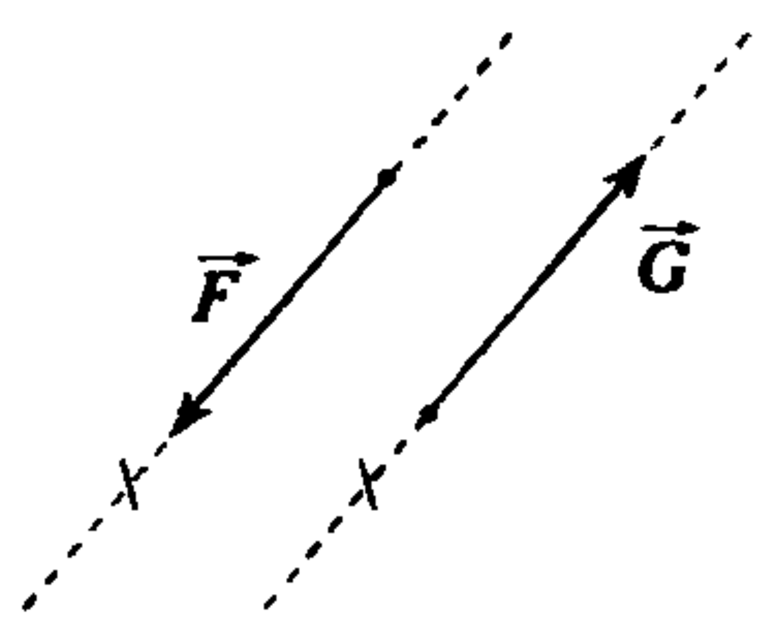
2. También encontraremos **vectores paralelos** cuando están contenidos en dos rectas paralelas; **colineales** cuando están contenidos en una misma recta y **contrarios** cuando sus direcciones difieren en 180°; se dice también que tienen direcciones contrarias.



Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos.

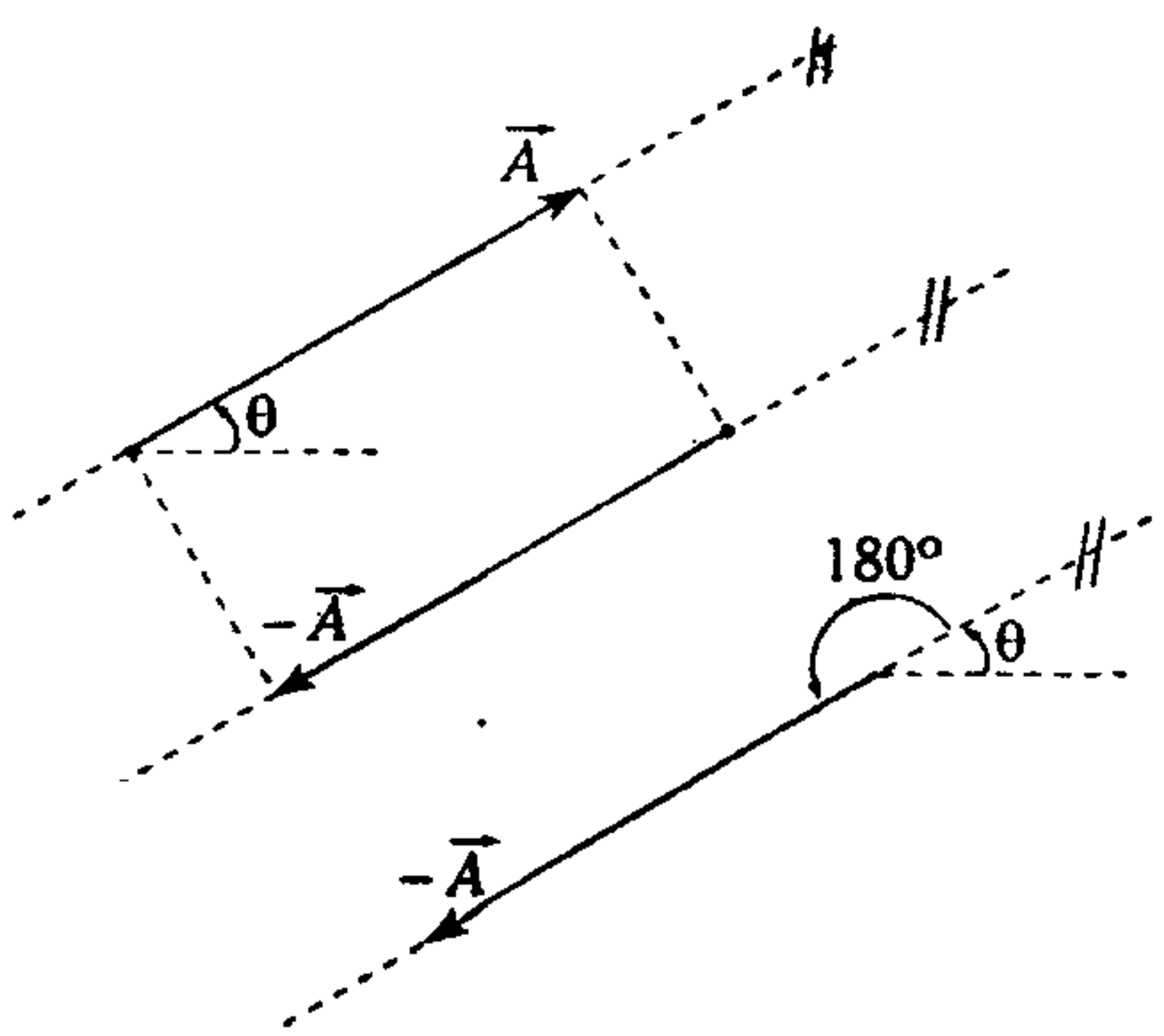


Los vectores $\vec{C}$, $\vec{D}$ y $\vec{E}$ son colineales.



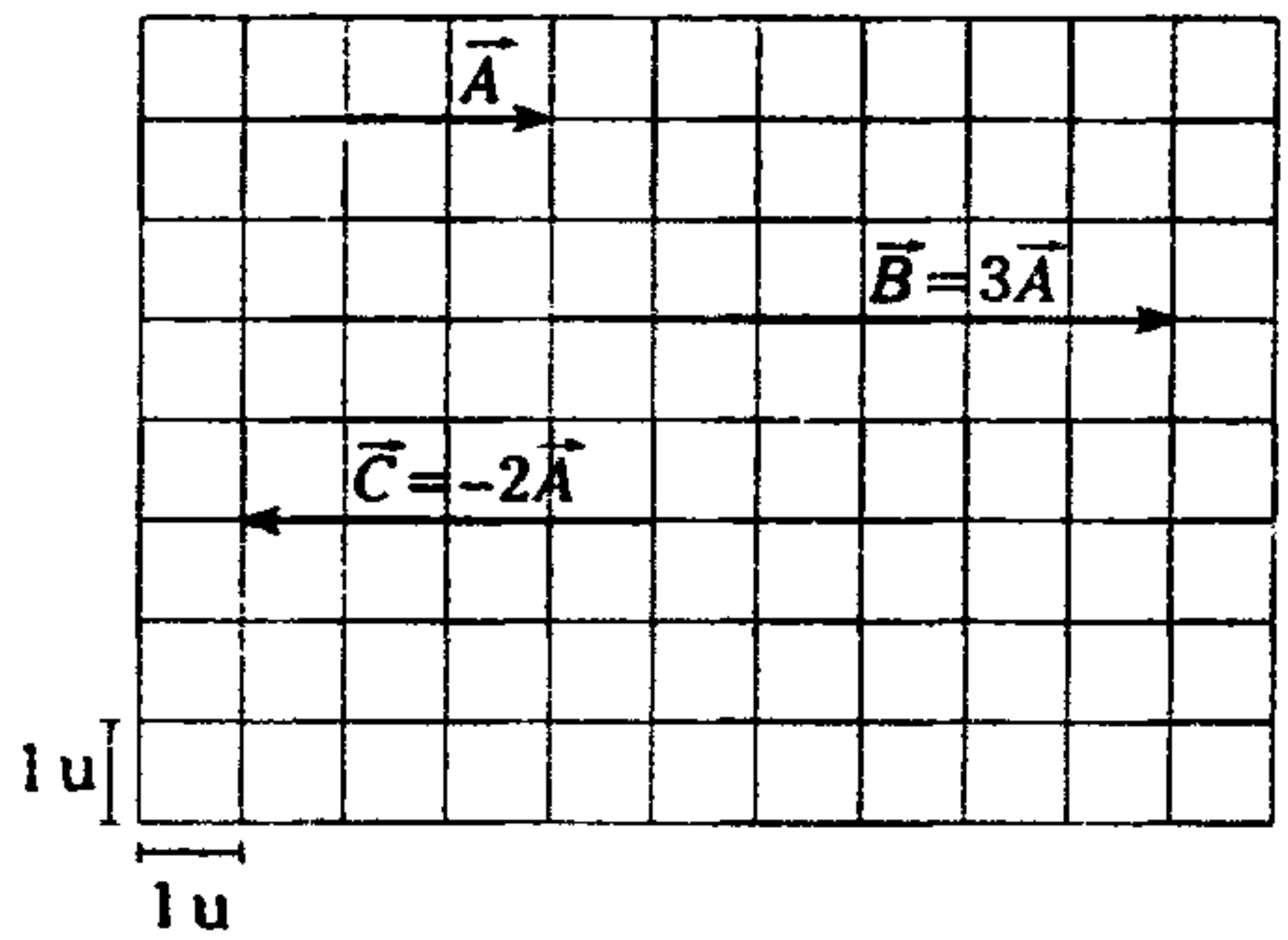
Los vectores $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son contrarios.

3. El opuesto de un vector, o llamado también el negativo de un vector; se define como aquel vector que tiene igual módulo y dirección contraria. Gráficamente, el opuesto del vector $\vec{A}$ $\left(\text{vector } -\vec{A}\right)$ se obtiene rotando al vector un ángulo de 180° o invirtiéndole su orientación.



4. Un vector $\vec{A}$ puede ser multiplicado por un número real m dando como resultado el vector $m\vec{A}$. Si m es positivo, el vector $m\vec{A}$ tiene igual dirección que $\vec{A}$. Si m es negativo, el vector $m\vec{A}$ es contrario a $\vec{A}$.

Sea $\vec{A}$ un vector de 2 u. Los vectores $\vec{B}=3\vec{A}$ y $\vec{C}=-2\vec{A}$ son los que se muestra en la gráfica.



- $\vec{B}=+3\vec{A}$ (El signo [+] indica que $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son de igual dirección)
- $\vec{C}=-2\vec{A}$ (El signo [–] indica que $\vec{C}$ y $\vec{A}$ son contrarios)

Por otro lado, podemos encontrar que al multiplicar un vector $\vec{A}$ por un número real m, el módulo del vector que se obtiene como resultado es $|m|A$ (El módulo del vector $m\vec{A}$ es $|m|$ veces el módulo del vector $\vec{A}$). Esto se puede apreciar claramente en el ejemplo anterior.

- $B=6\,u \Rightarrow B=\left|3\vec{A}\right|=3\left|\vec{A}\right|=3A$
- $C=4\,u \Rightarrow C=\left|-2\vec{A}\right|=2\left|\vec{A}\right|=2A$

En general, si $\vec{B}=m\vec{A}$

$$\Rightarrow \boxed{B=\left|m\vec{A}\right|=|m|\left|\vec{A}\right|=|m|A}$$

OPERACIONES CON VECTORES

En primer lugar, se debe saber que las operaciones que se realizan con los vectores no se rigen a las leyes (o reglas) de la Aritmética o el Álgebra común. El Álgebra vectorial tiene sus propias reglas y propiedades, además aquí solo vamos a definir las operaciones de adición y multiplicación de vectores.

Debemos tener presente que para poder sumar vectores estos deben tener igual unidad de medida.

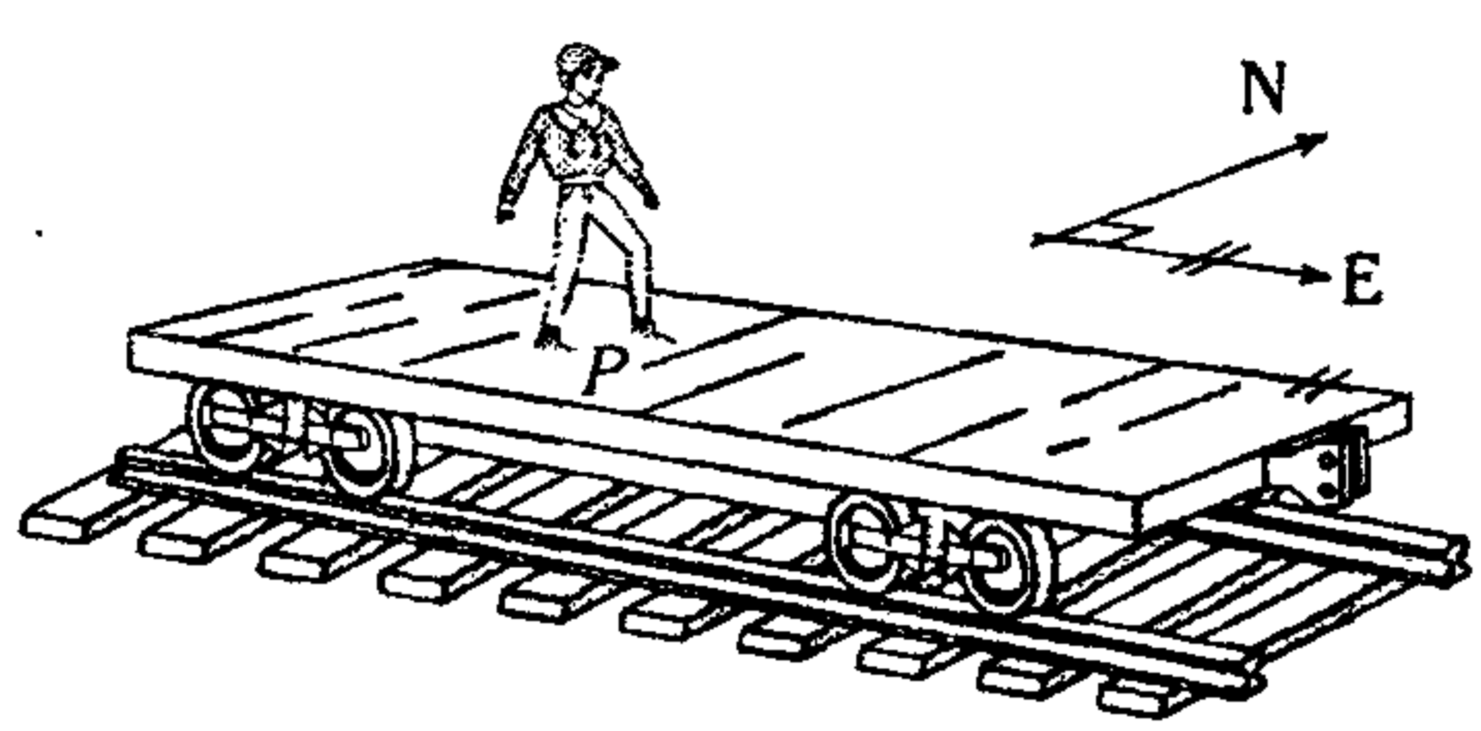
Por ejemplo, podemos sumar dos vectores que representen velocidad, pero no así un vector que represente velocidad con otro que represente desplazamiento. Recordemos que esto mismo obedecen las magnitudes escalares.

Cuando decimos que para sumar vectores deben tener la misma unidad de medida, no significa que deben representar a una misma magnitud necesariamente; podemos sumar vectores que representen a distintas magnitudes pero que tengan igual unidad de medida. Por ejemplo, el desplazamiento y la posición se miden en la misma unidad (metros); entonces, podemos sumar un vector que represente desplazamiento con otro que represente posición. Pero para la multiplicación de vectores no se requiere que tengan la misma unidad de medida.

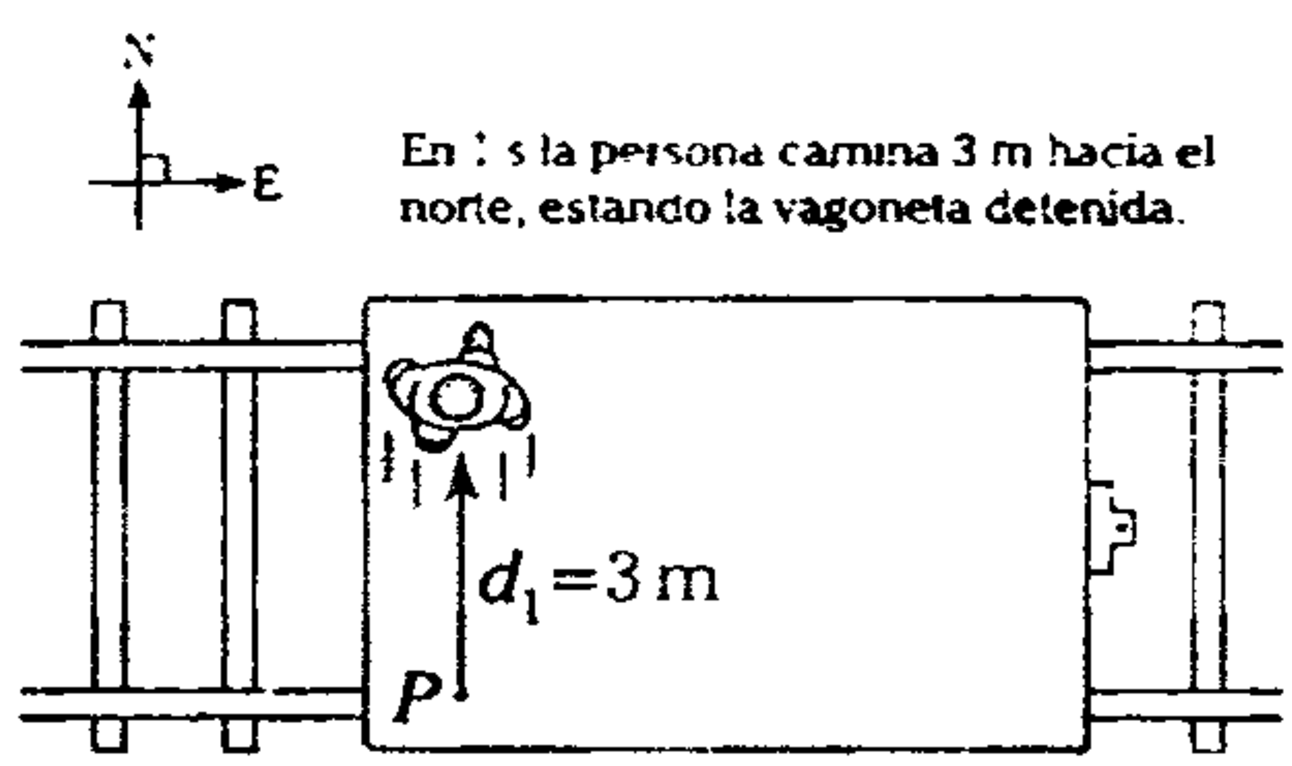
ADICIÓN DE VECTORES

La adición de vectores es el proceso en el cual dado dos o más vectores se obtiene el **vector suma** o llamado también **vector resultante**. El vector resultante reemplaza a los vectores que se suman (componentes) y se puede obtener a partir de un análisis gráfico y/o matemático. Veamos a continuación una forma de cómo podemos llegar a determinar el vector resultante.

Consideremos la siguiente situación: una persona se encuentra parada sobre una plataforma detenida en las vías de un tren, tal como se muestra en la figura siguiente:

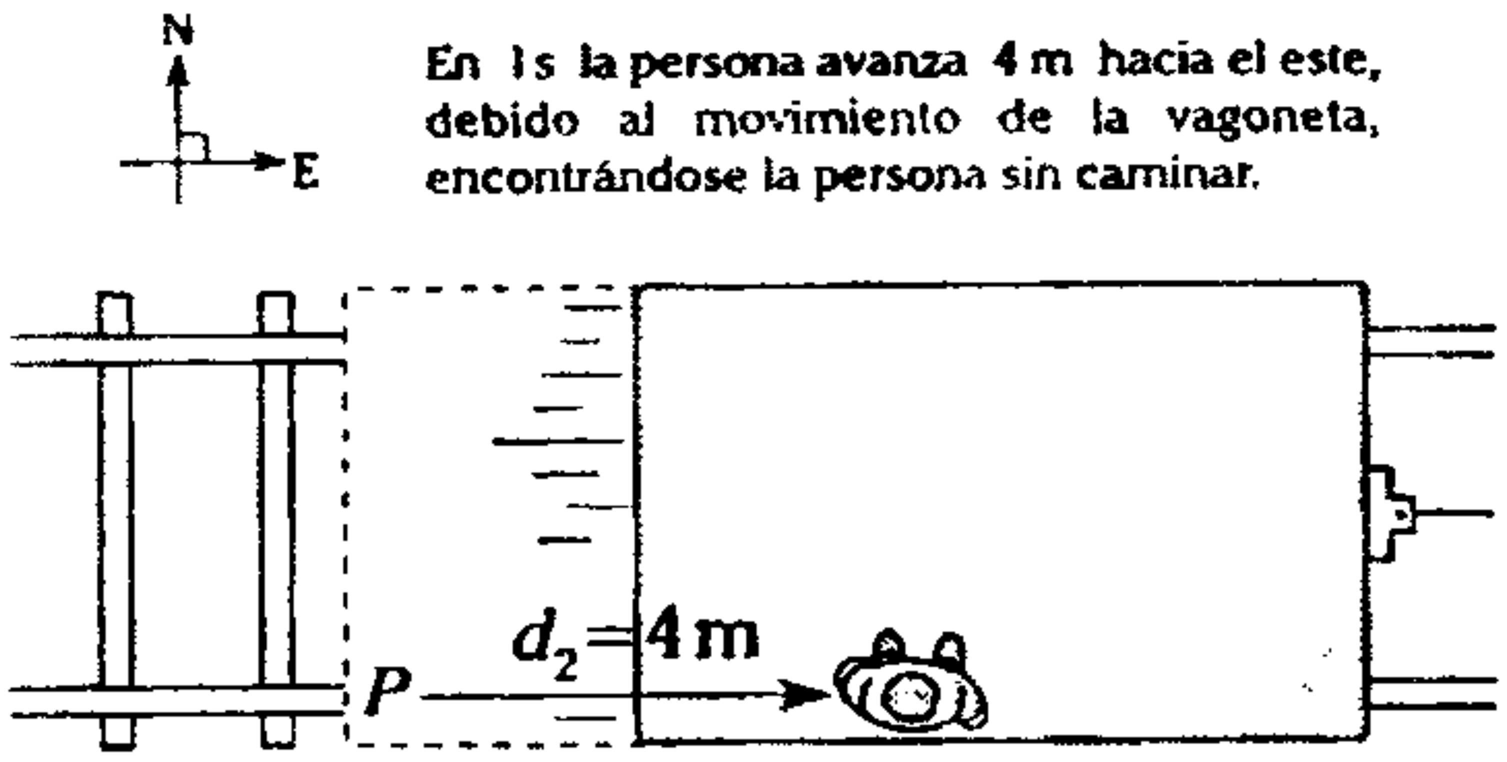


1. Si la persona camina 3 m hacia el norte, estando la plataforma en reposo, el desplazamiento $(\vec{d}_1)$ de la persona sería el que indica la figura (a).



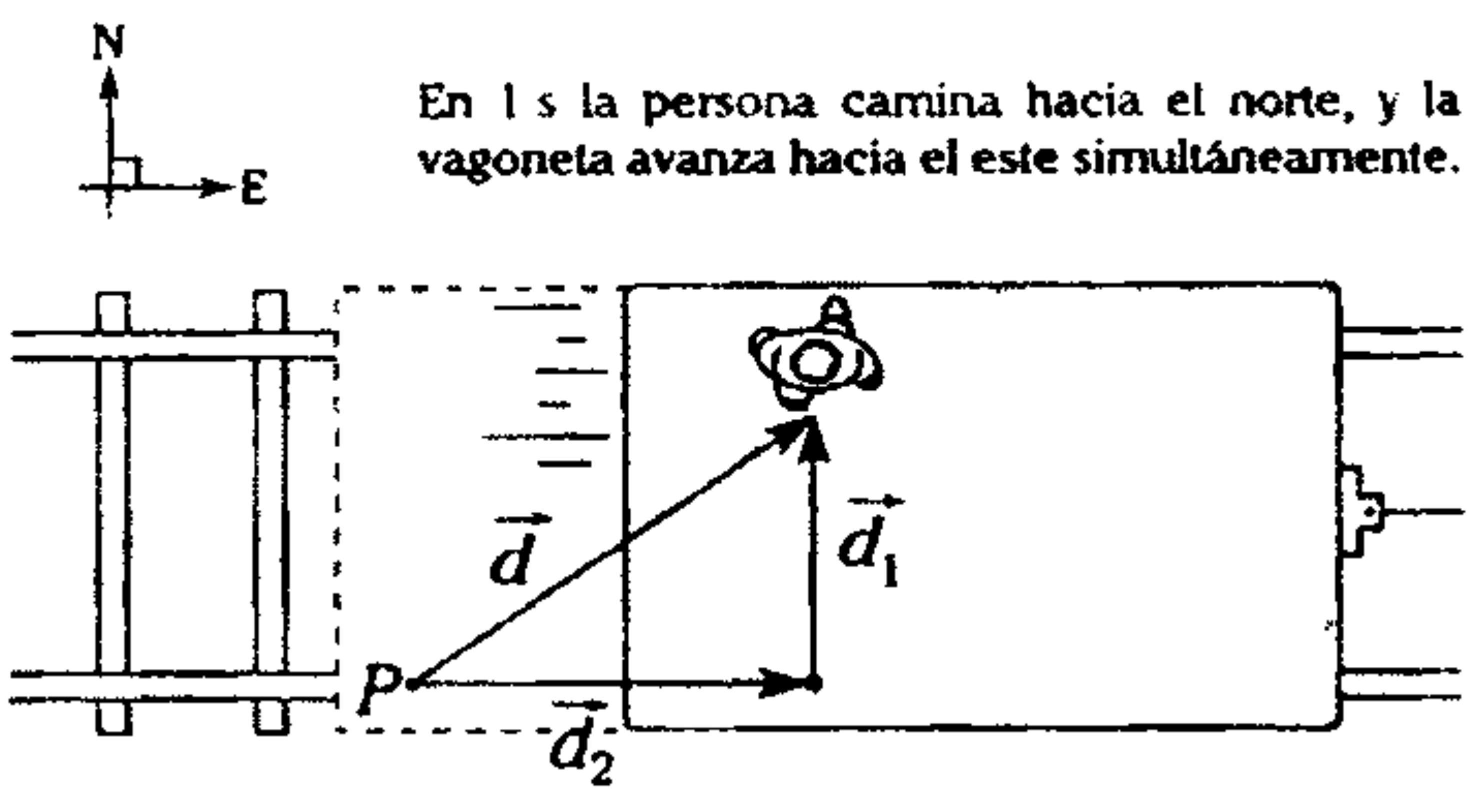
(a)

2. Si en el mismo intervalo de tiempo la plataforma avanza 4 m hacia el este, con la persona en reposo; entonces, para un observador en tierra, la persona realiza un desplazamiento $(\vec{d}_2)$ como indica la figura (b).



(b)

3. Si la persona y la plataforma se mueven simultáneamente durante el mismo tiempo, el desplazamiento de la persona $(\vec{d})$ sería el que se muestra en la figura (c), la cual se obtiene al superponer los desplazamientos $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ simultáneos.

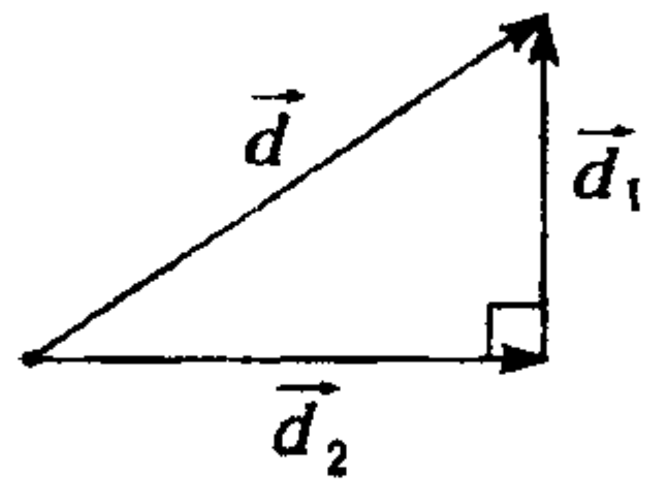


(c)

Del análisis realizado, podemos deducir que el desplazamiento $(\vec{d})$ de la persona es el resultado de los desplazamientos $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$. En el Álgebra vectorial es lo mismo decir que el desplazamiento $\vec{d}$ es la suma (o es la resultante) de los desplazamientos $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$. Por lo tanto

$$\boxed{\vec{d}=\vec{d}_1+\vec{d}_2}$$

Matemáticamente, el módulo del desplazamiento $\vec{d}$ se puede determinar aplicando el Teorema de Pitágoras, debido a que estos 3 desplazamientos definen para este caso un triángulo rectángulo.



$$d=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$$

$$d=\sqrt{(3)^2+(4)^2}$$

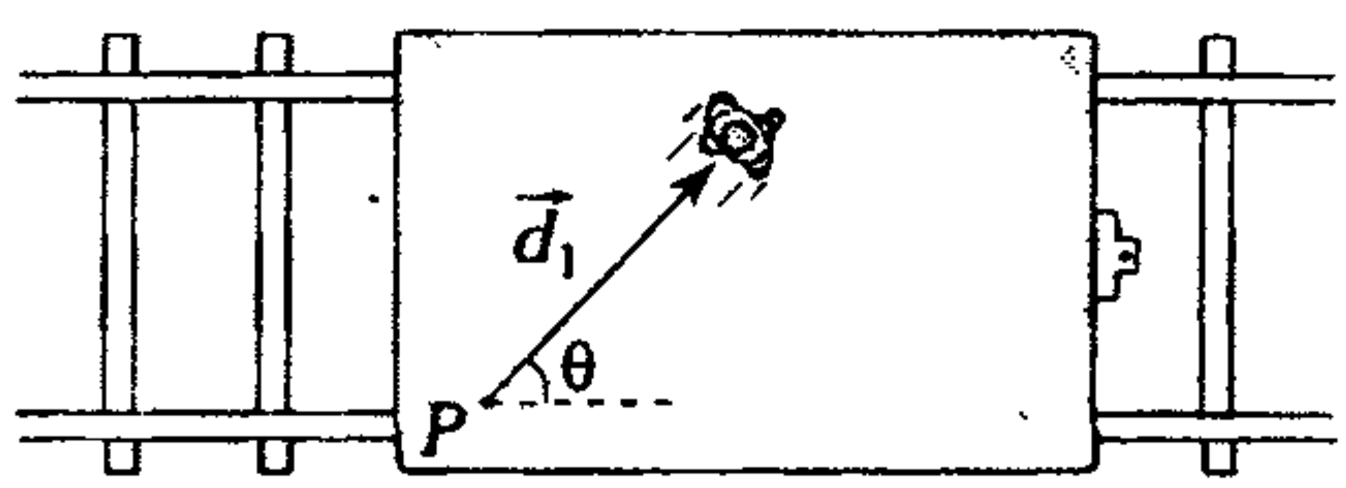
$$\therefore\ d=5\text{ m}$$

Nota

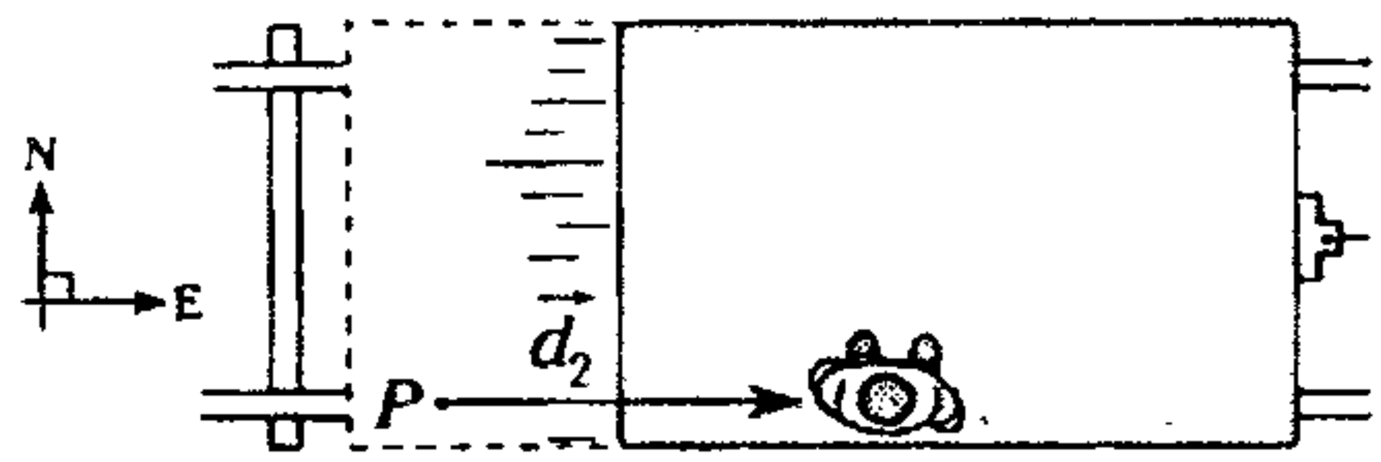
Al sumar los desplazamientos $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ de módulos 3 m y 4 m hemos obtenido un desplazamiento resultante $\vec{d}$ de módulo 5 m. Esto no concuerda con el sentido común de que podríamos obtener un desplazamiento resultante de 7 m. Por lo tanto, sumar vectorialmente no es lo mismo que sumar cantidades numéricas ordinarias (escalares); aquí para sumar, además de los módulos, importan también las direcciones.

Ahora veamos otro caso respecto del sistema anterior.

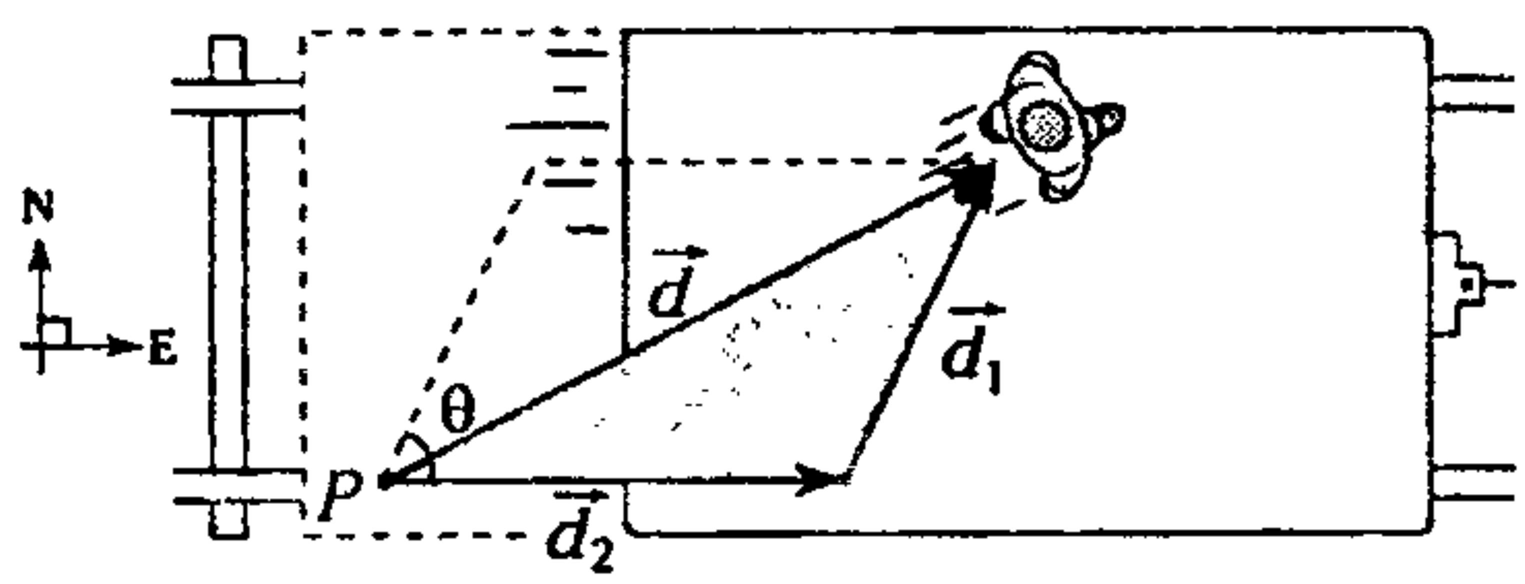
1. La persona camina d_1 sobre la plataforma estando ésta detenida, como se muestra en el gráfico.



2. La persona está detenida sobre la plataforma y ésta avanza d_2.



3. Si la persona camina y la plataforma avanza simultáneamente, superponemos (sumamos) los desplazamientos.



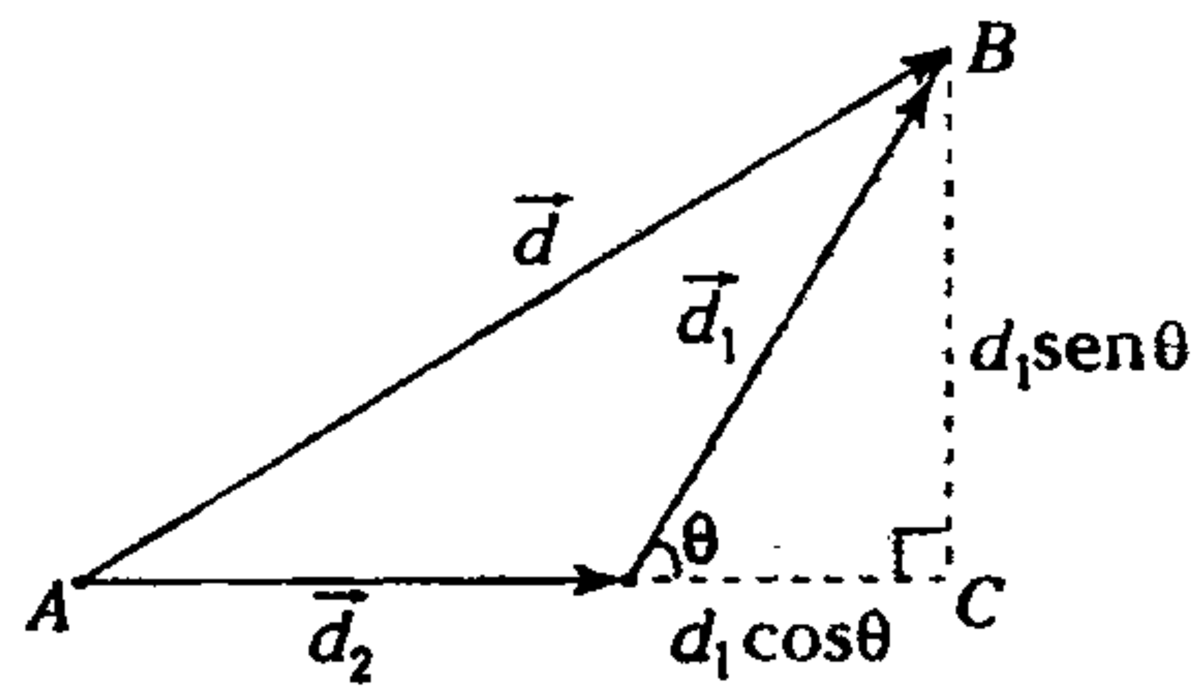
Del último gráfico, deducimos que el desplazamiento $\vec{d}$ es el resultado de los desplazamientos $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$ superpuestos en simultáneo.

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2}$$

Note que ahora los 3 desplazamientos no definen un triángulo rectángulo; por lo que, para determinar el módulo de $\vec{d}$, se debe hacer ciertas construcciones.

Geométricamente, podemos plantear lo siguiente:



El módulo del desplazamiento $\vec{d}$ se puede determinar aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo ABC.

$$d^2 = (d_1 \operatorname{sen}\theta)^2 + (d_2 + d_1\cos\theta)^2$$

$$d^2 = d_1^2 \operatorname{sen}^2\theta + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\theta + d_1^2\cos^2\theta$$

$$d^2 = d_1^2 \underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\theta$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\theta$$

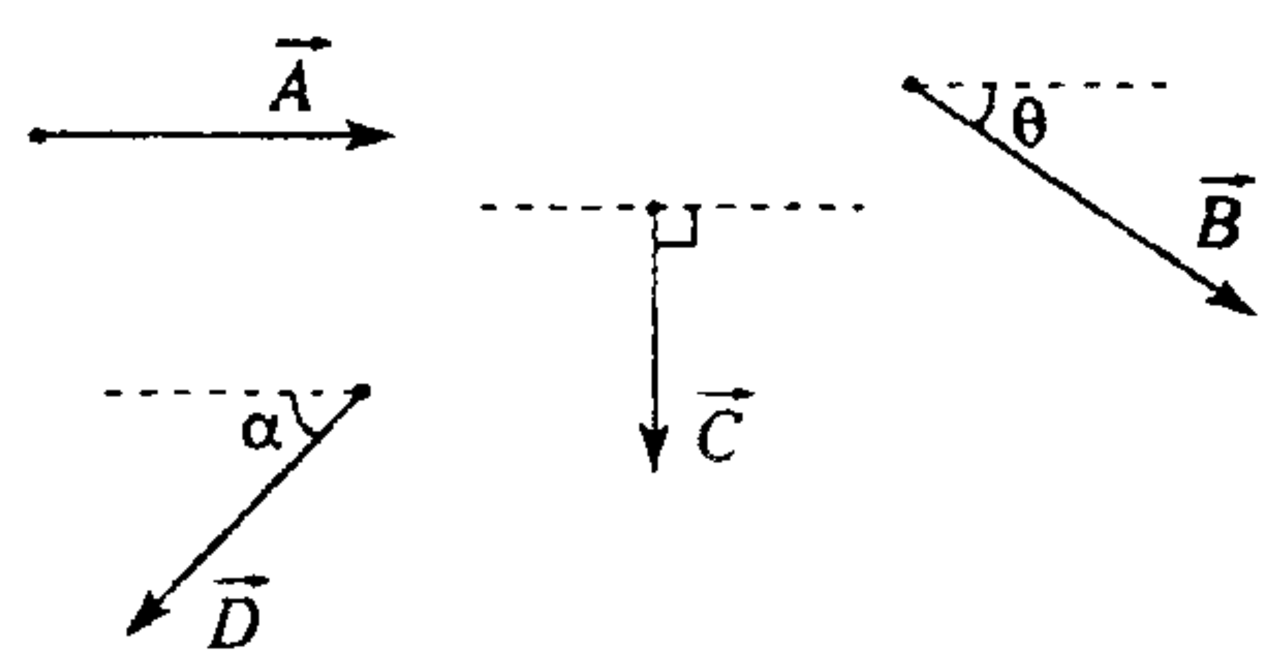
Por lo tanto

$$\boxed{d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\theta}}$$

Nótese que $\vec{d}_2$ y $\vec{d}_1$ están dispuestos, geométricamente en forma sucesiva, mientras que $\vec{d}$ cierra dicha secuencia, uniendo el origen de $\vec{d}_2$ con el extremo de $\vec{d}_1$.

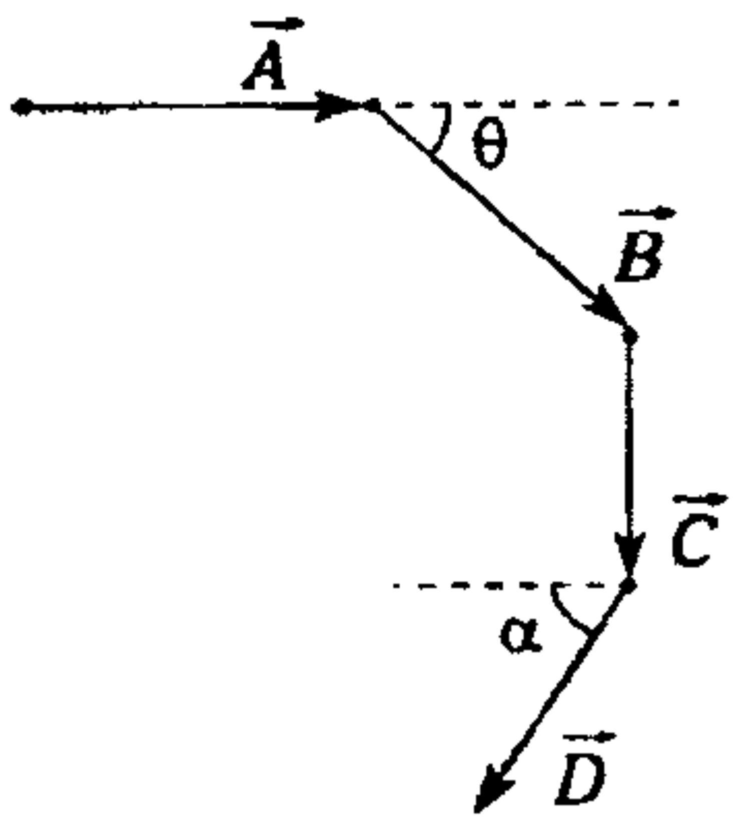
Este análisis geométrico que hemos realizado para determinar la resultante de dos vectores es llamado **método del triángulo** que, en forma general, cuando se quiere sumar más de dos vectores, se llama **método del polígono**, el cual detallaremos a continuación.

Del siguiente conjunto de vectores, obtengamos su resultante.

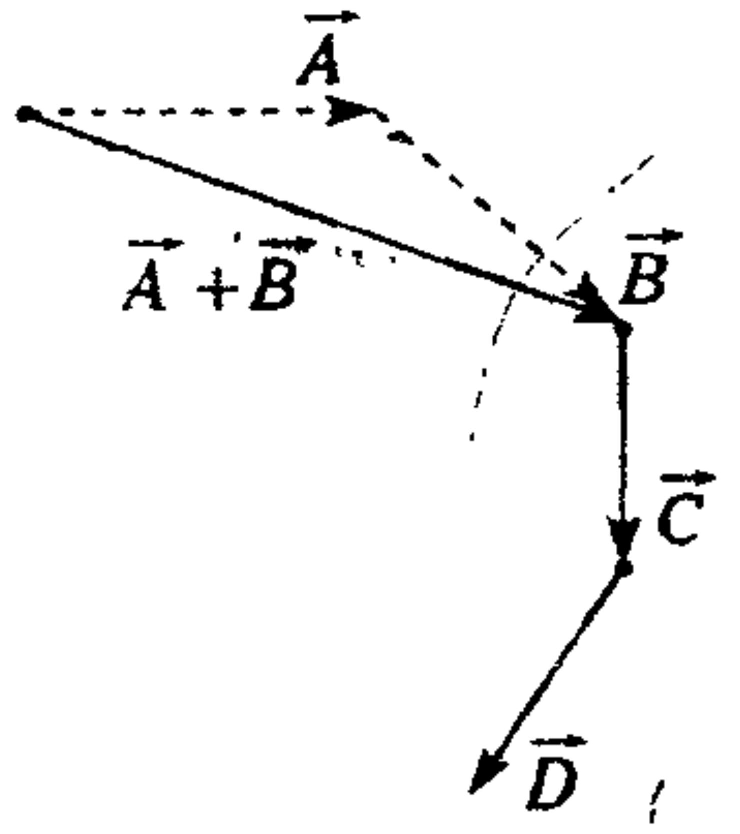


Primeramente, debemos trasladar los vectores y colocarlos uno a continuación de otro, de tal forma que el extremo de un vector coincida con el origen del siguiente. El orden en el cual se grafiquen no importa, pero sí respetar la dirección de los vectores.

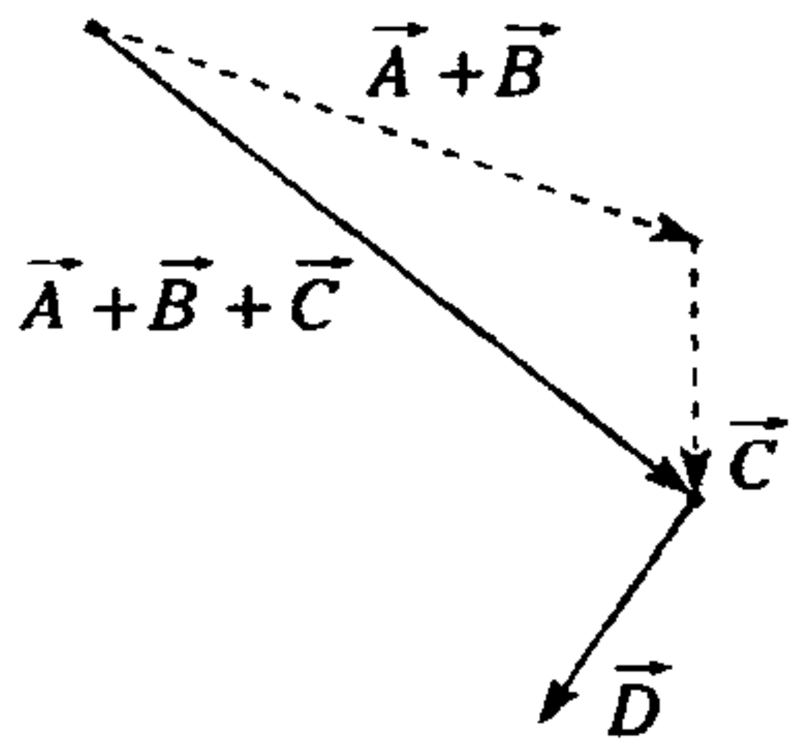
a.



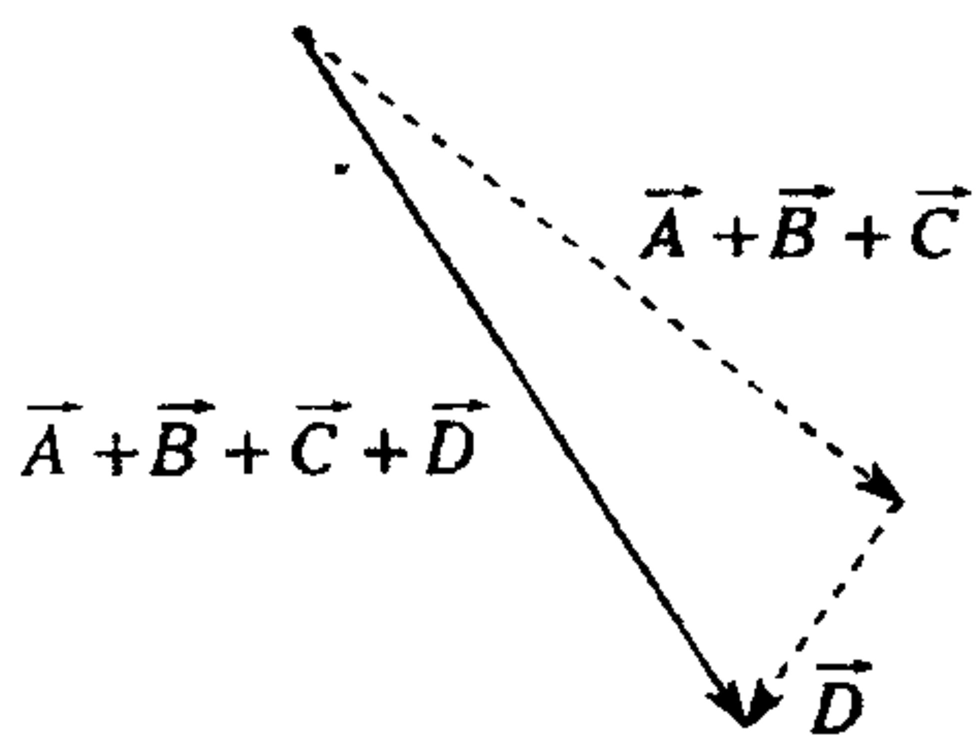
b.



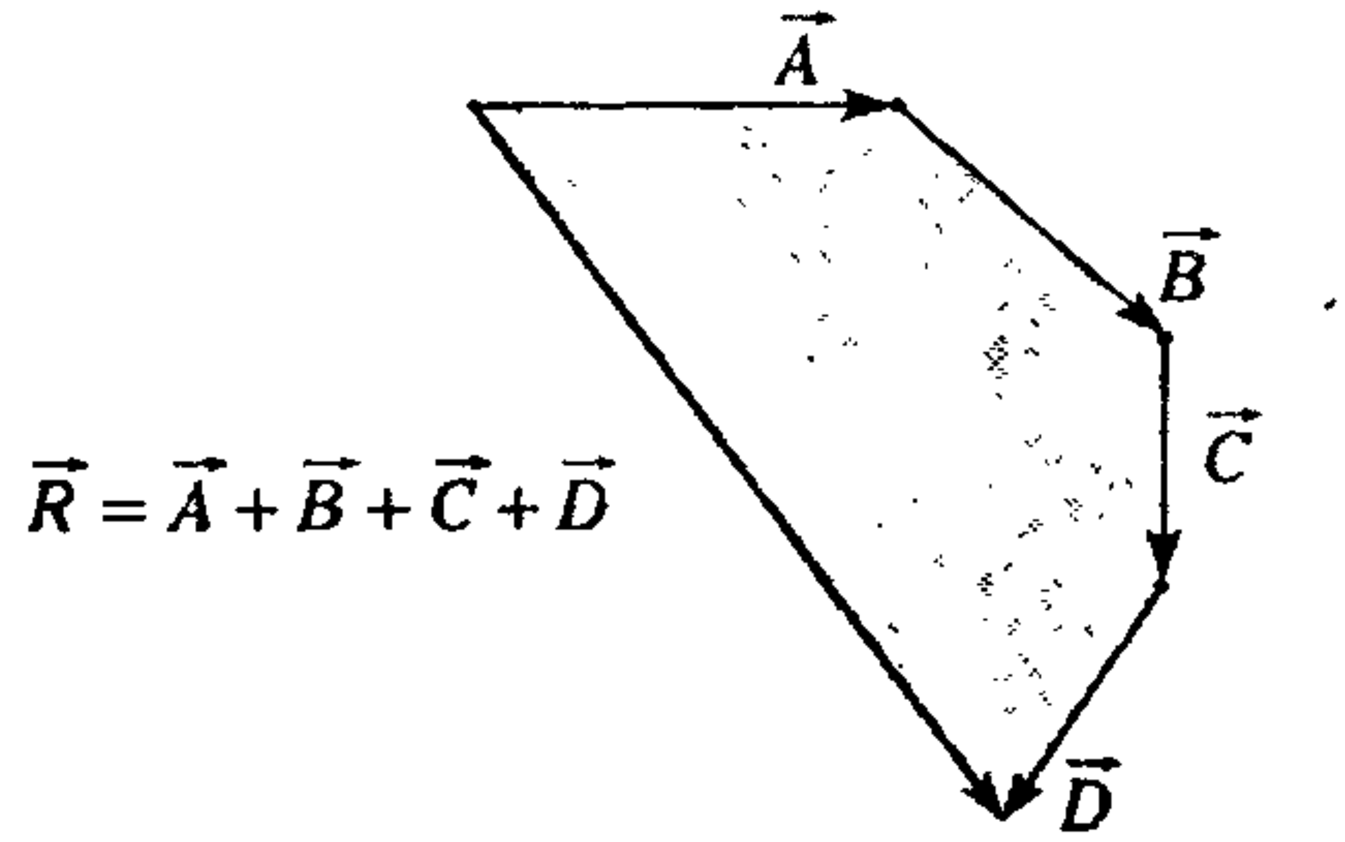
c.



d.

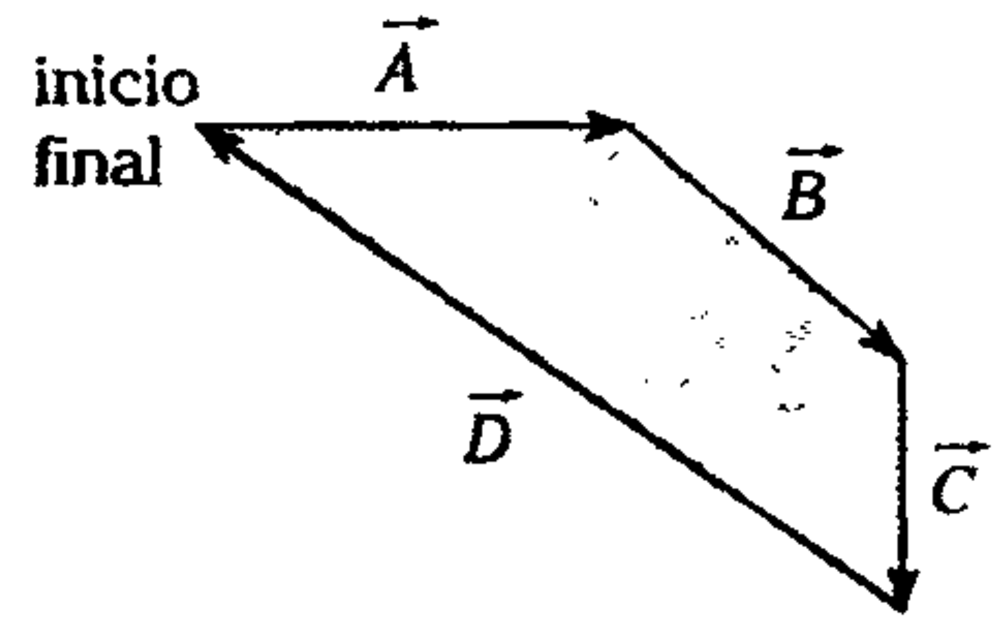


Tomando a los vectores de dos en dos, vamos sumándolos de acuerdo con lo que se ha realizado en el método del triángulo y finalmente concluimos que la suma de todos los vectores, es decir, el vector resultante, se obtiene uniendo el origen del primer vector con el extremo del último vector y dirigido del primero hacia el último.



Observación

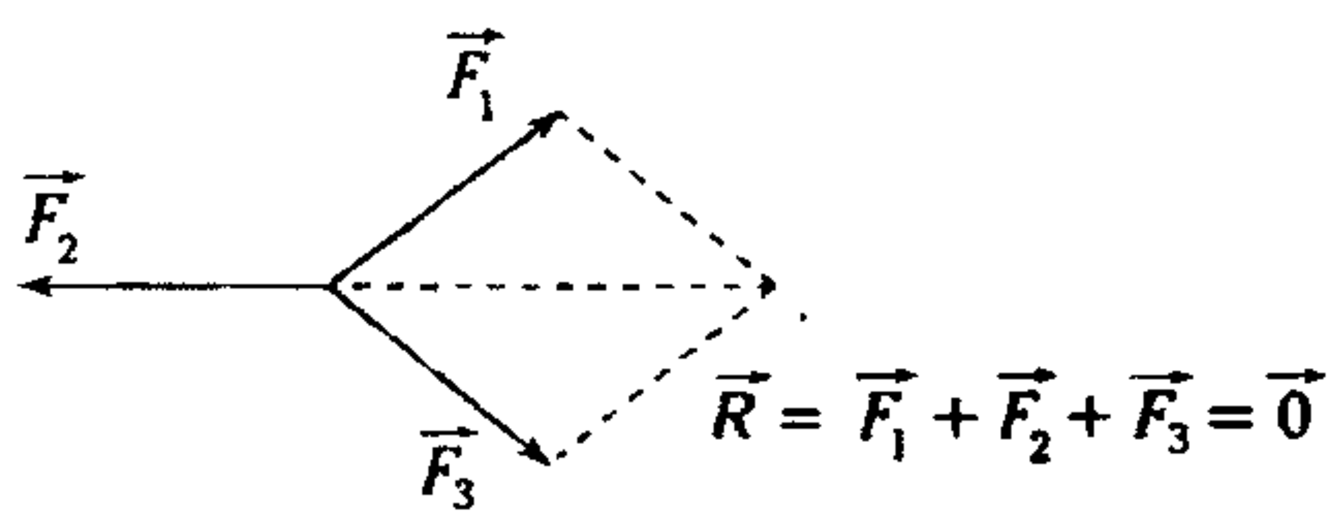
Si con los vectores dados se forma una poligonal cerrada, es decir, el origen del primer vector coincide con el extremo del último; entonces, el vector resultante $(\vec{R})$ es un vector nulo $(\vec{0})$.

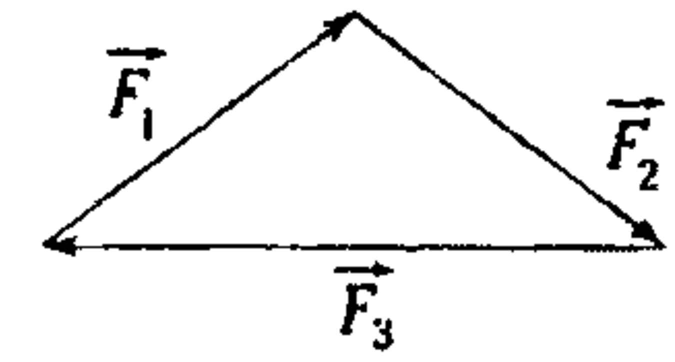


En este caso

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}=\vec{0}$$

con tres vectores no paralelos, cuya resultante sea nula, podemos formar un triángulo. Esto encuentra aplicación en Estática, para una partícula en reposo sometida a tres fuerzas concurrentes.



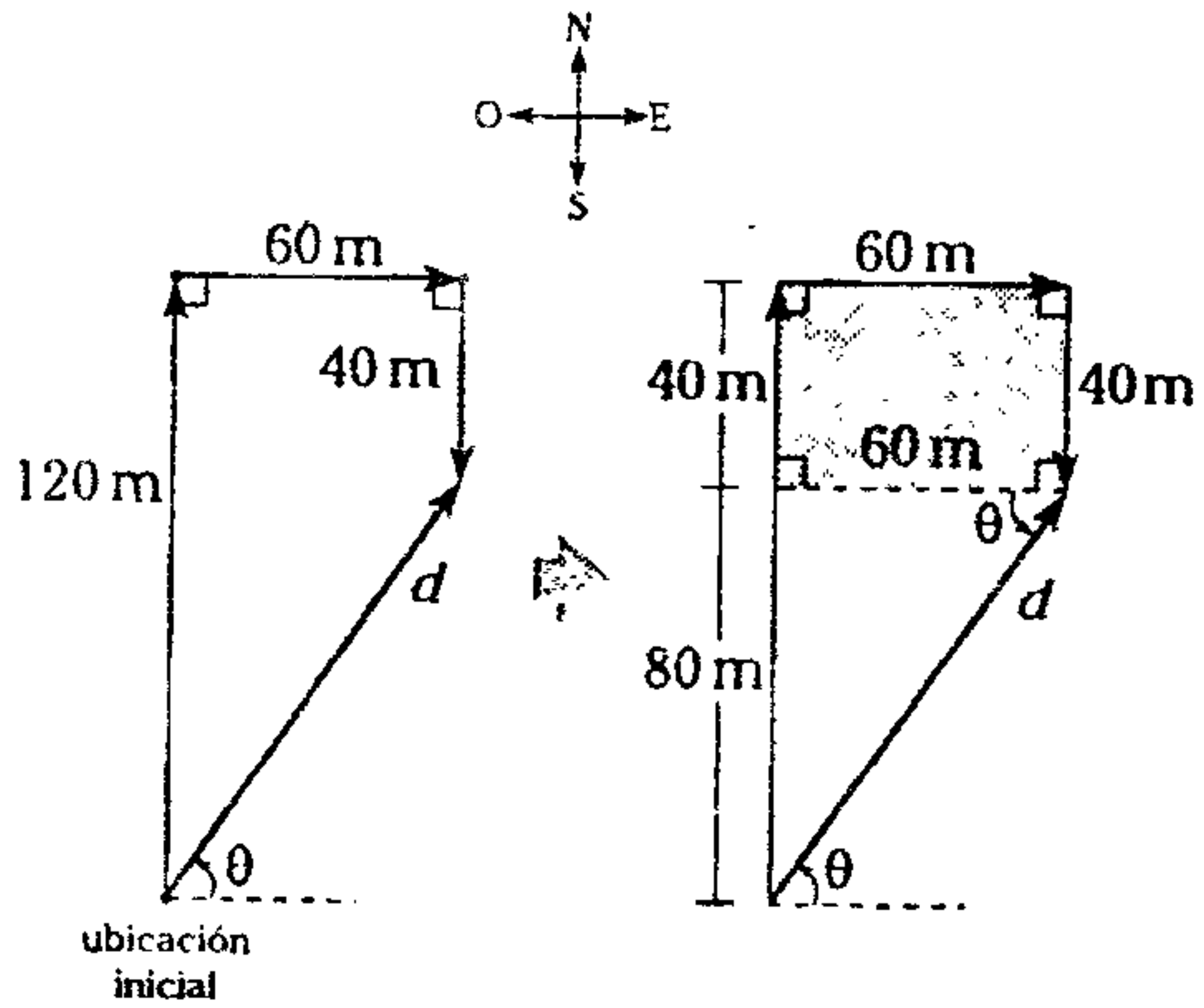


Ejemplo 2

Determine el módulo y la dirección del desplazamiento total que experimenta un colibrí, si primero se desplaza 120 m hacia el norte, luego 60 m hacia el este y finalmente 40 m hacia el sur.

Resolución

Grafiquemos primero cada uno de los desplazamientos seguidos por el colibrí. El desplazamiento total será la suma vectorial de cada uno de los desplazamientos parciales.



Nos piden el módulo del desplazamiento $|\vec{d}|$ y θ, para ello aprovechamos la figura que se ha formado con los desplazamientos, la cual resulta ser un trapecio rectángulo.

En él se aprovecha el trazo de una altura, porque, debido a ello, se forma un rectángulo y un triángulo rectángulo, y se determina en el triángulo rectángulo, aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$d=\sqrt{(80)^2+(60)^2}$$

$$\therefore\ d=100\text{ m}$$

La dirección del vector desplazamiento $(\vec{d})$ viene dada por el ángulo θ y de la figura se tiene que

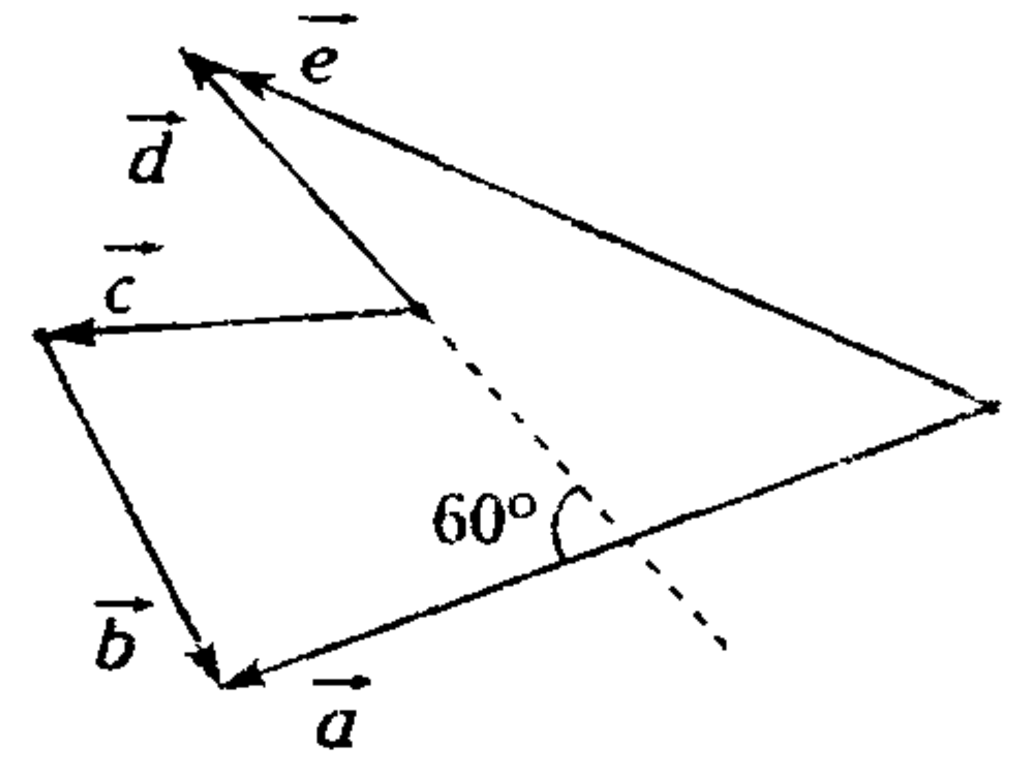
$$\tan\theta=\frac{80}{60}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \theta\simeq 53^\circ$$

Finalmente, $\vec{d}=100\text{ m}\,\underline{|53^\circ}$

Ejemplo 3

Dado el siguiente conjunto de vectores donde $|\vec{a}|=5\text{ u}$ y $|\vec{d}|=3\text{ u}$, determine el módulo de la resultante de los vectores mostrados.



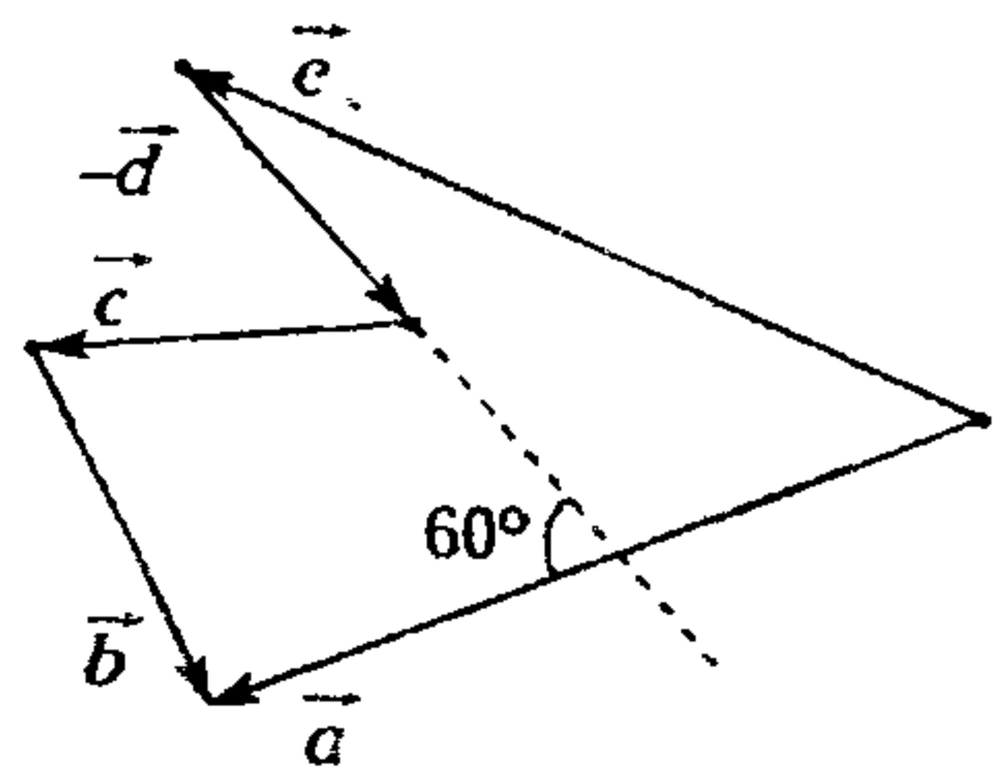
Resolución

El vector resultante $(\vec{R})$ se determina como la suma de todos los vectores, así

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e} \qquad \text{(I)}$$

y nos piden $|\vec{R}|$; ahora debemos buscar alguna relación entre los vectores dados y nos convendría colocar a los vectores $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $\vec{e}$ en función de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$, ya que de estos últimos se conoce sus módulos.

Acomodando la figura, hemos colocado el opuesto del vector $\vec{d}$, porque nos damos cuenta que se forma una poligonal en donde el vector $\vec{a}$ es la resultante de los otros cuatro vectores.



$$\Rightarrow\ \vec{a}=\vec{e}+(-\vec{d})+\vec{c}+\vec{b}$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}+\vec{d}=\vec{e}+\vec{c}+\vec{b} \qquad \text{(II)}$$

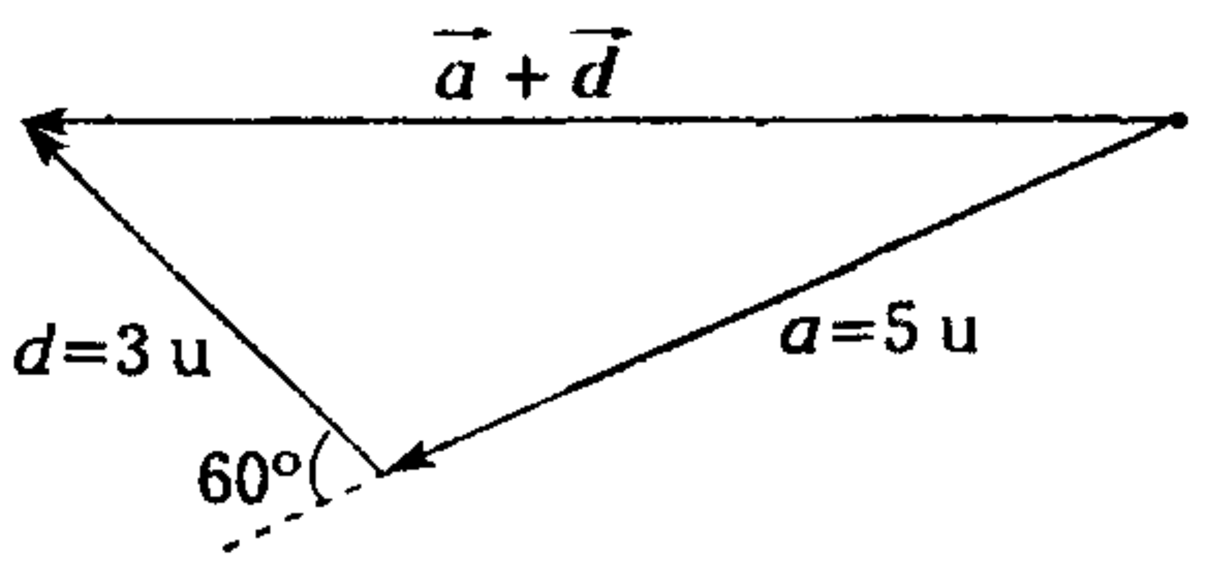
Reemplazando la expresión (II) en (I)

$$\Rightarrow\ \vec{R}=\vec{a}+\vec{d}+\underbrace{\vec{b}+\vec{c}+\vec{e}}_{\vec{a}+\vec{d}}$$

$$\Rightarrow\ \vec{R}=2(\vec{a}+\vec{d}) \Rightarrow |\vec{R}|=2|\vec{a}+\vec{d}| \qquad \text{(III)}$$

Solo queda determinar el módulo de la resultante de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$. Note que estos vectores forman entre sí 60°.

Trasladando a $\vec{d}$, de tal forma que su origen coincida con el final de $\vec{a}$, aplicamos el método del triángulo.



$$|\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{a^2+d^2+2ad\cos 60°}$$

$$|\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{5^2+3^2+2(5)(3)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore\ |\vec{a}+\vec{d}|=\sqrt{49}=7\text{ u}$$

Reemplazando en (III)

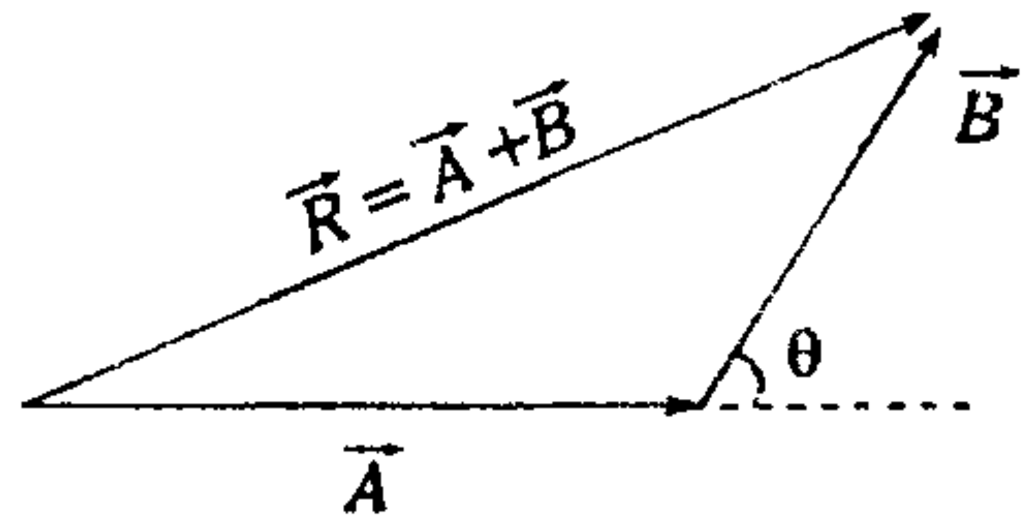
$$|\vec{R}|=2(7\text{ u})$$

$$\therefore\ R=14\text{ u}$$

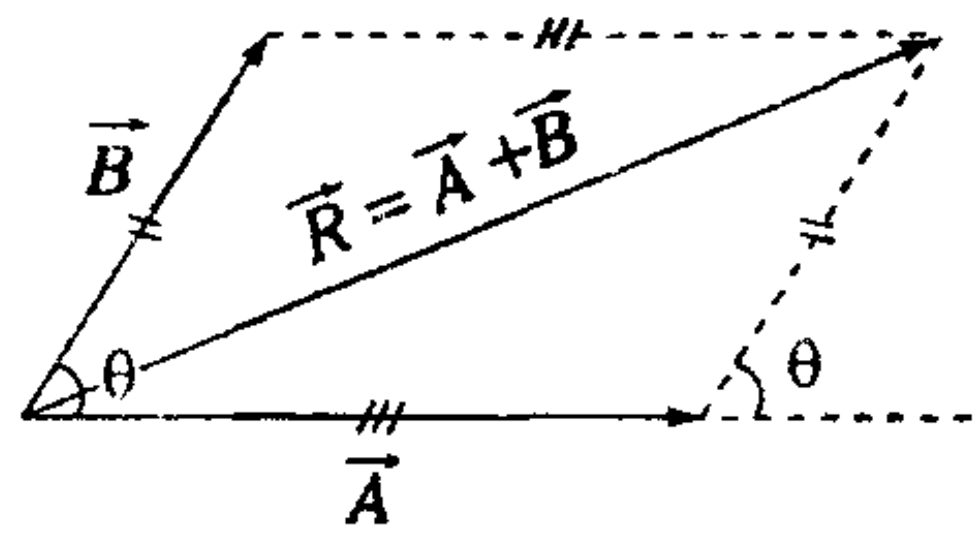
Otra forma de obtener el vector resultante de dos vectores es el llamado **método del paralelogramo** que a continuación detallaremos.

Método del Paralelogramo

Este método es una variante del método del triángulo; sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sumados por el método del triángulo.

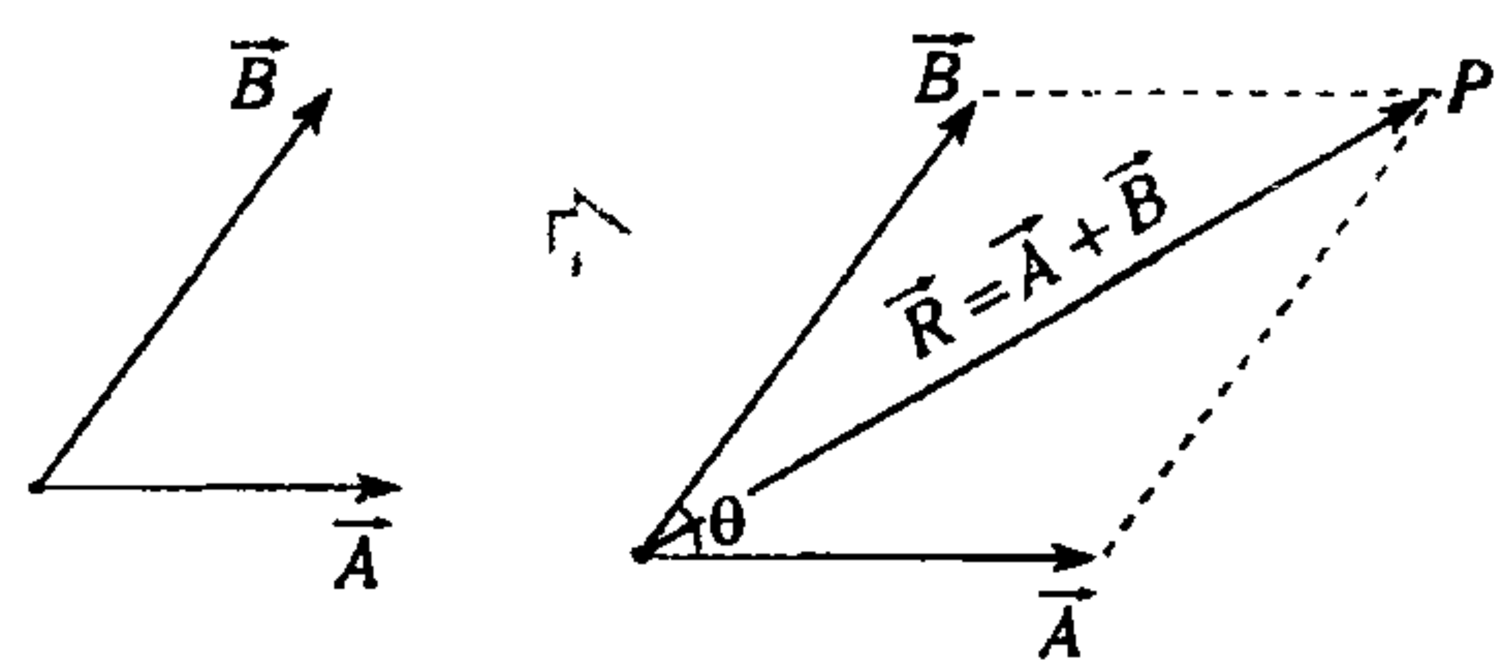


Si trasladamos al vector $\vec{B}$ tal que su origen coincida con el origen del vector $\vec{A}$, notaremos que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y la resultante definen un paralelogramo.



Por consiguiente, dados 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para determinar su suma se hace coincidir los orígenes y a partir del extremo de cada uno trazamos paralelas a cada uno de ellos, interceptándose en el punto P.

Luego se traza un vector desde el origen común hacia P, este vector es el vector suma o resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

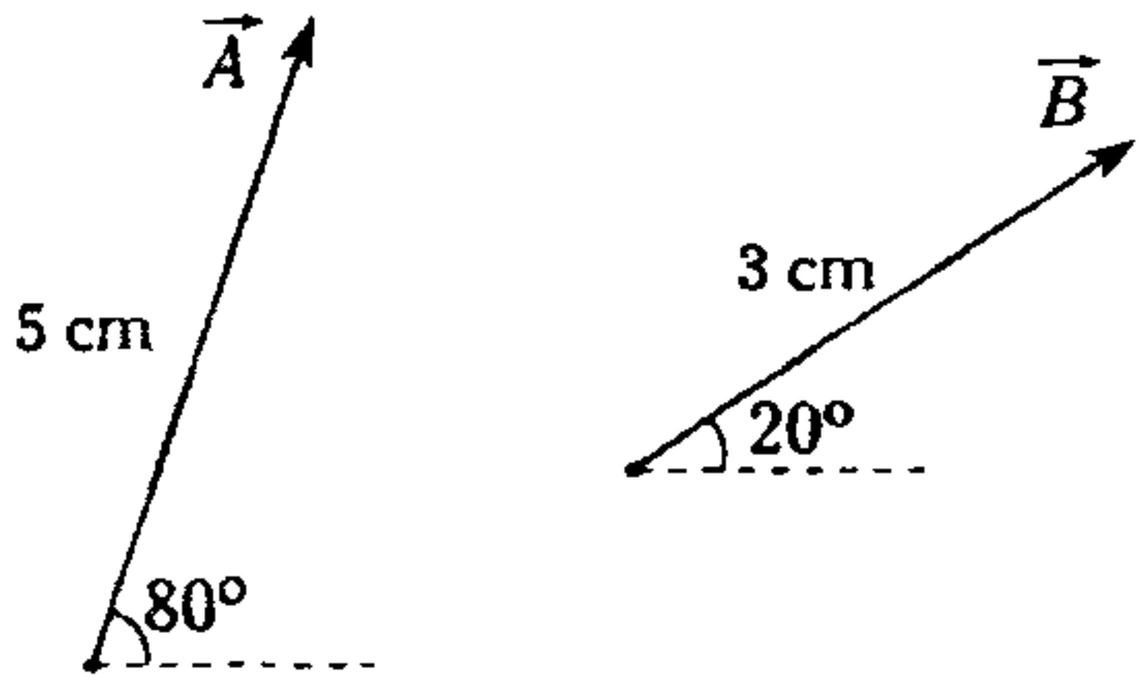


El módulo de la resultante se determina aplicando la siguiente ecuación que anteriormente ya se demostró

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta} \qquad \text{(I)}$$

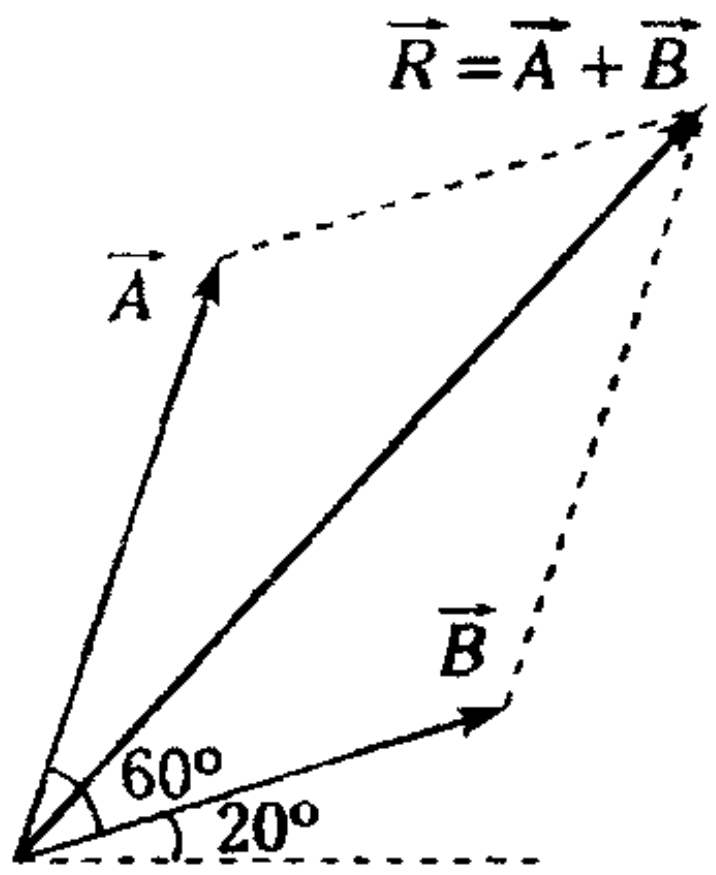
Ejemplo 4

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ determinemos el vector resultante y su respectivo módulo.



Resolución

Primero hacemos coincidir los orígenes de los vectores, luego formamos el paralelogramo y, para el módulo de la resultante, aplicamos



$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos 60°}$$

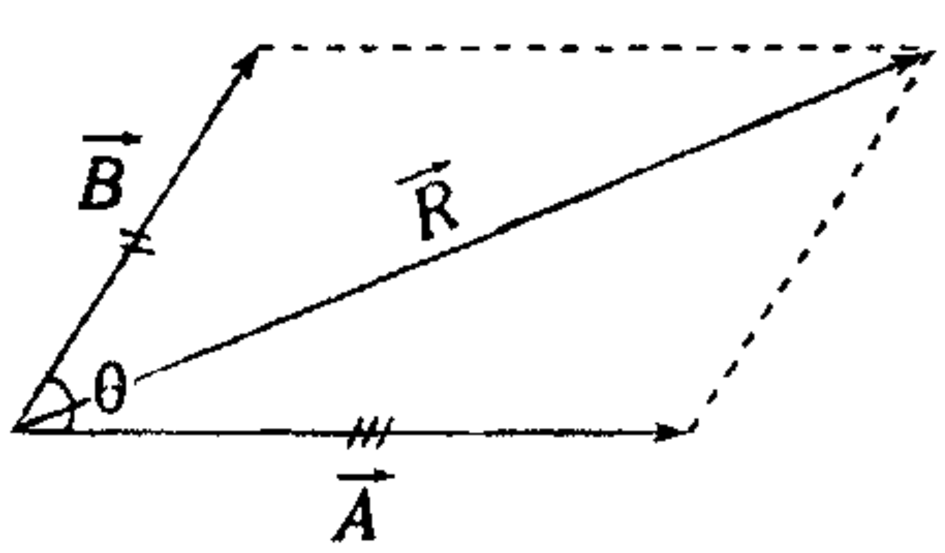
$$R=\sqrt{(5)^2+(3)^2+2(5)(3)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$R=\sqrt{49}$$

$$\therefore\ R=7\text{ cm}$$

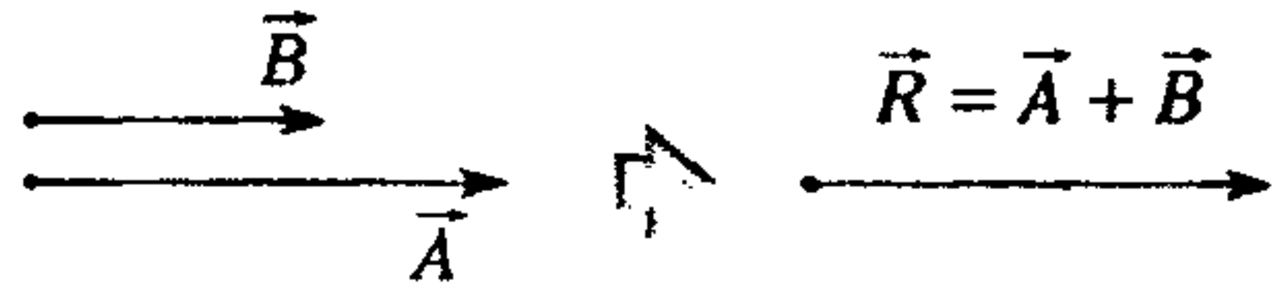
Casos Particulares

Del caso general del método del paralelogramo.



Se tiene los siguientes casos particulares:

1. Si $\theta=0°$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serían paralelos, de igual dirección. La resultante sería así



De la ecuación (I)

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 0°}_{1}}$$

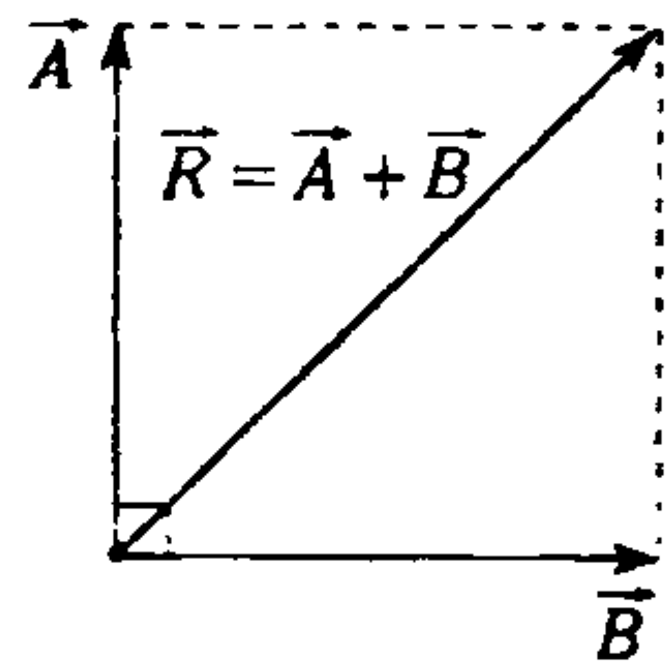
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB}$$

$$R=\sqrt{(A+B)^2}$$

$$\therefore\ R=A+B$$

El módulo de la resultante sería la suma de los módulos de los vectores.

2. Si $\theta=90°$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serían mutuamente perpendiculares. Entonces, el módulo de la resultante se obtendrá como

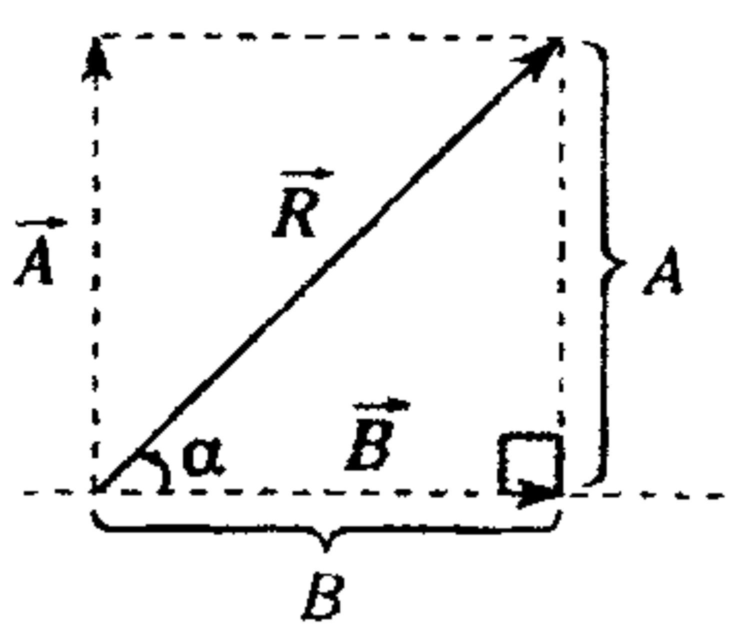


$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 90°}_{0}}$$

$$\therefore\ R=\sqrt{A^2+B^2}$$

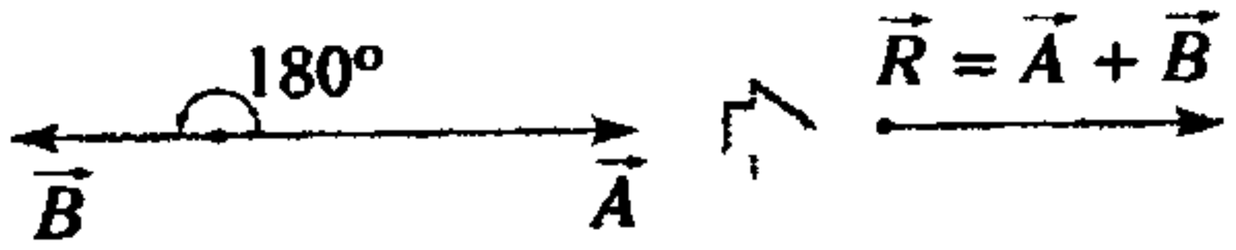
(Teorema de Pitágoras)

En este caso, la dirección de la resultante está definida por la medida del ángulo α y será



$$\tan\alpha=\frac{A}{B}$$

3. Si $\theta = 180°$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ serían opuestos. El módulo de la resultante se obtiene como



$|\vec{A}|>|\vec{B}|$

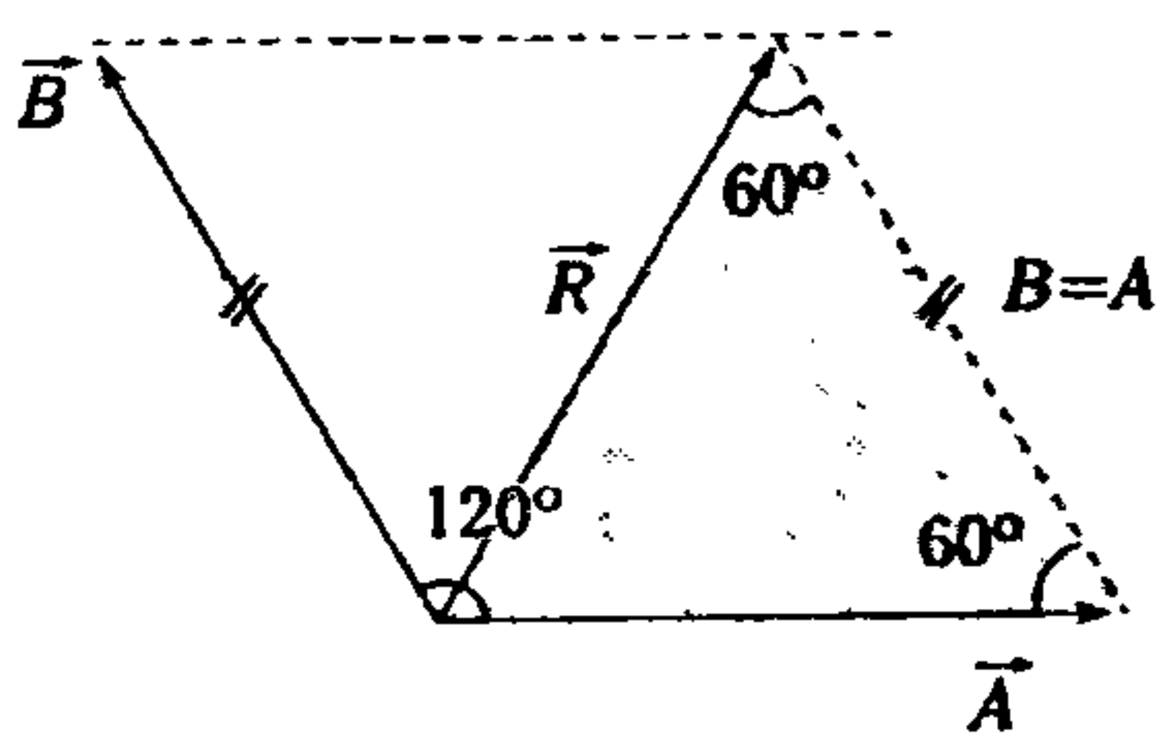
$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\underbrace{\cos 180°}_{-1}}$$

$$R=\sqrt{A^2+B^2-2AB}=\sqrt{(A-B)^2}$$

$\therefore\ R=A-B$

El módulo de la resultante sería la diferencia de los módulos de los vectores. Tener en cuenta que la dirección de la resultante coincide con la del vector de mayor módulo.

4. Si $\theta = 120°$ y $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son de igual módulo.



$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos 120°}$$

como $A = B$

$$\Rightarrow\ R=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\ R=A$$

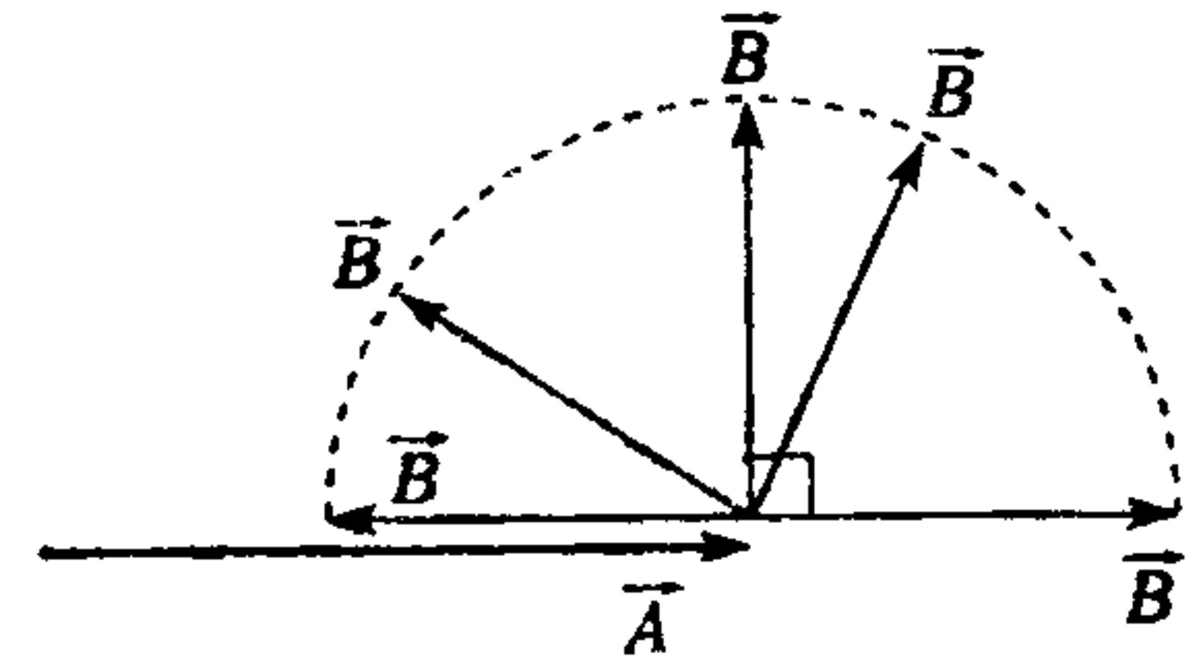
La resultante tiene igual módulo que $\vec{A}$ y $\vec{B}$. También llegamos al mismo resultado notando que la región triangular sombreada corresponde a un triángulo equilátero.

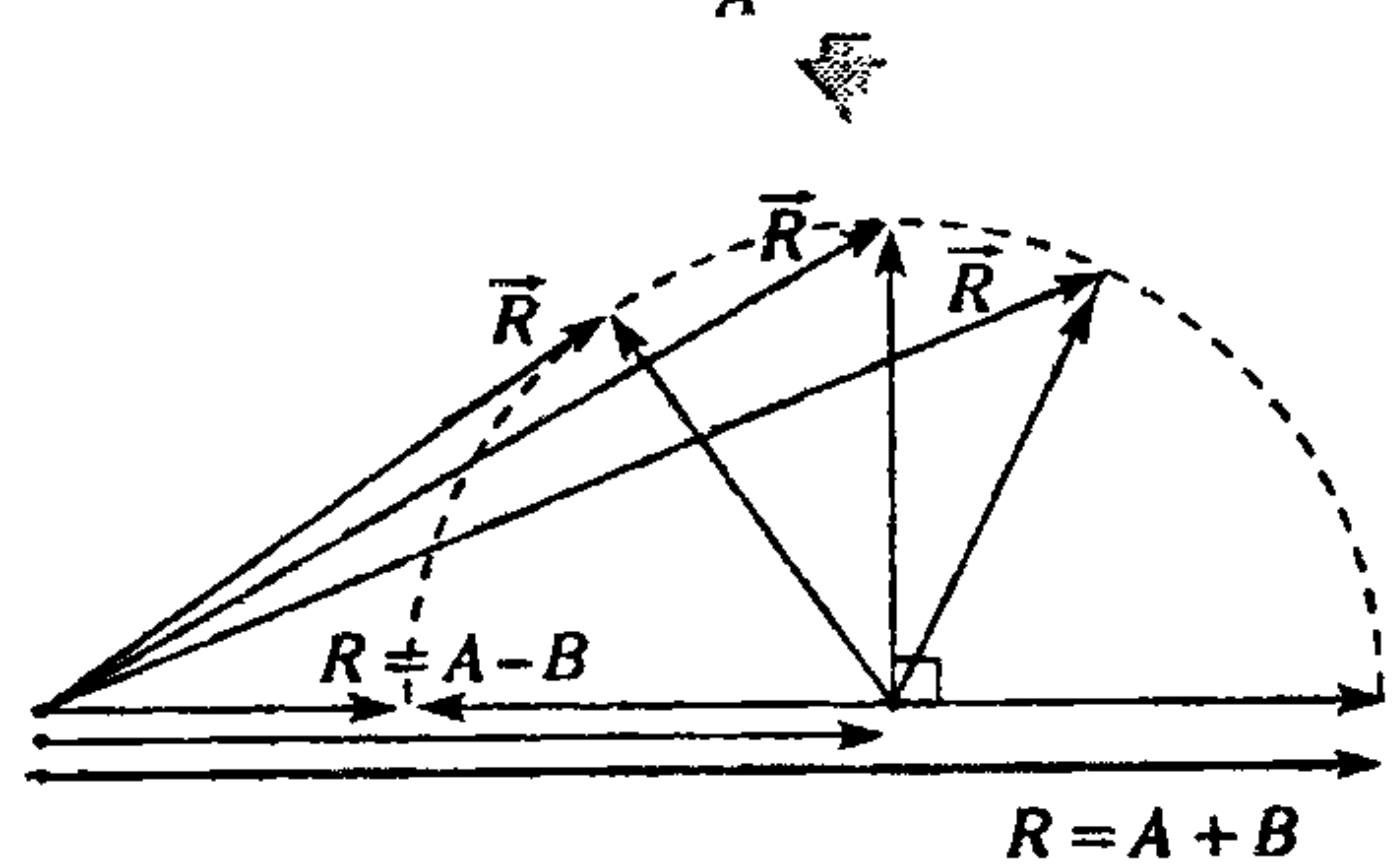
$\Rightarrow\ R=A=B$

Nota

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ determinemos gráficamente entre qué valores se encuentra el módulo del vector suma o vector resultante $(\vec{R})$. Para ello, consideremos que $\vec{A}$ se orienta hacia la derecha, mientras que $\vec{B}$ no se conoce su dirección, pero sí su módulo.

Graficando al vector $\vec{B}$ en diversas posiciones, su extremo describirá una circunferencia cuyo centro se ubica en el extremo de $\vec{A}$, tal como se muestra.





Determinando la resultante gráficamente para las cinco posiciones que adopta el vector $\vec{B}$, podemos concluir que

$$\boxed{A-B\le R\le A+B}$$

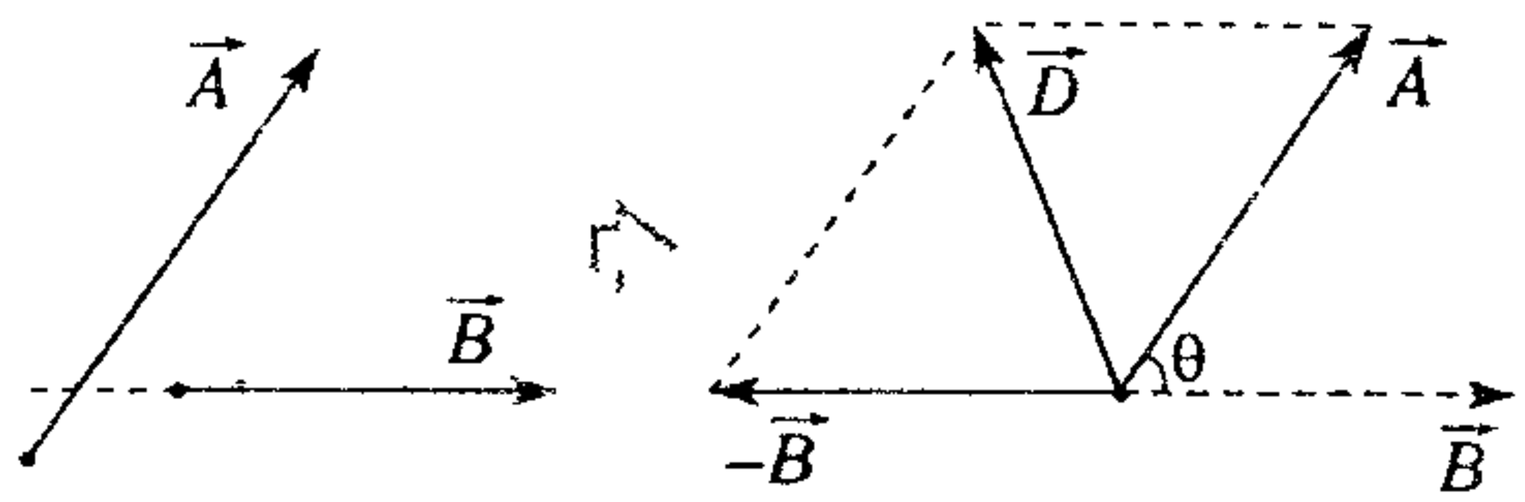
donde

$$R_{\text{mín}}=A-B$$
$$R_{\text{máx}}=A+B$$

DIFERENCIA DE VECTORES

Como en el álgebra vectorial sólo está definido la adición y multiplicación de vectores, para determinar la diferencia de dos vectores se puede partir de la adición.

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el vector diferencia $\vec{A}-\vec{B}$ denotado por $\vec{D}$ se obtiene como la suma del vector $\vec{A}$ y el opuesto del vector $\vec{B}$. Así



$$\vec{D}=\vec{A}+\left(-\vec{B}\right)$$

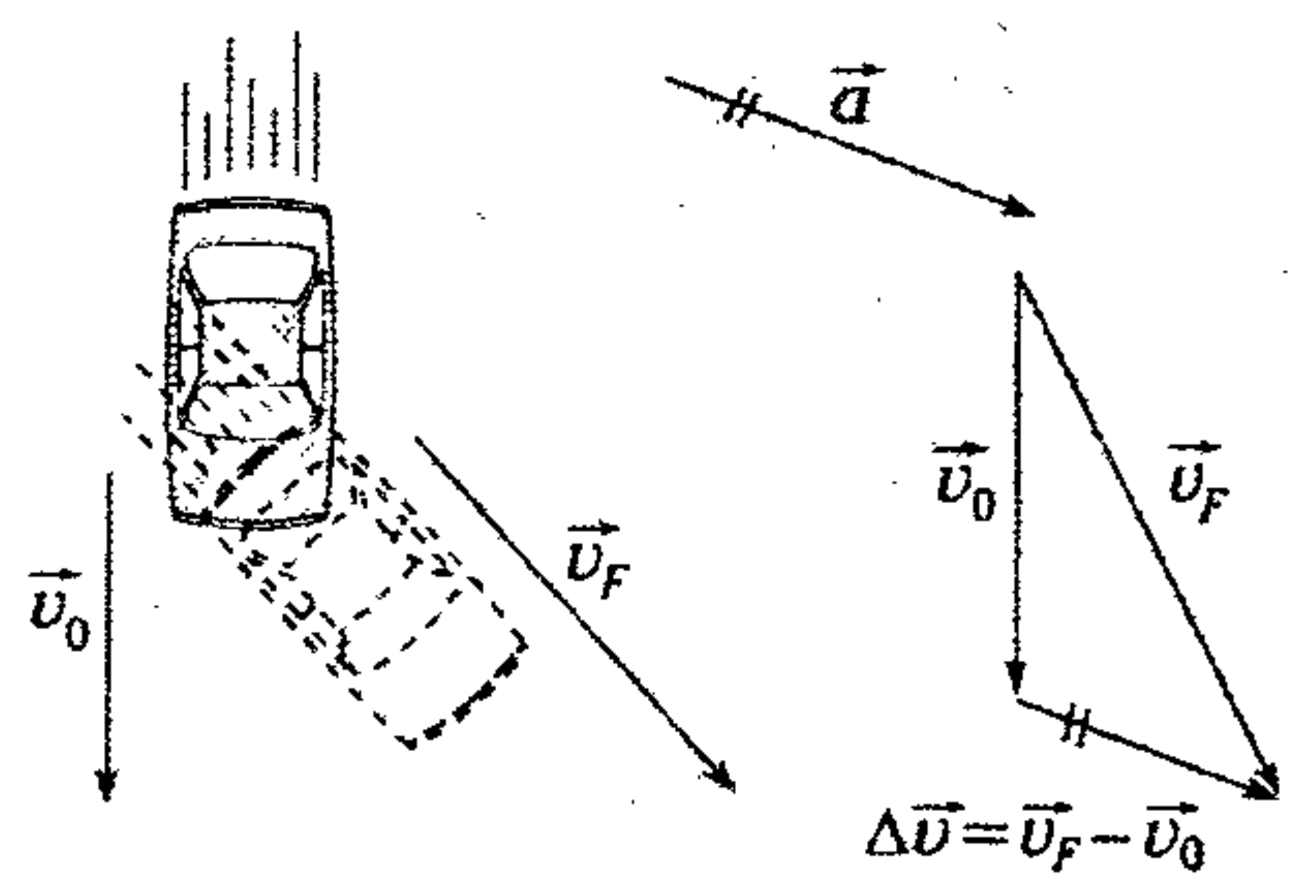
$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

El vector $\vec{D}$ se obtiene por el método del paralelogramo y su módulo como

$$D=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(180-\theta)}$$

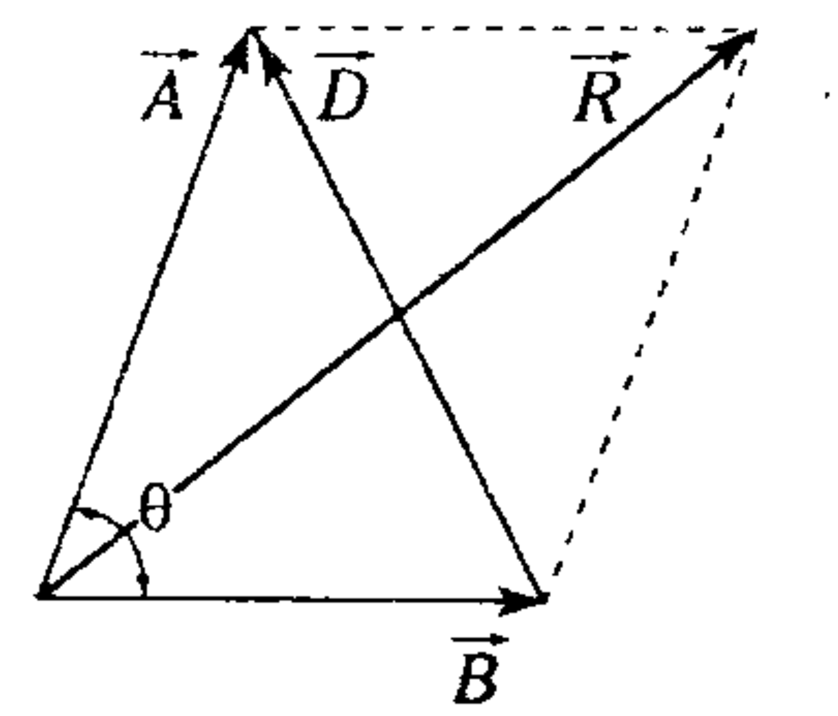
Por lo tanto,

$$\boxed{D=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}$$



En la figura, la diferencia de vectores nos permite determinar la variación de la velocidad $\Delta\vec{v}$, con ayuda de esto podemos definir una magnitud vectorial muy importante en la cinemática, la aceleración ($\vec{a}$), que tiene la misma dirección de $\Delta\vec{v}$.

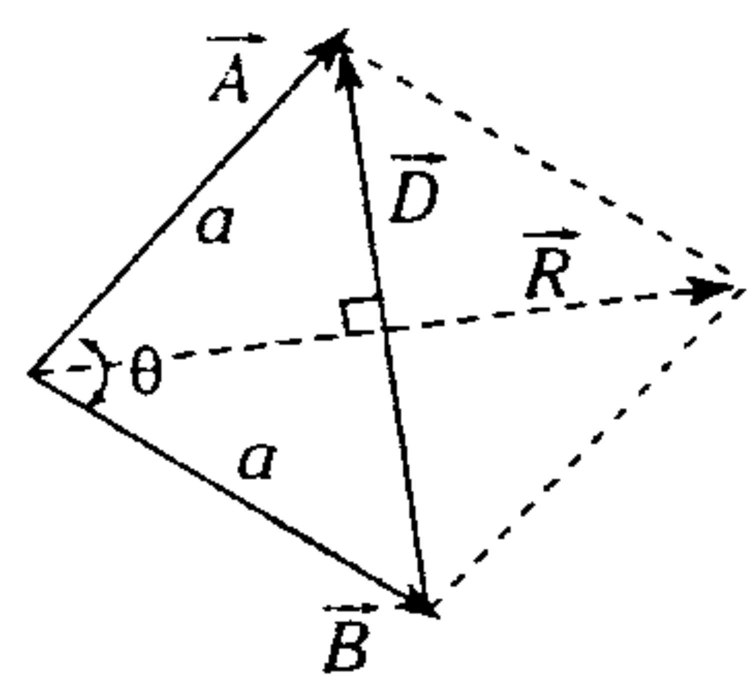
En conclusión, dados 2 vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, tendremos



$\vec{R}$ y $\vec{D}$ representan los vectores suma y diferencia, respectivamente, de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Propiedad

- Si $A=B=a$



- El vector resultante se encuentra en la bisectriz del ángulo entre los vectores.
  El módulo de la resultante es

$$R=2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- El vector diferencia es perpendicular al vector resultante.
  El módulo de la diferencia es

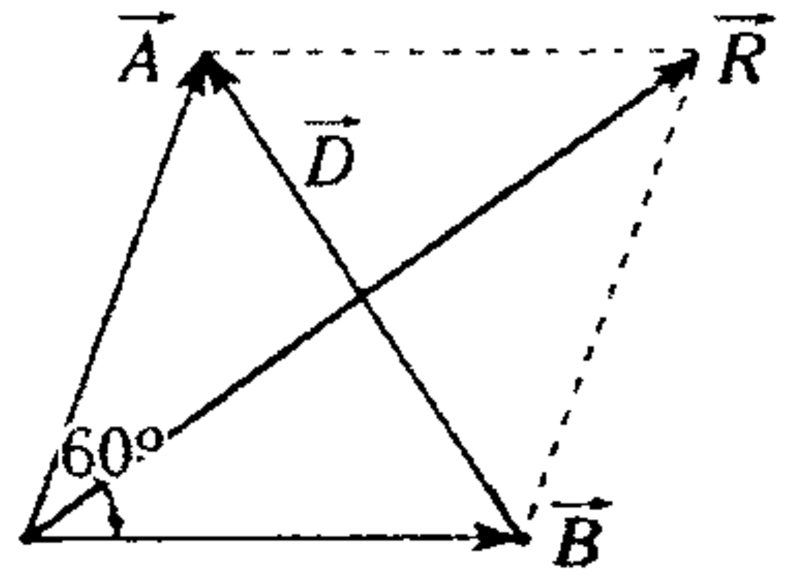
$$D=2a\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ejemplo 5

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman entre sí 60°, donde $A=10$ u y el módulo del vector diferencia tiene su menor valor, determine el módulo del vector resultante entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Resolución

Graficando los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también los vectores suma $(\vec{R})$ y diferencia $(\vec{D})$ se tiene el gráfico adjunto.

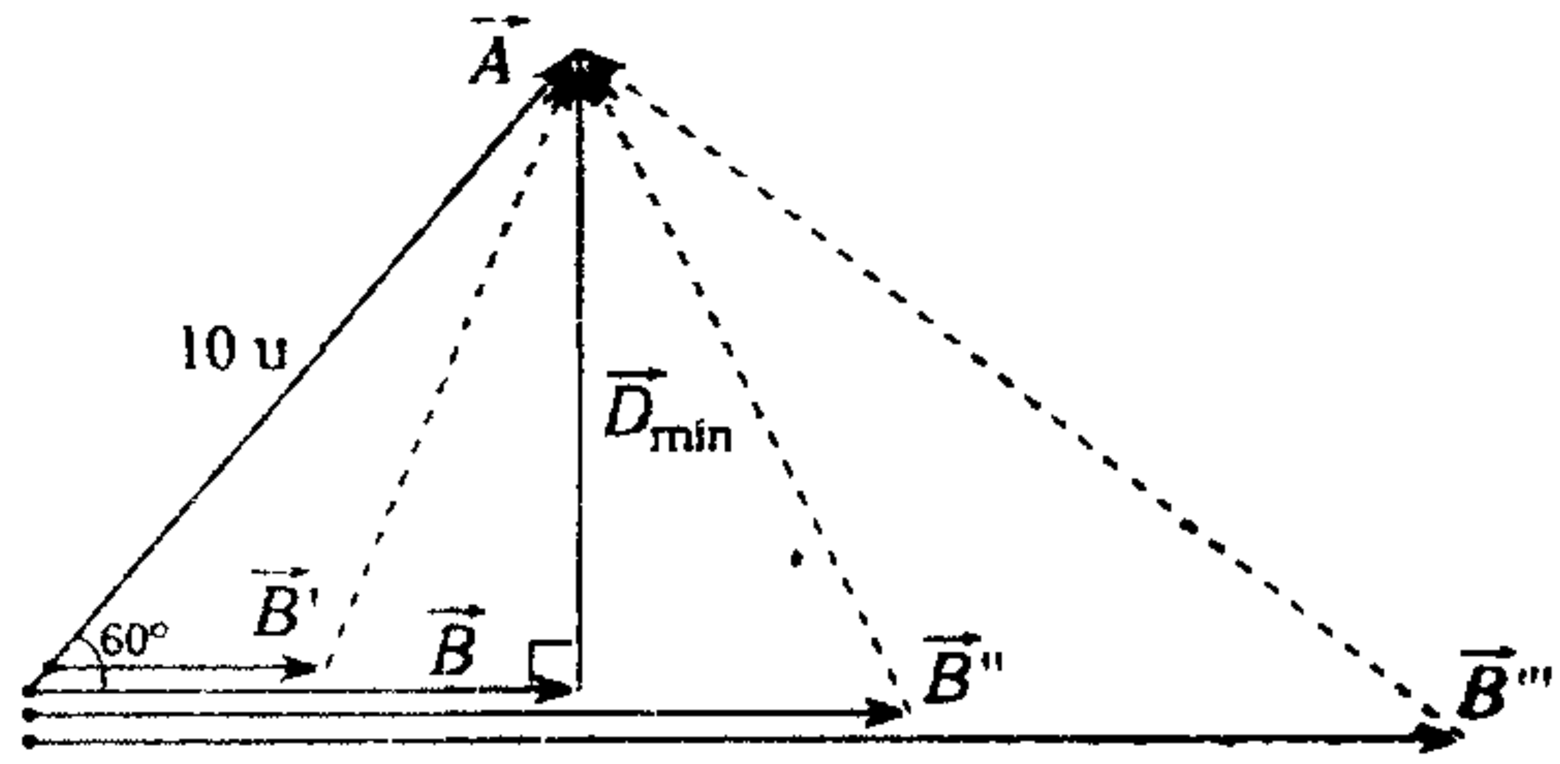


donde

$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad R=\sqrt{10^2+B^2+2(10)B\cos 60^\circ} \qquad \text{(I)}$$

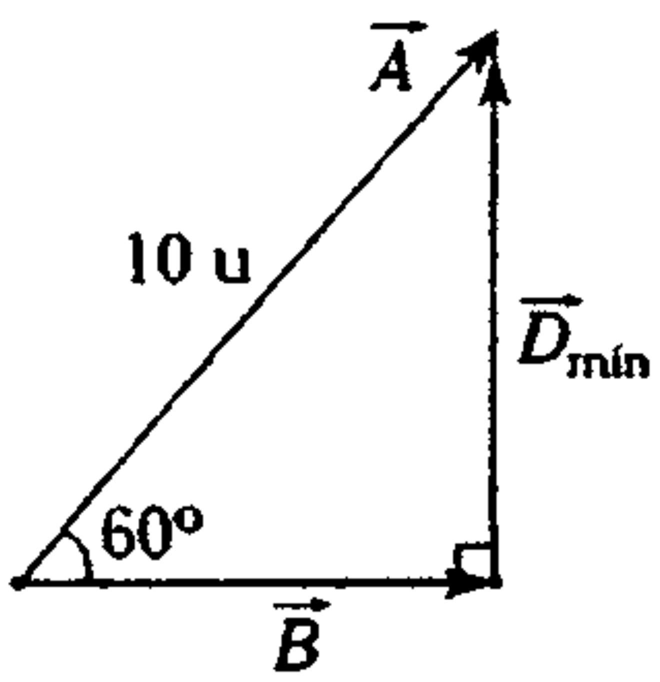
Para hallar R debemos conocer B, para esto utilizamos la condición de que el vector diferencia $\vec{D}$, entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ toma su menor valor, o sea es mínimo. Examinamos esta condición gráficamente.



Como no se conoce el módulo del vector $\vec{B}$ encontramos varias posibilidades para representar el vector diferencia, ya que este parte del extremo $\vec{B}$ y se dirige hacia el extremo de $\vec{A}$. Pero, de todos estos vectores, el que presenta menor longitud (mínimo módulo) es aquel que es perpendicular a la línea que contiene a $\vec{B}$.

Extrayendo el triángulo que contiene a $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}_{\text{mín}}$.

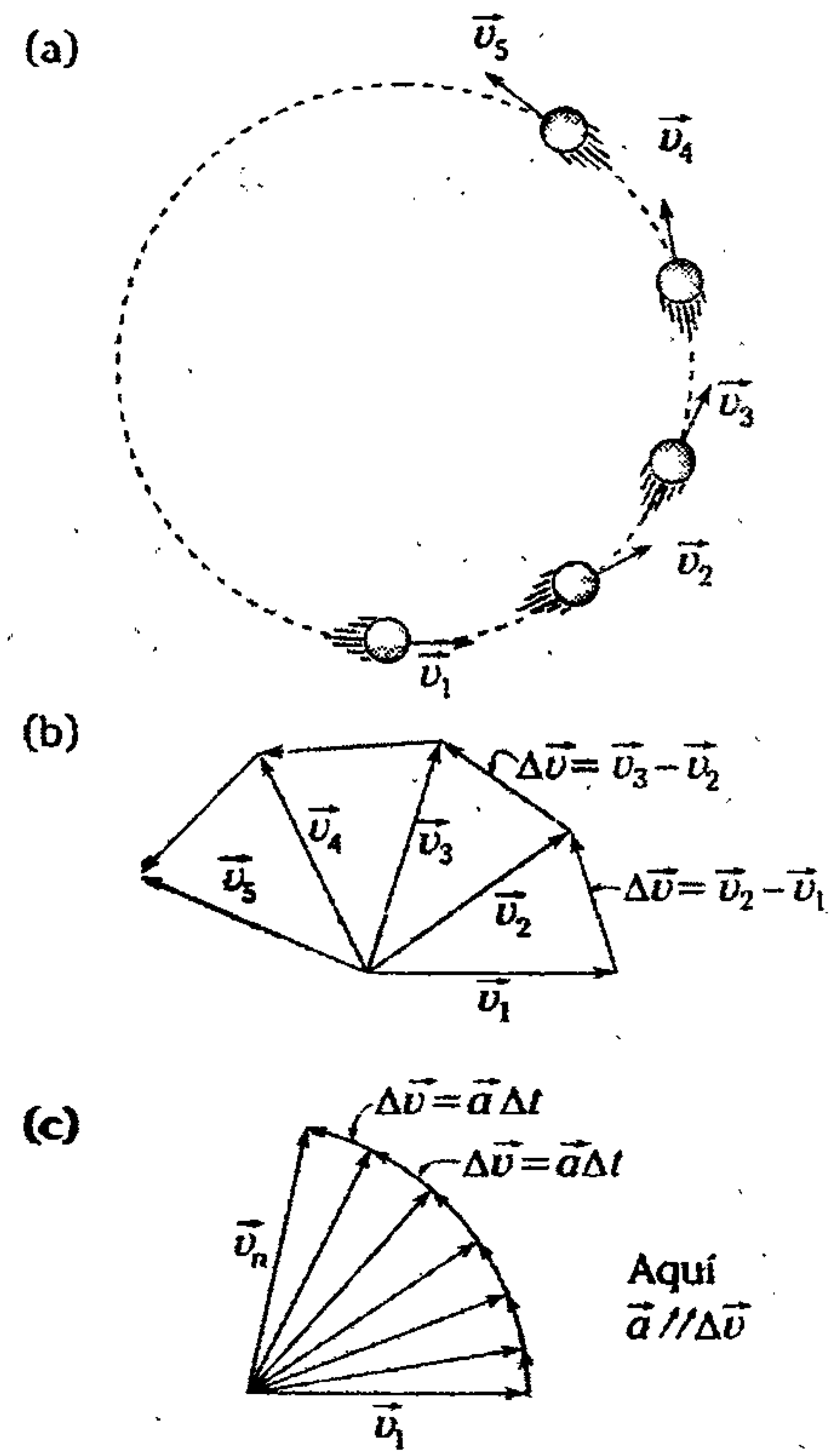
Como el ⊾ es notable (30°; 60°) tenemos que $B=5$ u



Reemplazando en la expresión (I)

$$R=\sqrt{10^2+5^2+2(10)(5)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad R=5\sqrt{7}\text{ u}$$



Según la cronología de los hechos, los vectores empezaron a ser usados en la cinemática para describir los movimientos curvilíneos. Fue Isaac Newton que los usó para explicar el movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.). En (a) se representa la velocidad de un cuerpo que se mueve sobre una circunferencia con rapidez constante. (b) Los vectores velocidad se han dibujado con el origen común, observándose que las variaciones de velocidad tienen direcciones diferentes: tomando intervalos de tiempo más cortos, como en (c), el vector aceleración instantánea se ve que es aproximadamente perpendicular al vector velocidad. De aquí se concluye que en un M.C.U. la velocidad y la aceleración son perpendiculares.

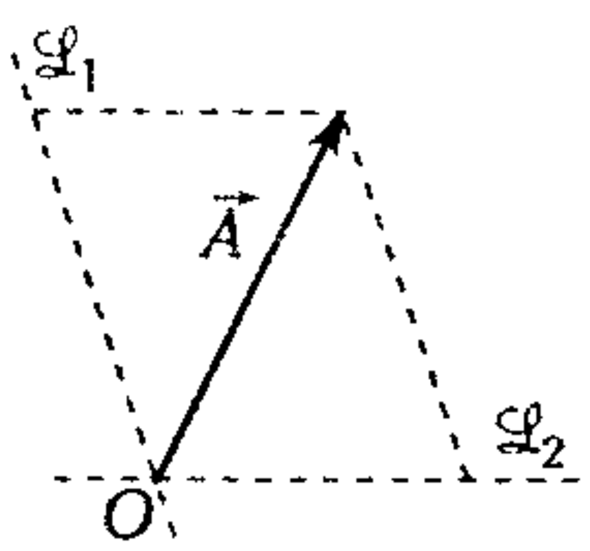
DESCOMPOSICIÓN VECTORIAL

Anteriormente se ha visto que al sumar dos o más vectores se obtiene uno solo que reemplaza a dichos vectores (vector resultante); ahora veamos el proceso inverso. Es decir, dado el vector, lo reemplazamos por dos o más vectores que darán como resultante el vector inicial. A estos vectores se les llama **vectores componentes**, y al método que se utiliza, **descomposición vectorial**.

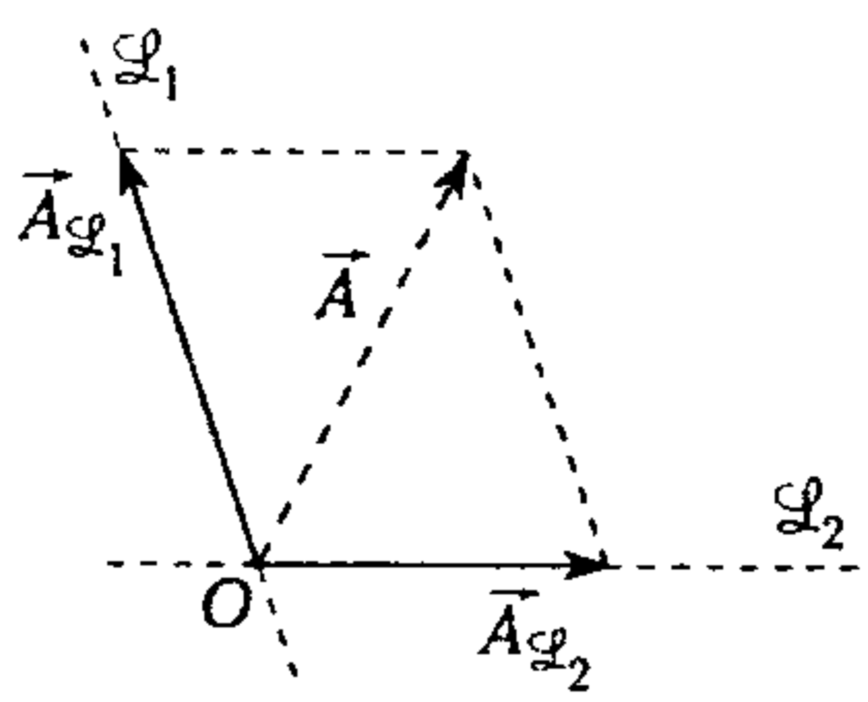
Un vector se puede descomponer en 2 vectores componentes o más; sin embargo, para nosotros será de mayor utilidad la descomposición en 2 vectores, caso en el cual centraremos nuestra atención.

Para determinar los vectores componentes de un vector $\vec{A}$, a partir de su origen (punto O), se traza las líneas donde se quiere que estén las componentes; en este caso, las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Luego, a partir del extremo del vector $\vec{A}$, se trazan rectas paralelas a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, obteniéndose dos puntos de intersección con las rectas anteriormente trazadas.

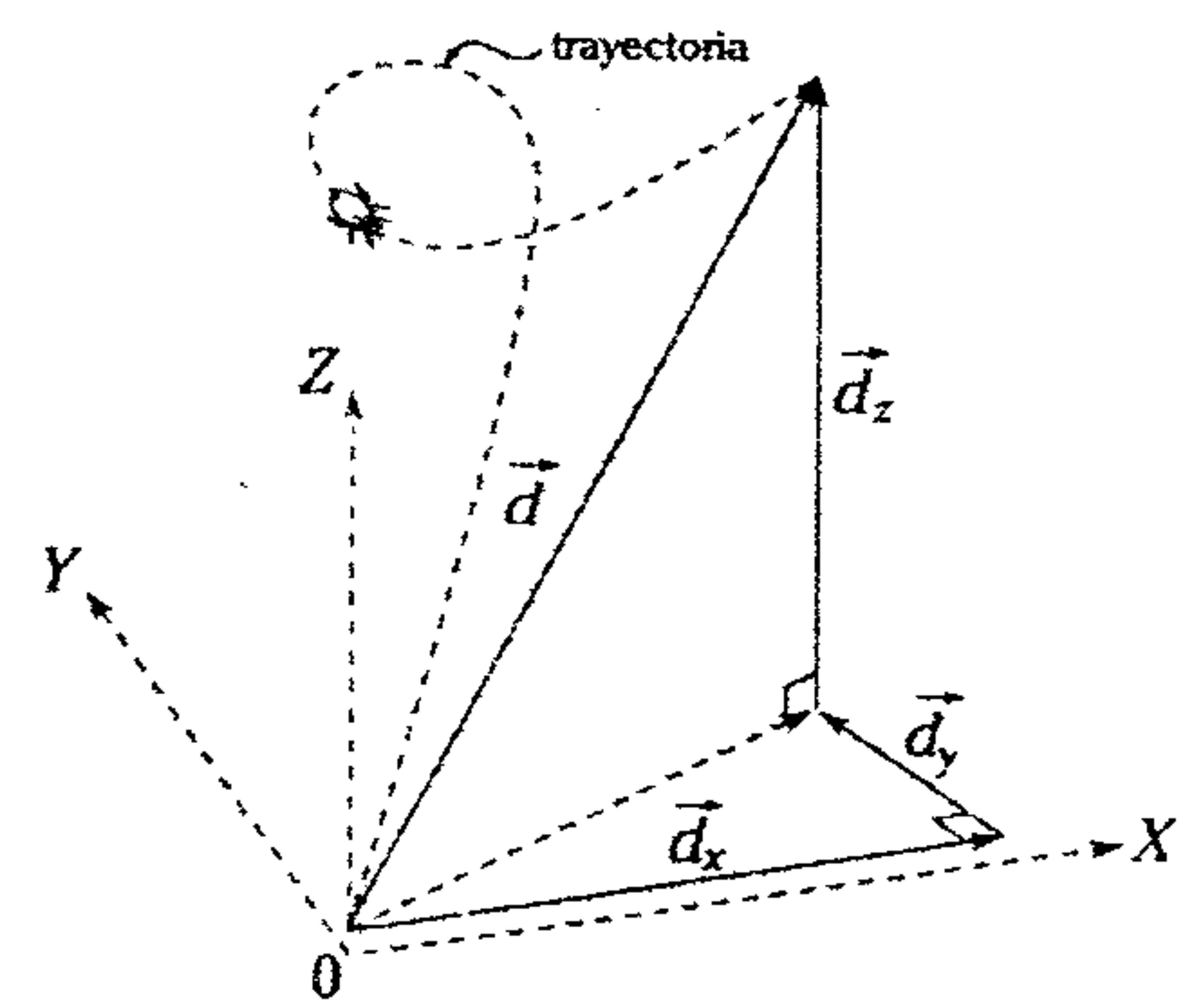
Los vectores que se determinan al unir el origen de $\vec{A}$ con los puntos de intersección serán los vectores componentes según las líneas deseadas.



Descomposición del vector $\vec{A}$ en $\vec{A}_{\mathscr{L}_1}$ y $\vec{A}_{\mathscr{L}_2}$.



donde $\vec{A}_{\mathscr{L}_1}$ y $\vec{A}_{\mathscr{L}_2}$ son componentes de $\vec{A}$.



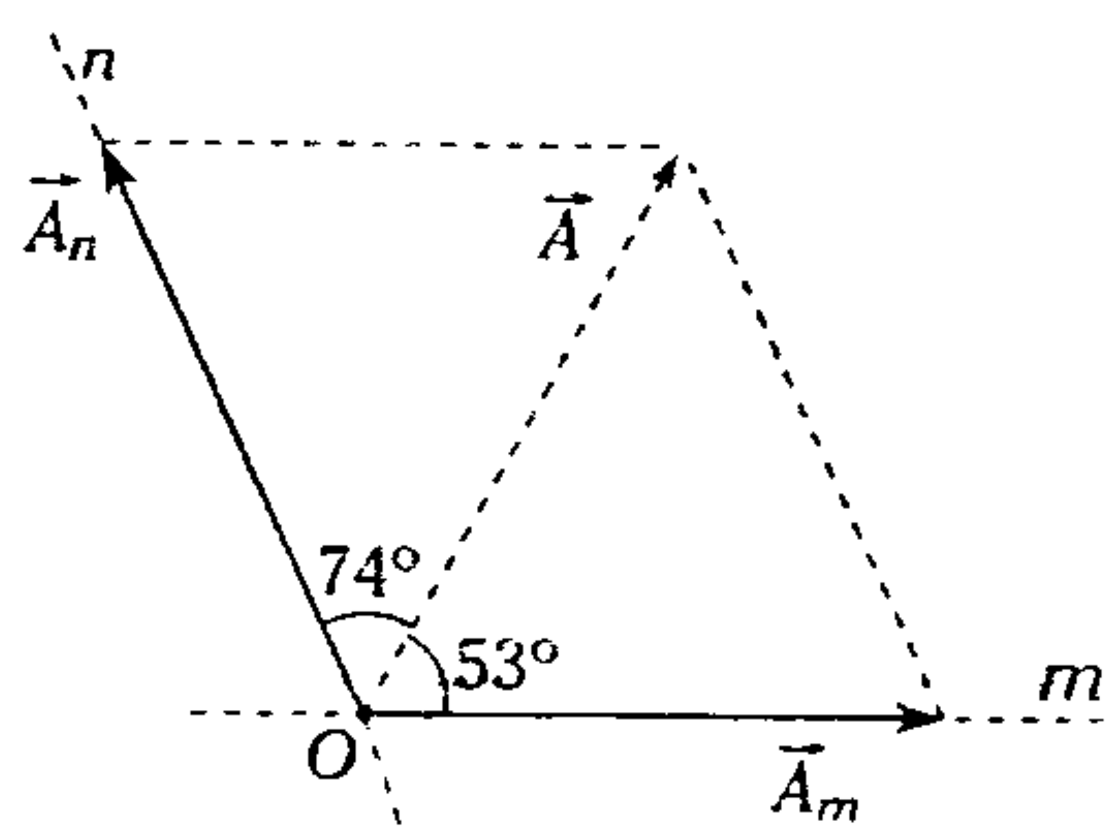
El desplazamiento $(\vec{d})$ de una mosca en el espacio, puede descomponerse a lo largo de los ejes coordenadas tal como se muestra.

Ejemplo 6

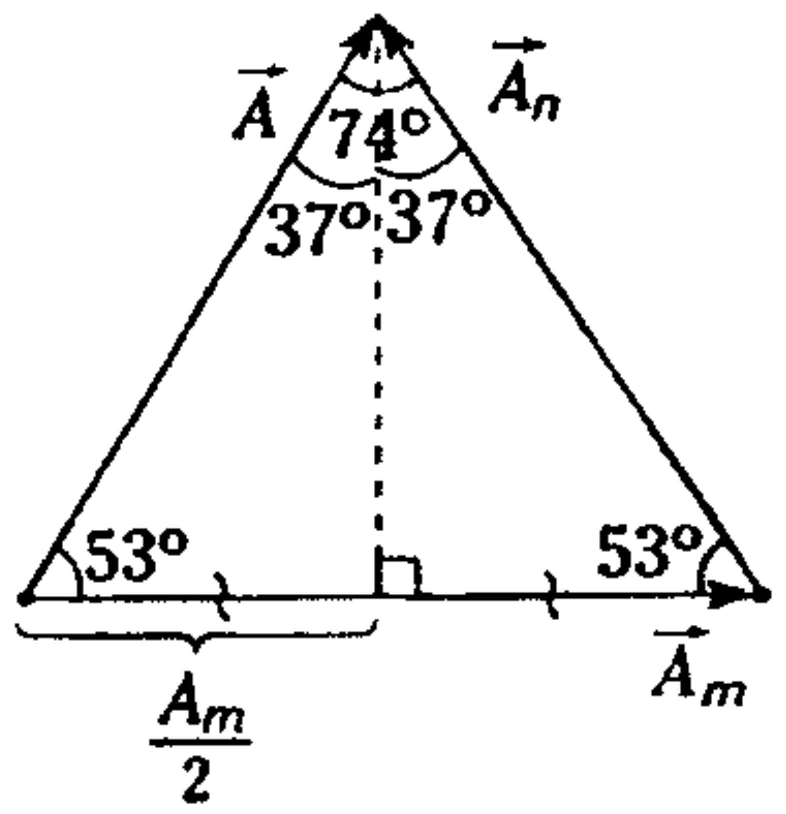
Descomponer un vector $\vec{A}$ de módulo 120 u en dos vectores que formen un ángulo de 53° y 74° con el mencionado vector.

Resolución

Siendo m y n las rectas que contienen a los vectores componentes y que forman 53° y 74°, respectivamente, con el vector $\vec{A}$ podemos construir el siguiente gráfico:



Trasladando a la componente $\vec{A}_n$ de manera que su origen coincida con el extremo de la otra componente $\vec{A}_m$, tendremos



Como el triángulo es isósceles, obtenemos

$$A_n = A = 120\ \text{u}$$

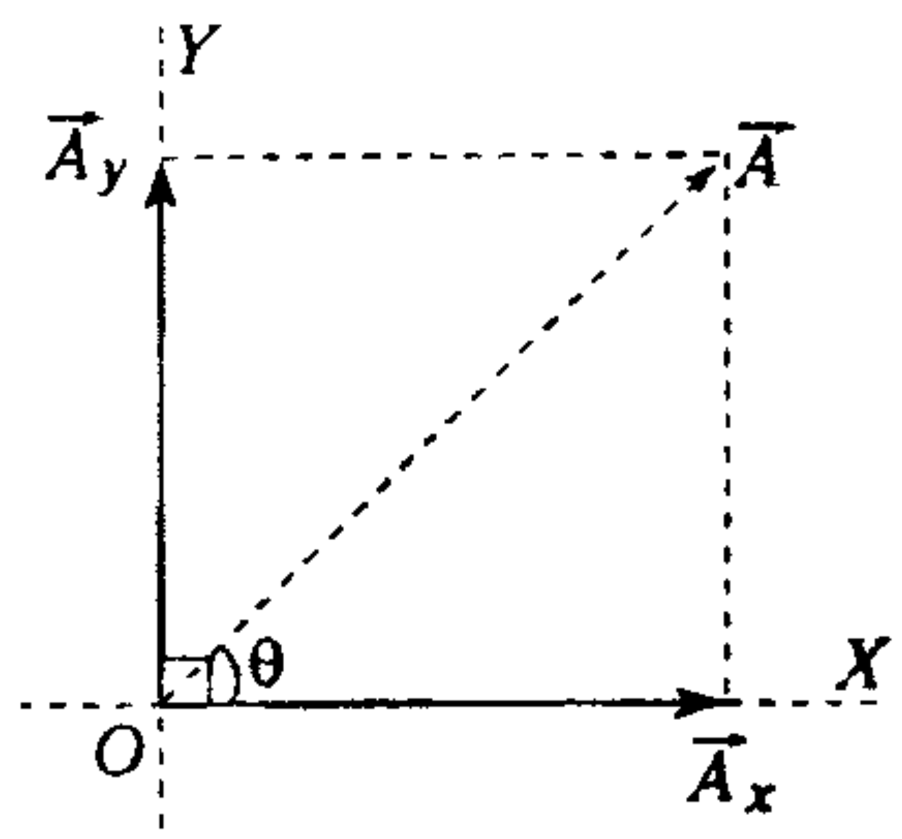
Para obtener A_m trazamos una perpendicular a la recta que contiene a $\vec{A}_m$ y se deduce que

$$\frac{A_m}{2} = A\operatorname{sen}37° \Rightarrow \frac{A_m}{2} = (120)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$A_m = 144\ \text{u}$$

Importante

Generalmente, cuando se realiza la descomposición vectorial, en 2 vectores componentes se hace en dos direcciones mutuamente perpendiculares; a esto le llamamos **descomposición rectangular** de un vector. La figura adjunta muestra un vector y sus componentes rectangulares.



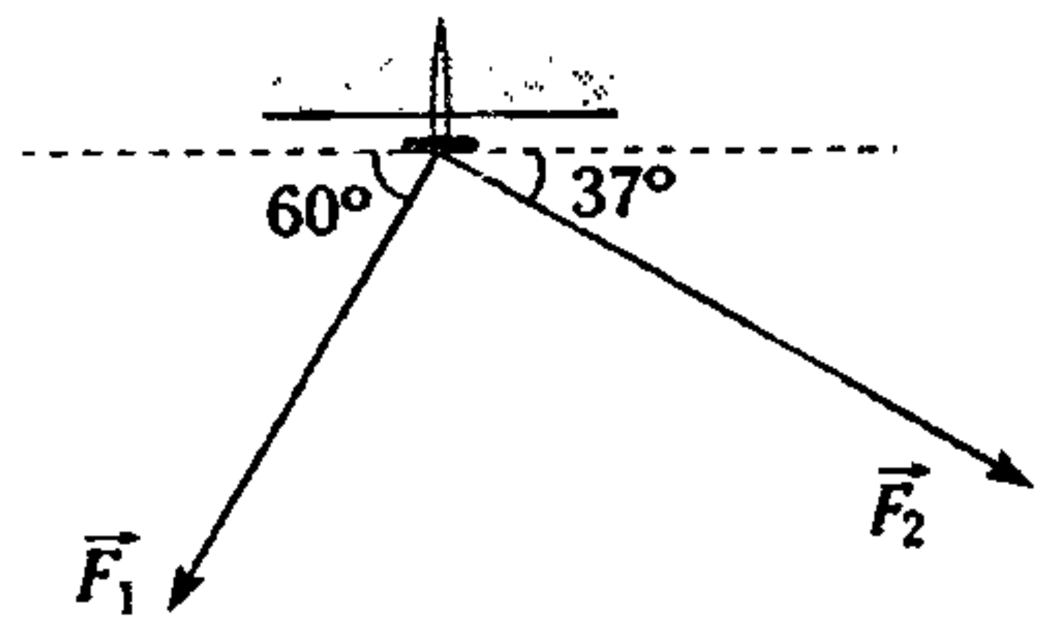
$\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son componentes rectangulares del vector $\vec{A}$, donde el módulo de las componentes se determina como

$$A_x = A\cos\theta$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo 7

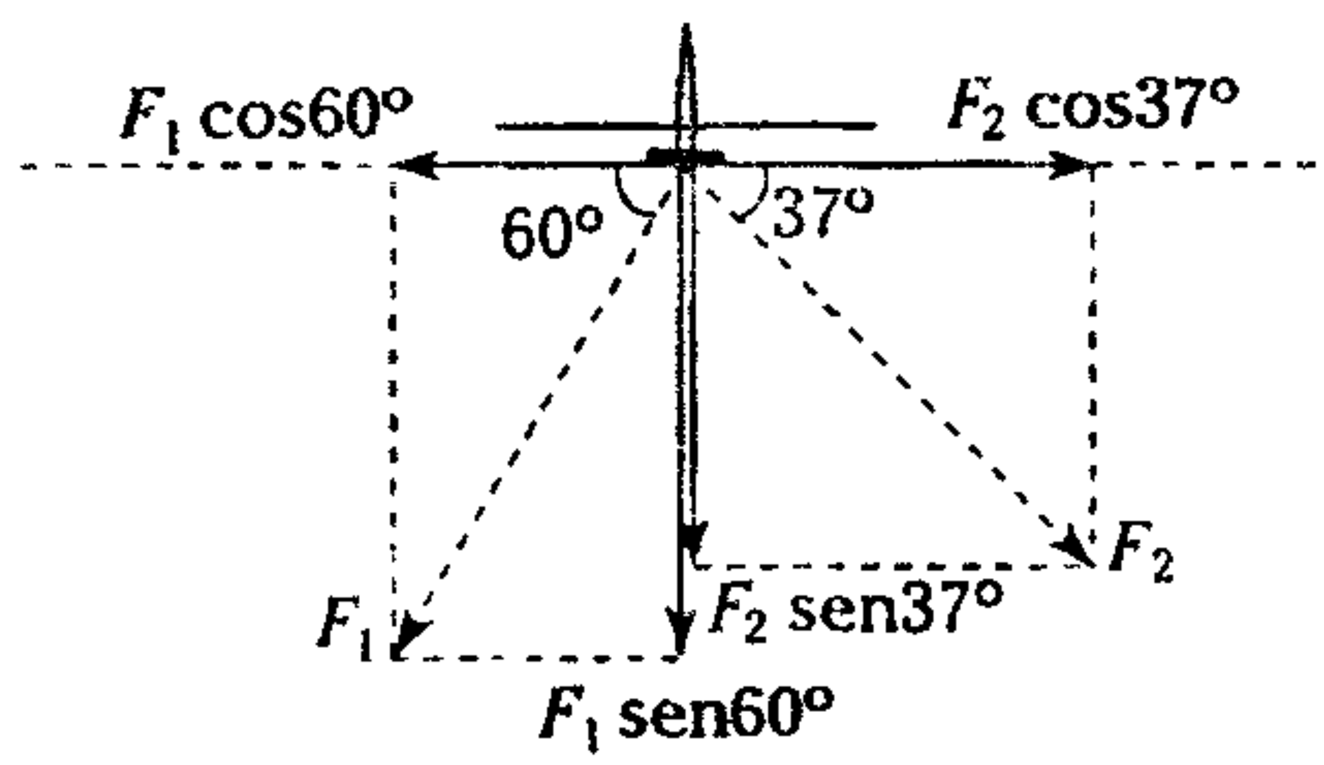
Un clavo empotrado en el techo es jalado por las fuerzas $\vec{F}_1$ de módulo 120 N y $\vec{F}_2$ según muestra el gráfico. Determine el módulo de $\vec{F}_2$, de tal manera que dicho clavo salga verticalmente. Asimismo, determine el módulo de la fuerza resultante debido a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.



Resolución

Este ejercicio lo podemos resolver utilizando dos métodos: el de descomposición rectangular y también el del paralelogramo. Por el punto que estamos tratando, usemos la descomposición.

Determinando las componentes rectangulares de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ según los ejes X e Y, tenemos



Como se desea que el clavo salga verticalmente, este no puede moverse hacia la derecha ni izquierda; por lo tanto, las componentes horizontales deben anularse. Entonces

$$F_1\cos60° = F_2\cos37°$$

$$120\times\frac{1}{2} = F_2\times\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ F_2 = 75\ \text{N}$$

Por otro lado, como las componentes horizontales se anulan, la resultante será simplemente la resultante de componentes verticales.

Por lo tanto

$$F_R = F_1\text{sen}60^\circ + F_2\text{sen}37^\circ$$

Reemplazando, tenemos

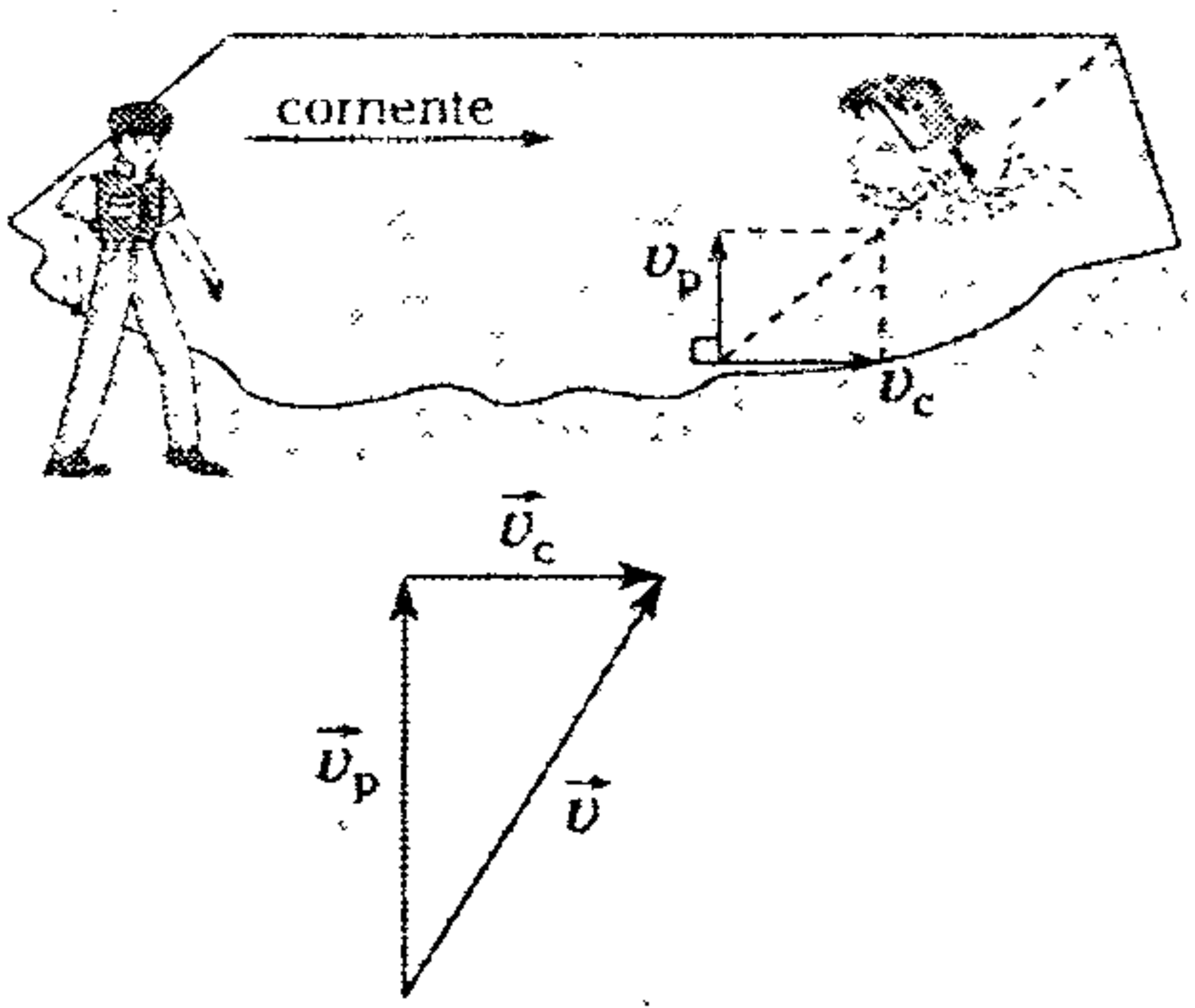
$$F_R = 120\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 75\times\frac{3}{5}$$

$$F_R = 60\sqrt{3} + 45$$

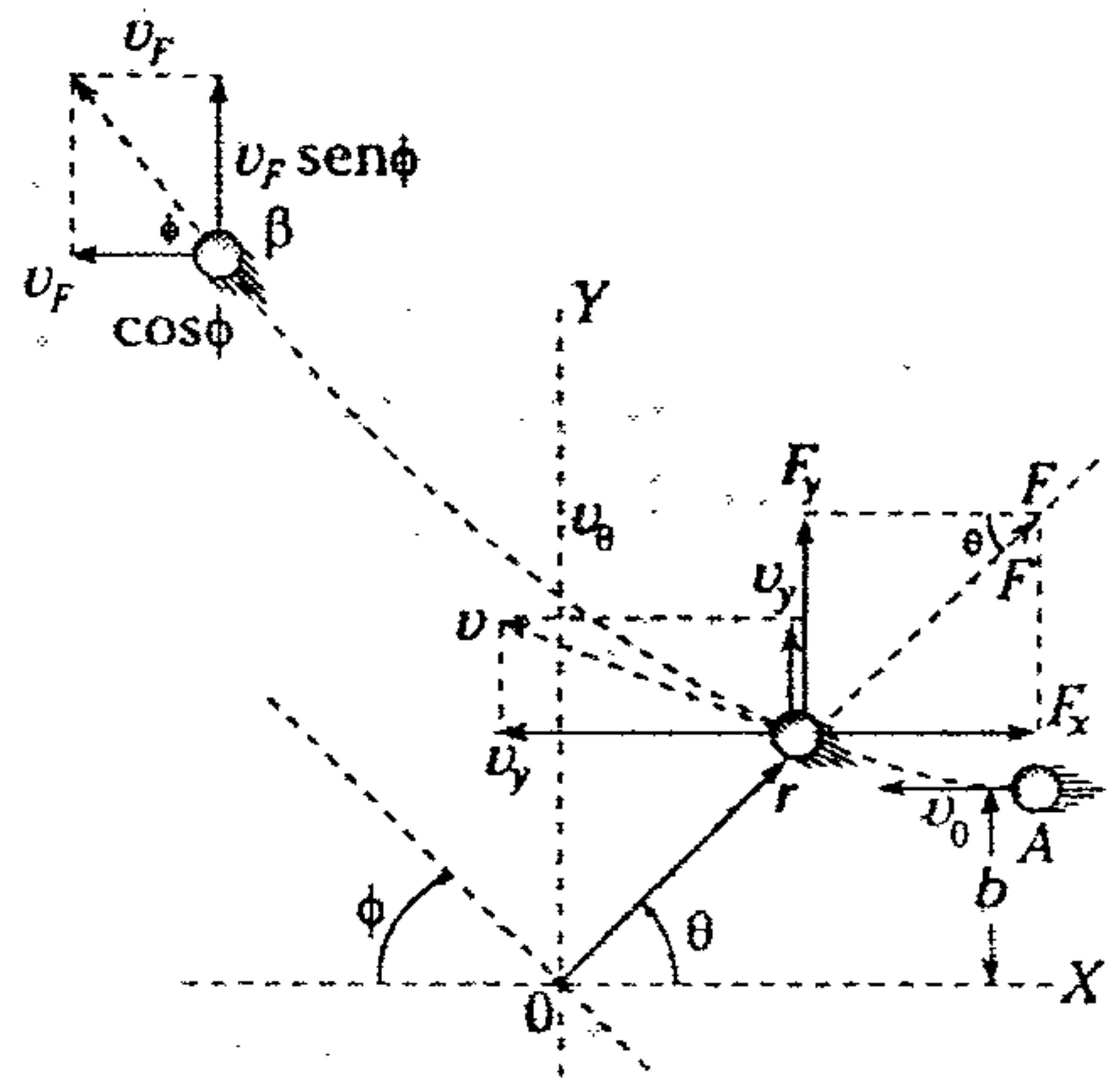
$$\therefore\quad F_R = 148{,}9\text{ N}$$

En el estudio de los vectores realizado anteriormente, habremos notado que para el caso de dos o más vectores el tratamiento realizado con ellos ha sido geométrico o por componentes en dos direcciones previamente establecidas. Esta forma de trabajar con los vectores en algunos casos se hace tedioso y/o complicado, por ello veamos otra forma de manejar los vectores.

Recordemos que los vectores están caracterizados por un módulo y una dirección, para este último, o sea la dirección del vector se utiliza un vector denominado **vector unitario** que sirve como medida de los vectores en determinada dirección.



Un ejemplo de la composición rectangular para los vectores lo tenemos cuando se cruza un río. Si nadas a través de un río con una velocidad ($\vec{v}_p$) perpendicular a la velocidad de la corriente ($\vec{v}_c$), tu velocidad con respecto a la orilla será ($\vec{v}$) ¿Te ayuda la corriente a cruzar el río?



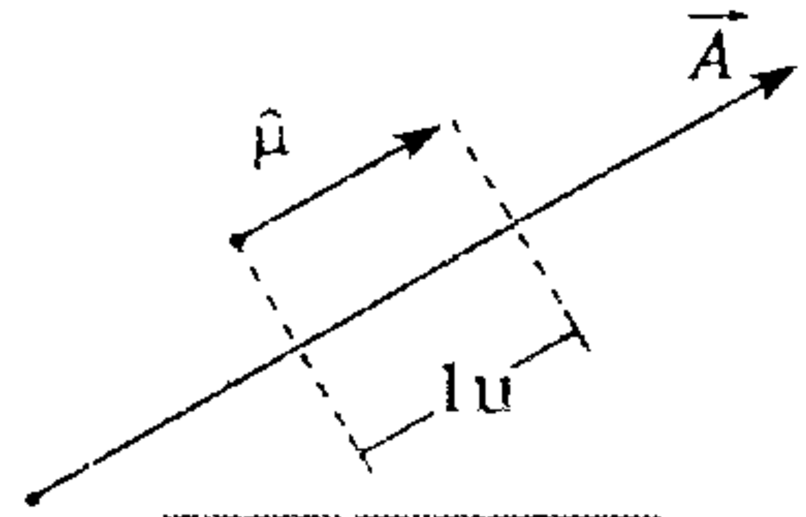
Dispersión de una partícula bajo la acción de una fuerza central que varía inversamente con el cuadrado de ($\vec{r}$). La descomposición rectangular de la fuerza ($\vec{F}$), y velocidades ($\vec{v}$ y $\vec{v}_F$); permite hace una descripción matemática más adecuada

Vector unitario

El vector unitario de un vector $\vec{A}$, denotado como $\hat{\mu}_A$ se define como aquel vector que tiene igual dirección que el vector $\vec{A}$ y cuyo módulo es igual a la unidad

$$\boxed{|\hat{\mu}_A| = \mu_A = 1\text{u}}$$

Matemáticamente definimos al vector unitario $\hat{\mu}$, como

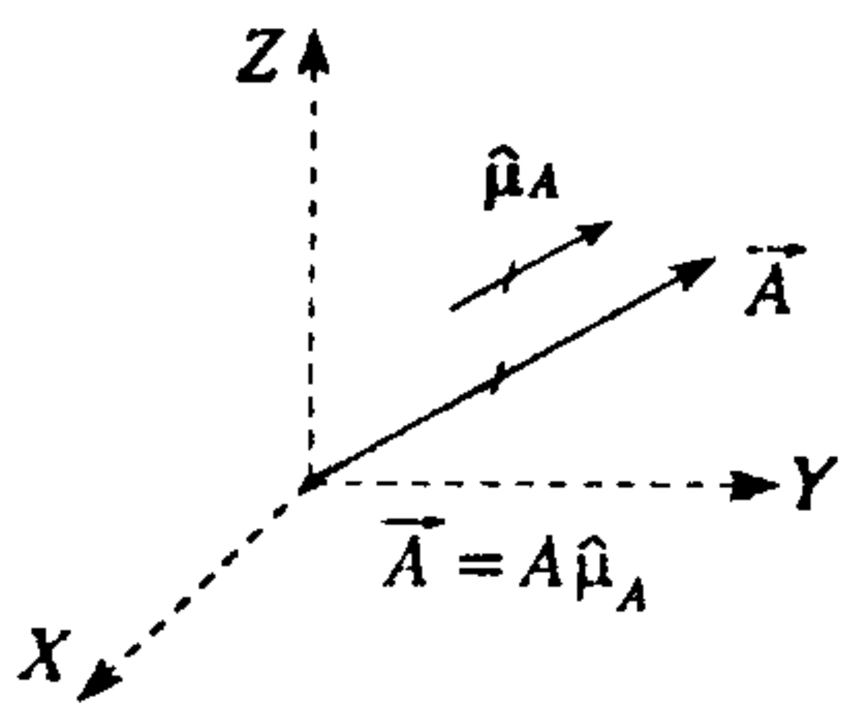


$$\boxed{\hat{\mu}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}}$$

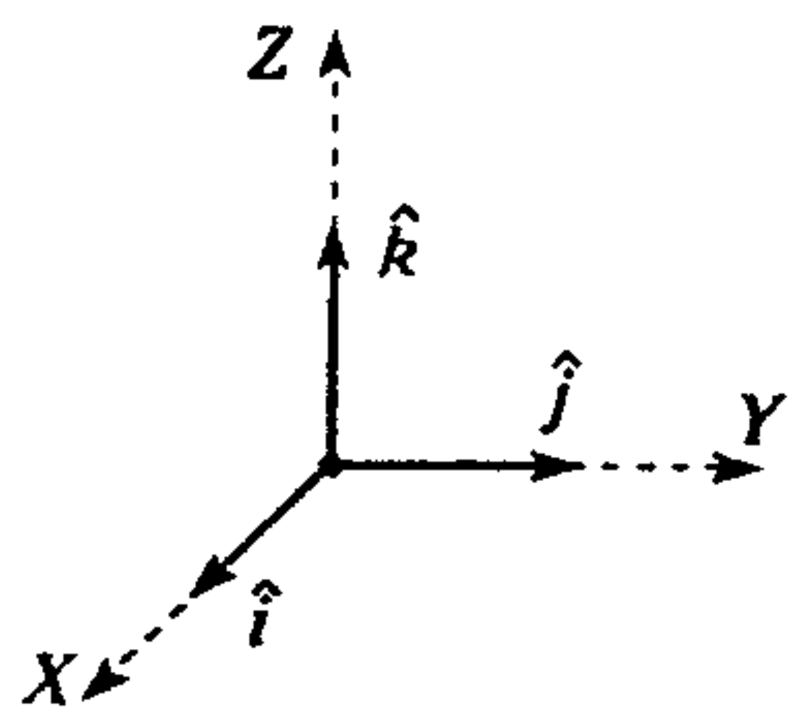
El vector $\vec{A}$ expresado en función de su vector unitario $\hat{\mu}_A$ es

$$\boxed{\vec{A} = A\hat{\mu}_A}$$

Es importante recordar que todo vector unitario tiene como módulo la unidad, de allí su nombre. Al vector unitario también se le denomina **vector direccional**, porque su dirección nos da la dirección del vector al cual corresponde.

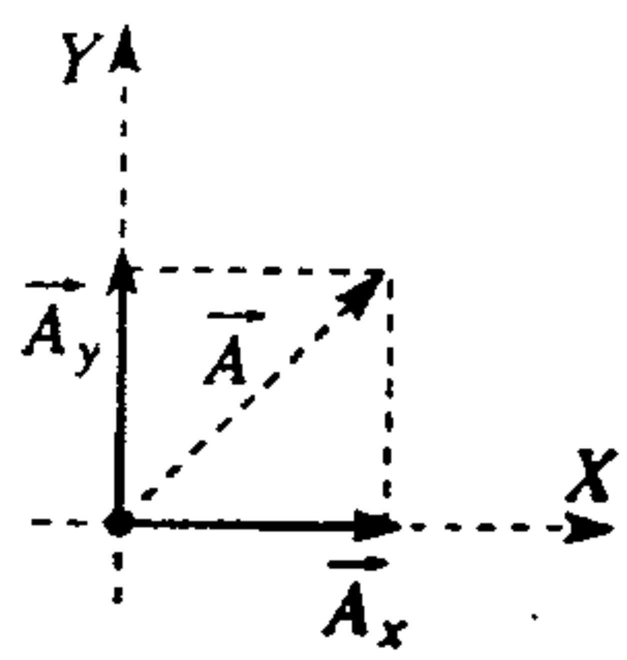


Los vectores unitarios característicos, asociados a los ejes de coordenadas cartesianas X, Y, Z (positivos) son



$$\boxed{|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1}$$

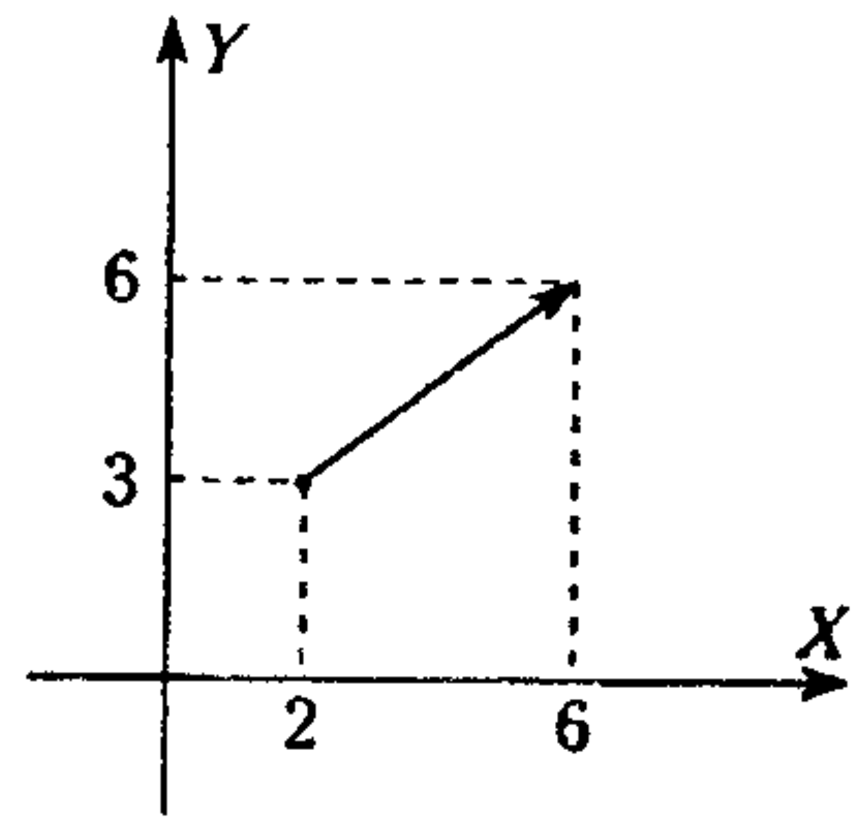
Los componentes rectangulares de un vector AC se pueden expresar en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Por ejemplo



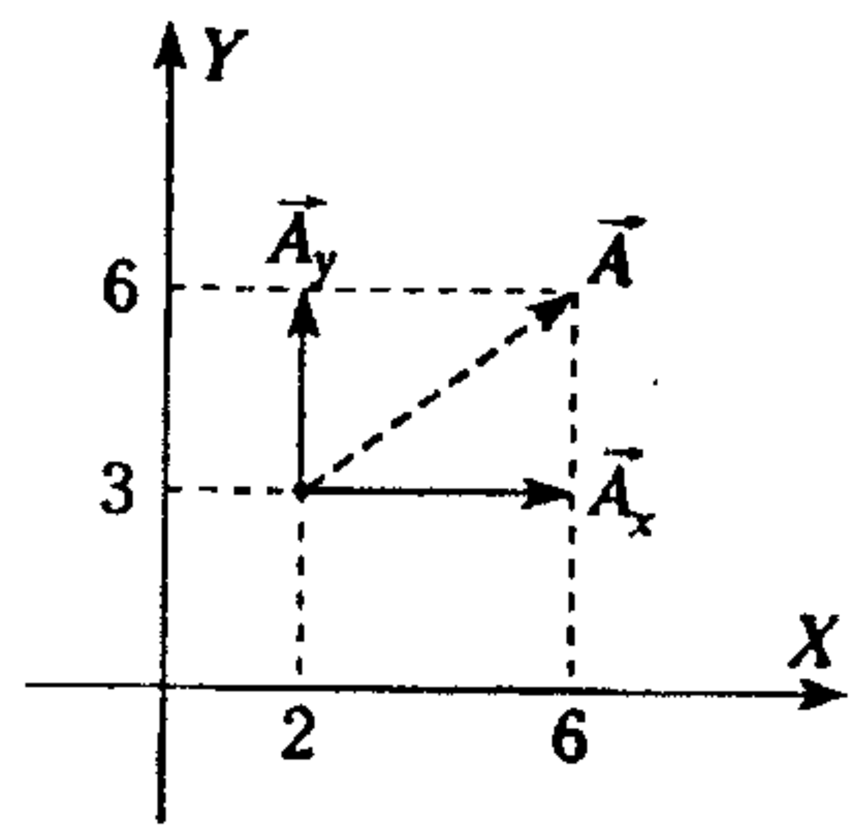
$$\vec{A}_x = A_x\hat{i}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{j}$$

En este caso $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ tienen una dirección que esta definida por el signo de A_x y A_y, es decir si son positivos o negativos.

Consideremos el siguiente vector, que se encuentra en el plano $X-Y$.



Descomponiendo rectangularmente a $\vec{A}$, tenemos



Como $\vec{A}$ es la resultante de $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, entonces

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \qquad (I)$$

pero

$$\vec{A}_x = 4\hat{i} \;;\; \vec{A}_y = 3\hat{j}$$

Reemplazando en (I)

$$\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

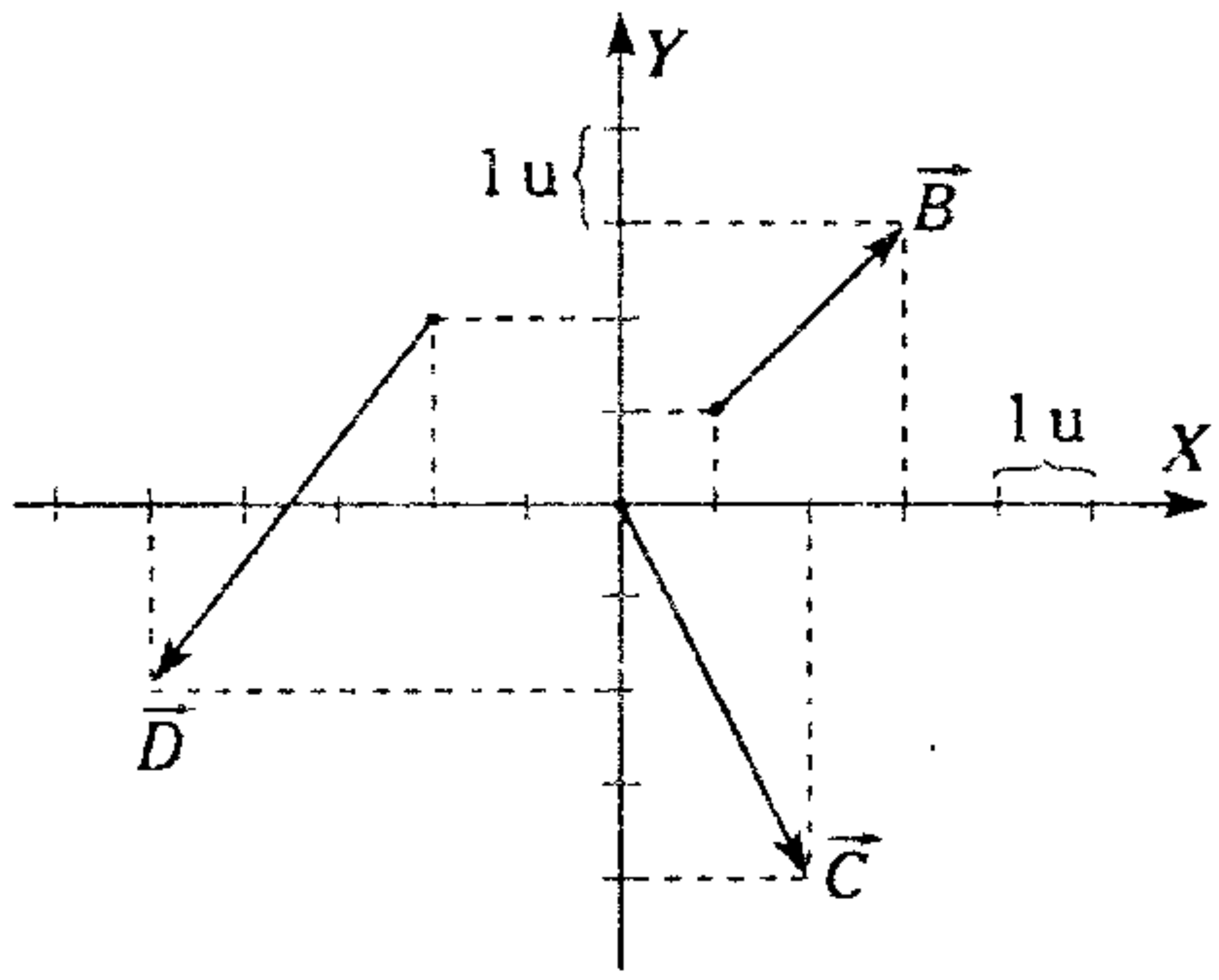
La expresión anterior también se puede escribir como

$$\vec{A} = (\underbrace{4}_{\text{componente en } X} ; \underbrace{3}_{\text{componente en } Y})$$

Esta forma de expresar a un vector se le denomina **expresión cartesiana del vector**.

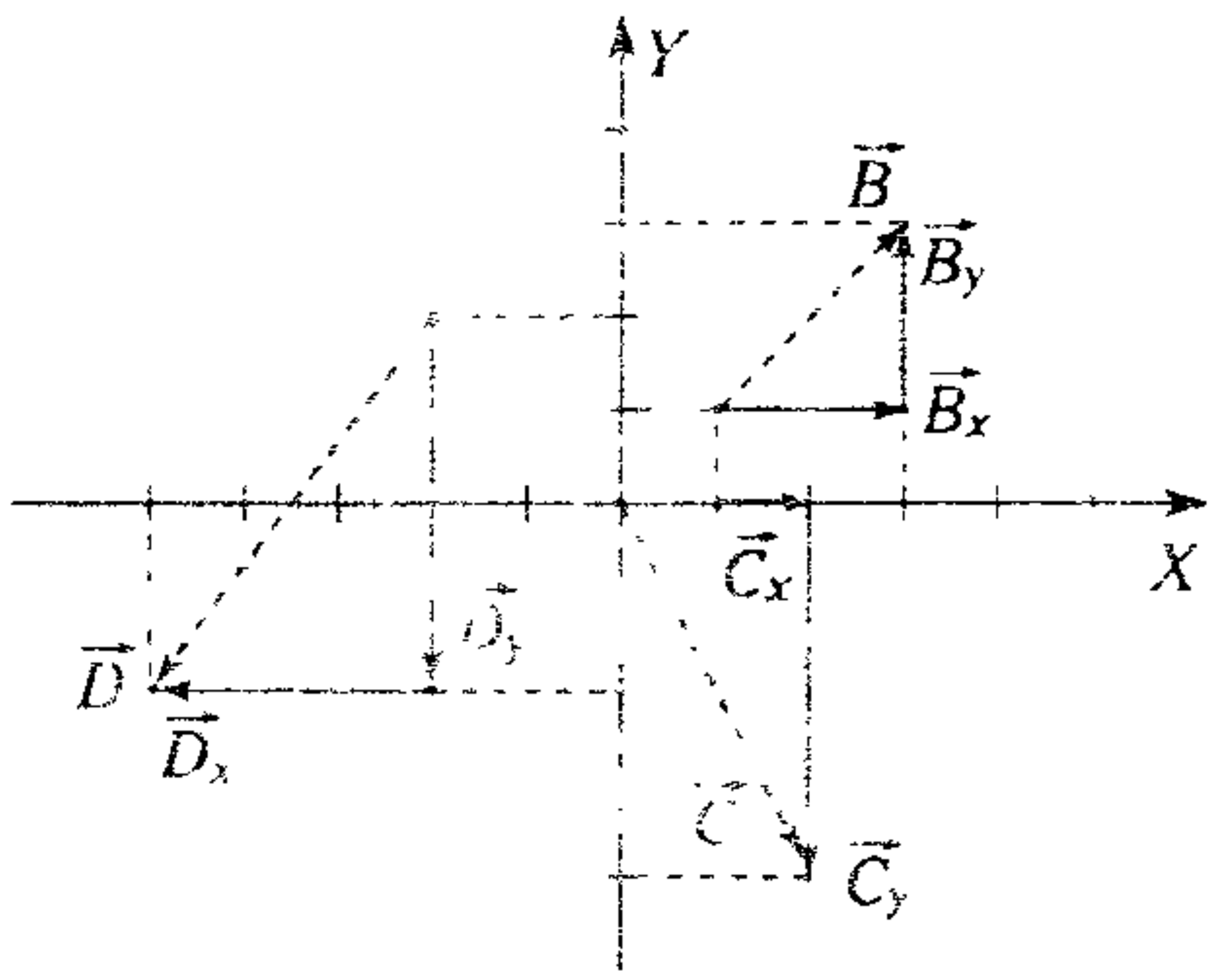
Ejemplo 8

Exprese cartesianamente los vectores $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$.



Resolución

Primero debemos descomponer rectangularmente los 3 vectores.



Ahora, expresemos los vectores en forma cartesiana.

- Para $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y = (B_x ; B_y)$$

donde $\vec{B}_x = 2\hat{i}$; $\vec{B}_y = 2\hat{j}$

entonces $B_x = 2$; $B_y = 2$

Luego, el vector $\vec{B}$ se expresa en forma cartesiana como $\vec{B} = (2 ; 2)$ u

- Para $\vec{C}$

$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y = (C_x ; C_y)$$

donde $\vec{C}_x = 2\hat{i}$; $\vec{C}_y = -4\hat{j}$

entonces, $C_x = 2$; $C_y = -4$

Luego, el vector $\vec{C}$ se expresa en forma cartesiana como $\vec{C} = (2 ; -4)$ u

- Para $\vec{D}$

$$\vec{D} = \vec{D}_x + \vec{D}_y = (D_x ; D_y)$$

donde $\vec{D}_x = -3\hat{i}$; $\vec{D}_y = -4\hat{j}$

entonces $D_x = -3$; $D_y = -4$

Luego, el vector $\vec{D}$ se expresa en forma cartesiana como $\vec{D} = (-3 ; -4)$ u

Al considerar las expresiones cartesianas de los vectores, las operaciones de adición y diferencia de los mismos se hacen más simples.

Así, por ejemplo si tenemos $\vec{A} = (7 ; 4)$ u y $\vec{B} = (9;8)$ u, entonces $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ se obtiene así: la abscisa de $\vec{R}$ será la suma de abscisas de $\vec{A}$ y $\vec{B}$; la ordenada de $\vec{R}$ será la suma de ordenadas de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, así

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (7 ; 4) + (9 ; 8)$$

$$\vec{R} = (7 + 9 ; 4 + 8)$$

$$\therefore\ \vec{R} = (16 ; 12)\text{ u}$$

Asimismo, $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ se obtiene así: la abscisa del $\vec{D}$ sería la diferencia de abscisas entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$; la ordenada de $\vec{D}$ será la diferencia de ordenadas entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, así

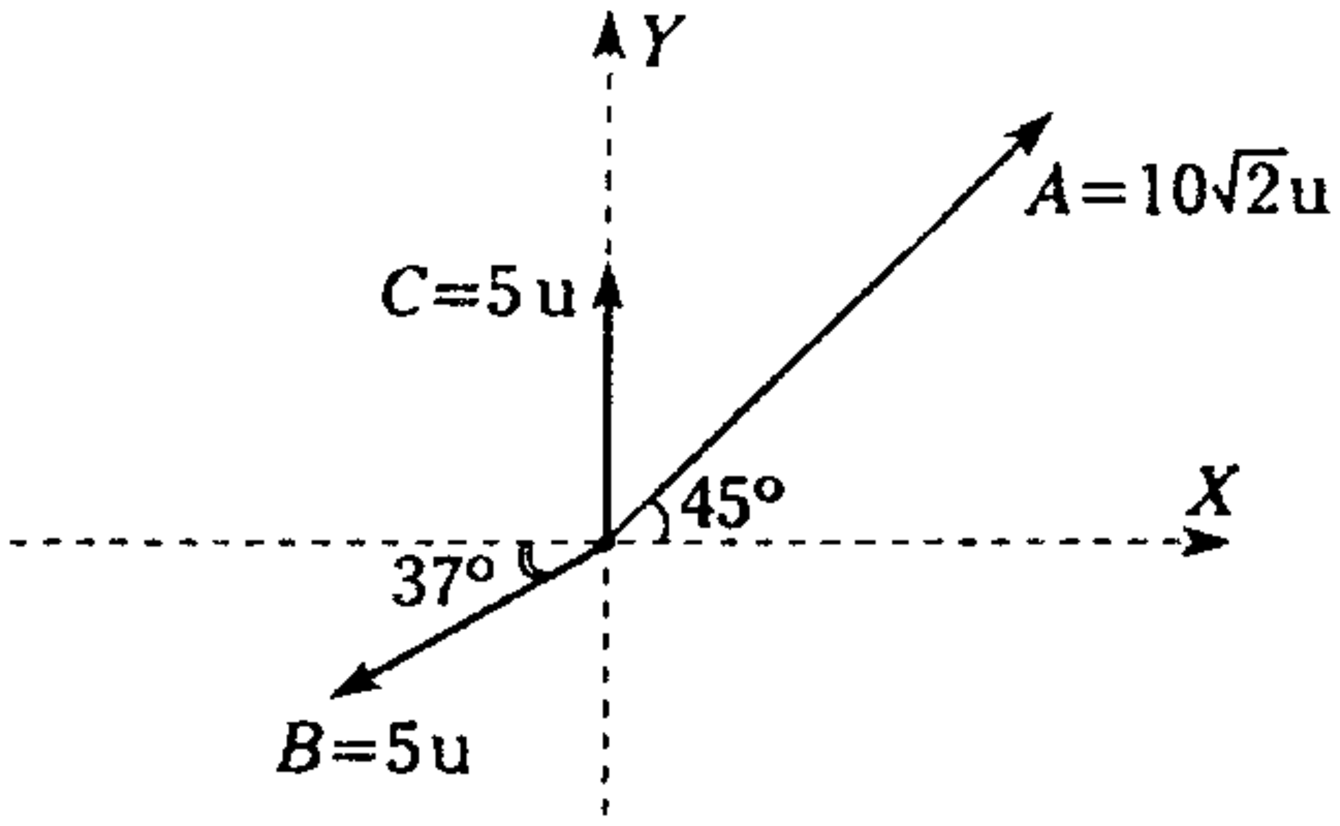
$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = (7 ; 4) - (9 ; 8)$$

$$\vec{D} = (7 - 9 ; 4 - 8)$$

$$\therefore\ \vec{D} = (-2 ; -4)\text{ u}$$

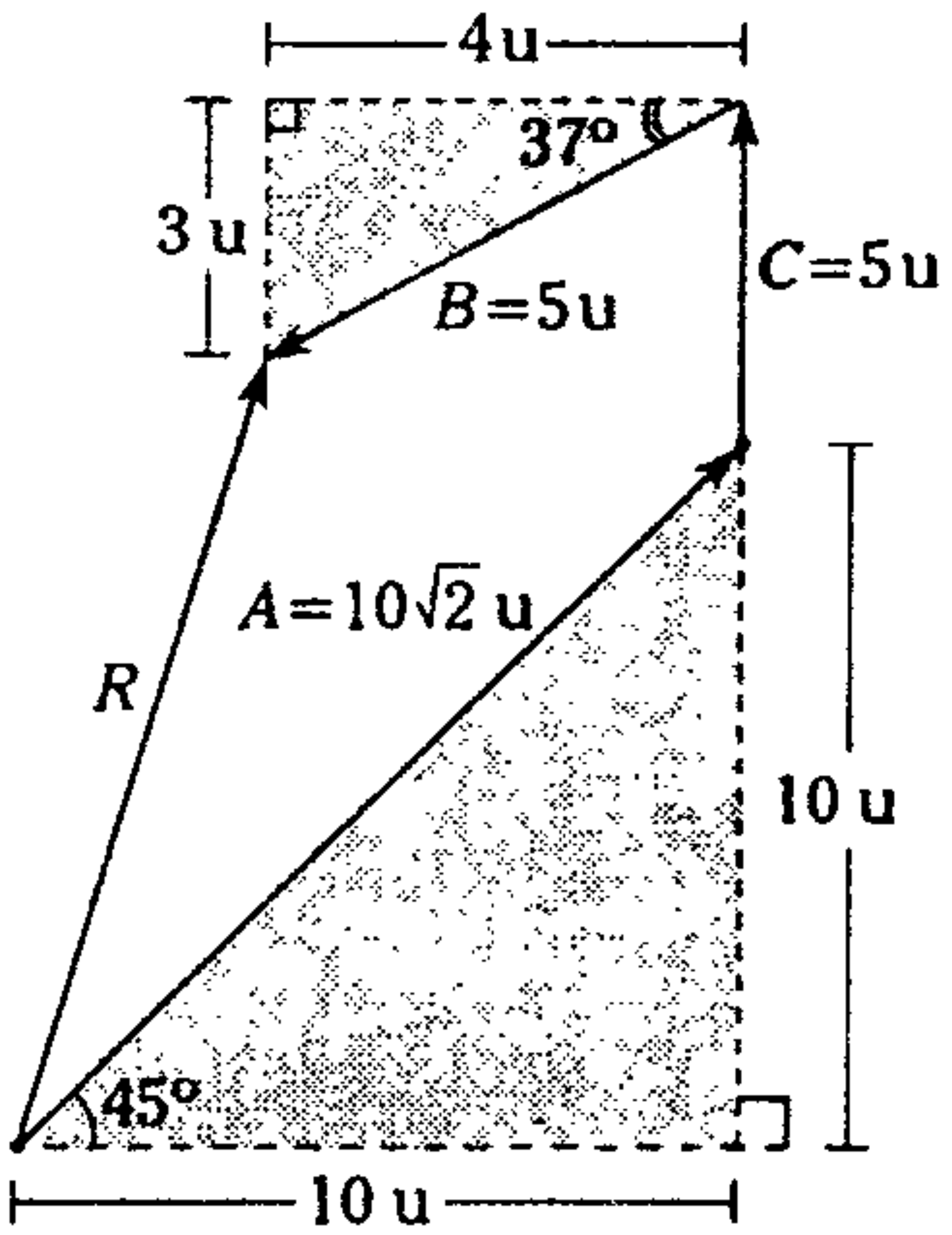
Ejemplo 9

En el sistema de vectores que se muestra, determine el módulo de la resultante.

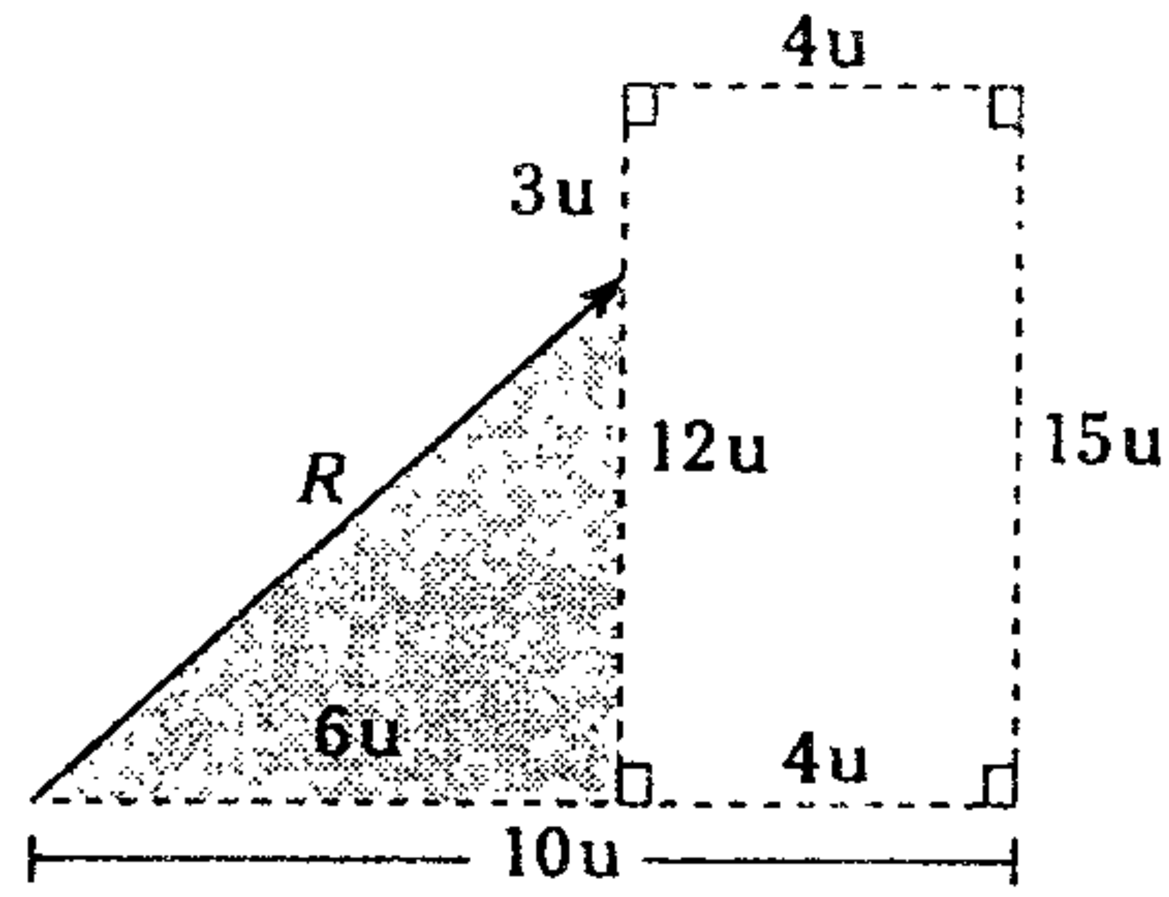


Resolución

Para determinar el módulo de la resultante, podemos emplear el método del polígono; para ello, colocamos a los vectores uno a continuación de otro y como sabemos la resultante $(\vec{R})$ se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del último.



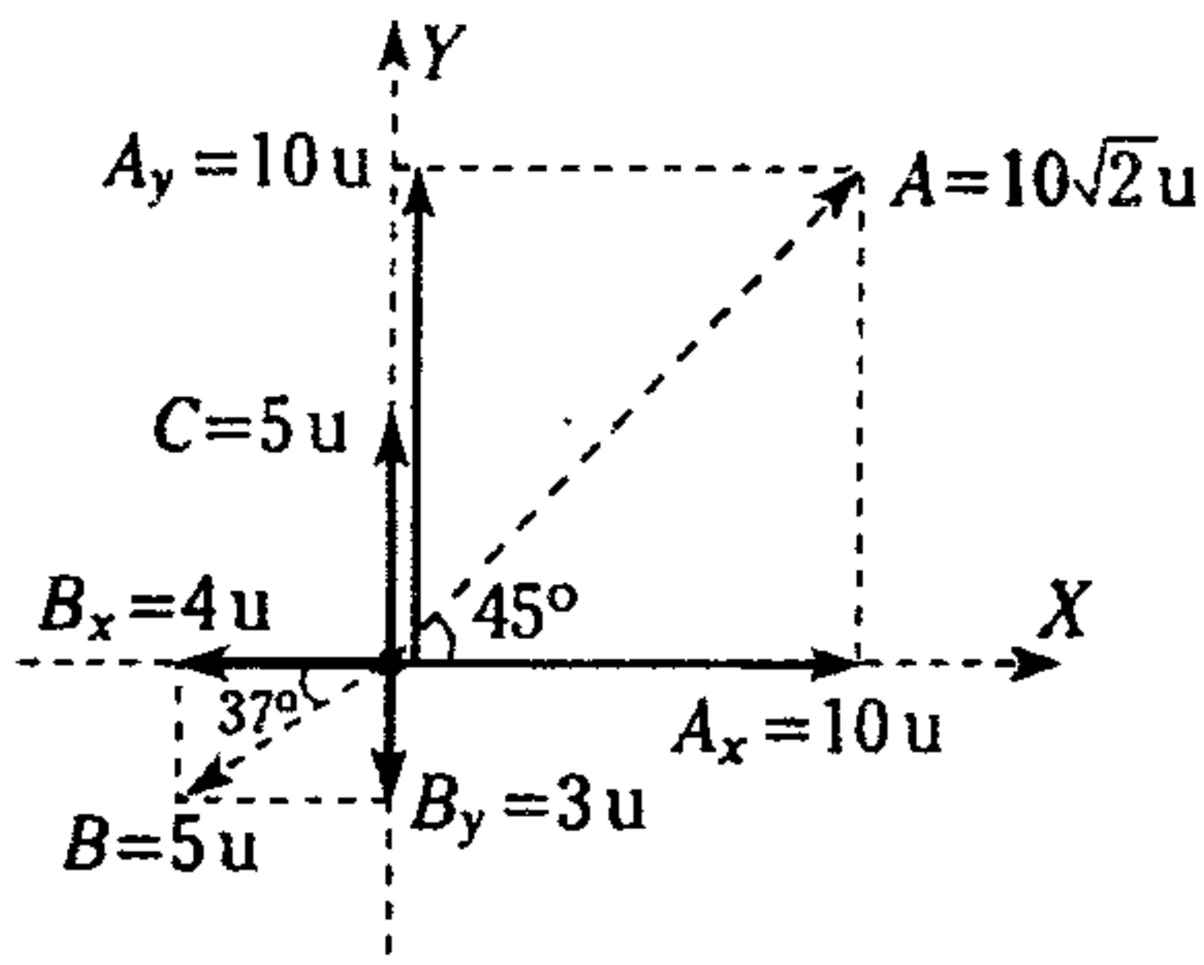
Como los ángulos que se tiene por dato son notables, los triángulos son triángulos rectángulos notables. Aislando el triángulo rectángulo para el cual $\vec{R}$ representa ser hipotenusa, tendremos



$$R=\sqrt{(12)^2+(6)^2}$$

$$\therefore \ R=6\sqrt{5}\ \text{u}$$

Otro método para dar solución al problema es emplear la descomposición rectangular, tomando como referencia el sistema de coordenadas *XY*, dado.



Para esto debemos descomponer a cada vector en los ejes *X* e *Y*, luego pasamos a determinar la resultante en cada eje.

- En el eje *X*

$$\vec{R}_x=\vec{A}_x+\vec{B}_x$$

$$\vec{R}_x=10\hat{i}+\left(-4\hat{i}\right)$$

$$\vec{R}_x=6\hat{i}$$

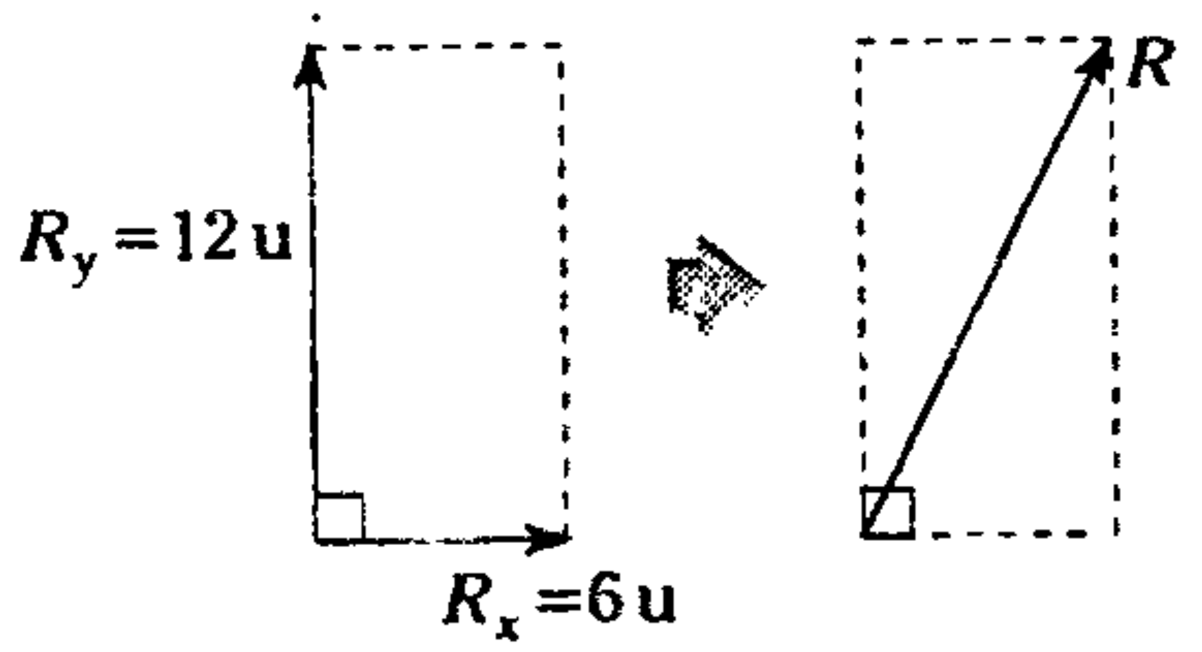
- En el eje Y

$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y + \vec{C}$$

$$\vec{R}_y = 10\hat{j} + \left(-3\hat{j}\right) + 5\hat{j}$$

$$\vec{R}_y = 12\hat{j}$$

Finalmente, la resultante de los vectores dados la encontramos como la resultante de $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$.



$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

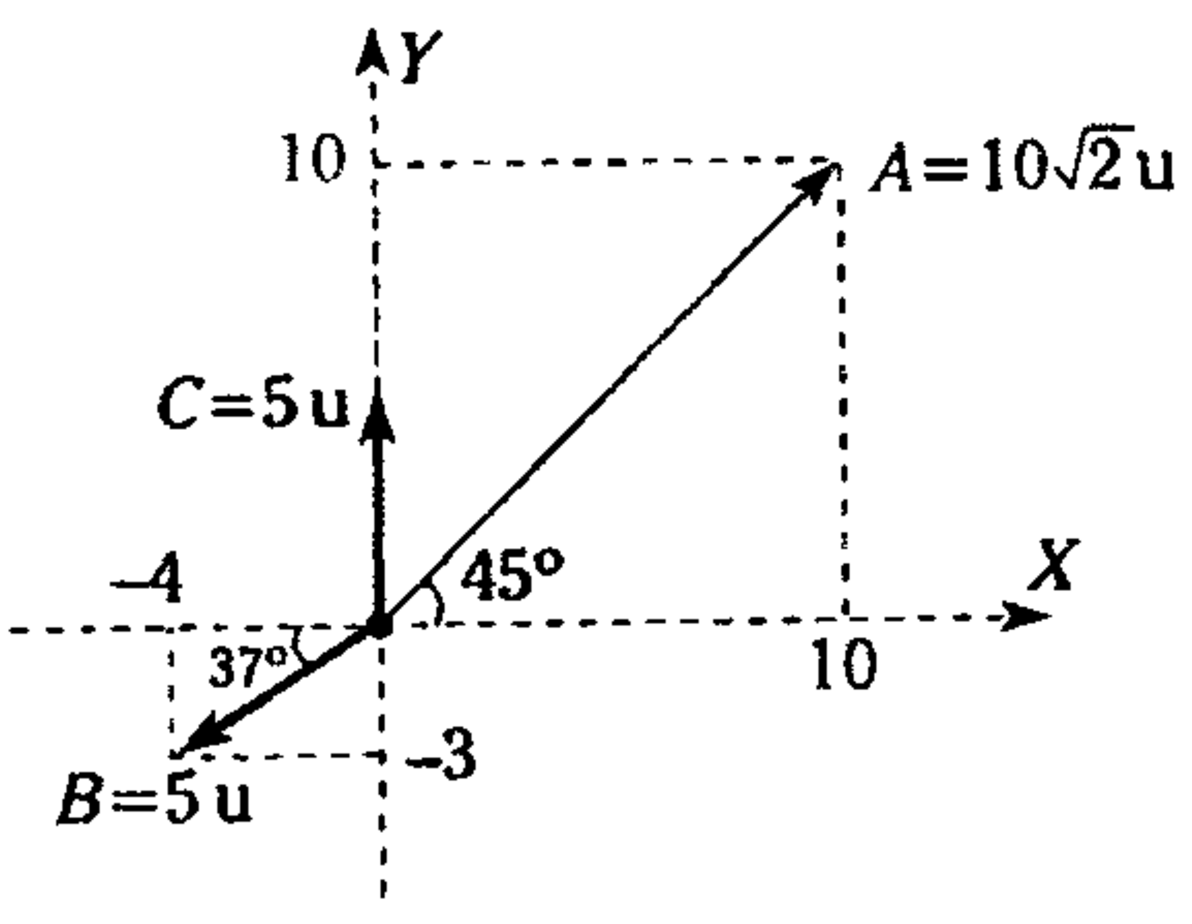
$$\Rightarrow \ \vec{R} = 6\hat{i} + 12\hat{j}$$

Su módulo se obtiene como

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{(6)^2 + (12)^2}$$

$$\therefore \ R = 6\sqrt{5} \text{ u}$$

Este método para determinar la resultante de los vectores dados, en algunos casos es muy extenso y operativo, debido a ello también podemos recurrir a colocar los vectores en forma cartesiana.



Nos piden $\left|\vec{R}\right|$, donde

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico

$$\vec{A} = (10;10) \text{ u}$$

$$\vec{B} = (-4;-3) \text{ u}$$

$$\vec{C} = (0;5) \text{ u}$$

Reemplazando en (I)

$$\vec{R} = (10;10)\text{u} + (-4;-3)\text{u} + (0;5)\text{u}$$

$$\vec{R} = \{(10-4+0);(10-3+5)\}$$

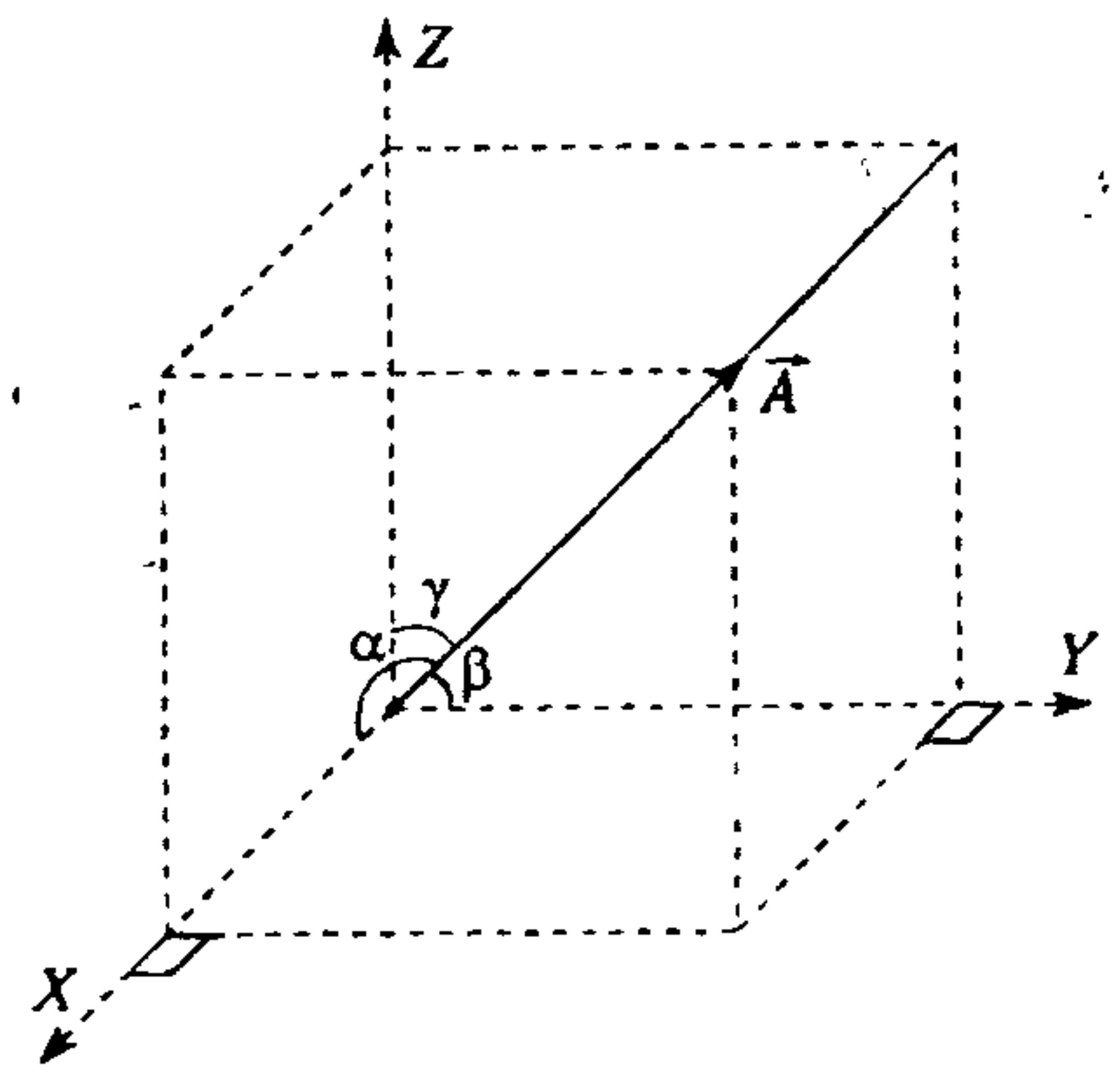
$$\Rightarrow \ \vec{R} = (6;12) \text{ u} \ \Rightarrow \ \left|\vec{R}\right| = \sqrt{6^2 + 12^2}$$

$$\therefore \ \left|\vec{R}\right| = 6\sqrt{5} \text{ u}$$

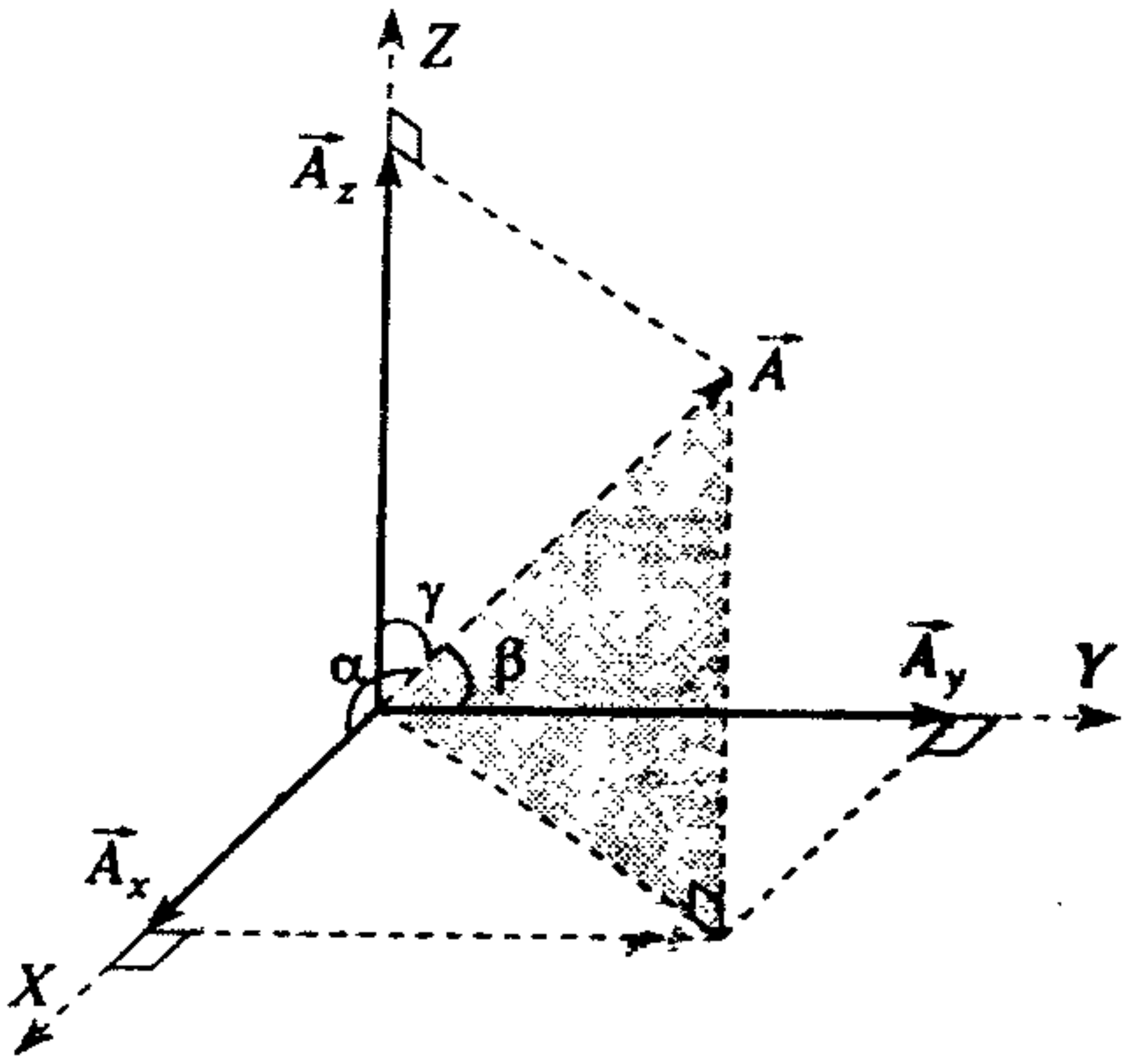
Al resolver el problema por los tres métodos notamos que obtenemos la misma respuesta, debido a ello concluimos que los tres métodos son equivalentes, y de acuerdo a lo que en el problema se nos pida, los datos y condiciones que nos planteen alguno de estos tres métodos será el más sencillo para trabajar.

VECTORES EN EL ESPACIO

Si tenemos un vector en tres dimensiones tal como el que se muestra, podemos expresarlo en función de tres vectores componentes, que son las proyecciones de este vector sobre los tres ejes coordenados.



Dado el $\vec{A}$ sus proyecciones sobre los ejes X, Y, Z son $\vec{A}_x$, $\vec{A}_y$, $\vec{A}_z$, respectivamente.



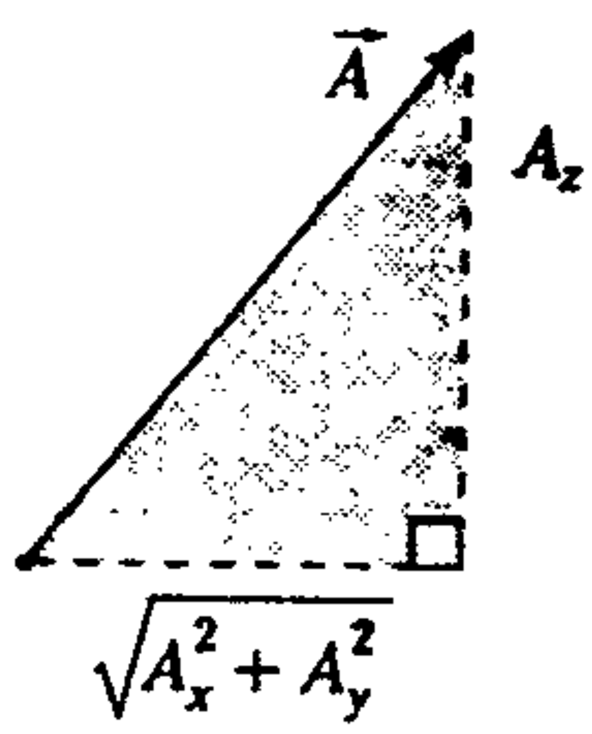
Observando la figura concluimos

$$\boxed{\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A_x &= |\vec{A}|\cos\alpha \\ A_y &= |\vec{A}|\cos\beta \\ A_z &= |\vec{A}|\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$ $\cos\alpha$, **$\cos\beta$ y $\cos\gamma$** se denominan **cosenos directores**

Si del gráfico extraemos el triángulo rectángulo sombreado, encontramos



$$|\vec{A}|^2=\left(\sqrt{A_x^2+A_y^2}\right)^2+A_z^2$$

$$A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

Por lo tanto

$$\boxed{A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$$

(Módulo del vector $\vec{A}$)

Pero conocemos que

$$A_x=A\cos\alpha\,,\ A_y=A\cos\beta\,,\ A_z=A\cos\gamma$$

$$A=\sqrt{(A\cos\alpha)^2+(A\cos\beta)^2+(A\cos\gamma)^2}$$

$$\Rightarrow\ A=\sqrt{A^2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)}$$

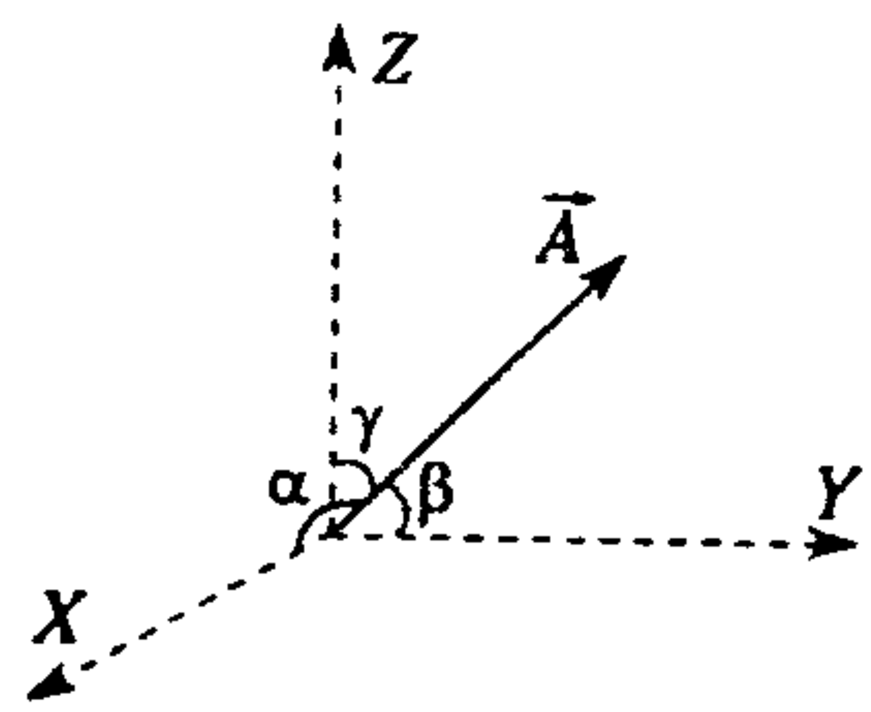
Simplificando se obtiene

$$\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1}$$

(Propiedad de los cosenos directores)

Ejemplo 10

Exprese el $\vec{A}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, sabiendo que su proyección sobre el eje X es de 20 u. $\left(\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{5};\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

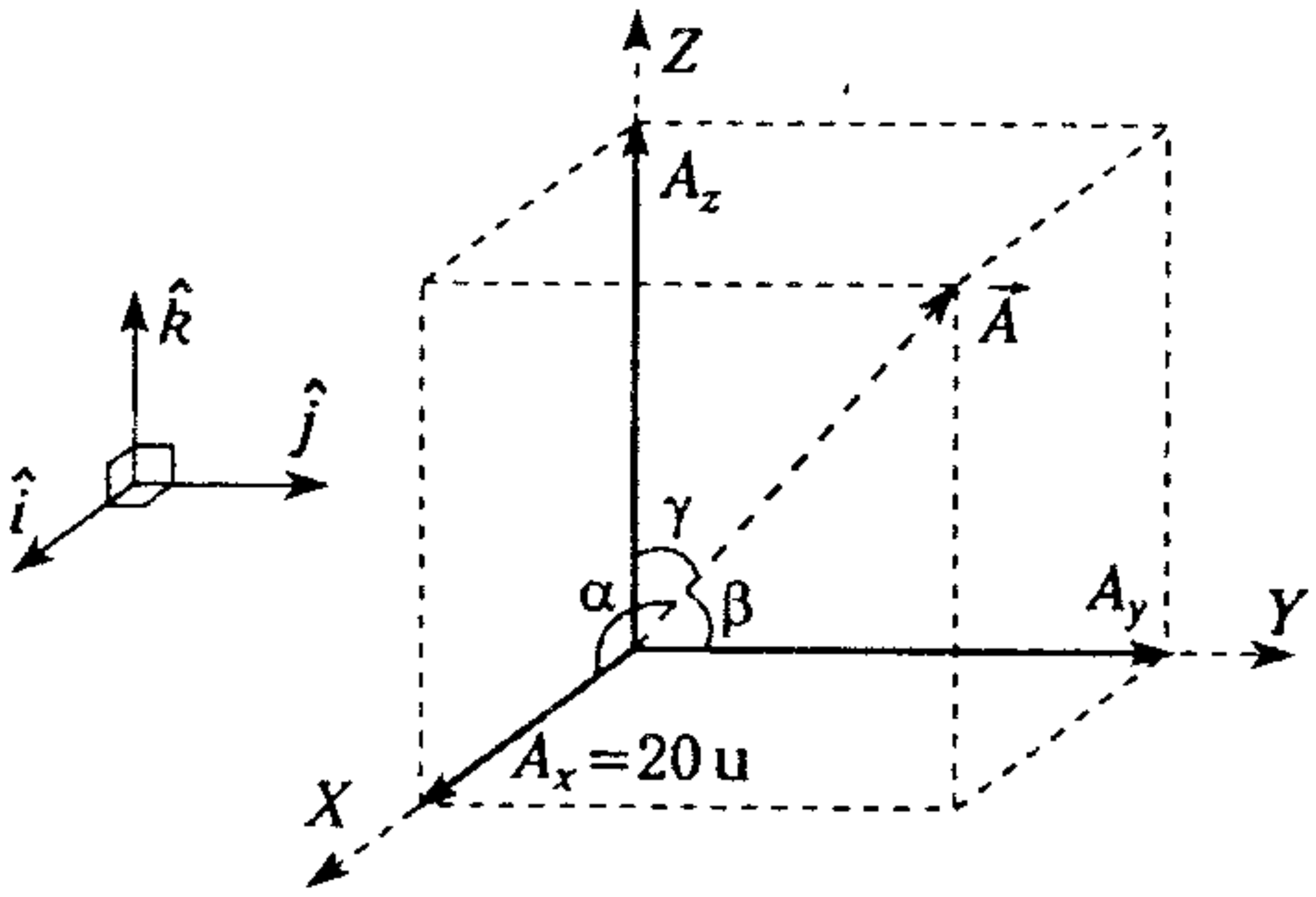


Resolución

Nos piden expresar $\vec{A}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, pero sabemos

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z$$

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k} \qquad \text{(I)}$$



Por dato se tiene que A_x = 20 u; pero también sabemos que

$$A_x = A\cos\alpha$$

$$20 = A\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right) \Rightarrow A = 25\sqrt{2}\text{ u} \qquad \text{(II)}$$

Además, $A_y = A\cos\beta$ y de la expresión (II)

$$A_y = 25\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A_y = 25\text{ u} \qquad \text{(III)}$$

Finalmente $A_z = A\cos\gamma$

De (II)

$$A_z = 25\sqrt{2}\cos\gamma \qquad \text{(IV)}$$

Para conocer A_z debemos determinar primero el $\cos\gamma$, pero como conocemos por dato del problema el $\cos\alpha$ y el $\cos\beta$, aplicamos la propiedad de los cosenos directores.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

Operando

$$\cos\gamma = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

Reemplazando en (IV)

$$A_z = 25\sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)$$

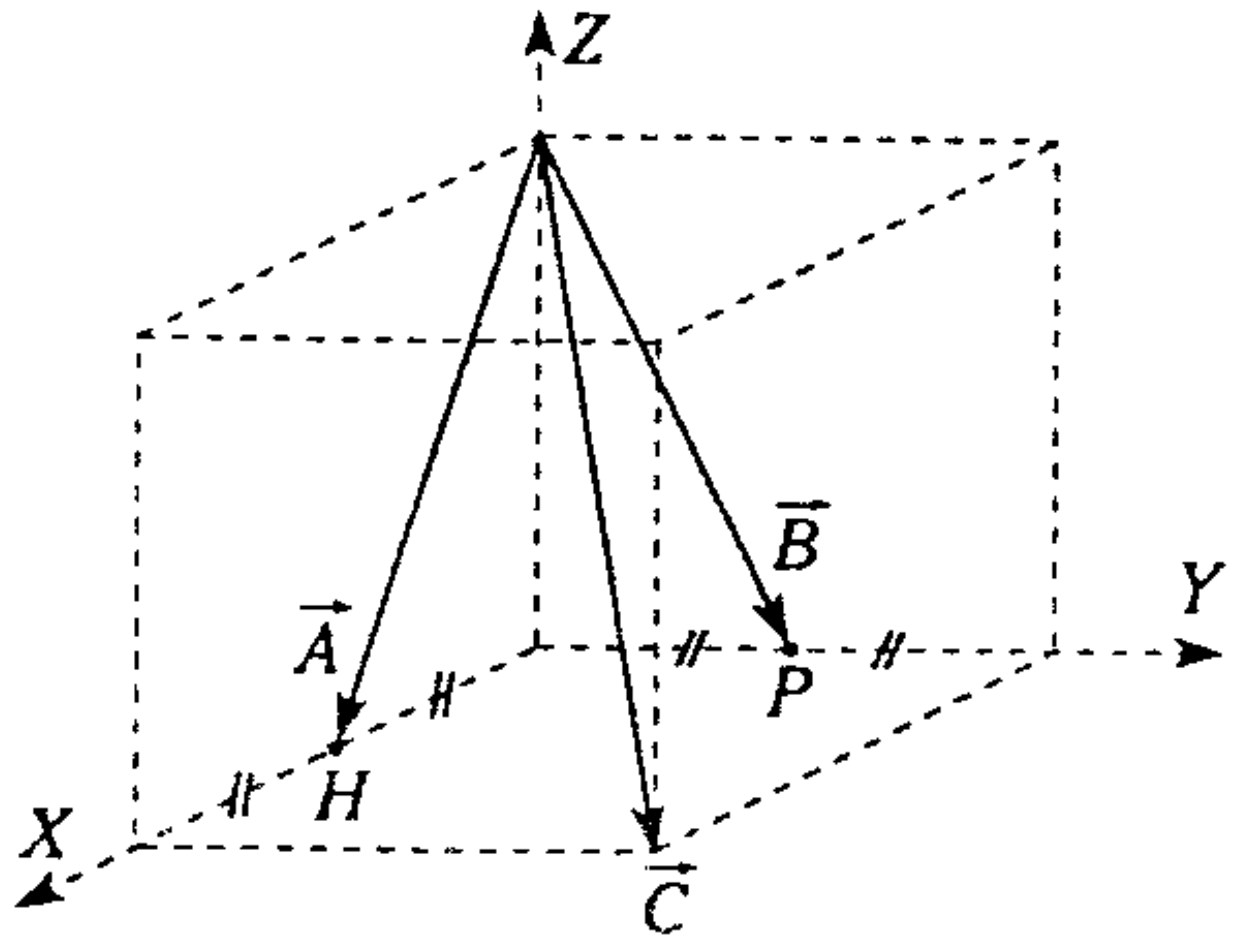
$$\therefore\ A_z = 15\text{ u}$$

Finalmente, reemplazamos A_x, A_y, A_z en la expresión (I)

$$\vec{A} = \left(20\hat{i} + 25\hat{j} + 15\hat{k}\right)\text{u}$$

Ejemplo 11

Se muestra un conjunto de vectores dispuestos sobre un cubo cuya arista mide a. Determine el módulo de $\vec{K}$, sabiendo que $\vec{K} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$.
(H y P son puntos medios)



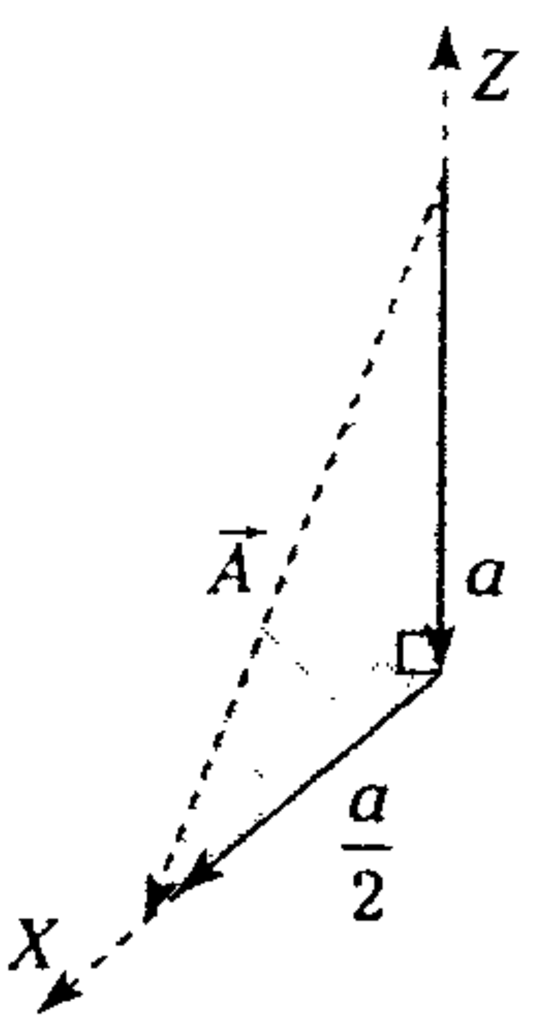
Resolución

Como nos piden el módulo de $\vec{K}$, sabiendo que $\vec{K}$ depende de los vectores A, B y C mediante la relación

$$\vec{K} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} \qquad \text{(I)}$$

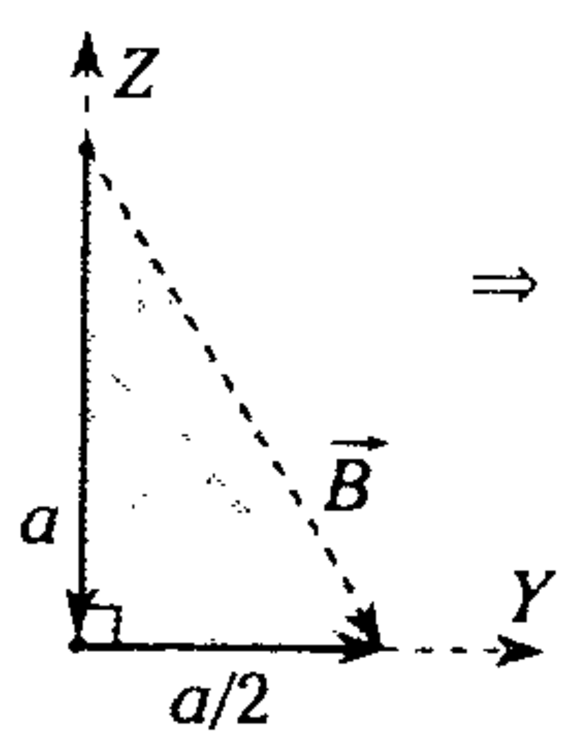
En este caso es conveniente expresar a los vectores dados en función de sus vectores unitarios.

Para $\vec{A}$



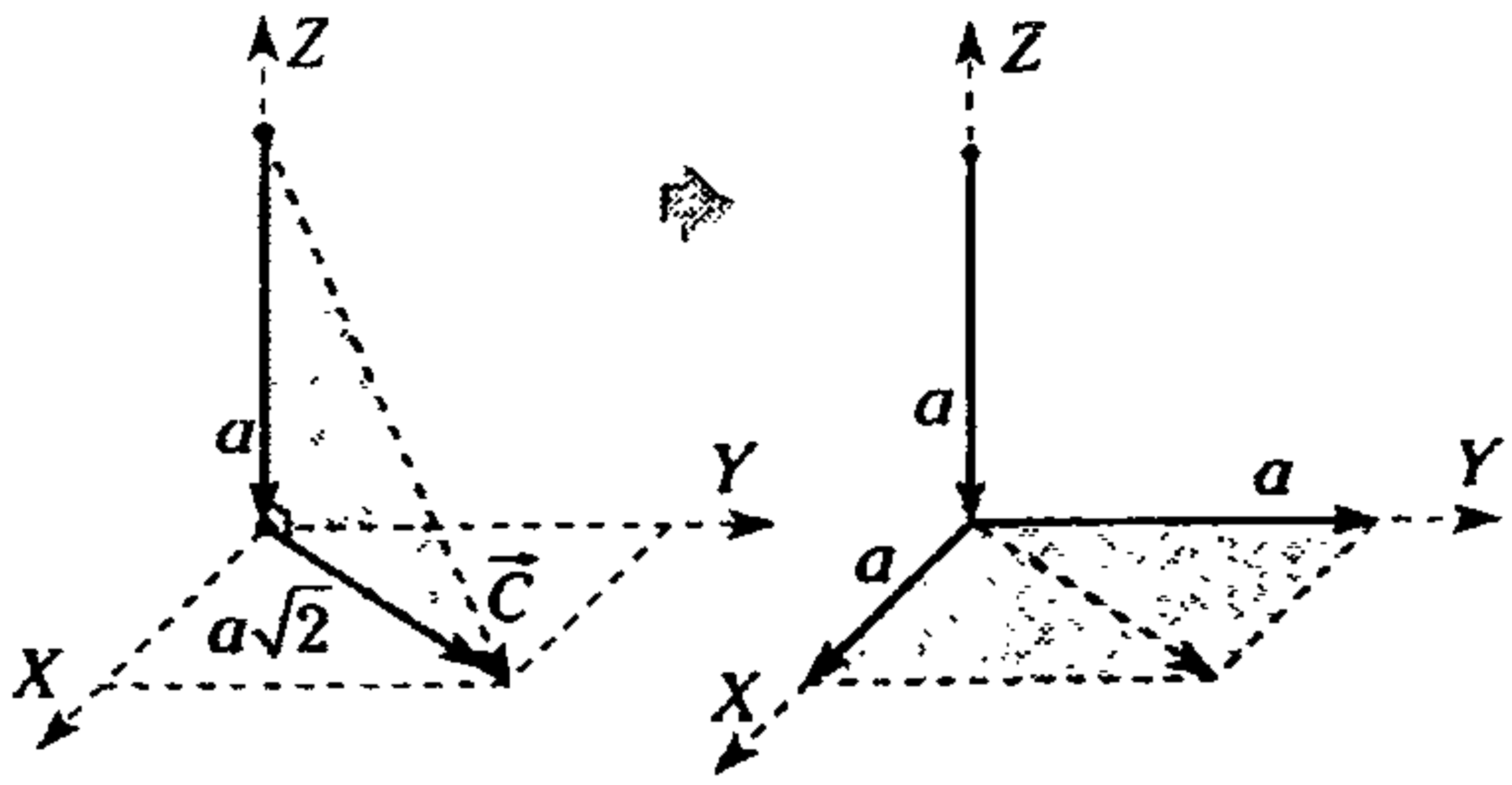
$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{a}{2}\hat{i} - a\hat{k} \qquad \text{(II)}$$

Para $\vec{B}$



$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{a}{2}\hat{j} - a\hat{k} \qquad \text{(III)}$$

Para $\vec{C}$



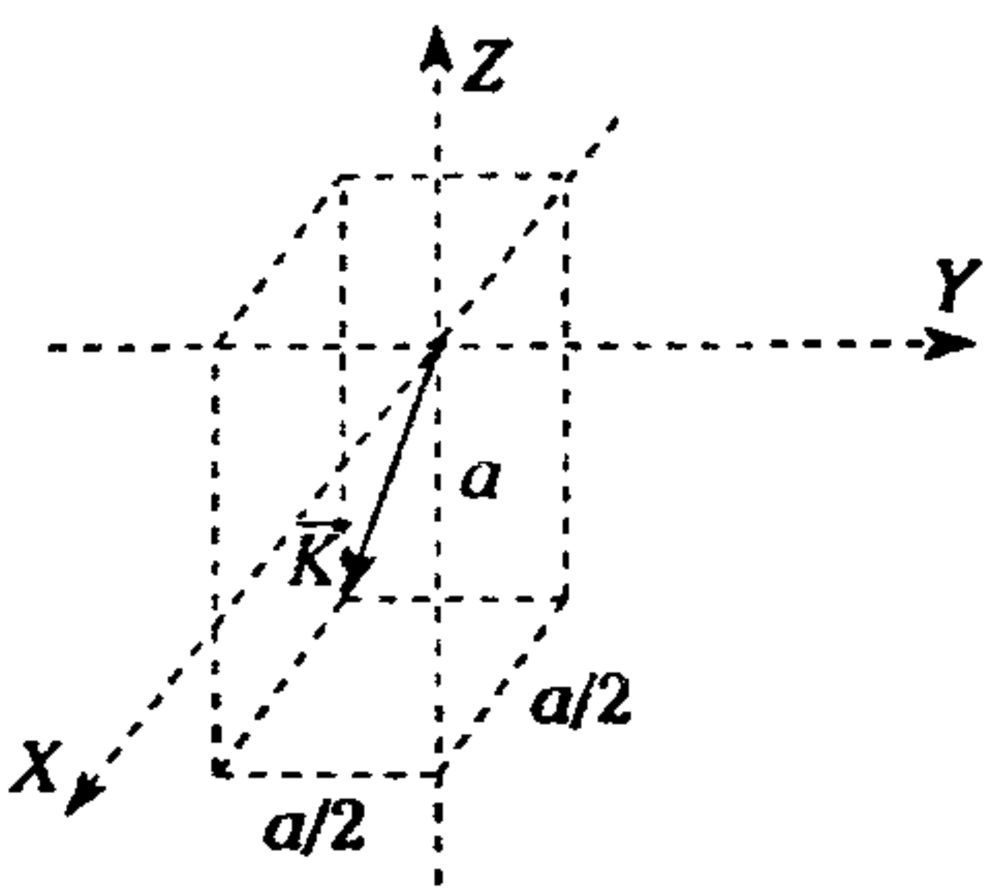
$$\Rightarrow \quad \vec{C} = a\hat{i} + a\hat{j} - a\hat{k} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (II), (III) y (IV) en la expresión (I)

$$\vec{K} = \left(\frac{a}{2}\hat{i} - a\hat{k}\right) + \left(\frac{a}{2}\hat{j} - a\hat{k}\right) - \left(a\hat{i} + a\hat{j} - a\hat{k}\right)$$

Operando $\vec{K} = -\frac{a}{2}\hat{i} - \frac{a}{2}\hat{j} - a\hat{k}$

Graficando el vector $\vec{K}$



Su módulo se obtiene como

$$|\vec{K}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$\therefore \; K = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

PRODUCTO DE VECTORES

En el Álgebra vectorial se definen dos formas para realizar el producto entre vectores: una es el producto escalar y la otra es el producto vectorial.

Producto escalar

Es aquella operación que se realiza entre dos vectores y cuyo resultado es una cantidad escalar.

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define el producto escalar de estos vectores, como

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta} \qquad \text{(I)}$$

donde

θ : es el ángulo formado por ambos vectores.

Este producto escalar también se denomina **producto punto o producto interno**. Veamos algunas propiedades que posee el producto escalar.

1. $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

   El producto escalar es conmutativo.

2. $\vec{C}.(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C}.\vec{A} + \vec{C}.\vec{B}$

   El producto escalar cumple con la propiedad distributiva.

3. $m(\vec{A}.\vec{B}) = (m\vec{A}).\vec{B}$

   donde m es una cantidad escalar.

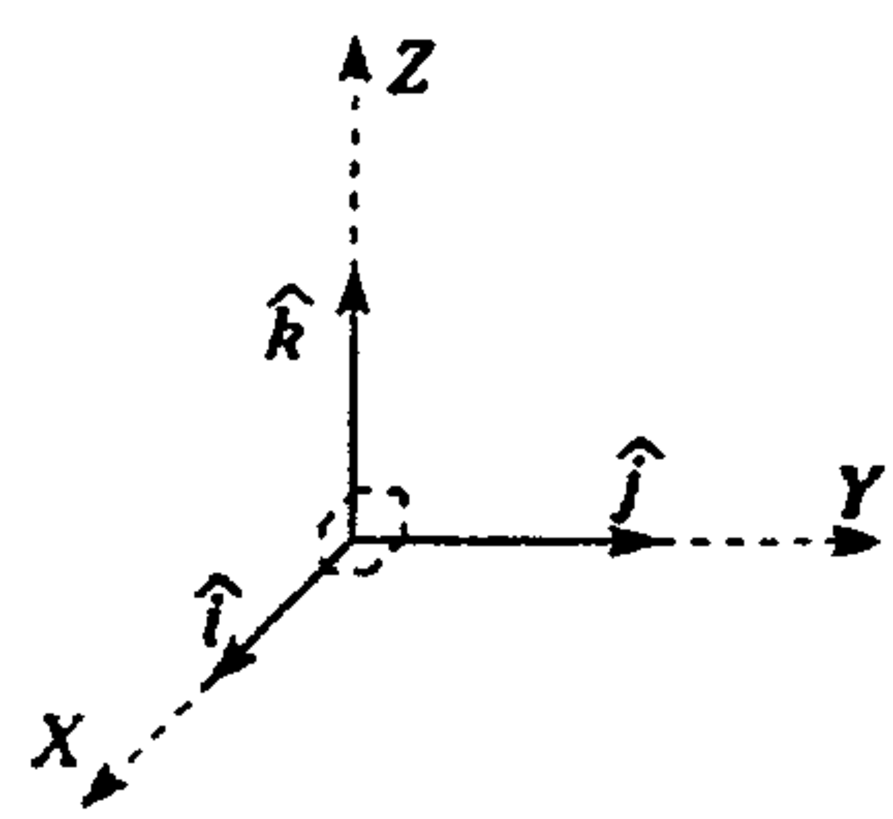
Para el caso de los vectores unitarios cartesianos, tenemos

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$$

(Vectores unitarios cartesianos colineales)

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{i}.\hat{k} = 0$$

(Vectores unitarios cartesianos perpendiculares)



Si ahora representamos a los $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de sus componentes cartesianos y luego realizamos el producto escalar tendremos

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right).\left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x\left(\hat{i}.\hat{i}\right) + A_xB_y\cancel{\left(\hat{i}.\hat{j}\right)} + A_xB_z\cancel{\left(\hat{i}.\hat{k}\right)}$$
$$+ A_yB_x\cancel{\left(\hat{j}.\hat{i}\right)} + A_yB_y\left(\hat{j}.\hat{j}\right) + A_yB_z\cancel{\left(\hat{j}.\hat{k}\right)}$$
$$+ A_zB_x\cancel{\left(\hat{k}.\hat{i}\right)} + A_zB_y\cancel{\left(\hat{k}.\hat{j}\right)} + A_zB_z\left(\hat{k}.\hat{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Ejemplo 12

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$,

$$\vec{A} = (20;15)\,\text{u} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \left(24\sqrt{2};-7\sqrt{2}\right)\text{u}$$

determine

1. $\vec{A}.\vec{B}$
2. El ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Resolución

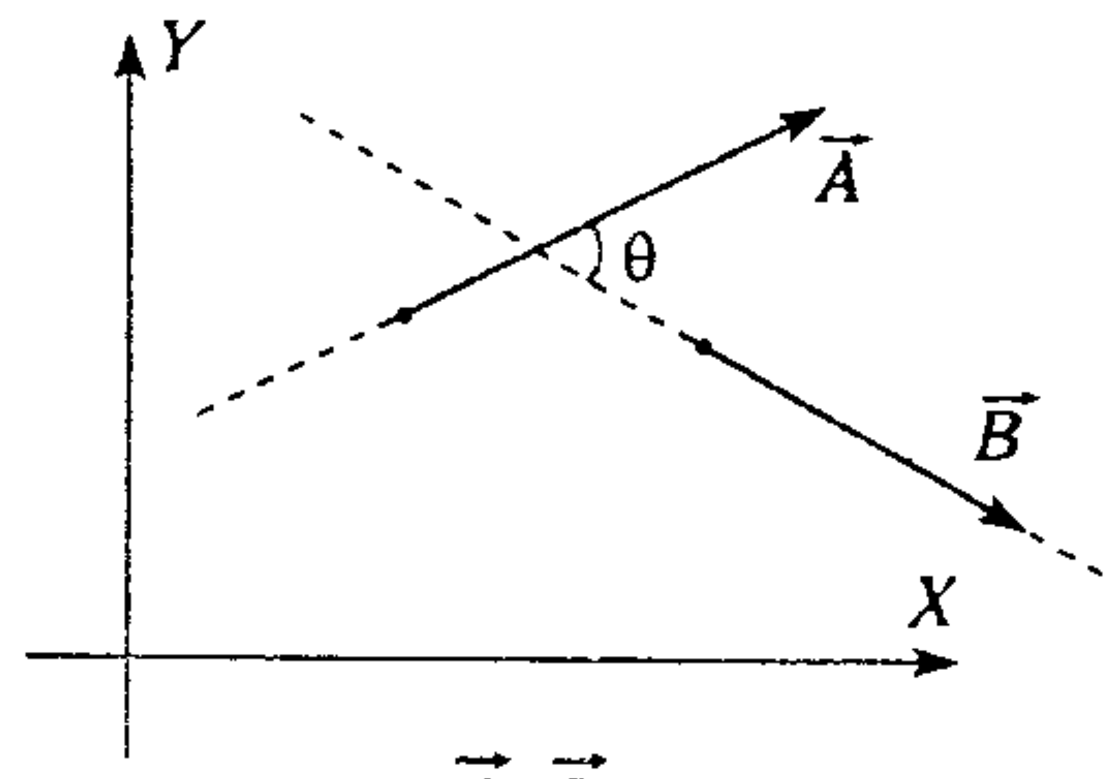
1. Como nos piden el producto escalar $\vec{A}.\vec{B}$ y para ello nos dan los componentes de ambos vectores; entonces, podemos emplear la relación $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$.

   Del dato

$$\vec{A} = (20;15)\,\text{u}$$
$$\vec{B} = \left(24\sqrt{2};-7\sqrt{2}\right)\text{u}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (20;15).\left(24\sqrt{2};-7\sqrt{2}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = (20)\left(24\sqrt{2}\right) + (15)\left(-7\sqrt{2}\right)$$
$$\therefore\ \vec{A}.\vec{B} = 375\sqrt{2}\,\text{u}^2$$

2. También nos piden el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, para ello, podemos emplear la relación del producto escalar

$$\Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} \qquad \text{(I)}$$

donde

$$\vec{A} = (20;15)\,\text{u}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{(20)^2 + (15)^2}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{A}\right| = 25\,\text{u}$$
$$\vec{B} = \left(24\sqrt{2};-7\sqrt{2}\right)\text{u}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{B}\right| = \sqrt{\left(24\sqrt{2}\right)^2 + \left(-7\sqrt{2}\right)^2}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{B}\right| = 25\sqrt{2}\,\text{u}$$

Si reemplazamos en la expresión (I), tendremos

$$\cos\theta = \frac{375\sqrt{2}\,\text{u}^2}{(25\,\text{u})\left(25\sqrt{2}\,\text{u}\right)}$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{5}$$
$$\therefore\ \theta = 53^\circ$$

Observación

El producto escalar es muy útil para definir magnitudes físicas escalares muy importantes como el trabajo mecánico y el flujo magnético.

$W = \vec{F}.\vec{d}$ (trabajo)

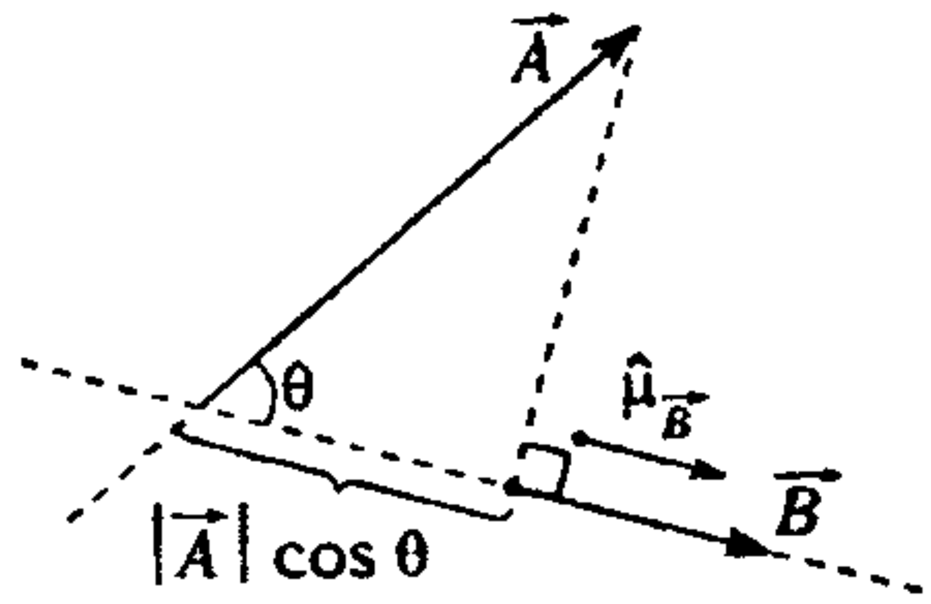
$\Phi = \vec{B}.\vec{A}$ (flujo magnético)

Nota

Si de la expresión (I) pasamos al primer miembro el $|\vec{A}|$ tendremos

$$|\vec{A}|\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}$$

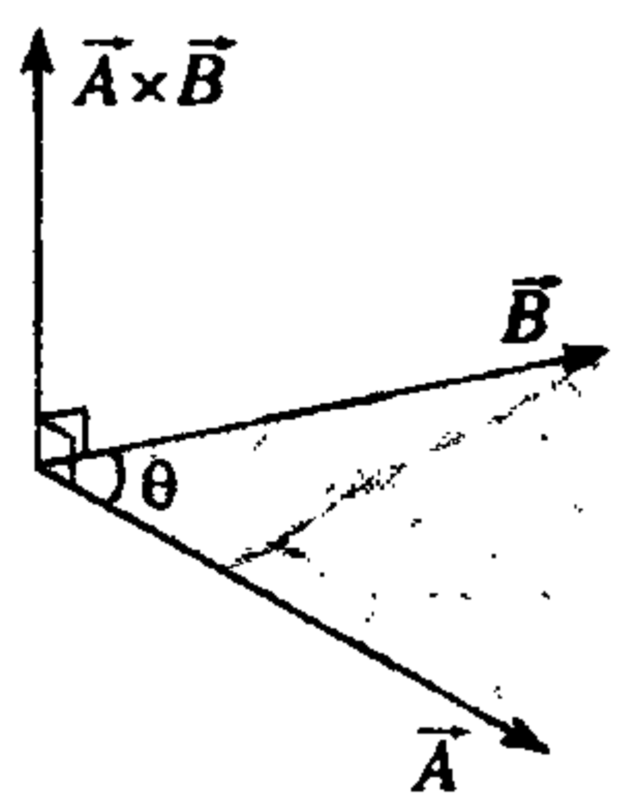
que vendría a ser la proyección ortogonal de $\vec{A}$ sobre la recta que contiene a $\vec{B}$.



Producto vectorial

El producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una operación definida en el álgebra vectorial y cuyo resultado es otro vector $\vec{A}\times\vec{B}$ perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Al producto vectorial de dos vectores también se le llama **producto cruz** o **producto externo**.

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se representa geométricamente el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ como



Su módulo se determina como

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB\,\text{sen}\,\theta}$$

Si $\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) = (A_x ; A_y ; A_z)$

$\vec{B} = (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = (B_x ; B_y ; B_z)$

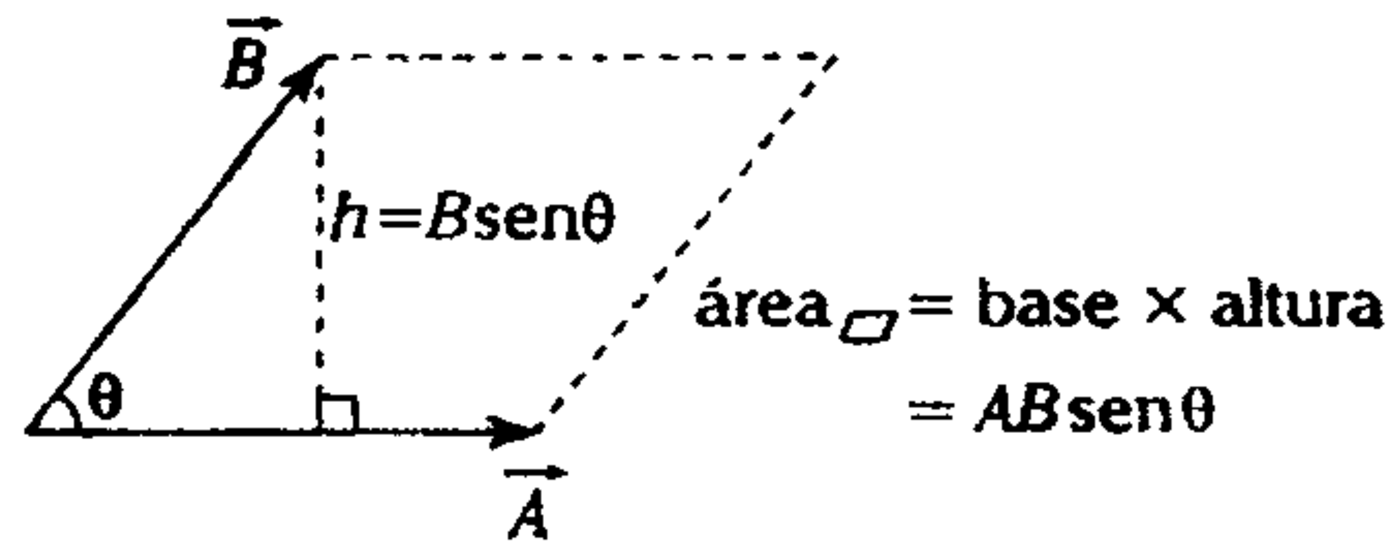
Para obtener el producto vectorial expresado en forma analítica, es decir a través de sus componentes, debemos desarrollar el siguiente determinante:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - B_yA_z)\hat{i} - (A_xB_z - B_xA_z)\hat{j} + (A_xB_y - B_xA_y)\hat{k}$$

Observación

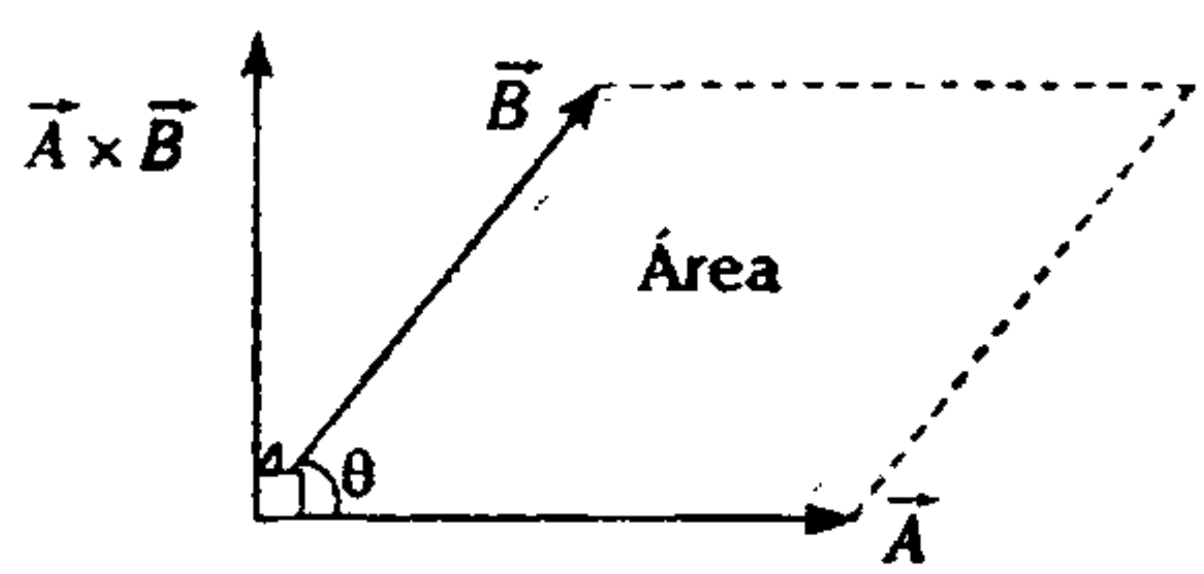
Matemáticamente, el producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tiene un módulo igual al área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



Por lo tanto

$$\boxed{\text{área}_{\square} = |\vec{A}\times\vec{B}|}$$

En general



Propiedades del producto vectorial

1. $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

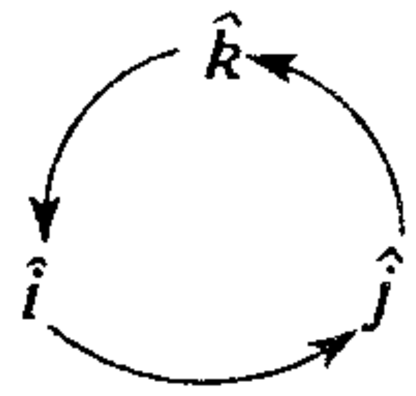
2. $\vec{A}\times\vec{A}=\vec{0}$

3. $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

Producto vectorial de los vectores unitarios

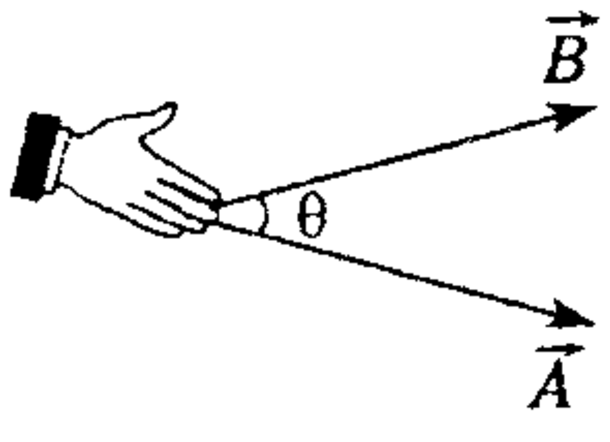
a. $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$

$$\left.\begin{aligned}&\text{b.}\quad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}\\&\text{c.}\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}\\&\text{d.}\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\end{aligned}\right\}$$

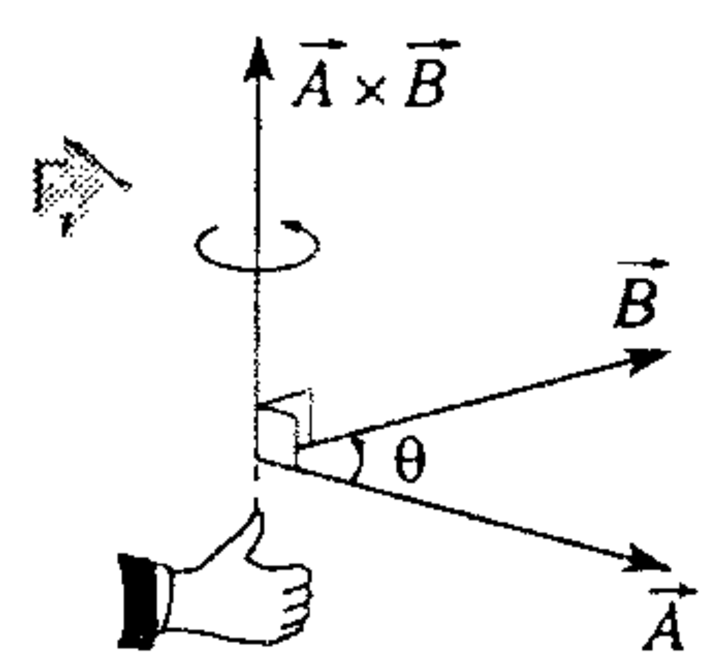


Nota

Para determinar la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$ de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se utiliza una regla práctica llamada regla de la mano derecha (RMD), que consiste en colocar la mano derecha extendida (ver gráfico) a lo largo del primer vector a multiplicar, en este caso el vector $\vec{A}$. Luego, cerramos la mano girando los dedos hacia el otro vector, en este caso hacia $\vec{B}$. Al extender el dedo pulgar, éste nos indicará la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$.



Colocamos la mano derecha a lo largo del vector $\vec{A}$.



Giramos los dedos hacia $\vec{B}$ y extendemos el dedo pulgar.

$\vec{A}\times\vec{B}$ es un vector normal al plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Ejemplo 13

Sean $\vec{A}=(2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})$u y $\vec{B}=(3\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k})$u. Determine el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ y su módulo, además ¿qué ángulo forman entre sí los vectores?

Resolución

Por definición se sabe que

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\2&3&5\\3&8&5\end{vmatrix}=(3\times5-8\times5)\hat{i}-$$

$$(2\times5-3\times5)\hat{j}+(2\times8-3\times3)\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-25\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}$$

El módulo de $\vec{A}\times\vec{B}$ se determina así

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{(-25)^2+(5)^2+(7)^2}=26{,}44\text{ u}$$

Para el ángulo θ que forman los vectores usamos

$$|A\times B|=AB\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow\quad \text{sen}\,\theta=\frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{AB}\qquad\text{(I)}$$

donde

$$A=\sqrt{2^2+3^2+5^2}=6{,}2\text{ u}\quad;$$

$$B=\sqrt{3^2+8^2+5^2}=9{,}9\text{ u}$$

Reemplazando en la expresión (I) tenemos

$$\text{sen}\,\theta=\frac{26{,}44}{(6{,}2)(9{,}9)}=0{,}431$$

$$\Rightarrow\quad \theta=\text{arc sen}(0{,}431)=25°30'57''$$

Nota

El producto vectorial es muy útil para definir magnitudes vectoriales que se estudian, en la parte de la física denominada mecánica, tales como el momento de una fuerza y el momentum angular.

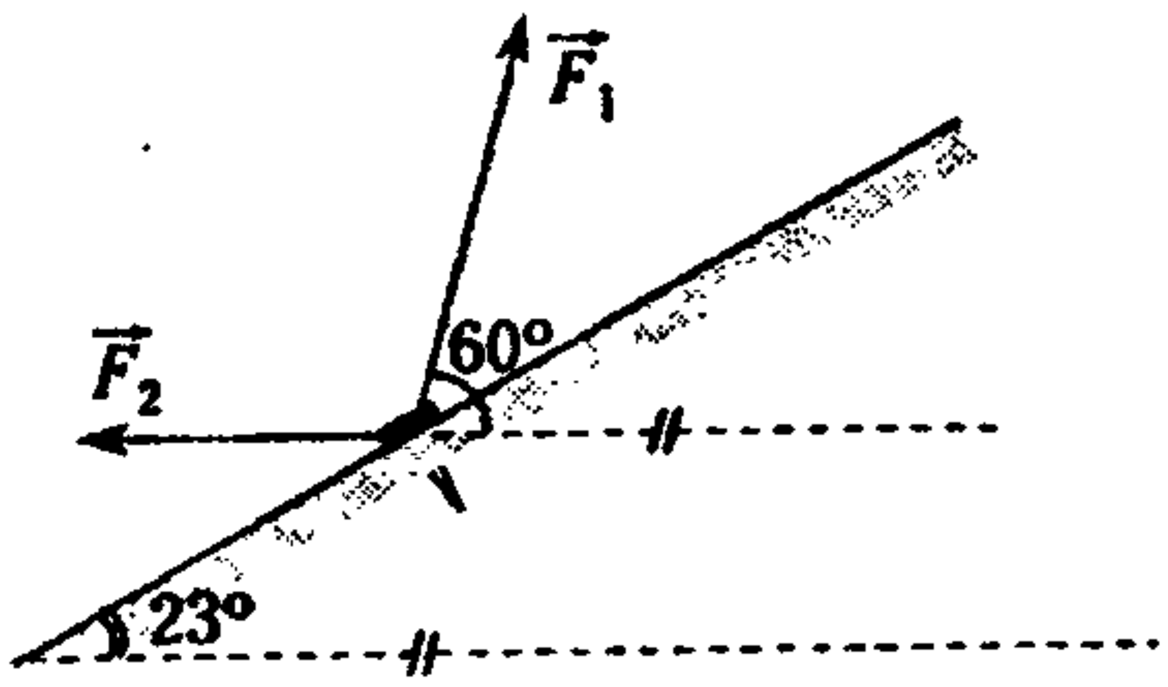
$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ (momento o torque)

$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ (momentum angular)

Problemas Resueltos

Problema 1

Sobre un clavo incrustado en un plano inclinado actúan dos fuerzas que se representan mediante los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Si su resultante está en la vertical y $F_2=30$ N, determine los módulos de las componentes de $\vec{F}_1$ en una dirección paralela y perpendicular al plano inclinado.



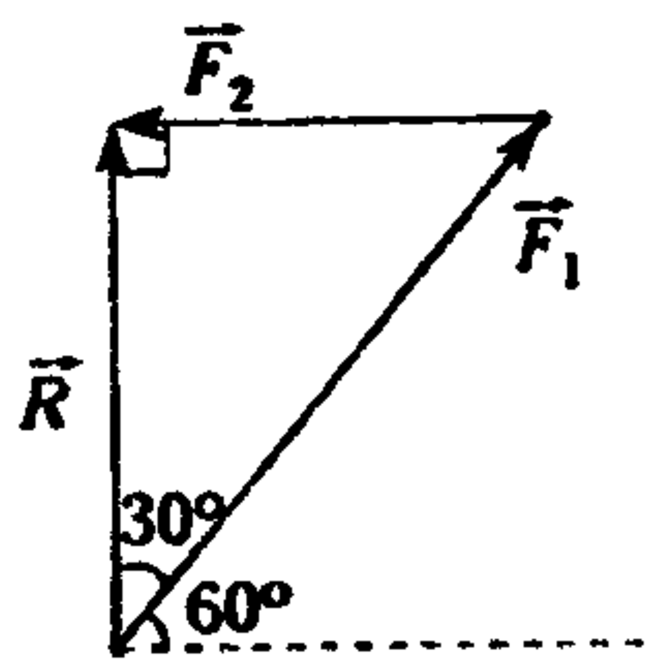
Resolución

De la condición del problema, la resultante de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es vertical. Usando el método del triángulo graficamos $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

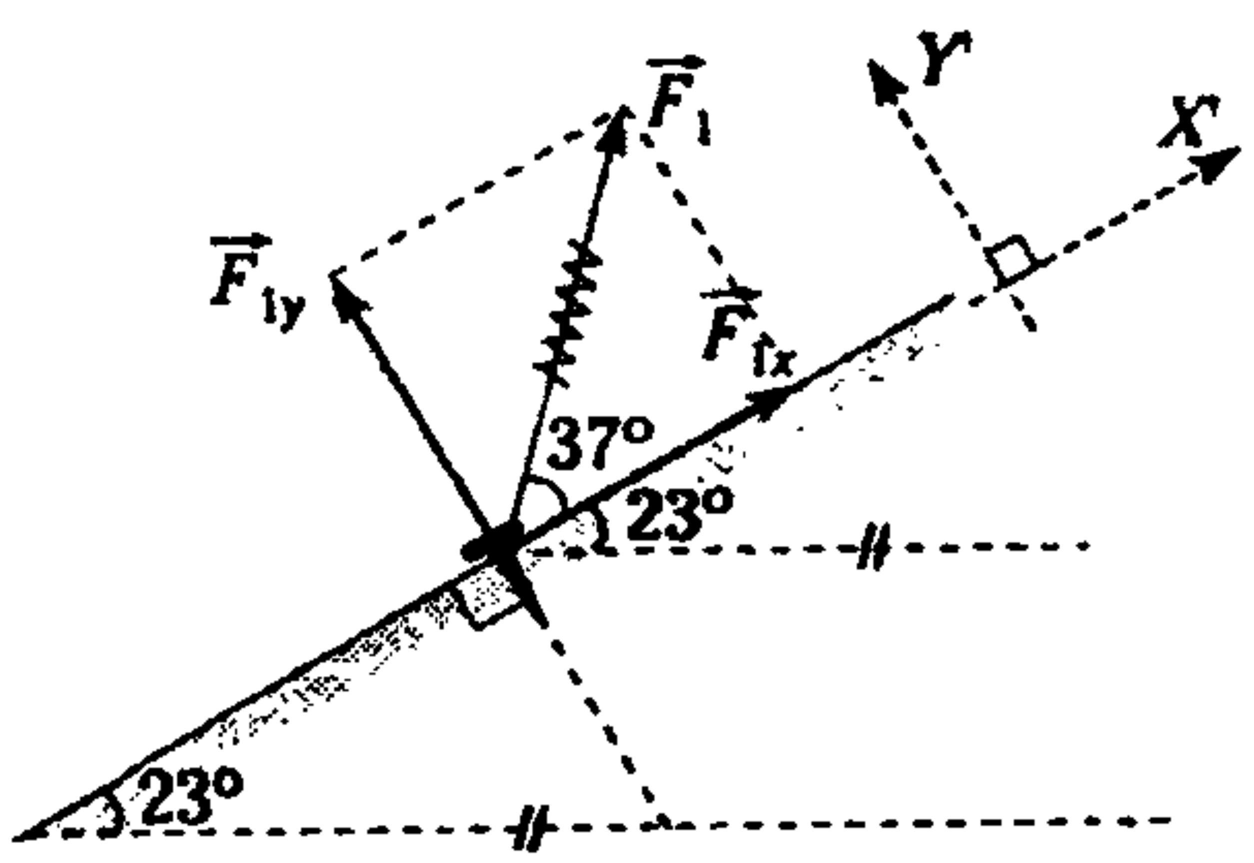
De la figura

$$F_1=2F_2$$

$$F_1=2\times 30=60\text{ N}$$



Ahora, descomponemos $\vec{F}_1$ tomando como referencia el plano inclinado.



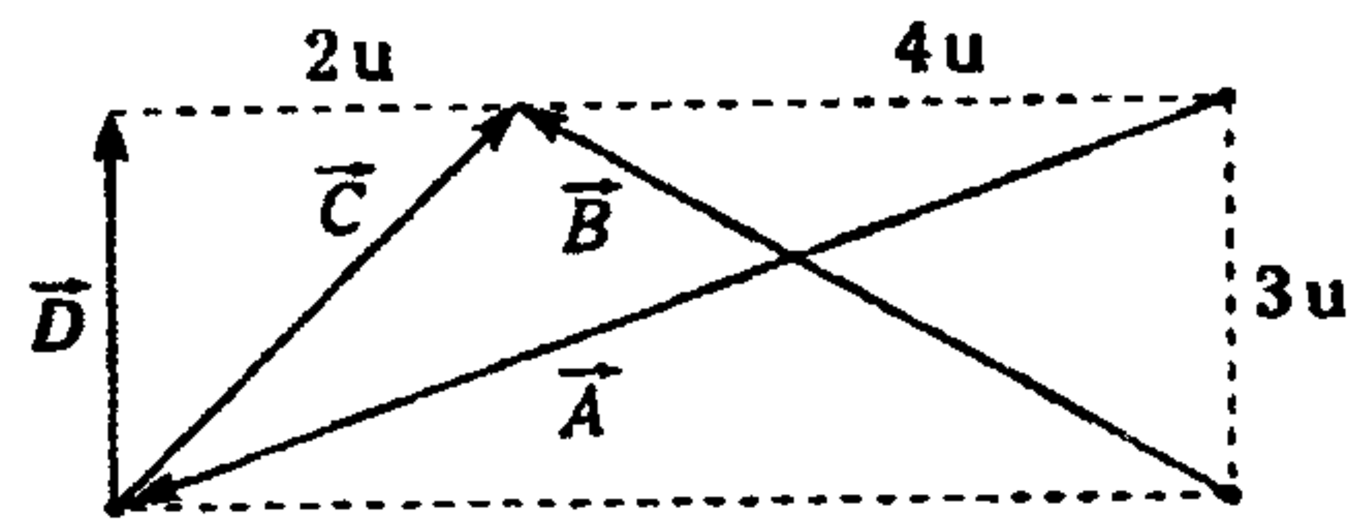
De la figura

$$F_{1x}=F_1\cos 37°=60\times\frac{4}{5}=48\text{ N}$$

$$F_{1y}=F_1\operatorname{sen}37°=60\times\frac{3}{5}=36\text{ N}$$

Problema 2

Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados.

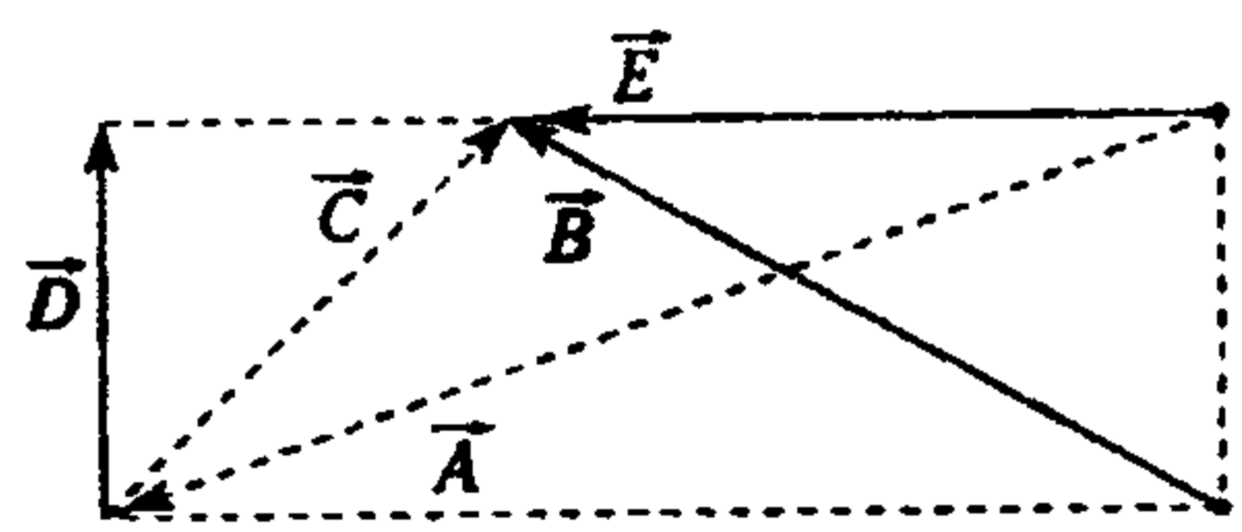


Resolución

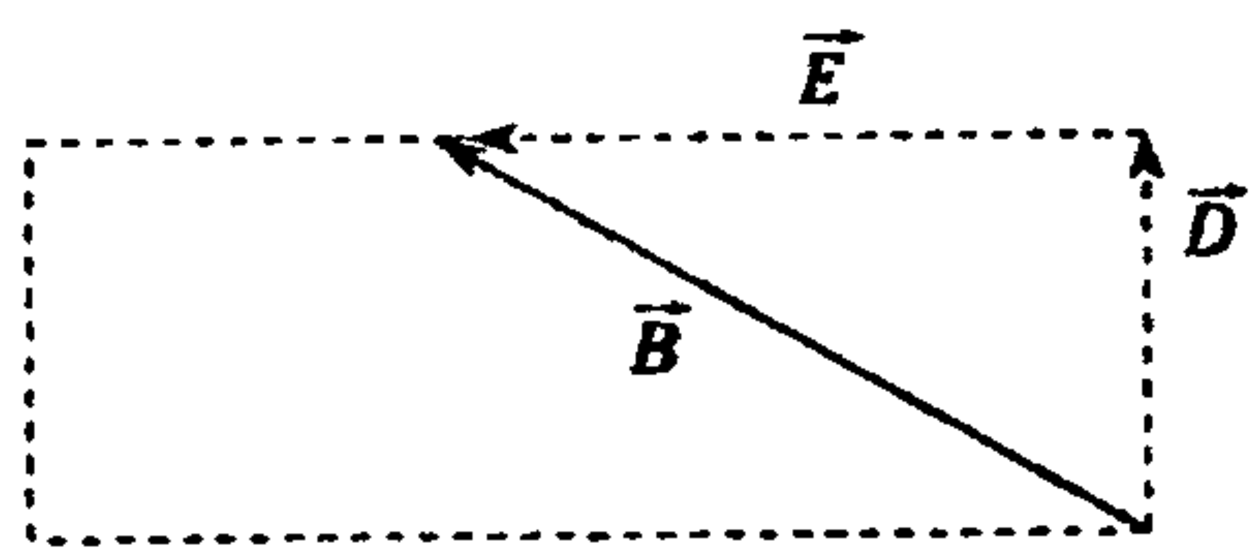
Para determinar el módulo de la resultante, primero expresaremos la resultante $(\vec{R})$ en función de los vectores que se muestran.

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

Ahora, sea $\vec{E}$ el vector que reemplaza a $\vec{A}+\vec{C}$.



Asimismo, $\vec{B}=\vec{D}+\vec{E}$



Luego, la resultante se reduce a lo siguiente:

$$\vec{R}=\underbrace{\vec{A}+\vec{C}}+\vec{B}+\vec{D}$$

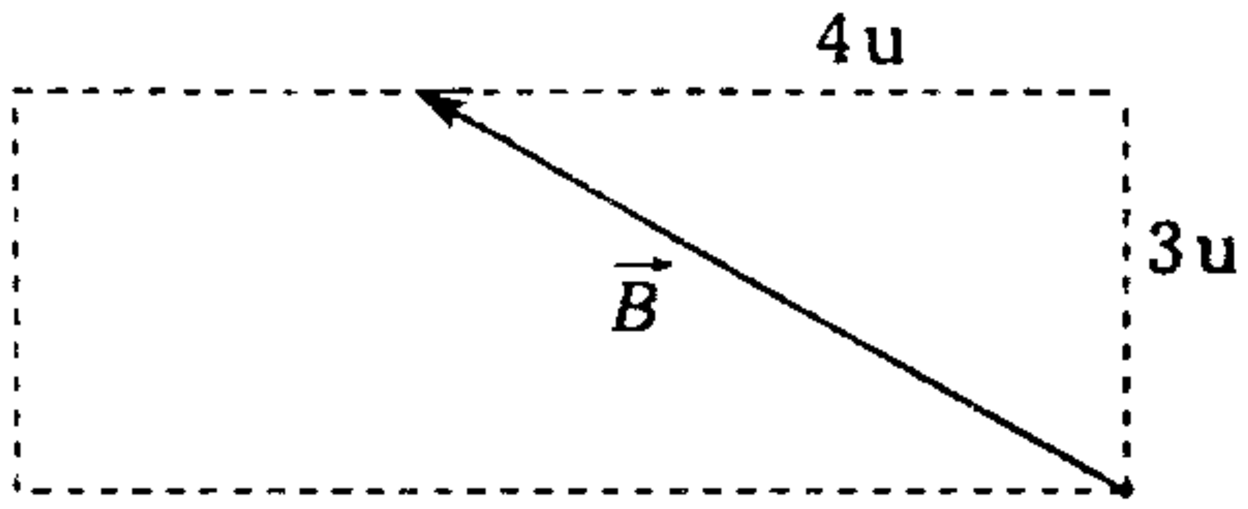
$$\vec{R}=\underbrace{\vec{E}+\vec{D}}+\vec{B}$$

$$\vec{R}=\vec{B}+\vec{B}=2\vec{B}$$

Su módulo sería

$R=2B$ (I)

De la figura inicial, obtenemos el módulo de $\vec{B}$



De la figura se deduce que

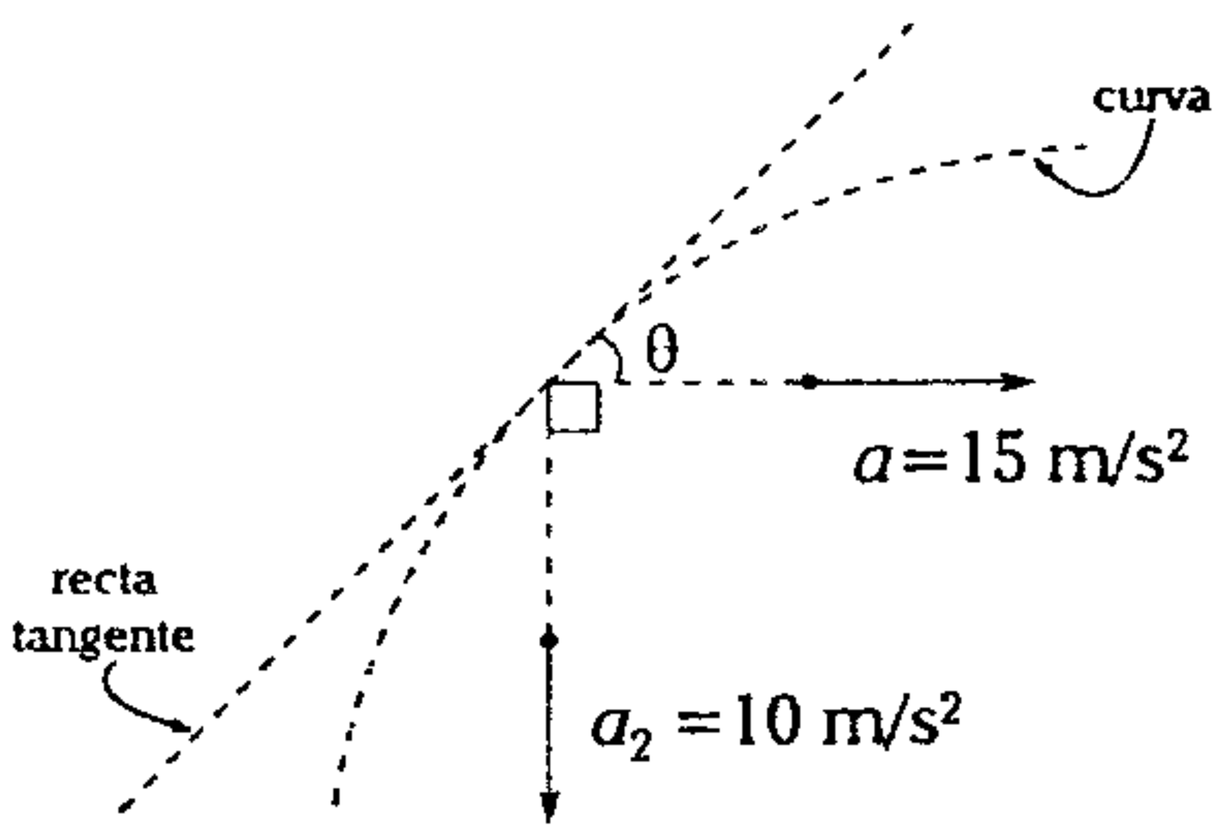
$B=5$ u

Reemplazando en (I)

$R=10$ u

Problema 3

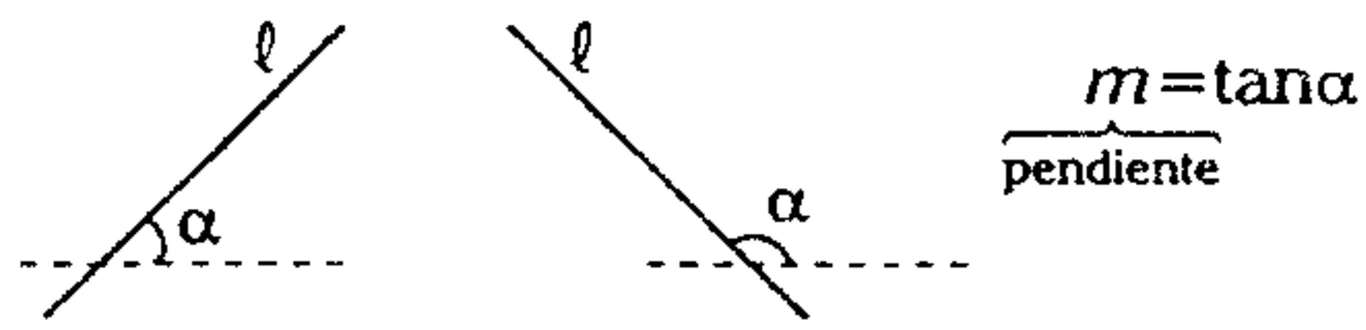
En el gráfico, se muestra dos vectores que representan aceleraciones y una tangente a una curva. Si la pendiente de la recta tangente es 0,75, determine el módulo de la aceleración resultante en la dirección tangente y normal a la curva para cada caso.



Resolución

Para obtener la aceleración resultante en la dirección tangente y normal, los vectores aceleración $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ los vamos a descomponer (rectangularmente) en las direcciones mencionadas, para ello se requiere la inclinación θ de la recta tangente.

Tener presente que la pendiente (m) de una recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta respecto de la horizontal, por ejemplo:

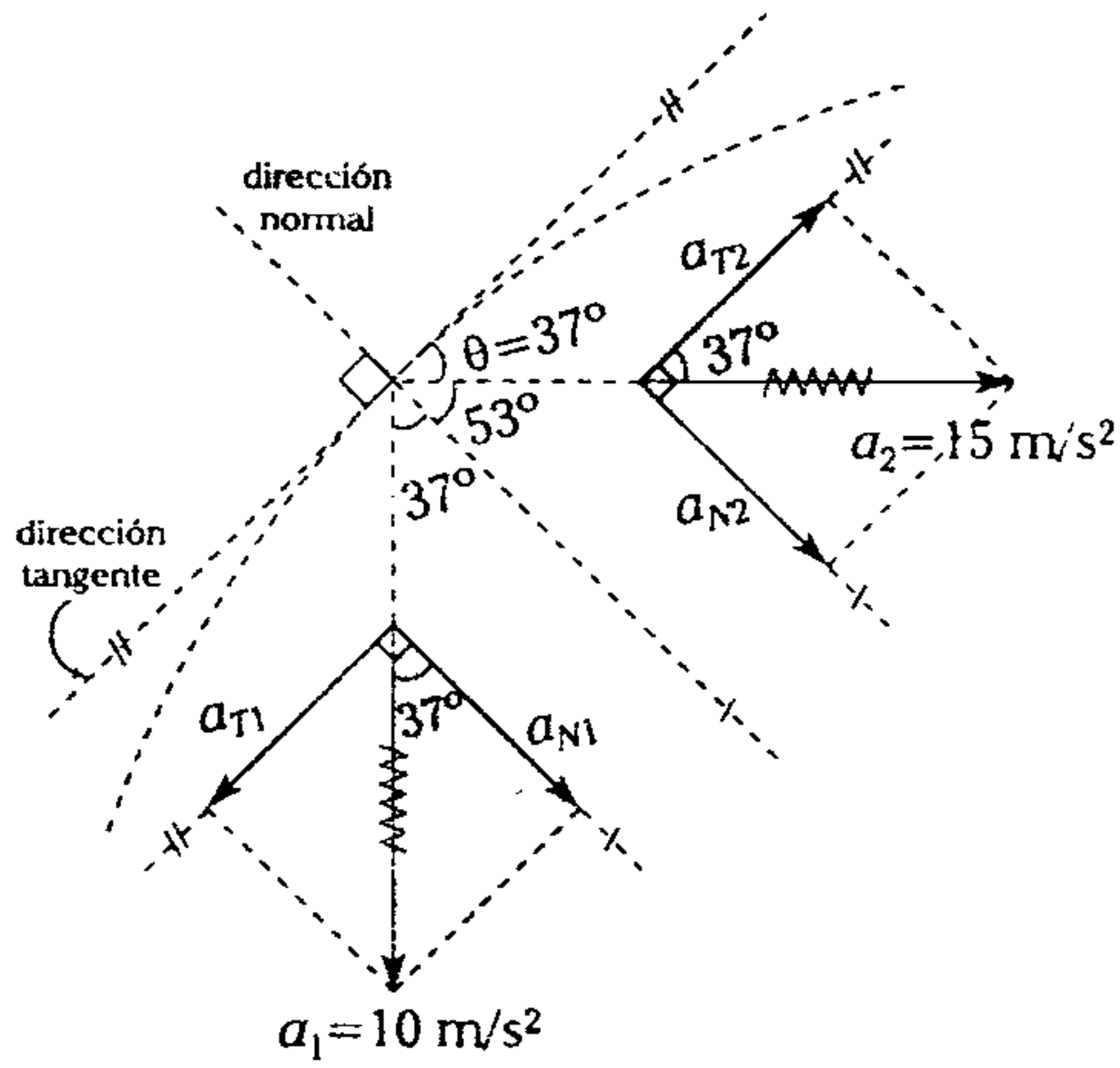


Para nuestro caso

$m=\tan\theta=y$ como $m=0{,}75$

$\Rightarrow\ \tan\theta=0{,}75$

$\Rightarrow\ \theta=37°$



A partir del gráfico, se deduce que

$$a_{T1}=a_1\,\text{sen}\,37°=10\left(\frac{3}{5}\right)=6\ \text{m/s}^2$$

$$a_{N1}=a_1\cos 37°=10\left(\frac{4}{5}\right)=8\ \text{m/s}^2$$

También

$$a_{T2}=a_2\cos 37°=15\left(\frac{4}{5}\right)=12\ \text{m/s}^2$$

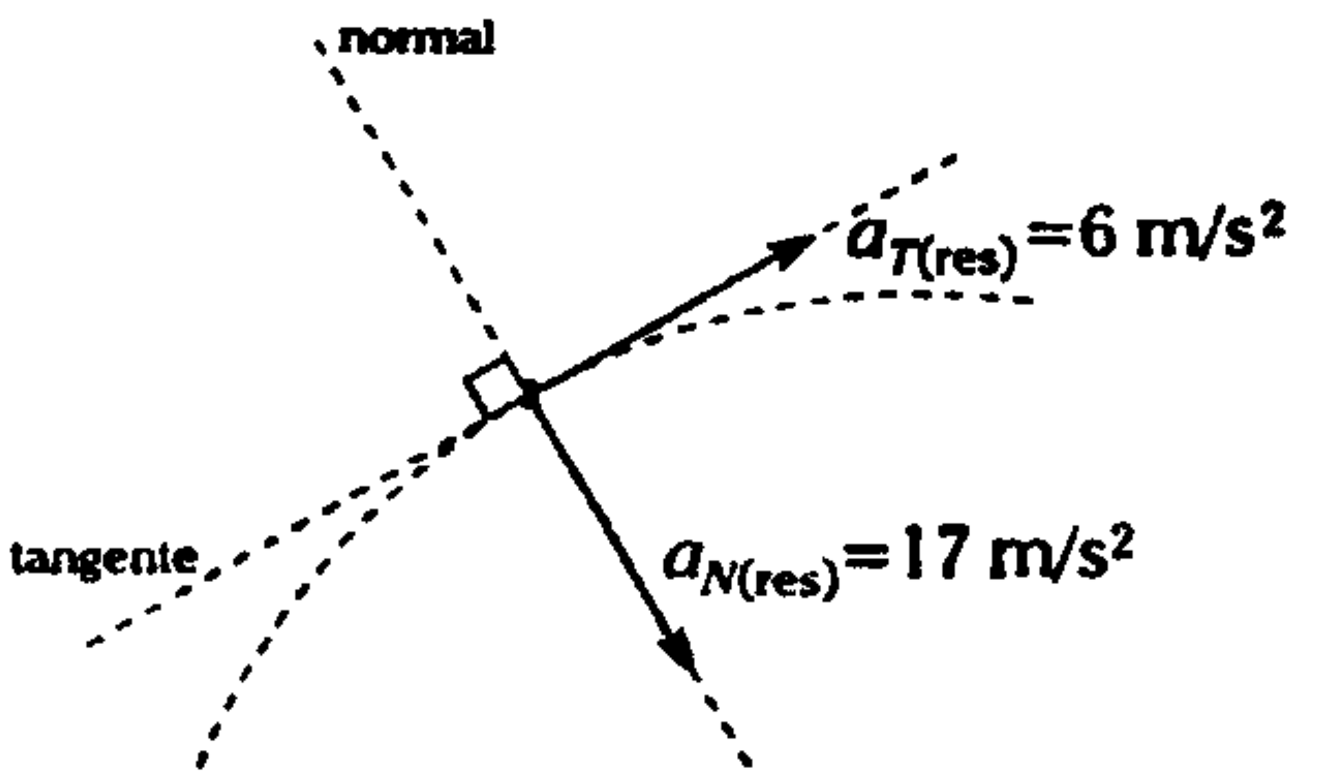
$$a_{N2}=a_2\,\text{sen}\,37°=15\left(\frac{3}{5}\right)=9\ \text{m/s}^2$$

con lo cual se puede plantear

$$a_{T(\text{res})} = a_{T2} - a_{T1} = 6\ \text{m/s}^2$$

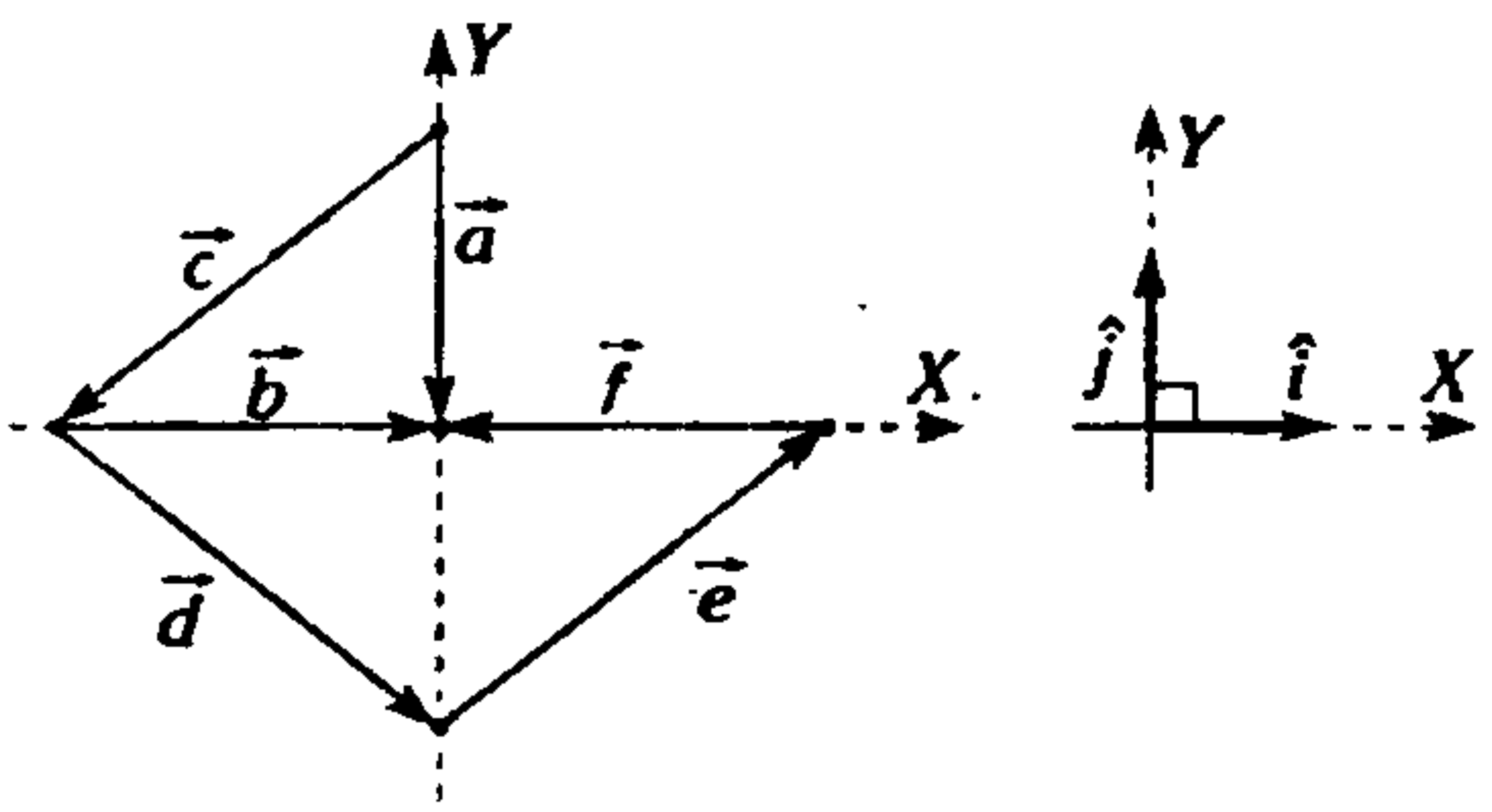
$$a_{N(\text{res})} = a_{N1} + a_{N2} = 17\ \text{m/s}^2$$

En el gráfico se tendría



Problema 4

Determine y grafique el vector unitario de la resultante de los vectores que se muestran. Considere $a = 6$ u y $b = 16$ u.



Resolución

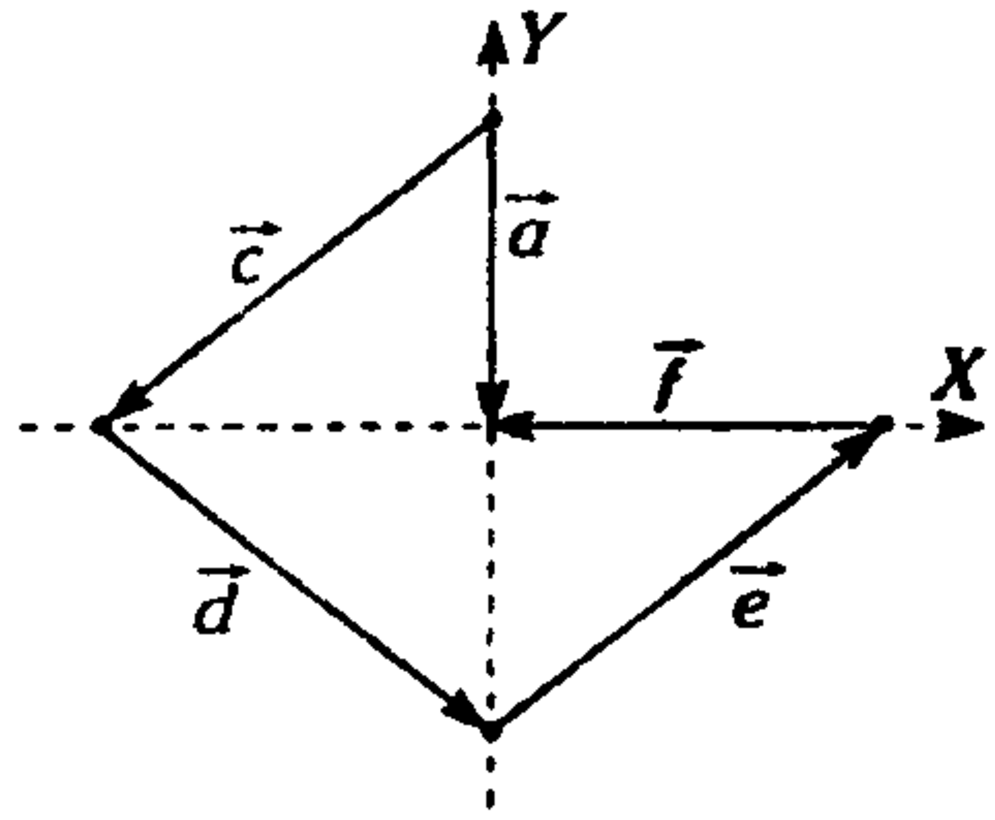
Nos piden el vector unitario de la resultante $\vec{R}$ y como sabemos se define así

$$\hat{\mu}_{\vec{R}} = \frac{\vec{R}}{R} \qquad \text{(I)}$$

De acuerdo a los vectores que se muestran

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$$

Como se conoce el módulo y dirección de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es conveniente expresar $\vec{R}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



En la figura se observa que

$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$$

entonces

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \underbrace{\vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}}_{\vec{a}}$$

$$\vec{R} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

pero

$$\vec{a} = -6\hat{j}$$

$$\vec{b} = 16\hat{i}$$

luego

$$\vec{R} = 2(-6\hat{j}) + 16\hat{i}$$

$$\vec{R} = 16\hat{i} - 12\hat{j} \qquad \text{(II)}$$

En módulo

$$R = \sqrt{(16)^2 + (-12)^2}$$

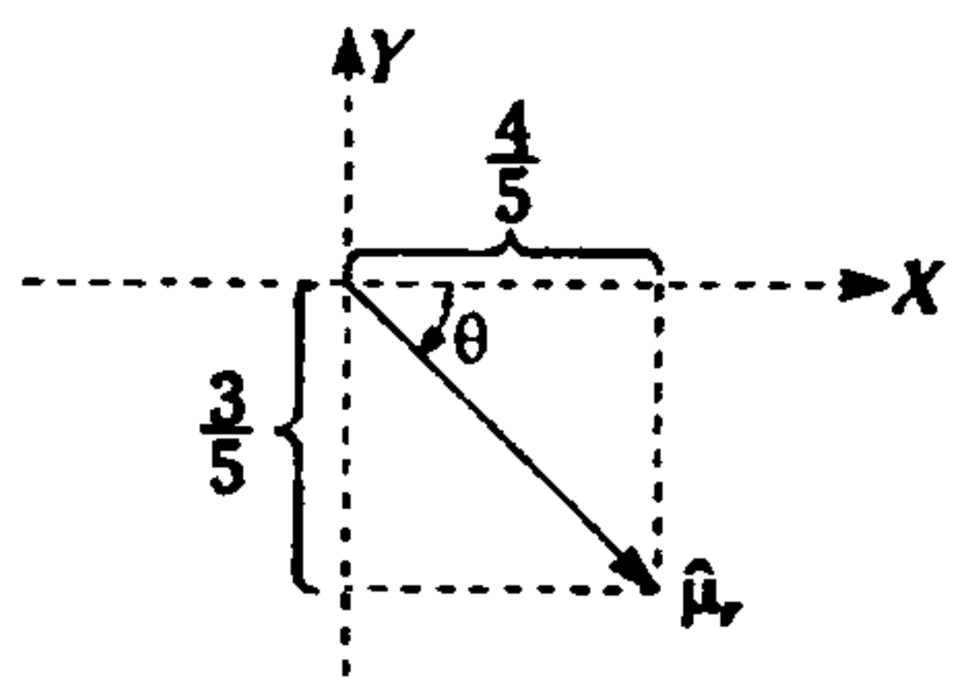
$$R = 20\ \text{u} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$\hat{\mu}_{\vec{R}} = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{16\hat{i} - 12\hat{j}}{20}$$

$$\hat{\mu}_{\vec{R}} = \frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}$$

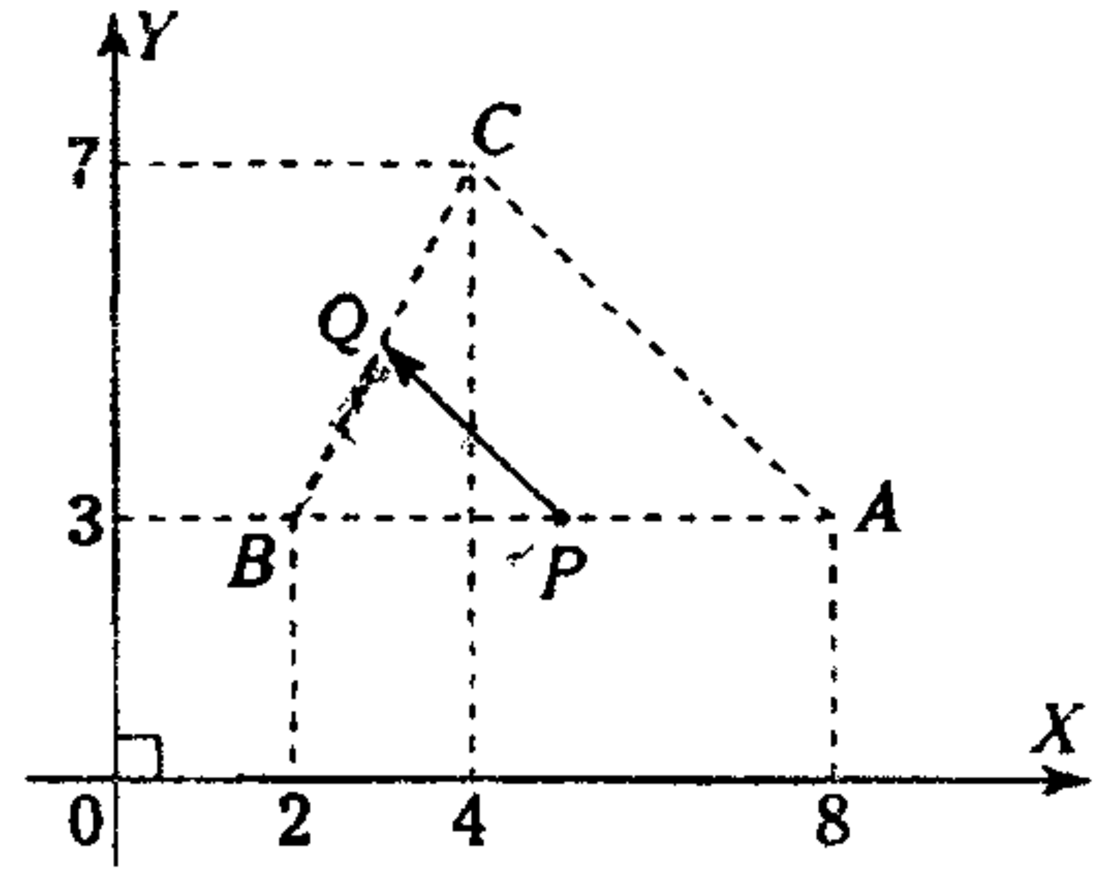
Graficando dicho vector



Note que el módulo del vector es la unidad y su dirección es $\theta = -37°$

Problema 5

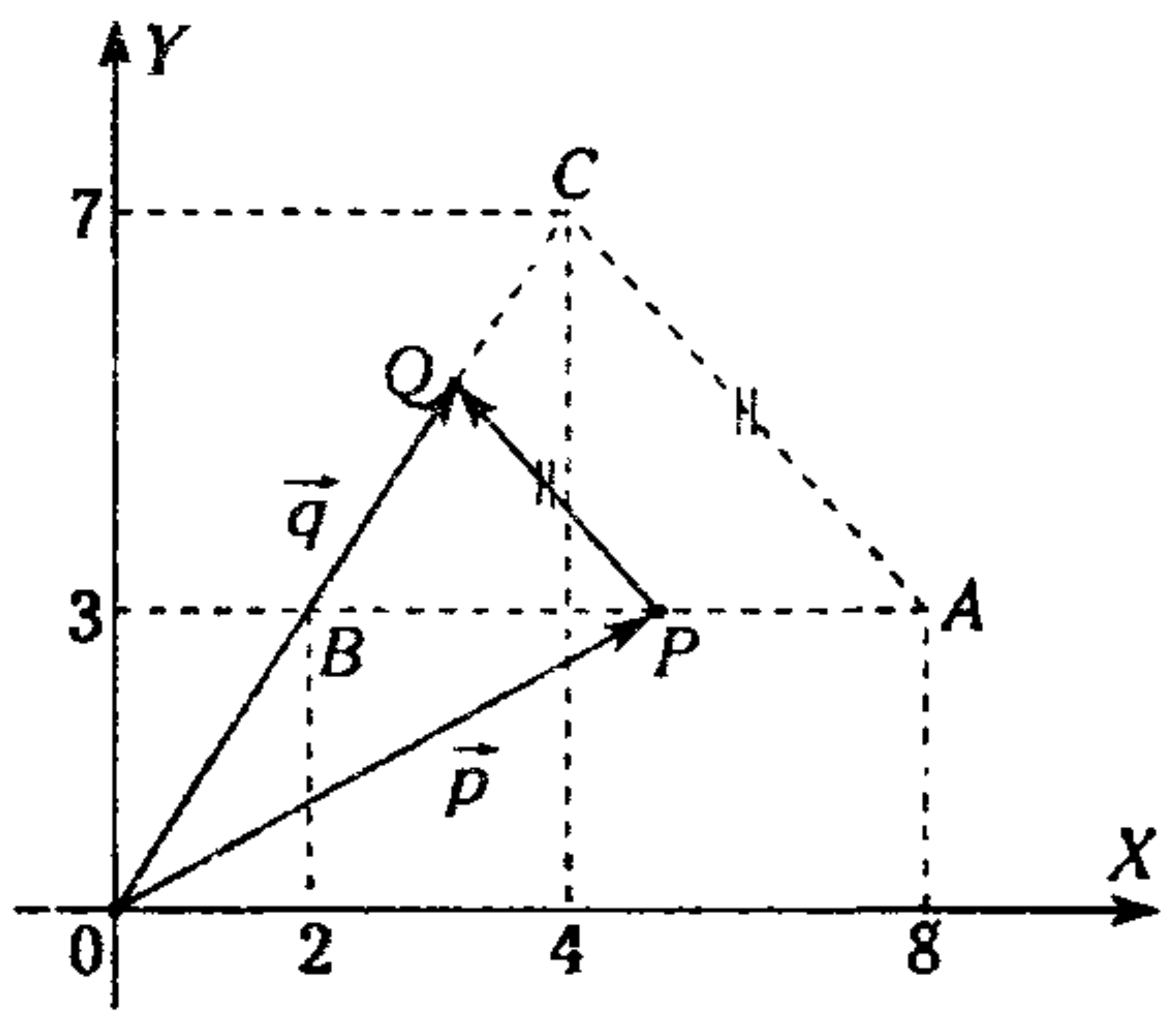
Si P y Q son puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, determine el vector $\overrightarrow{PQ}$.



Resolución

Por condición del problema, P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente; entonces, $\overrightarrow{PQ} // \overline{AC}$.

Para facilitar la resolución, introduciremos los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$.



De la figura

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \qquad \text{(I)}$$

Como Q es punto medio de $\overline{BC}$, las coordenadas de Q son

$$Q = \left(\frac{B_x + C_x}{2} ; \frac{B_y + C_y}{2} \right) \qquad \text{(II)}$$

además, se observa que

$$A = (A_x ; A_y) = (8;3)$$

$$B = (B_x ; B_y) = (2;3)$$

$$C = (C_x ; C_y) = (4;7)$$

Al reemplazar en (II), obtenemos $Q = (3 ; 5)$ asimismo

$$P = \left(\frac{B_x + A_x}{2} ; \frac{B_y + A_y}{2} \right) = (5 ; 3)$$

luego $\vec{q} = (3;5)$ y $\vec{p} = (5;3)$

Reemplazando en (I)

$$\overrightarrow{PQ} = (3 ; 5) - (5 ; 3) = (-2 ; 2)$$

Método práctico

Por base media en el triángulo ABC se tiene

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

donde $\overrightarrow{AC} = (4 ; 7) - (8 ; 3) = (-4 ; 4)$

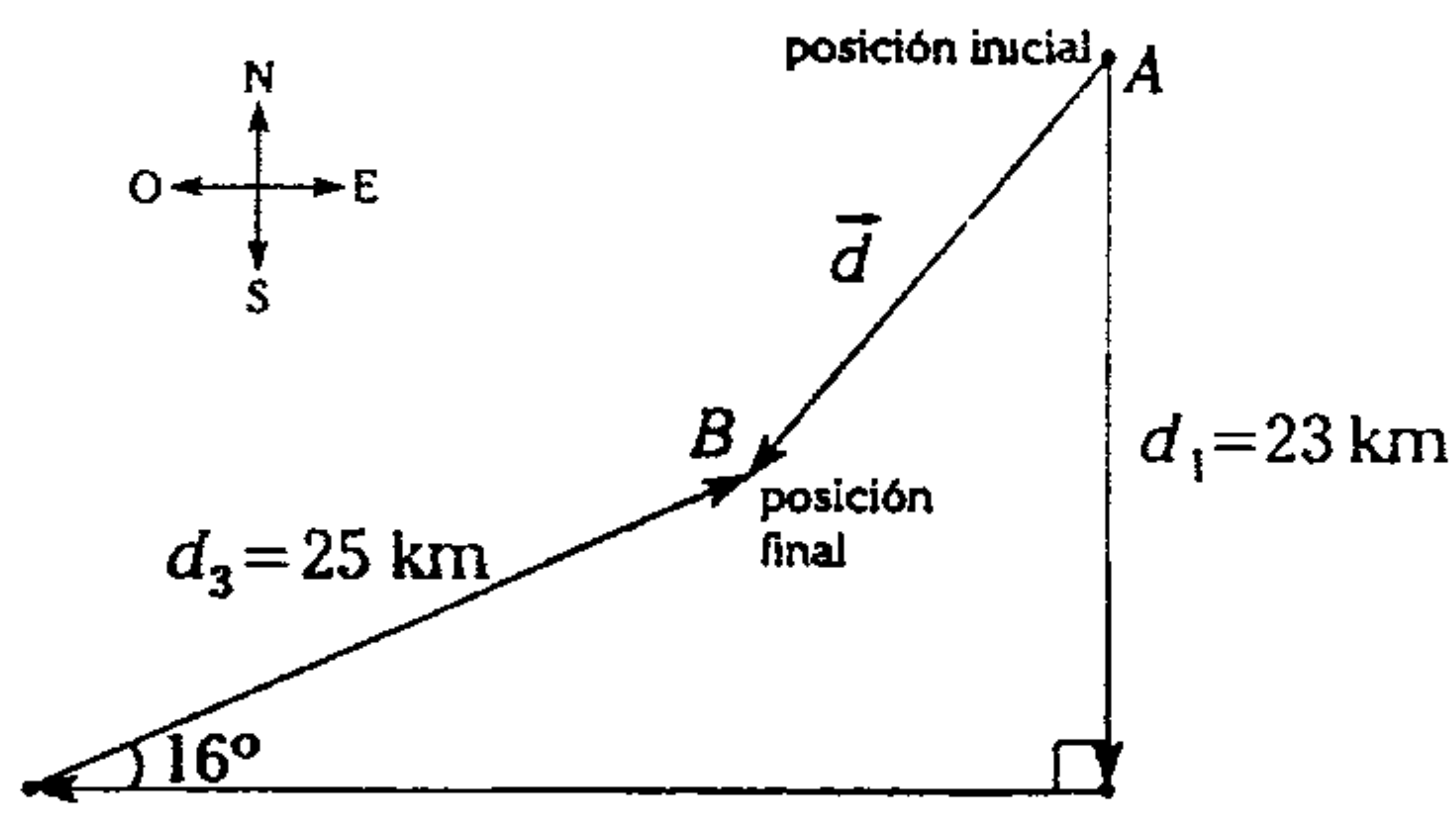
entonces $\overrightarrow{PQ} = (-2 ; 2)$

Problema 6

Un buque navega mar adentro con rumbo al sur; después de desplazarse 23 km cambia de rumbo hacia al oeste avanzando 32 km; finalmente cambia de rumbo E 16° N avanzando 25 km. ¿Cuál es el módulo del desplazamiento efectivo del buque?

Resolución

Teniendo como referencia los puntos cardinales y lo que plantea el enunciado, tenemos

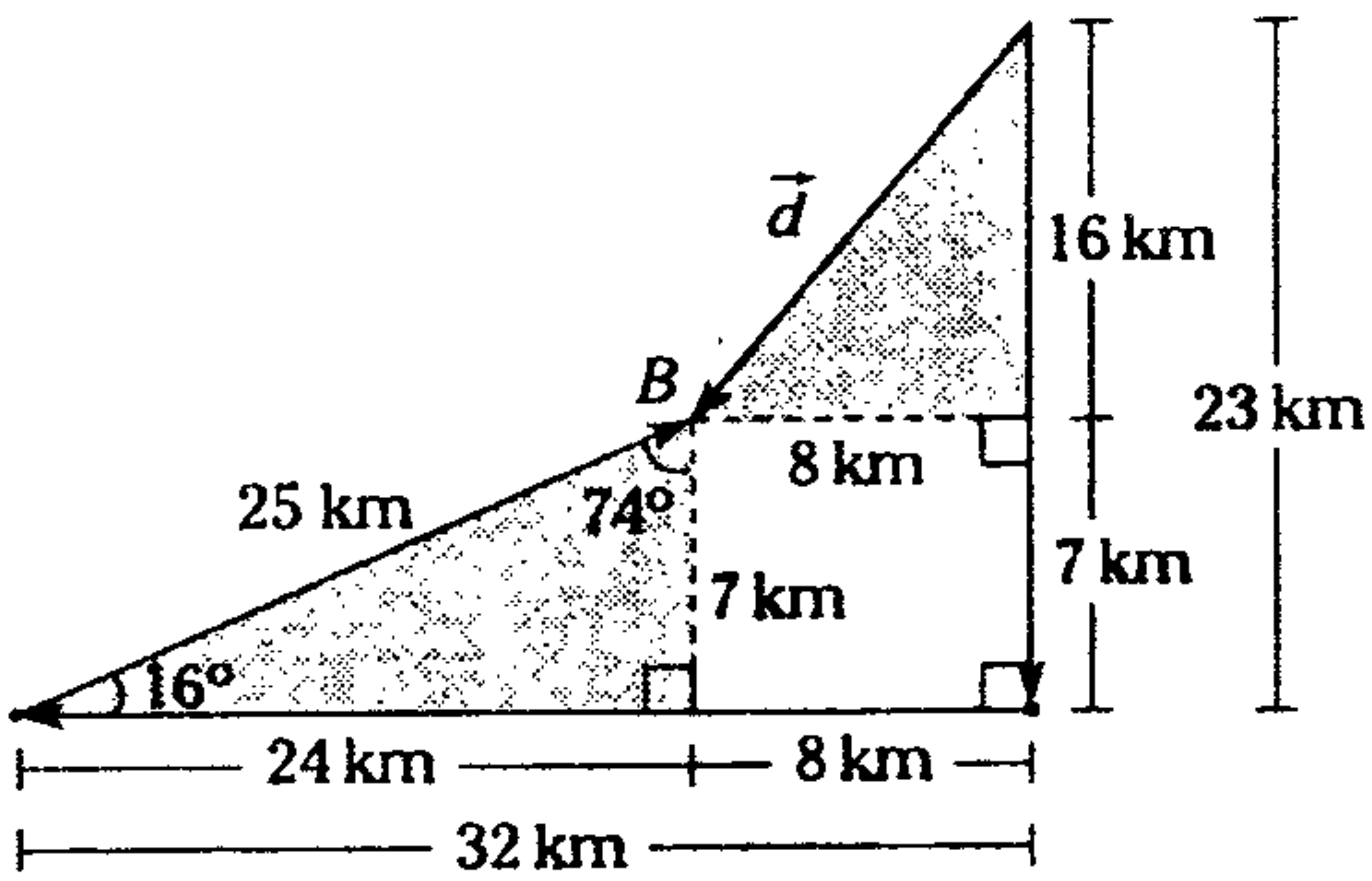


A: posición inicial

B: posición final

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{d}$ = desplazamiento efectivo

El módulo de $\vec{d}$ lo podemos obtener haciendo lo siguiente: a partir de B trazamos perpendiculares a d_1 y d_2, tal como se muestra



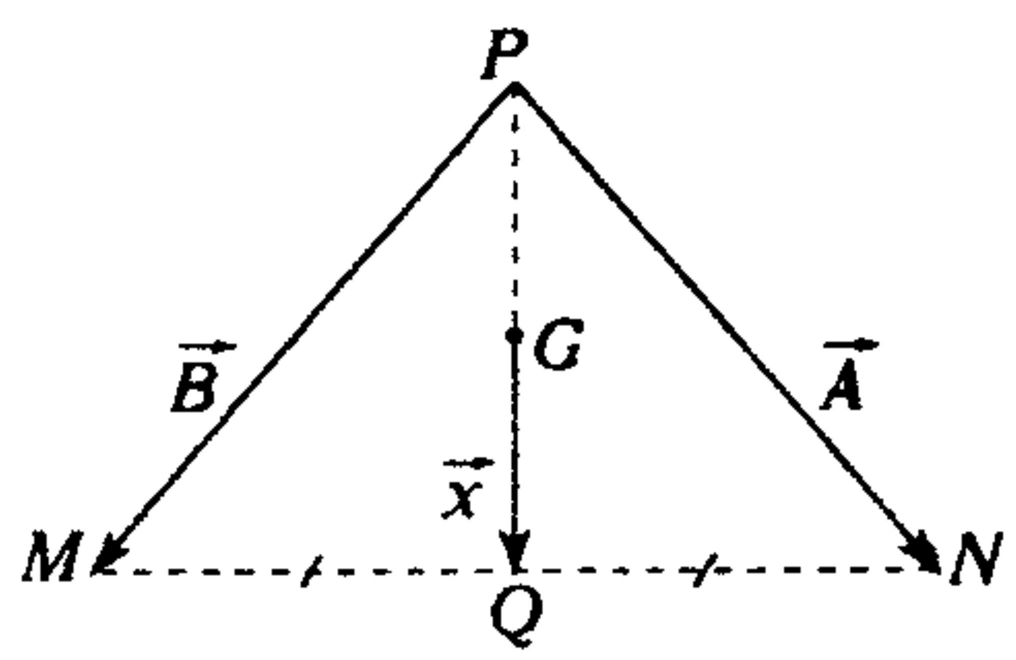
Con la geometría que se dispone, es cómodo verificar que $\vec{d}$ viene a ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo; entonces, el módulo de $\vec{d}$ queda determinado por

$$|\vec{d}|=\sqrt{(8)^2+(16)^2}$$

$$|\vec{d}|=8\sqrt{5}\text{ km}$$

Problema 7

Exprese el vector $\vec{x}$ en función de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Considere G baricentro del triángulo PMN.



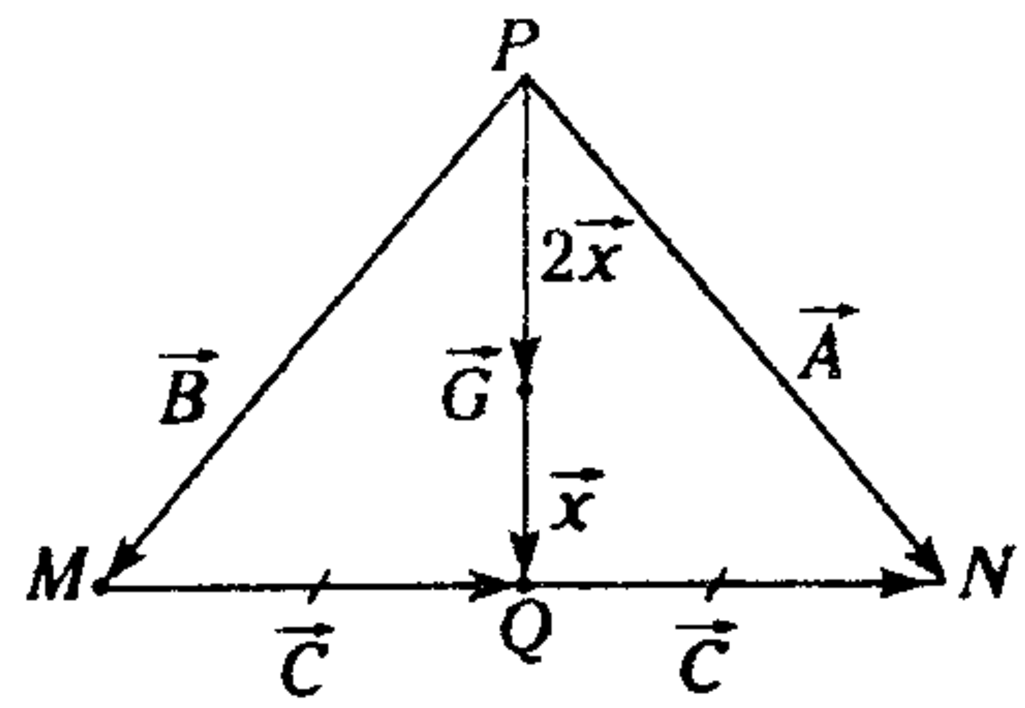
Resolución

Por propiedad del baricéntro (G) tenemos que

$$\overrightarrow{PG}=2\overrightarrow{GQ}=2\vec{x}$$

además

$$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{QN}=\vec{C}$$



En el triângulo PMQ

$$3\vec{x}=\vec{B}+\vec{C} \qquad \text{(I)}$$

En el triángulo PQN

$$3\vec{x}+\vec{C}=\vec{A} \qquad \text{(II)}$$

Sumando las ecuaciones (I) y (II), miembro a miembro se obtiene

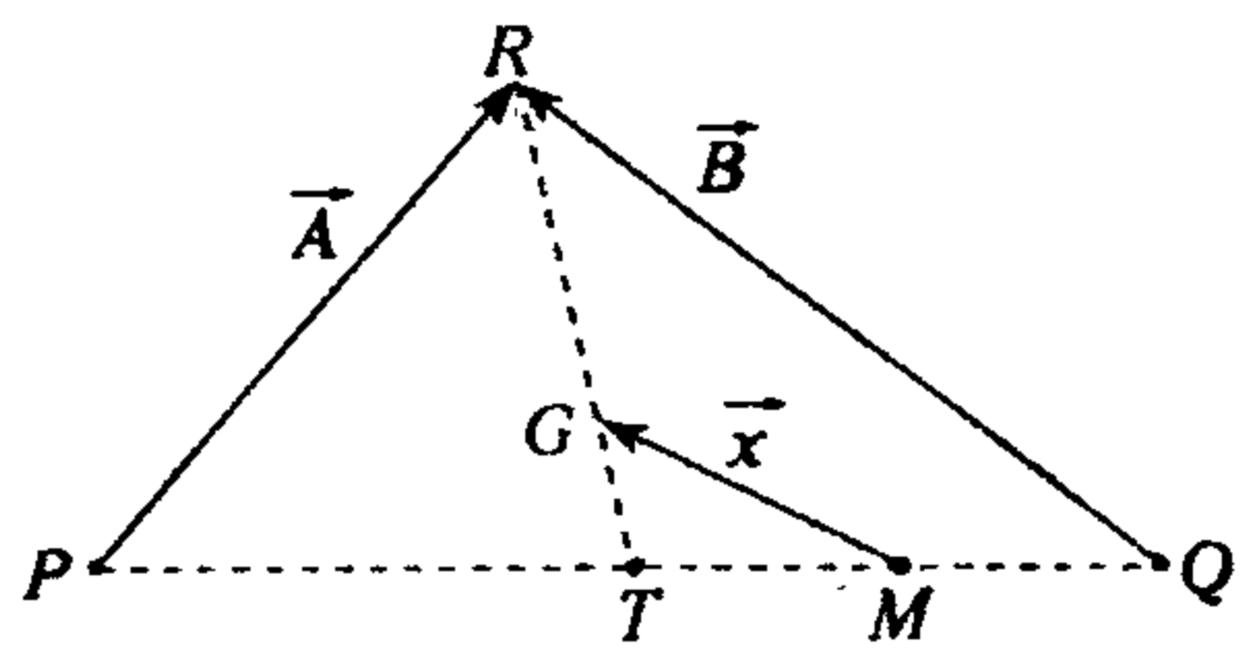
$$6\vec{x}+\cancel{\vec{C}}=\vec{A}+\vec{B}+\cancel{\vec{C}}$$

de donde

$$\vec{x}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{6}$$

Problema 8

Determine $\vec{x}$ en función de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, sabiendo que $PM=5MQ$ y G es el baricentro del triángulo PQR.



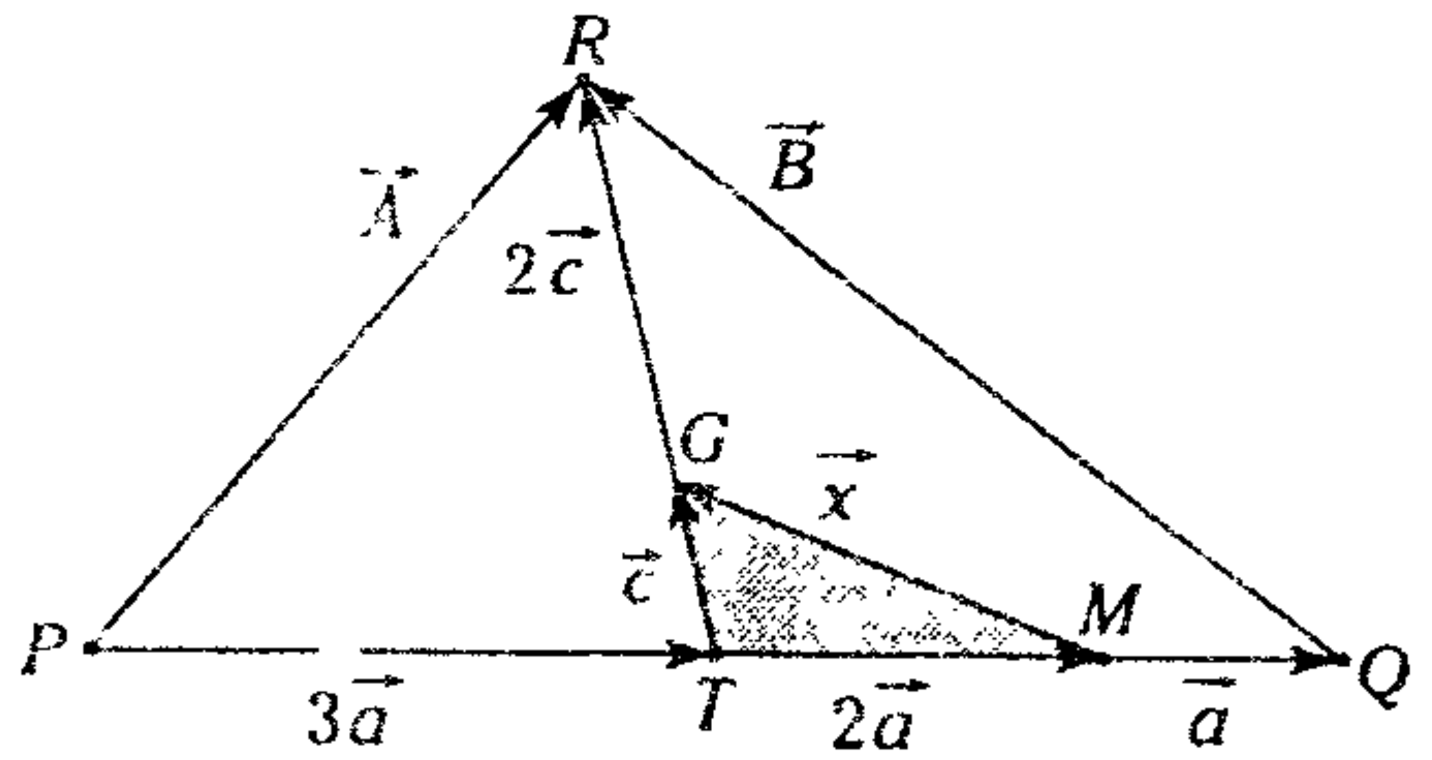
Resolución

De la condición del problema $PM=5MQ$

$$\overrightarrow{PM}=5\overrightarrow{MQ}=5\vec{a}$$

Por propiedad del baricentro (G)

$$\overrightarrow{GR}=2\overrightarrow{TG}=2\vec{c}$$



En el triángulo TMG

$$2\vec a + \vec x = \vec c \qquad \text{(I)}$$

Ahora se requiere a los vectores $\vec a$ y $\vec c$ expresados en función de $\vec A$ y $\vec B$.

En el triángulo PTR

$$\vec A = 3\vec a + 3\vec c \qquad \text{(II)}$$

En el triángulo TQR

$$3\vec c = 3\vec a + \vec B \qquad \text{(III)}$$

Sumando (II) y (III), miembro a miembro se obtiene

$$\vec A + \cancel{3\vec c} = \cancel{3\vec a} + \cancel{3\vec c} + \cancel{3\vec a} + \vec B$$

$$\frac{\vec A - \vec B}{6} = \vec a \qquad \text{(IV)}$$

Además, si restamos (II) y (III) miembro a miembro obtenemos

$$\vec A - 3\vec c = 3\vec a + 3\vec c - 3\vec a - \vec B$$

$$\frac{\vec A + \vec B}{6} = \vec c \qquad \text{(V)}$$

Finalmente, al reemplazar (IV) y (V) en (I) se obtiene

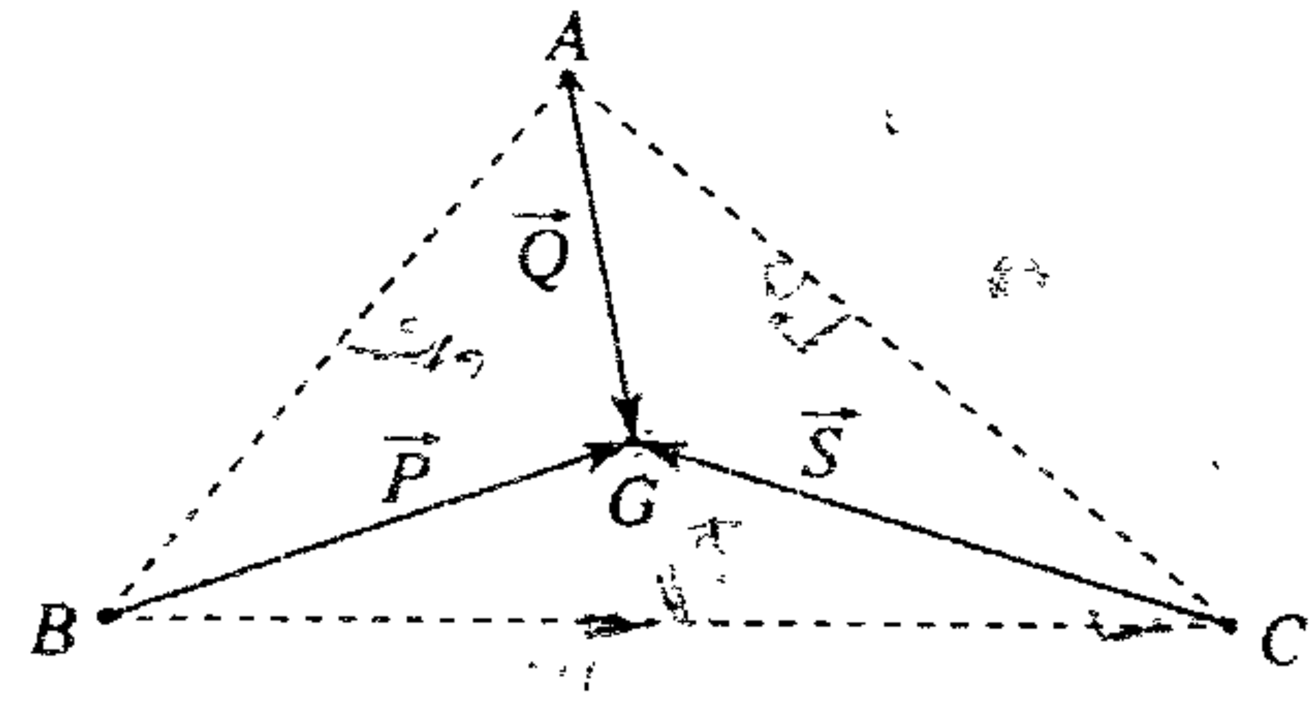
$$2\left(\frac{\vec A - \vec B}{6}\right) + \vec x = \frac{\vec A + \vec B}{6}$$

$$2\vec A - 2\vec B + 6\vec x = \vec A + \vec B$$

$$\therefore\ \vec x = \frac{3\vec B - \vec A}{6}$$

Problema 9

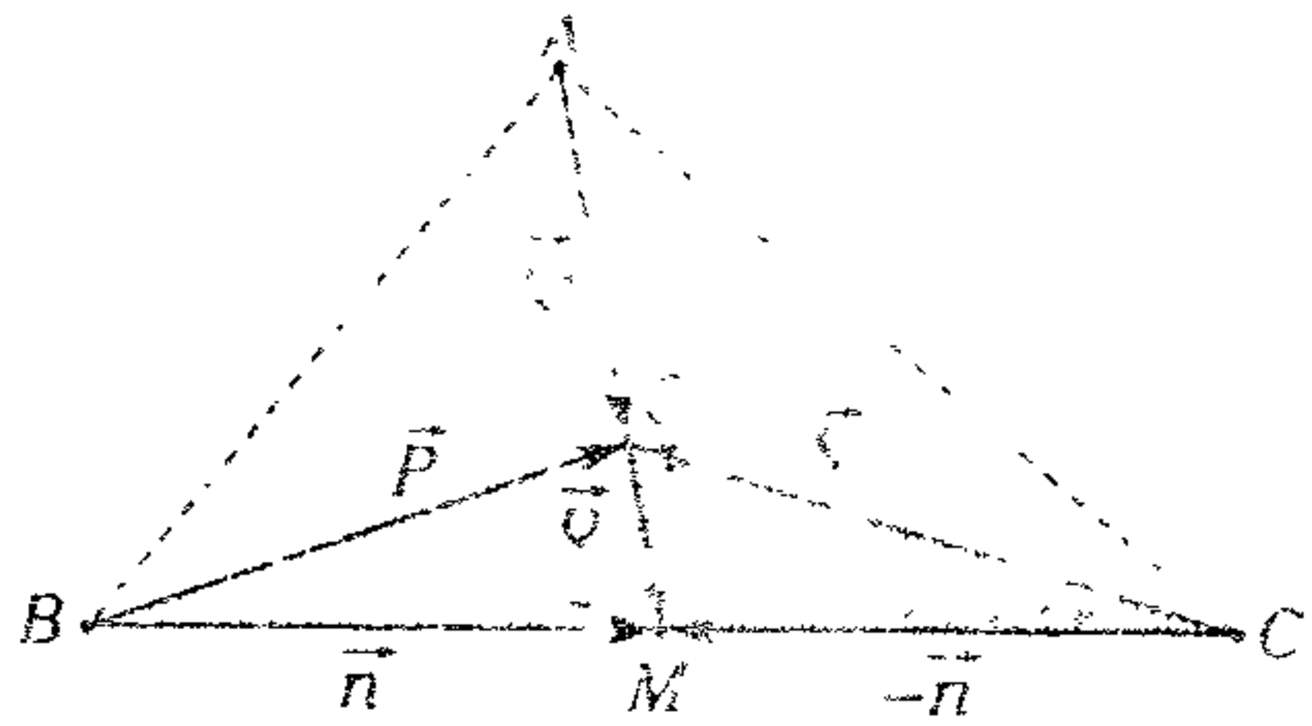
Se muestra un triangulo ABC, siendo el punto G su baricentro. Determine la resultante del sistema de vectores dado.



Resolución

Se tiene que determinar

$$\vec P + \vec Q + \vec S = \vec R \ \text{(resultante)}$$



En el gráfico, al prolongar AG corta a BC en su punto medio M [illegible]. El punto G es baricentro y como AM es mediana; entonces, $AG=2GM$, por ello podemos hacer

$$\overrightarrow{GM} = \frac{\vec Q}{2},\ \overrightarrow{BM} = \vec n \ \text{y}\ \overrightarrow{CM} = -\vec n$$

De los triángulos sombreados tenemos

$$\triangle BGM \quad \vec P + \frac{\vec Q}{2} = \vec n \qquad \text{(I)}$$

$$\triangle CGM \quad \vec S + \frac{\vec Q}{2} = -\vec n \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, sumamos (I) y (II) miembro a miembro

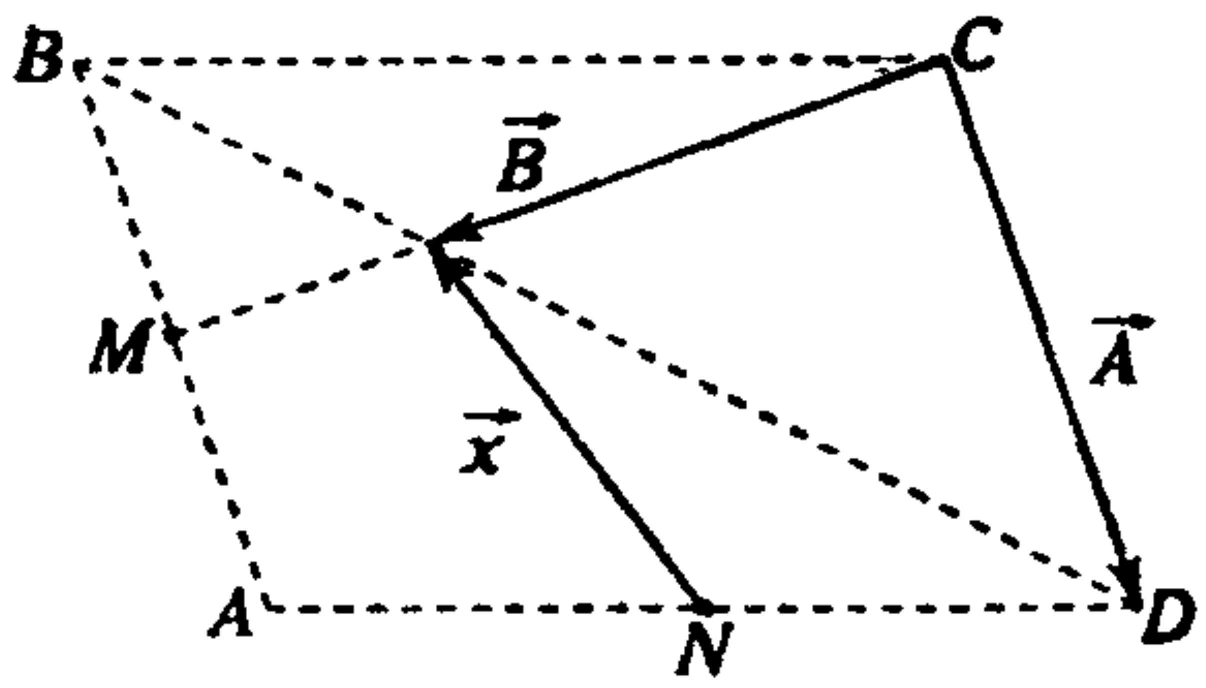
$$\vec P + \frac{\vec Q}{2} + \vec S + \frac{\vec Q}{2} = \vec n + (-\vec n)$$

$$\Rightarrow\ \vec P + \vec Q + \vec S = \vec 0 \ \text{(la resultante es nula)}$$

$$\therefore\ \vec R = \vec 0$$

Problema 10

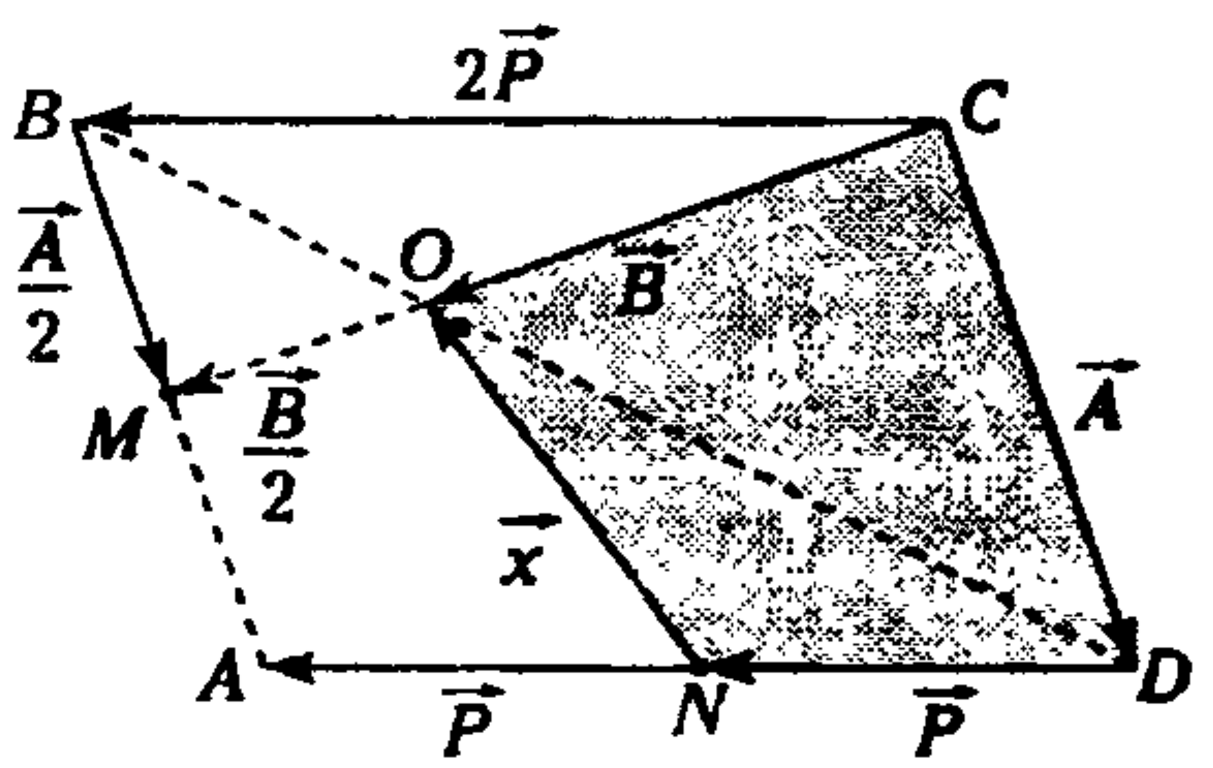
En la figura, $ABCD$ es un paralelogramo, M y N son puntos medios de AB y AD respectivamente. Si el vector $\vec{x}$ queda expresado en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ según $\vec{x}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$, determine $E=\frac{\alpha}{\beta}$.



Resolución

Para determinar E se requiere necesariamente expresar $\vec{x}$ en función de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y por comparación establecer los valores de α y β. Para determinar ello procedemos de la siguiente manera:

En el paralelogramo si $\overrightarrow{DN}=\vec{P}$, entonces $\overrightarrow{NA}=\vec{P}$ y $\overrightarrow{CB}=2\vec{P}$; además, como $CD//BA$ y M es punto medio de BA; entonces, $\overrightarrow{BM}=\frac{\vec{A}}{2}$, tal como lo mostramos a continuación.



(1)

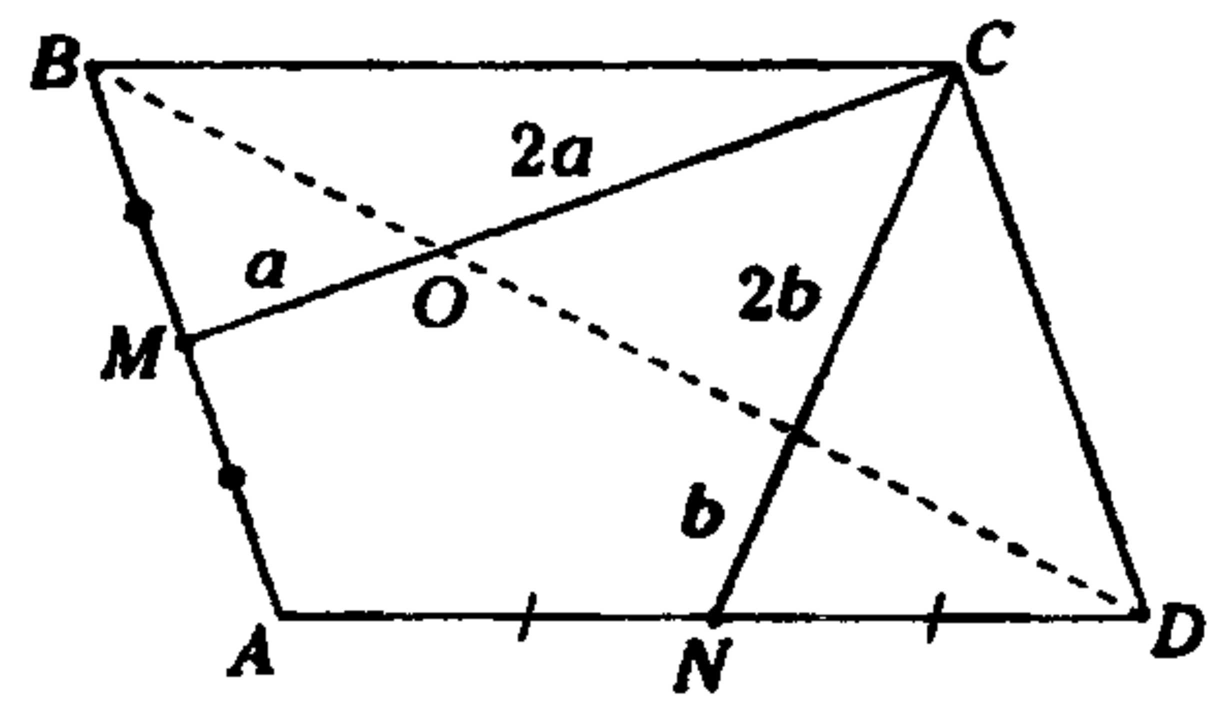
En el cuadrilátero sombreado $CDNO$, mediante el método del polígono, $\vec{B}$ es la resultante de $\vec{A}$, $\vec{P}$ y $\vec{x}$; entonces, tenemos

$$\vec{A}+\vec{P}+\vec{x}=\vec{B}$$

$$\Rightarrow\ \vec{x}=\vec{B}-\vec{A}-\vec{P} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere al vector $\vec{P}$ en función de $\vec{A}$ o $\vec{B}$, lo cual podemos obtener del triángulo CMB; pero para ello primero debemos tener en cuenta una propiedad de los paralelogramos.

La diagonal BD divide a CM y CN en la relación de 2 a 1.



Con lo anterior, en el gráfico (1) se plantea que

$$CO=2OM \ \Rightarrow\ \overrightarrow{OM}=\frac{\vec{B}}{2}$$

Finalmente, en el $\triangle CMB$ se tiene que

$$2\vec{P}+\frac{\vec{A}}{2}=\frac{3\vec{B}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \vec{P}=\frac{3}{4}\vec{B}-\frac{\vec{A}}{4} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$\vec{x}=\vec{B}-\vec{A}-\left(\frac{3}{4}\vec{B}-\frac{\vec{A}}{4}\right)$$

$$\vec{x}=-\frac{3}{4}\vec{A}+\frac{\vec{B}}{4} \qquad \text{(III)}$$

Comparando (III) con

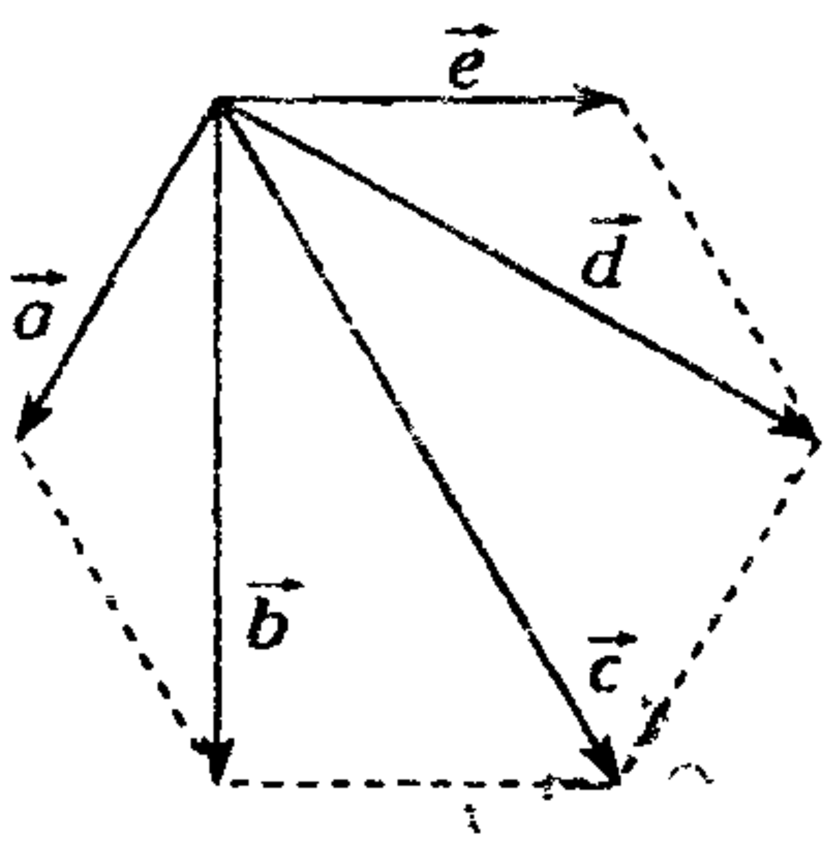
$$\vec{x}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$$

Se deduce que $\alpha=-\frac{3}{4}$ y $\beta=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ E=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow E=-3$$

Problema 11

Se muestra un sistema de vectores dispuestos sobre un hexágono regular de lado 5u. ¿Qué módulo tiene la resultante del sistema de vectores mostrado?

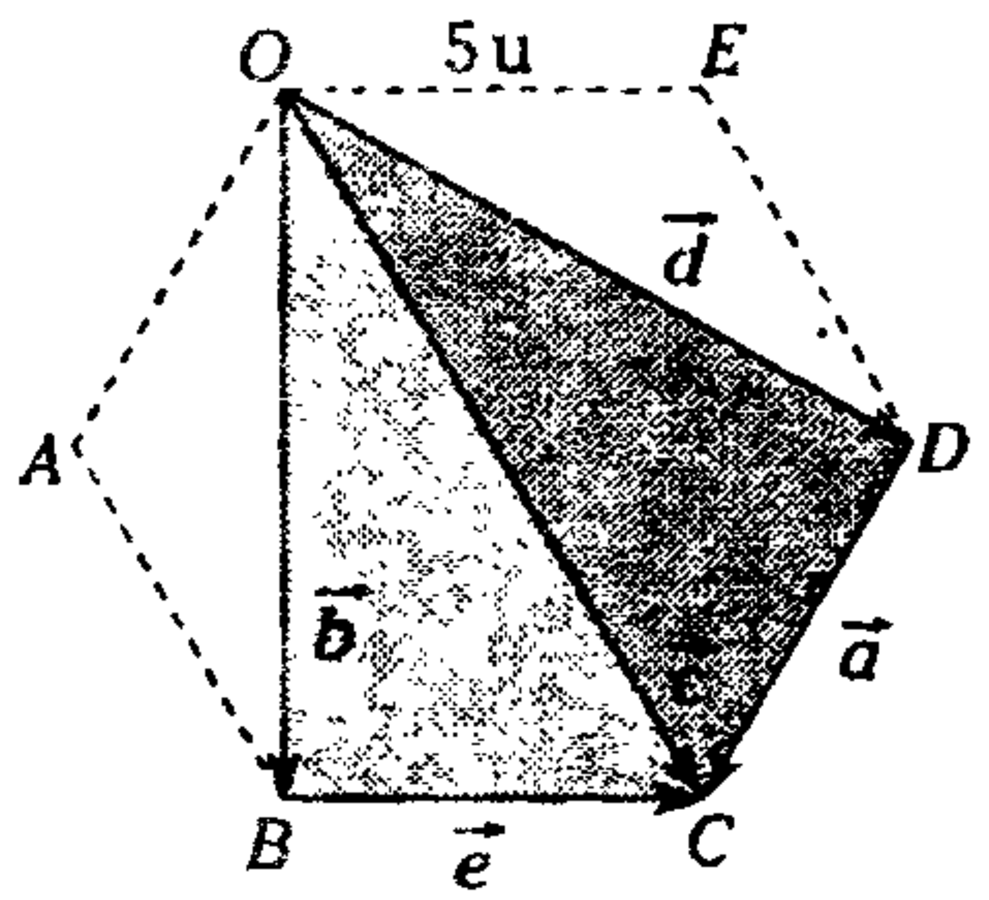


Resolución

Se tiene que calcular $|\vec{R}|$ donde

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e} \qquad \text{(I)}$$

Para obtener $\vec{R}$ podemos aprovechar las propiedades de un hexágono regular, por ejemplo, sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud, con ello podemos trasladar a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{e}$, tal como se muestra.



Ahora en los triángulos sombreados se puede deducir que

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a.} & \text{el } \Delta OBC & \vec{b}+\vec{e}=\vec{c} \\ \text{b.} & \text{el } \Delta ODC & \vec{d}+\vec{a}=\vec{c} \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I) tenemos

$$\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$$

$$\vec{R}=\vec{c}+\vec{c}+\vec{c}=3\vec{c}$$

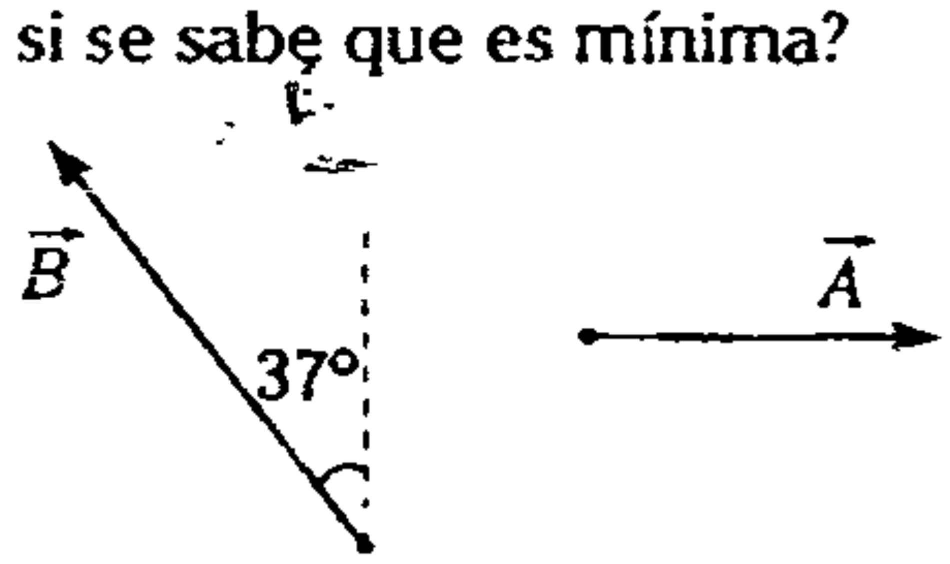
$$\Rightarrow \ |\vec{R}|=3|\vec{c}|$$

Finalmente, se recuerda que la diagonal mayor de un hexágono regular es el doble de uno de sus lados y como el vector $\vec{c}$ representa la diagonal mayor; entonces $|\vec{c}|=2(5\text{ u})=10\text{ u}$

$$\therefore \ |\vec{R}|=30\text{ u}$$

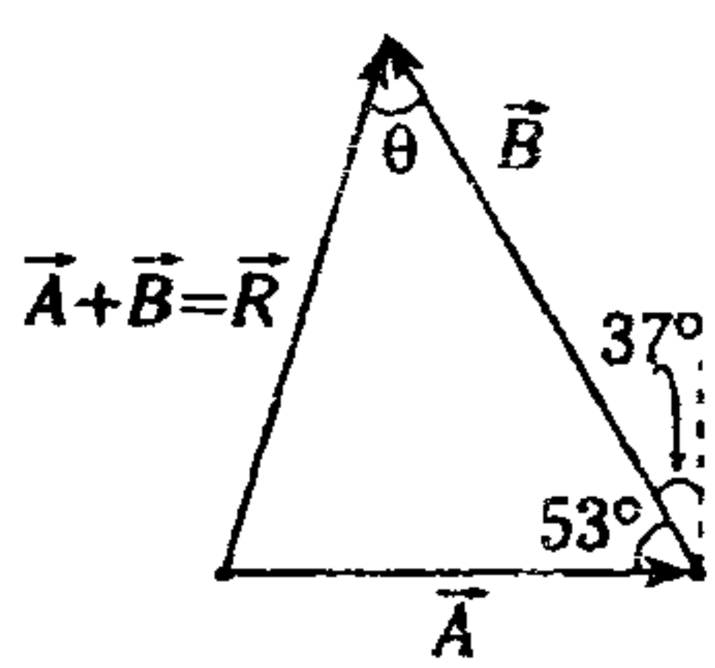
Problema 12

Se tiene dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tal como se muestra. Si $|\vec{A}|=20\text{u}$ ¿qué valor tiene la resultante de estos vectores, si se sabe que es mínima?



Resolución

Nos piden $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$, donde por condición $\vec{R}$ es mínimo, debido a esta condición podríamos pensar que es nula $(\vec{R}=\vec{0})$. Esto es posible solo si los vectores son opuestos, pero para nuestro caso no es así. Ahora, para determinar $\vec{R}$ utilizamos el método del triángulo (para este caso un triángulo) tal como se muestra.



donde

$$|\vec{A}|=A=20\text{u}$$

A partir del triángulo construido podemos usar la Ley de senos

$$\frac{|\vec{R}|}{\operatorname{sen}53^\circ}=\frac{|\vec{A}|}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\Rightarrow\ R=\frac{A\operatorname{sen}53^\circ}{\operatorname{sen}\theta}=\frac{20\left(\frac{4}{5}\right)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\therefore\ R=\frac{16}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{(I)}$$

En (I) para que R sea mínimo $\operatorname{sen}\theta$ debe ser máximo, y como se sabe

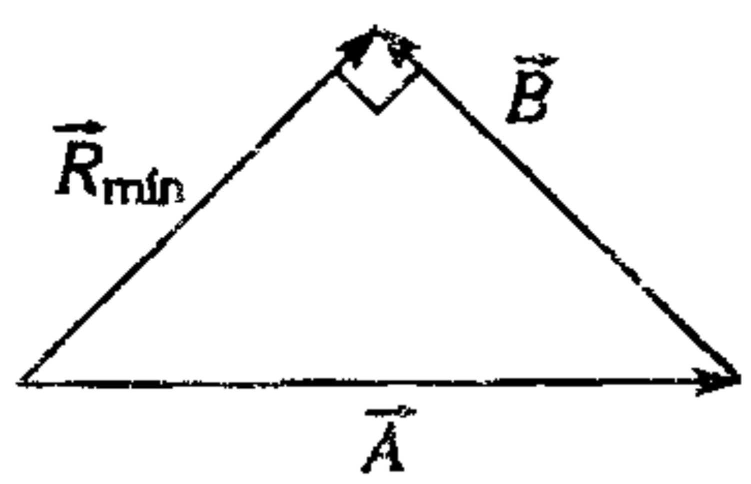
$$(\operatorname{sen}\theta)_{\text{máx}}=1 \Rightarrow \theta=90^\circ$$

Reemplazando en (I)

$$R_{\text{mín}}=16\text{ u}$$

Observación

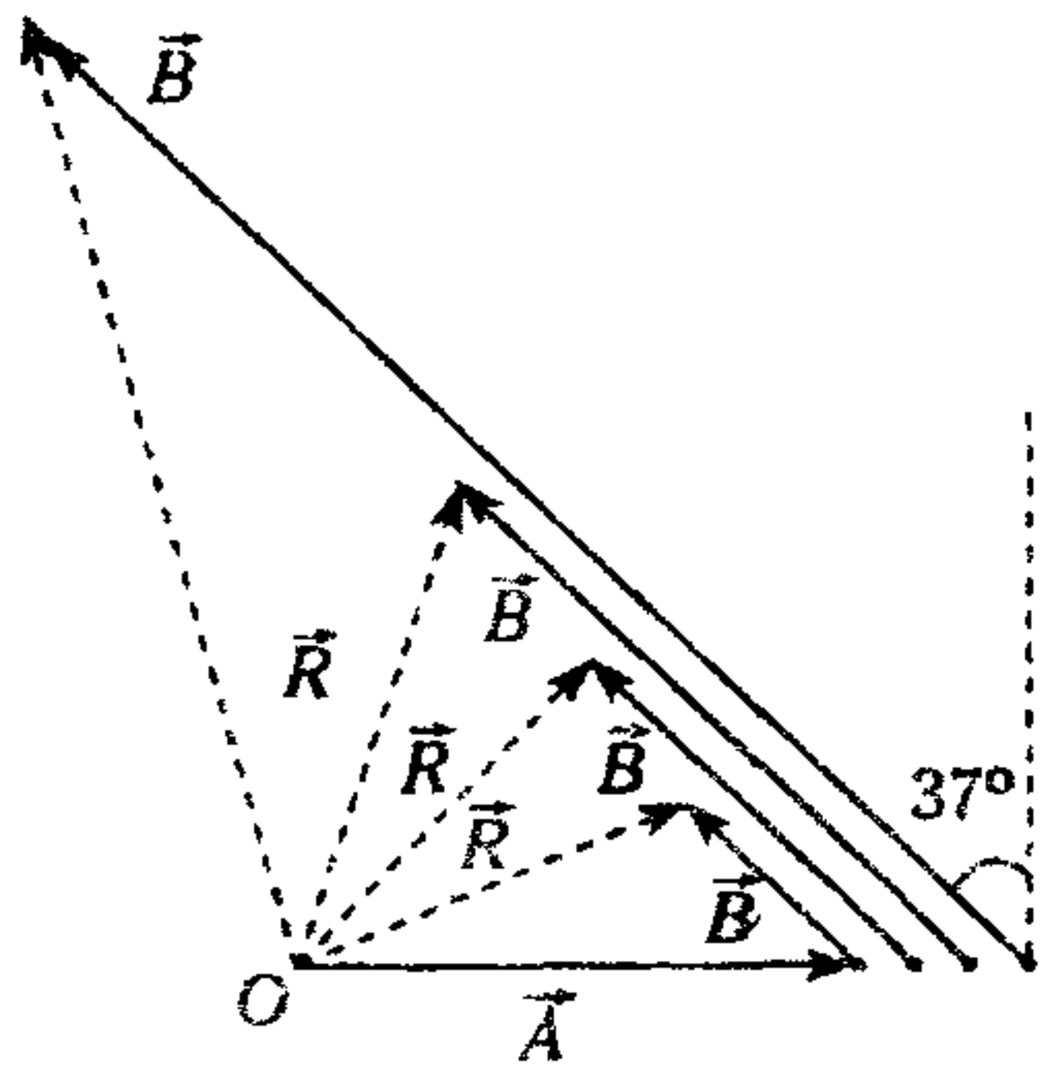
Como se ha deducido $\theta=90^\circ$, entonces, en el triángulo formado $\vec{R}_{\text{mín}}\perp\vec{B}$ como se muestra.



Otro criterio

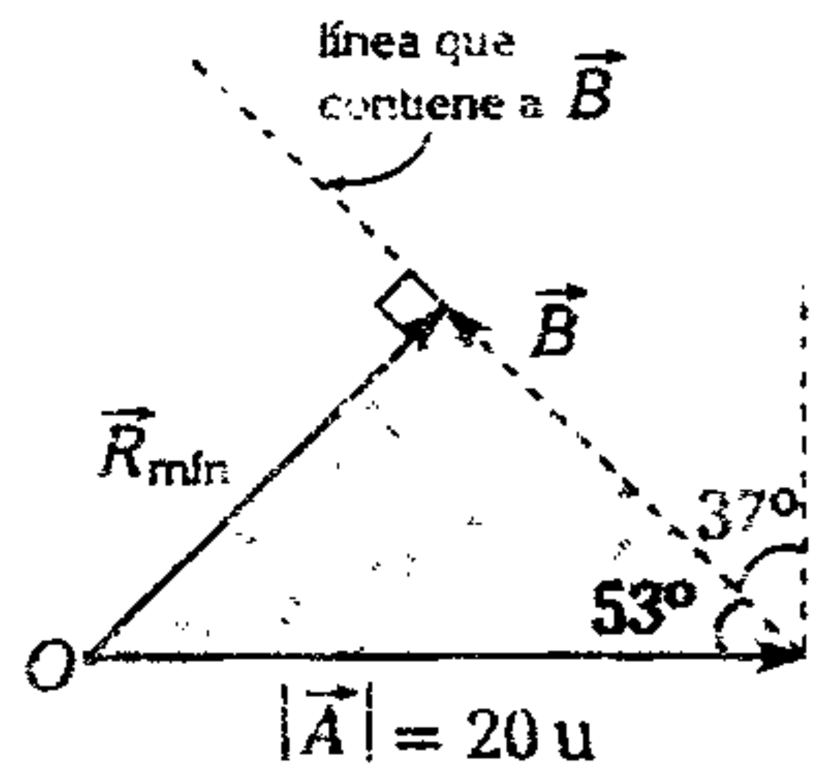
Para obtener el mismo resultado anterior, procedemos del siguiente modo:

$\vec{A}$ tiene dirección y módulo definidos, entonces, su longitud también está definida; $\vec{B}$ tiene dirección definida, pero no tiene un valor definido; entonces, la longitud del segmento dirigido que lo representa tampoco, tal como se muestra



El vector representado con líneas punteadas, representa la resultante $\vec{R}$ para los distintos casos planteados.

Del gráfico se deduce que $\vec{R}$ también no tendría un valor definido ya que lo representa un segmento dirigido de diferente longitud; por último, para que $\vec{R}$ tenga su menor valor (mínimo), el segmento dirigido que lo representa debe presentar la menor longitud, lo cual es posible si a partir de O lo dirigimos en forma perpendicular hacia la línea que contiene $\vec{B}$, tal como se ve a continuación:



Del triángulo formado se tiene que

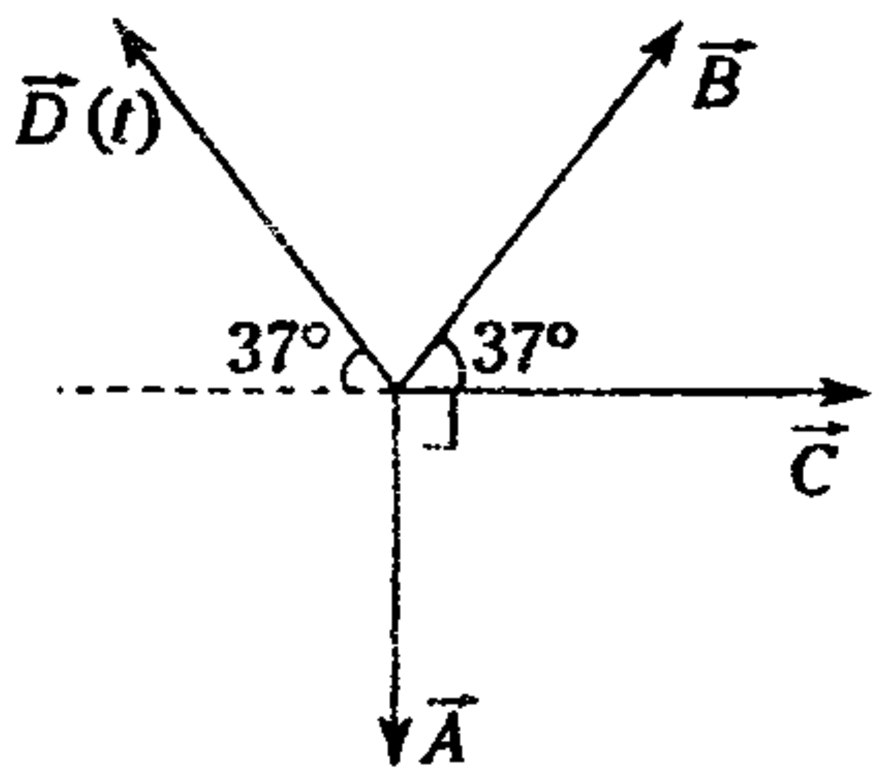
$$R_{\text{mín}}=A\operatorname{sen}53^\circ$$

$$R_{\text{mín}}=(20)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$R_{\text{mín}}=16\text{ u}$$

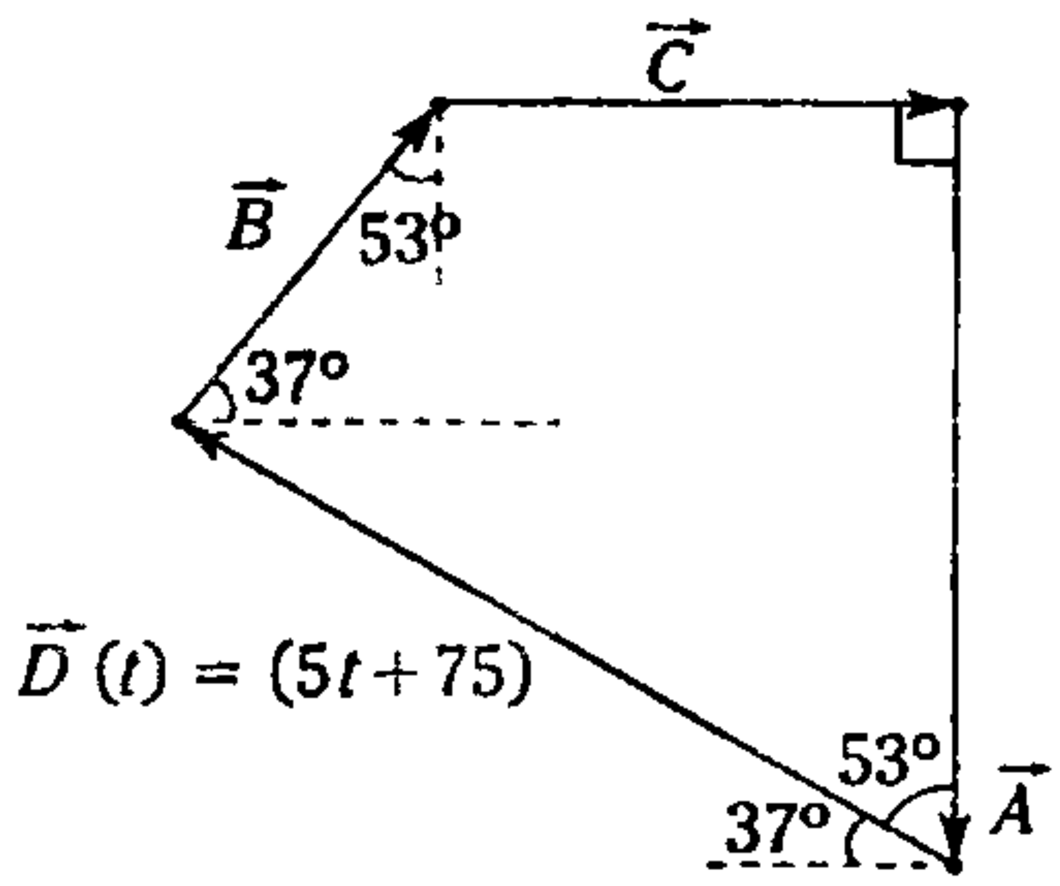
Problema 13

En el sistema de vectores mostrados, su resultante es nula para cualquier instante; el vector $\vec{A}$ es constante mientras que los otros pueden variar su módulo, pero no su dirección. El módulo del vector $\vec{D}$ depende del tiempo según $|\vec{D}| = (5t + 75)$ u ; donde se expresa t en segundos. Si para el instante $t = 0$ el módulo del vector $\vec{C}$ es cero, ¿para qué instante de tiempo el módulo del vector $\vec{B}$ es cero?

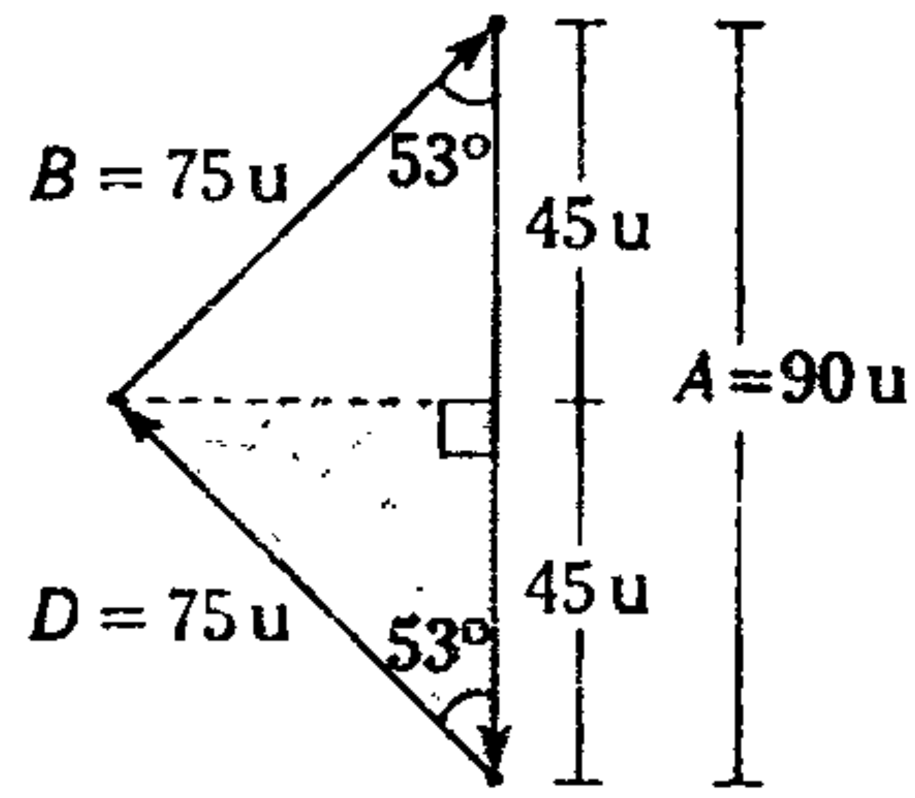


Resolución

Por condición del problema para todo instante, la resultante $(\vec{R})$ de los vectores dados es nula $(\vec{R} = \vec{0})$; entonces, con los vectores podemos formar en todo instante un polígono cerrado tal como lo mostramos.



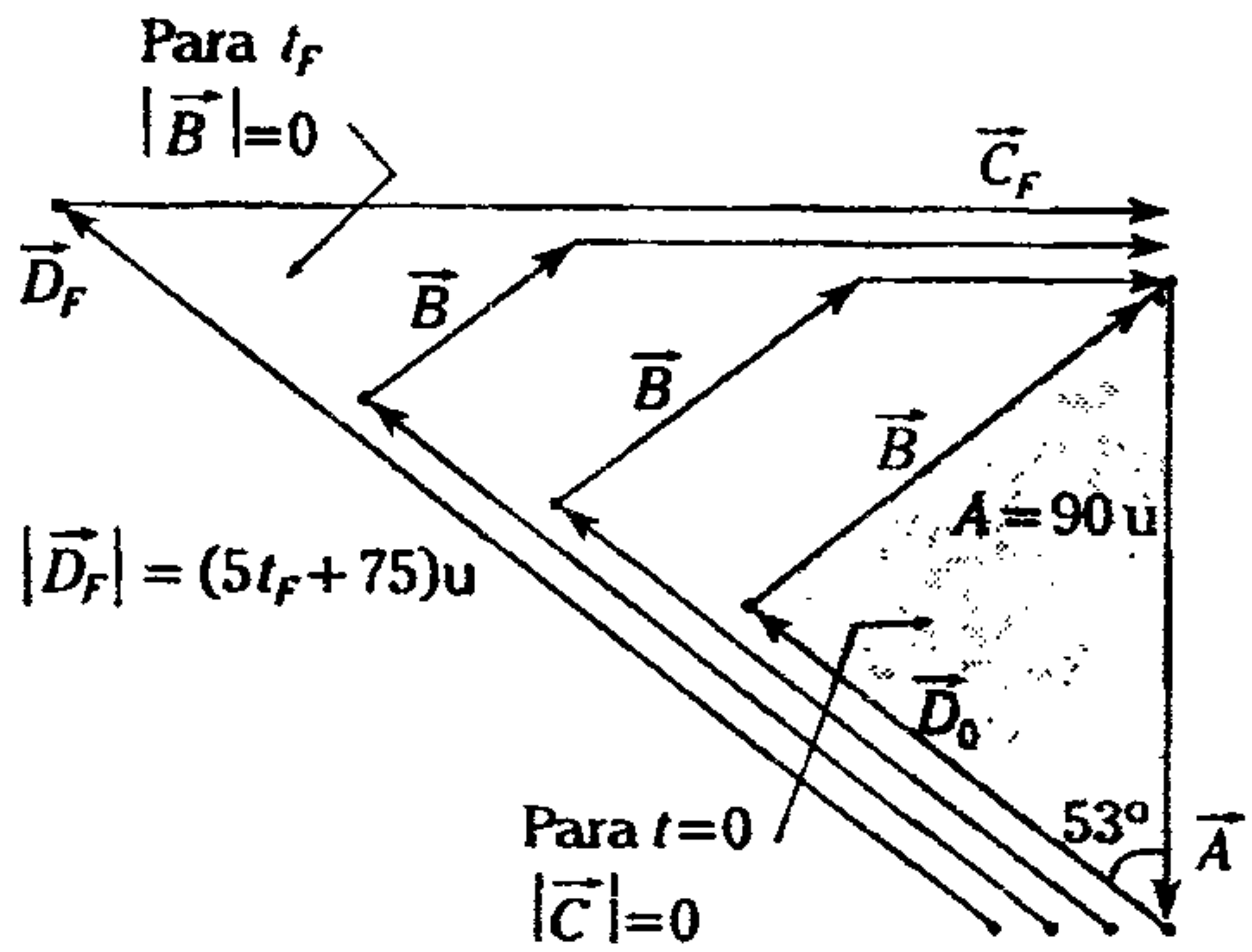
Se sabe que para el instante $t = 0$, $|\vec{C}| = 0$, entonces, el polígono se formaría con los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{D}$, donde para este instante $|\vec{D}| = 75$ u.



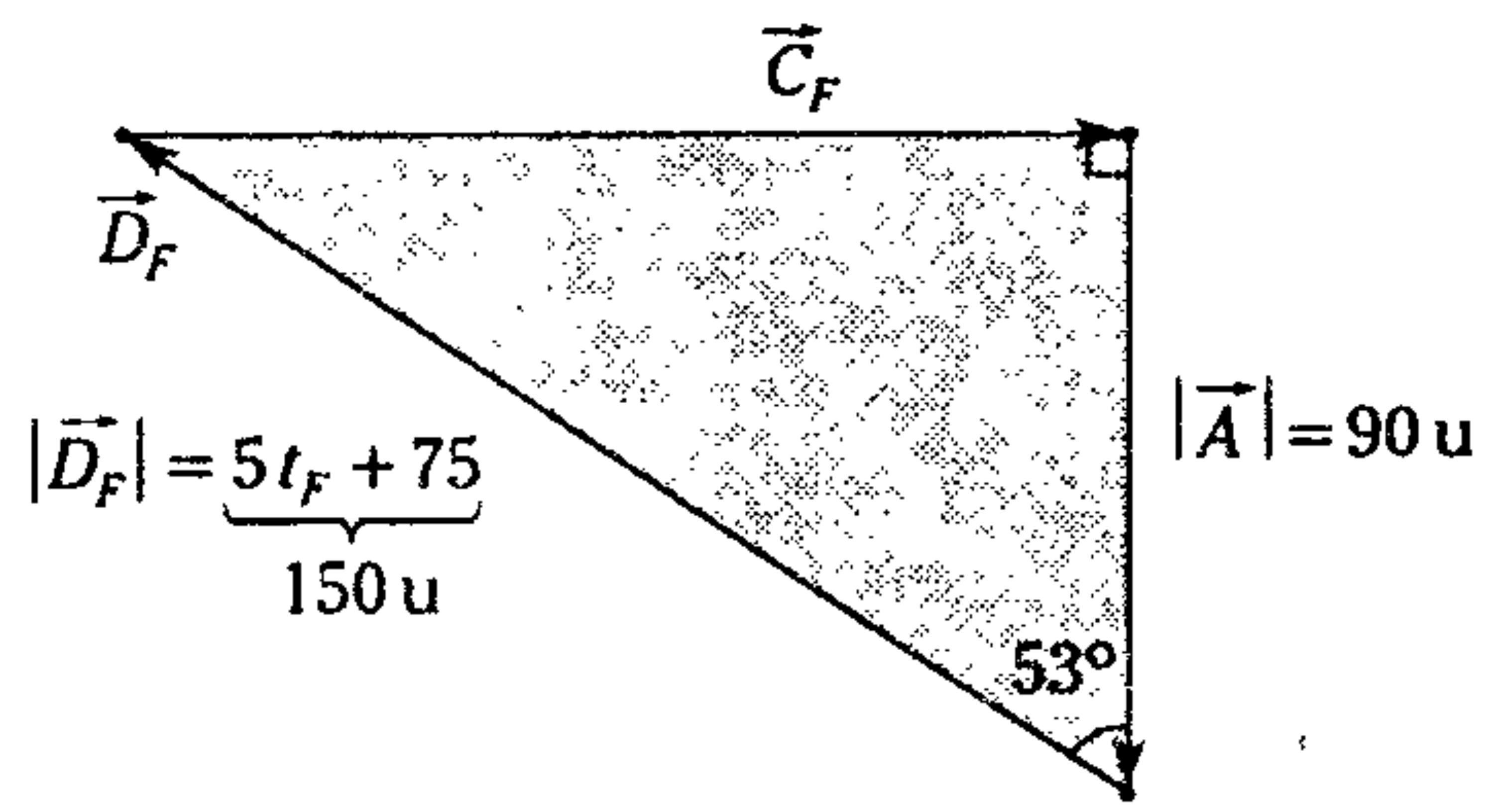
El triángulo resulta ser isósceles y se deduce que

$$|\vec{A}| = A = 90 \text{ u}$$

Como el vector $\vec{A}$ es constante, entonces, mantiene su valor de 90 u fijo. Ahora determinemos para qué instante t_F el módulo de $\vec{B}$ es nulo. analicemos el polígono de vectores a partir de $t = 0$.



Como $|\vec{D}| = 5t + 75$, a medida que transcurre el tiempo, el módulo de $\vec{D}$ aumenta; por ello, la longitud del segmento dirigido que lo representa va aumentando tal como se muestra. Mientras eso ocurre con el vector $\vec{D}$ y teniendo en cuenta que en todo instante con los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ se debe formar un polígono cerrado; a partir del gráfico, se deduce que el módulo de $\vec{C}$ va aumentando y el de $\vec{B}$ disminuyendo, ya que las longitudes de sus segmentos dirigidos va aumentan~~do y~~ disminuyendo respectivamente, para el instante t_F el polígono se cierra sólo con los vectores $\vec{A}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$, con ello $|\vec{B}|=0$, por lo tanto, para este instante tendremos



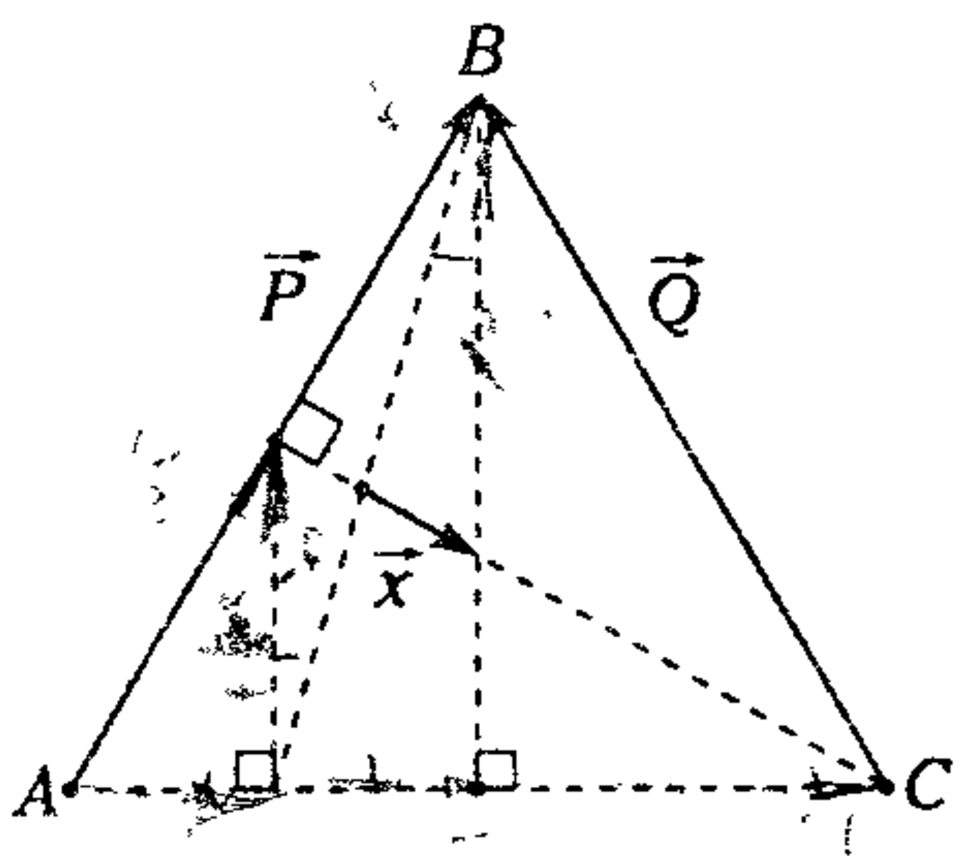
Del gráfico $5t_F+75=150$

$t_F=15$ s

entonces, para el instante $t=15$ s el vector $\vec{B}$ es nulo y su módulo es cero.

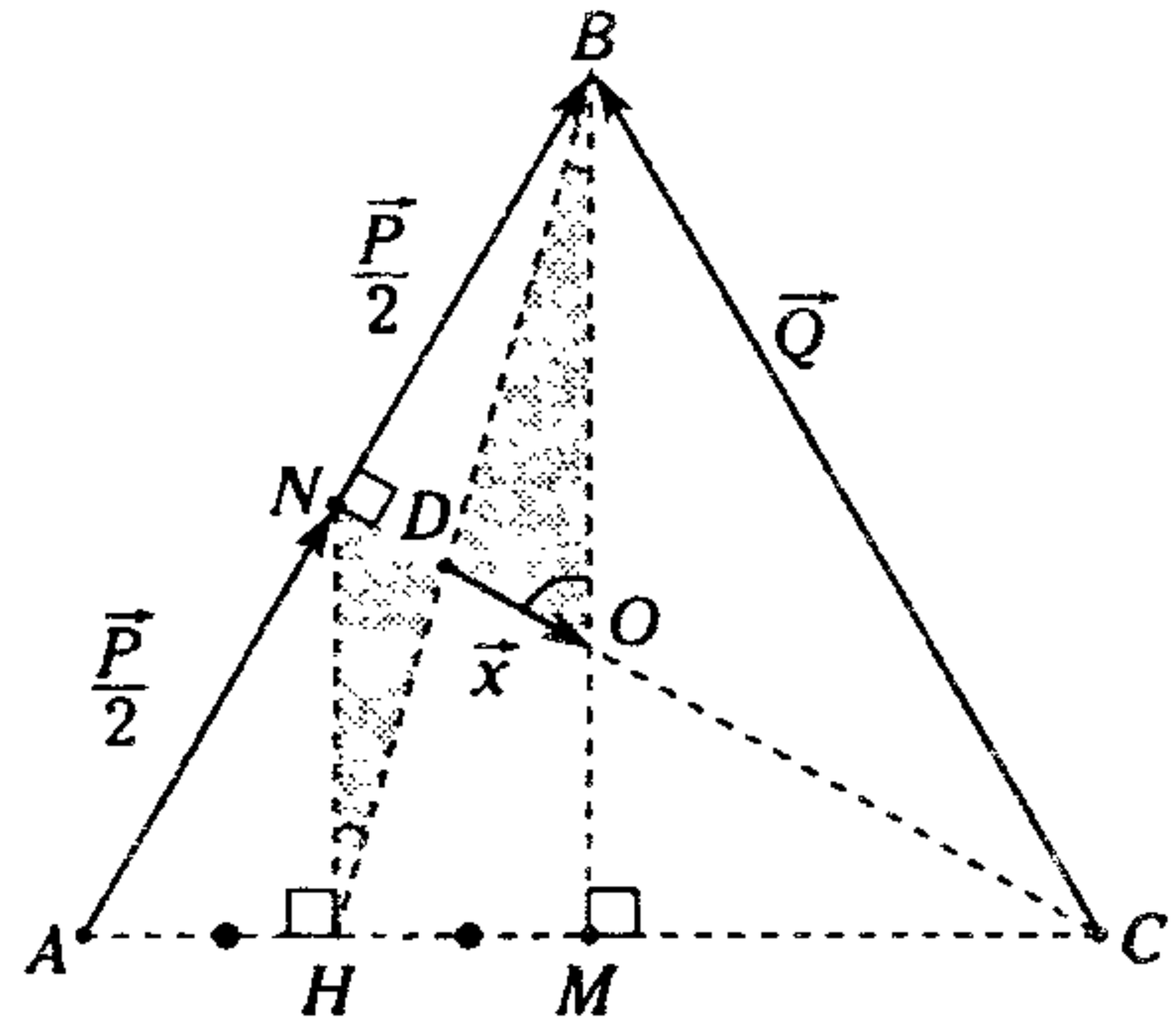
Problema 14

En la figura, ABC es un triángulo equilátero, exprese al vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.



Resolución

Para poder expresar a $\vec{x}$ en función de $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, primero veamos de la geometría que disponemos: las alturas relativas a los lados AC y AB son también medianas; además, la altura NH es base media de BM.



donde

O : baricentro

$\Rightarrow\ BO=2OM$ y $OC=2NO$

Se deduce que $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NB}=\frac{\vec{P}}{2}$

además, considerando en el triángulo BNC, el método del polígono $\vec{P}/2$ es la resultante de los vectores $\overrightarrow{NC}$ y $\vec{Q}$, entonces, tenemos

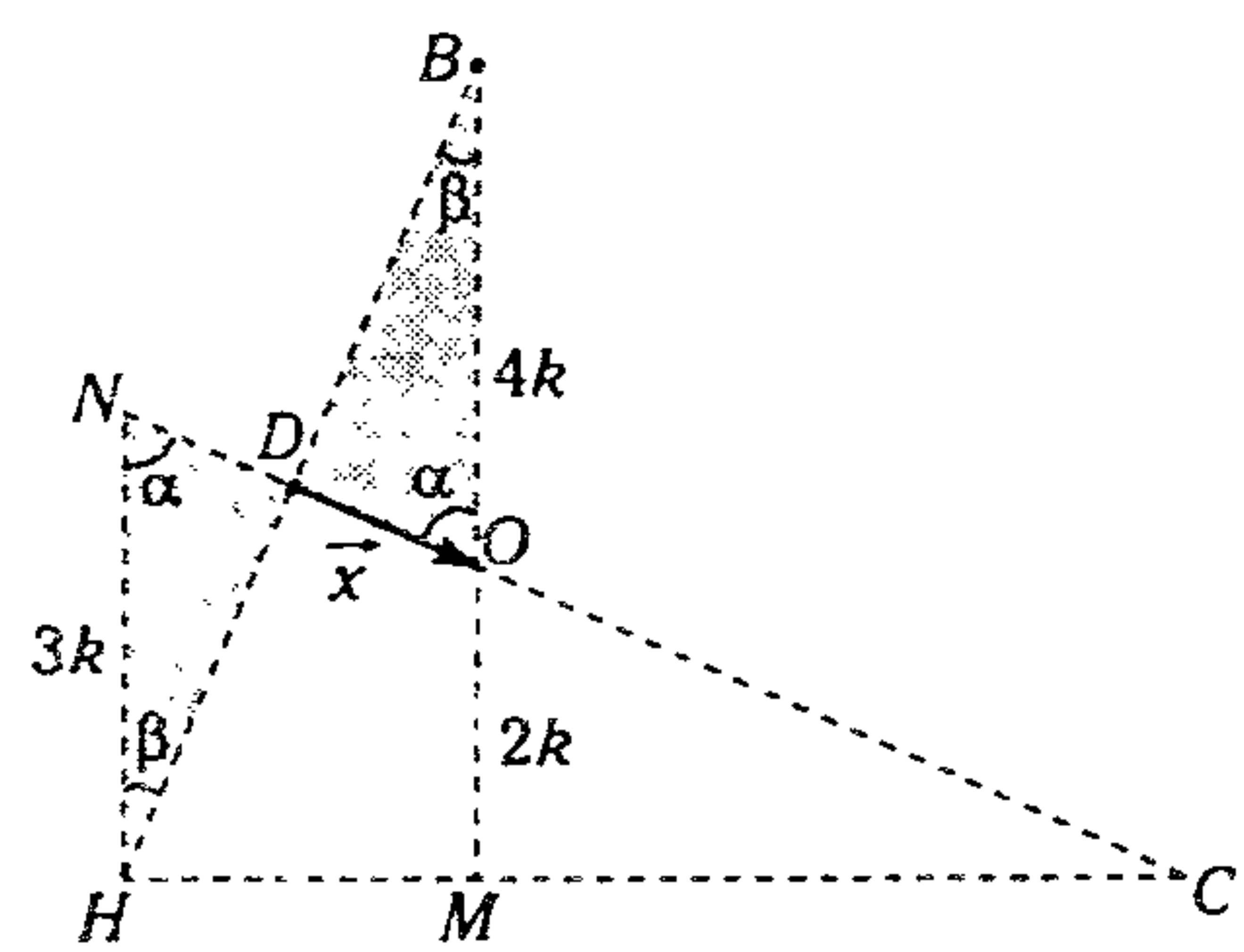
$$\overrightarrow{NC}+\vec{Q}=\frac{\vec{P}}{2}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{NC}=\frac{\vec{P}}{2}-\vec{Q} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere a $\overrightarrow{NC}$ en función de $\vec{x}$, ello lo podremos lograr sin mucha dificultad ya que $\overrightarrow{NC}$ y $\vec{x}$ son colineales, mediante proporción de longitudes se tendrá que

$NH=3k\ \Rightarrow\ BM=6k$

Por lo tanto, se deduce que $BO=4k$ y $OM=2k$ tal como se muestra.



Se tiene los triángulos *HPN* y *BPO* semejantes, entonces, los lados que se oponen al ángulo β están en la relación de 3 a 4.

Del gráfico

$$\frac{\overrightarrow{ND}}{3}=\frac{\vec{x}}{4} \Rightarrow \overrightarrow{ND}=\frac{3}{4}\vec{x}$$

con ello

$$\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{ND}+\vec{x}=\frac{3}{4}\vec{x}+\vec{x}$$

$$\overrightarrow{NO}=\frac{7}{4}\vec{x} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{14}{4}\vec{x}$$

Finalmente

$$\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OC}=\frac{21}{4}\vec{x}$$

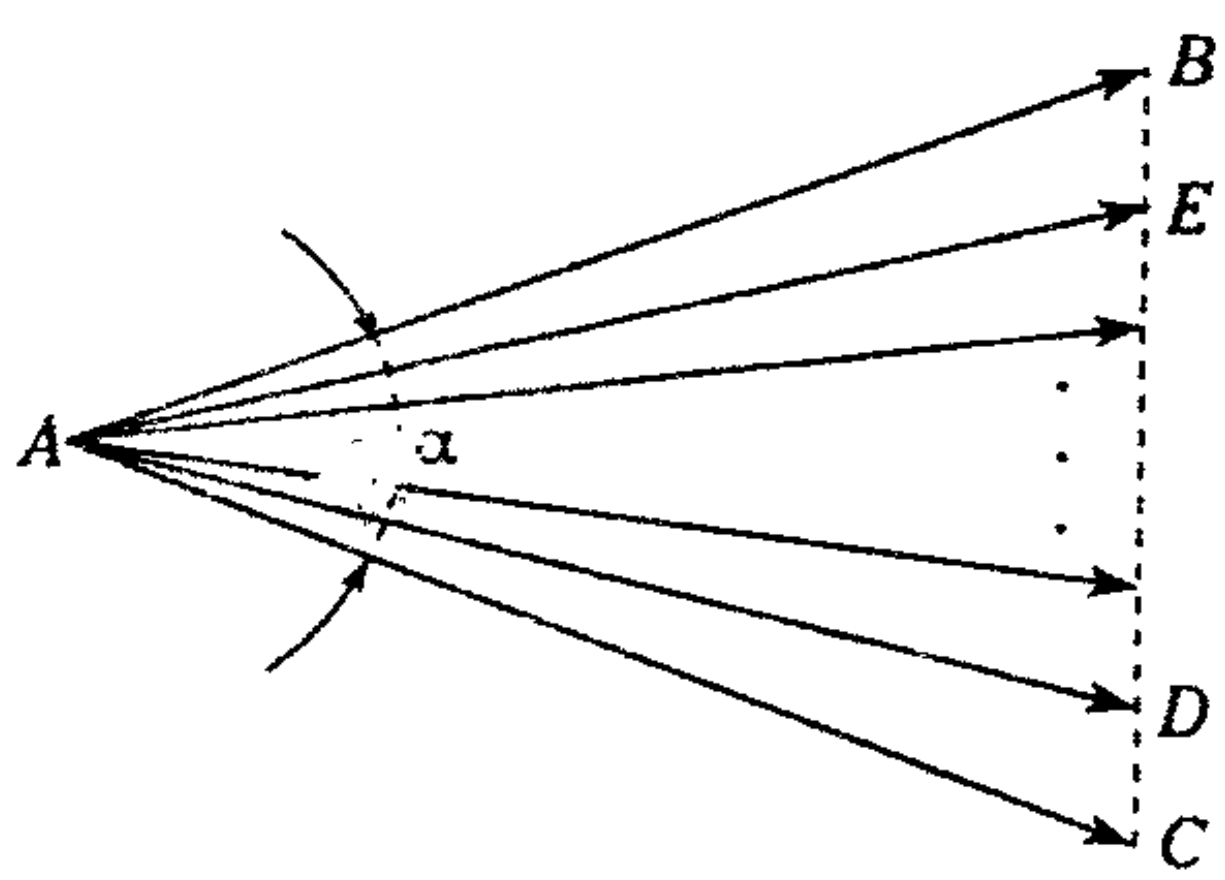
Reemplazando en (I)

$$\overrightarrow{NC}=\frac{21}{4}\vec{x}=\frac{\vec{P}}{2}-\vec{Q}$$

$$\therefore\ \vec{x}=\frac{2}{21}\left(\vec{P}-2\vec{Q}\right)$$

Problema 15

Si al lado *BC* del triángulo *ABC* que se muestra se le dividió en *n* partes iguales, siendo *n* impar, obtenga el módulo de la resultante de los $n+1$ vectores que se muestran. Considere $AB=5$ u, $AC=4$ u, $\tan\alpha=\sqrt{24}$.

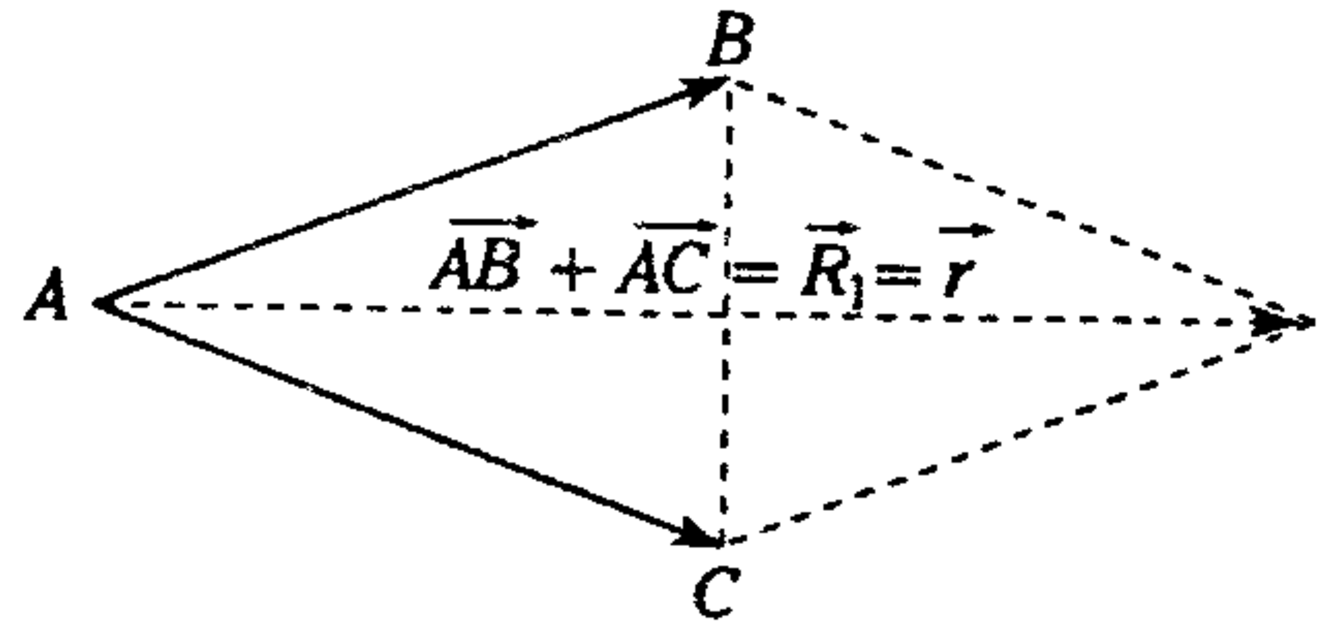


Resolución

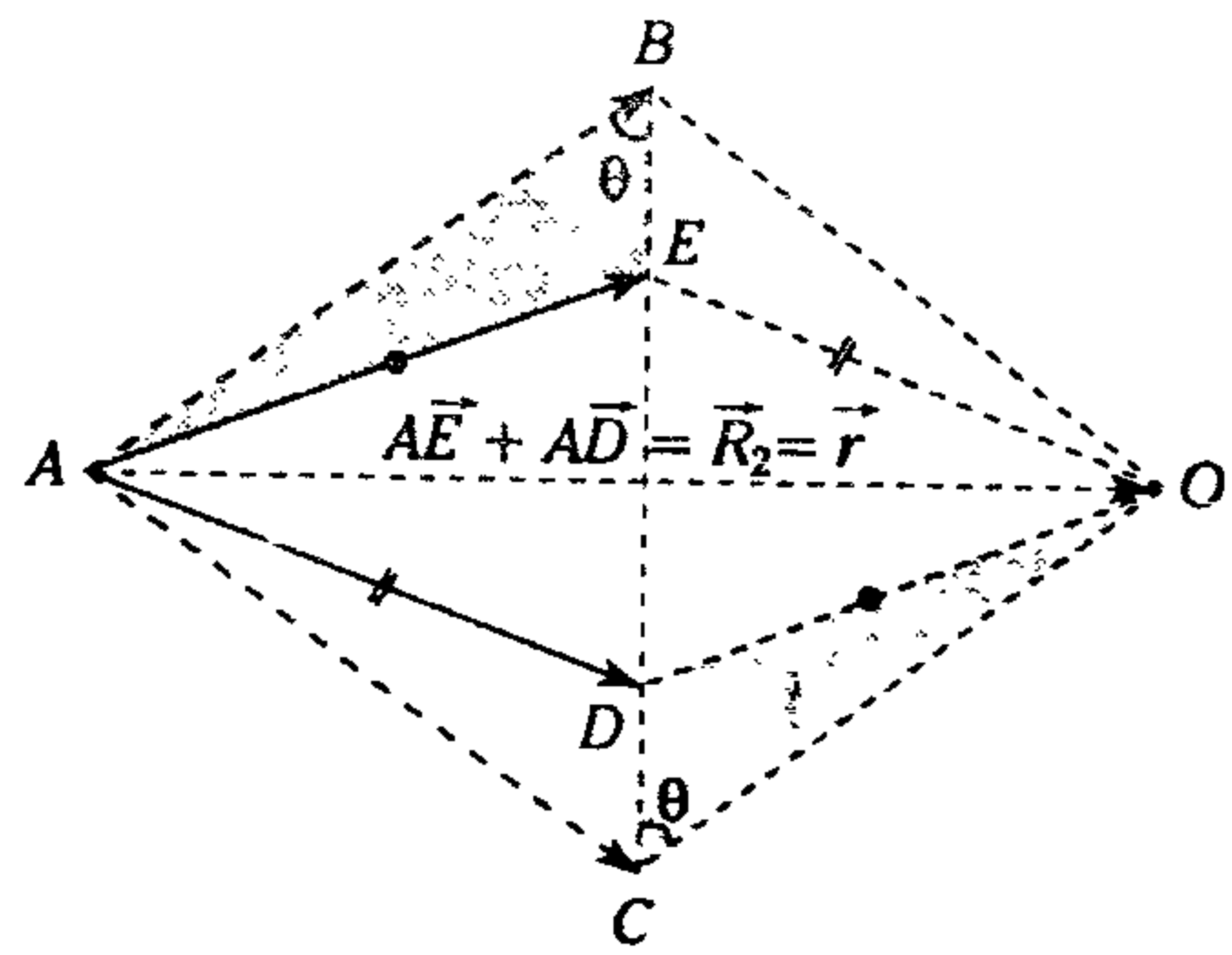
Como *n* es impar, entonces, existe un número par de vectores $n+1$; luego tenemos

$\frac{(n+1)}{2}$ pares de vectores.

Consideremos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, cuya resultante la obtenemos mediante el método del paralelogramo.



Asimismo, $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$.



Observamos que $\vec{R}_1=\vec{R}_2=\vec{r}$

Luego se concluye que

$$\vec{R}=\vec{R}_1+\vec{R}_2+\vec{R}_3+...+\vec{R}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

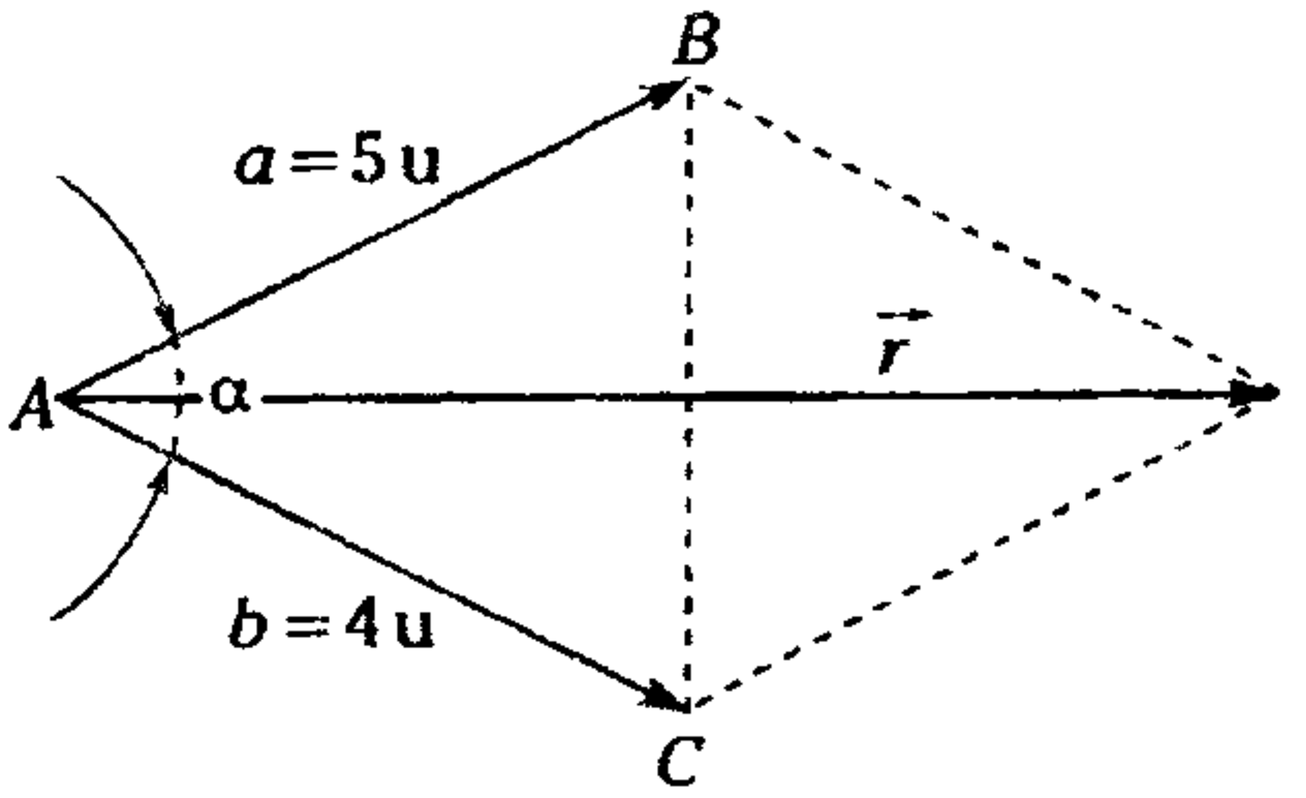
$$\vec{R}=\underbrace{\vec{r}+\vec{r}+\vec{r}+...+\vec{r}}_{\left(\frac{n+1}{2}\right)\text{veces}}$$

$$\vec{R}=\left(\frac{n+1}{2}\right)\vec{r}$$

En módulo

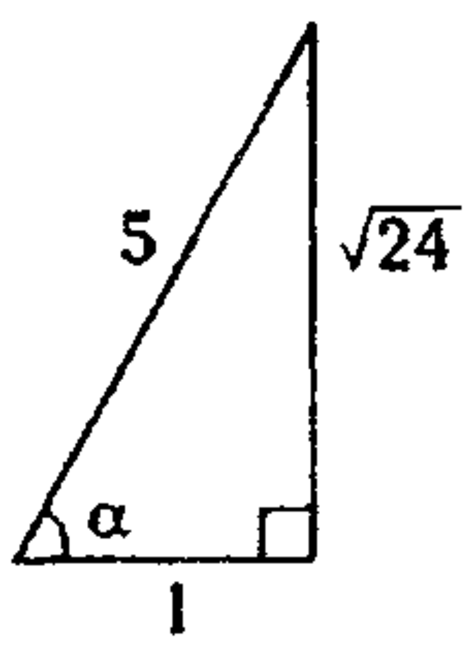
$$R=\left(\frac{n+1}{2}\right)r \qquad \text{(I)}$$

Para calcular *r*, consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y aplicamos método del paralelogramo.



$$r=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$
$$r=\sqrt{5^2+4^2+2\times5\times4\cos\alpha}$$
$$r=\sqrt{41+40\cos\alpha} \qquad \text{(II)}$$

Como $\tan\alpha=\sqrt{24}$, tenemos



Luego, $\cos\alpha=\frac{1}{5}$

Reemplazando en (II)

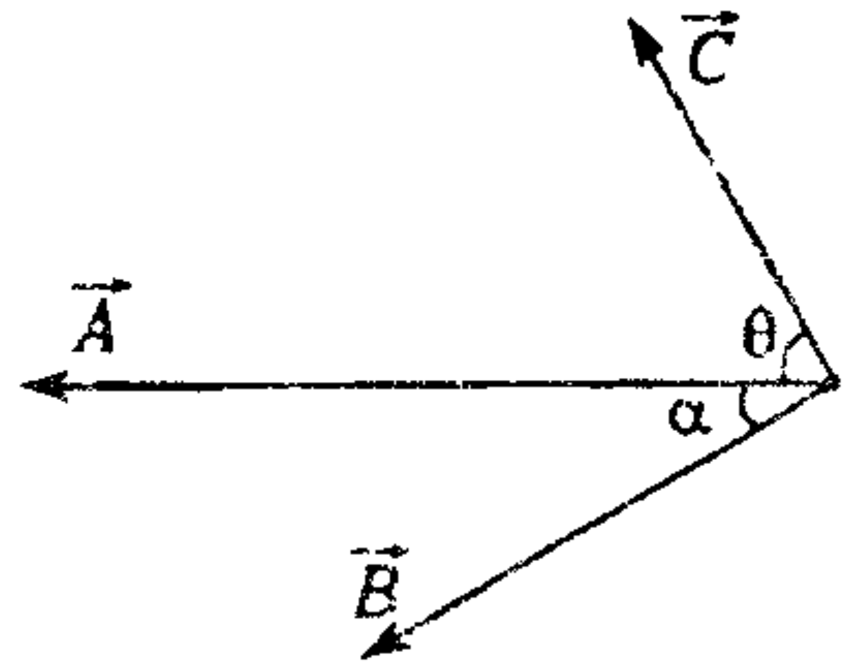
$$r=\sqrt{41+40\left(\frac{1}{5}\right)}$$
$$r=7\text{ u}$$

Reemplazando en (I)

$$R=\left(\frac{n+1}{2}\right)\times7$$
$$R=\frac{7}{2}(n+1)$$

Problema 16

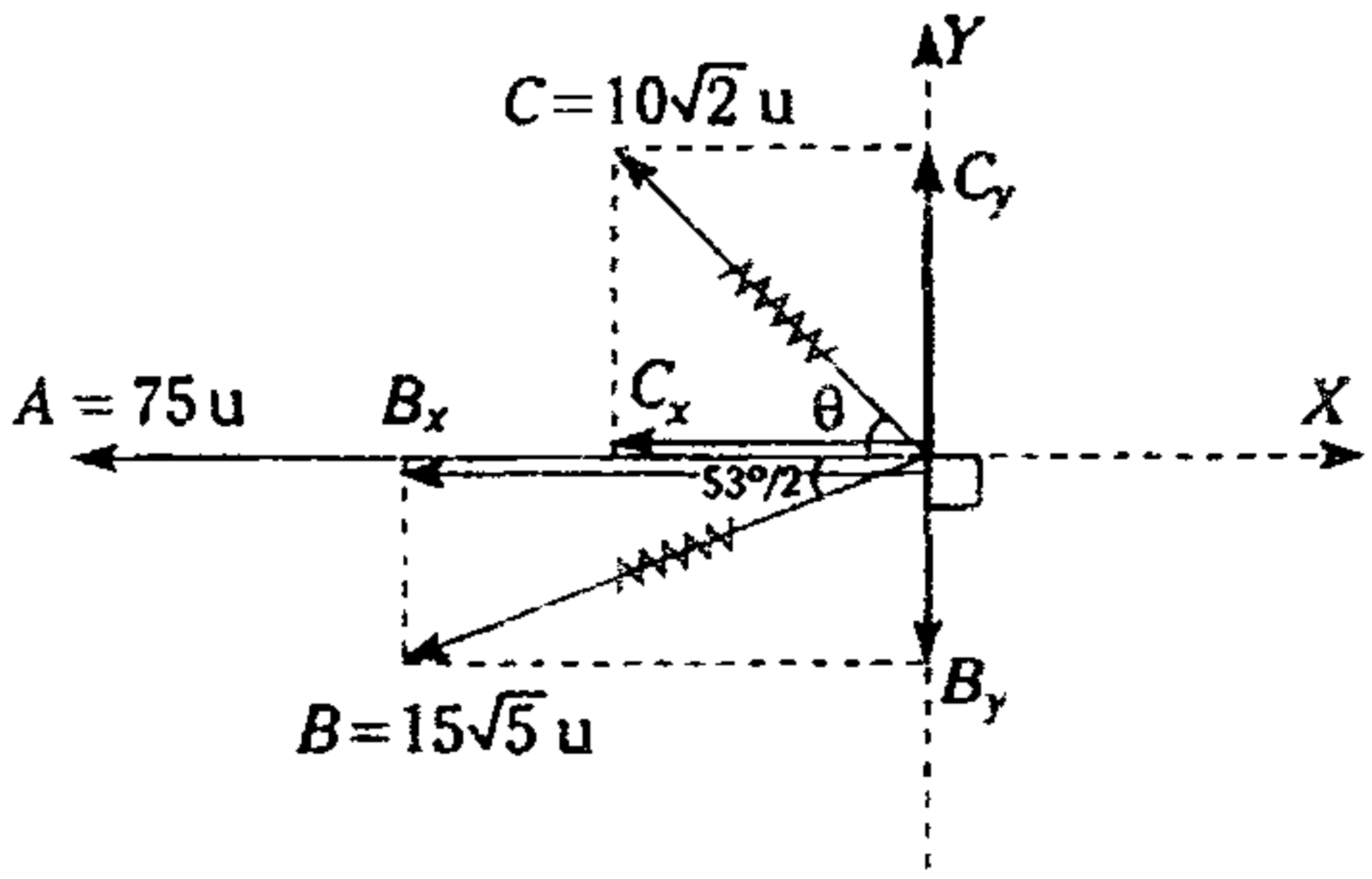
Se muestra tres vectores concurrentes $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ cuyos módulos son 75 u, $15\sqrt{5}$ u y $10\sqrt{2}$ u, respectivamente. Determine el módulo de la resultante de los tres vectores, si sabe que θ es la menor posible. $\left(\alpha=\frac{53^\circ}{2}\right)$



Resolución

Para obtener la resultante de los tres vectores, se puede proceder de dos formas: analítica (componentes rectangulares) y geométrica (método del polígono).

1. *En forma analítica*



A partir del gráfico se obtiene

$$C_x=C\cos\theta=10\sqrt{2}\cos\theta$$
$$C_y=C\operatorname{sen}\theta=10\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

Además

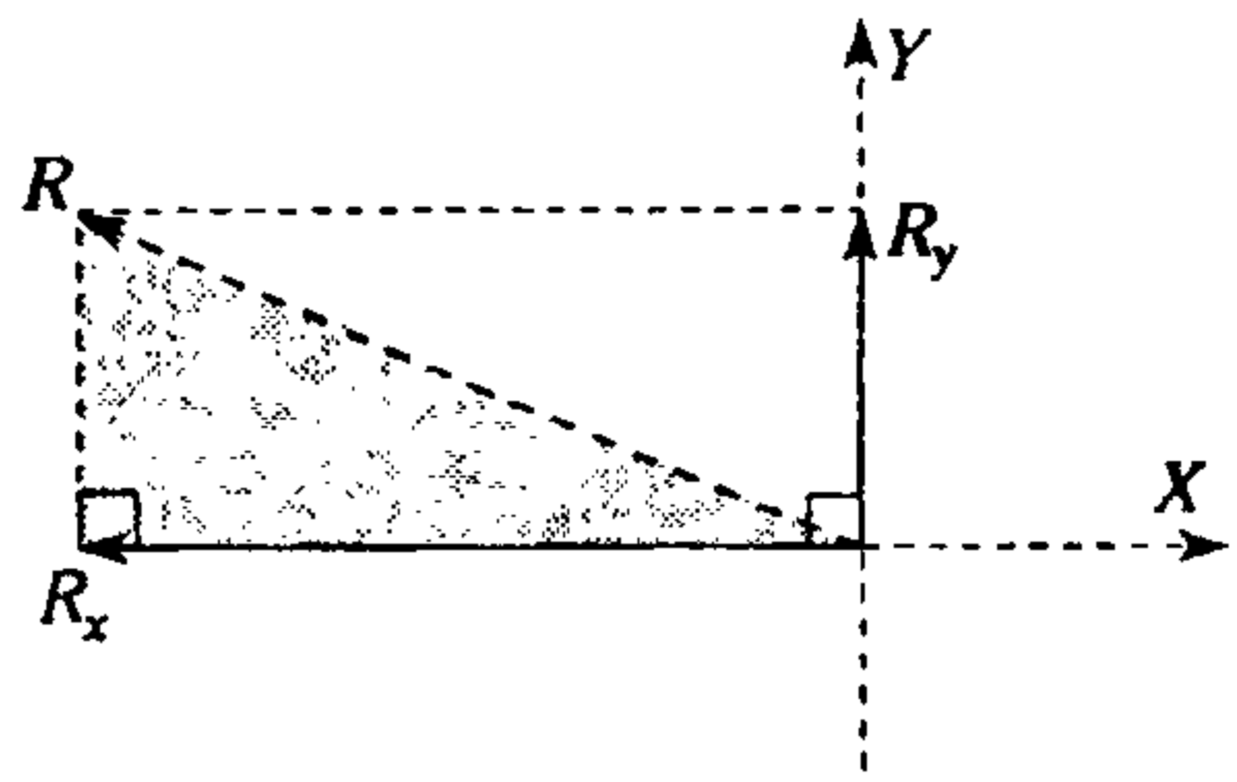
$$B_x=B\cos\frac{53^\circ}{2}=15\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=30\text{ u}$$

$$B_y=B\operatorname{sen}\frac{53^\circ}{2}=15\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=15\text{ u}$$

Ahora los módulos de las resultantes en la dirección X e Y son

$$R_x=A+B_x+C_x$$
$$R_x=75-30+10\sqrt{2}\cos\theta$$
$$R_x=105+10\sqrt{2}\cos\theta \qquad \text{(I)}$$
$$R_y=C_y-B_y$$
$$R_y=10\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta-15 \qquad \text{(II)}$$

En el gráfico quedaría



de donde el módulo de la resultante de los 3 vectores sería

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III)

$$R=\sqrt{(105+10\sqrt{2}\cos\theta)^2+(10\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta-15)^2}$$

Efectuando y acomodando términos

$$\underbrace{R}_{\text{mín}}=\sqrt{11\,450+300\sqrt{2}\underbrace{(7\cos\theta-1\operatorname{sen}\theta)}_{\text{mín}}}$$

Ahora para que R sea mínimo se debería tener ($7\cos\theta + (-1)\operatorname{sen}\theta$) mínimo. Ello lo podemos obtener a partir de lo siguiente

si $f = a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta$

$$\Rightarrow \underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mín}}\le f\le \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máx}}$$

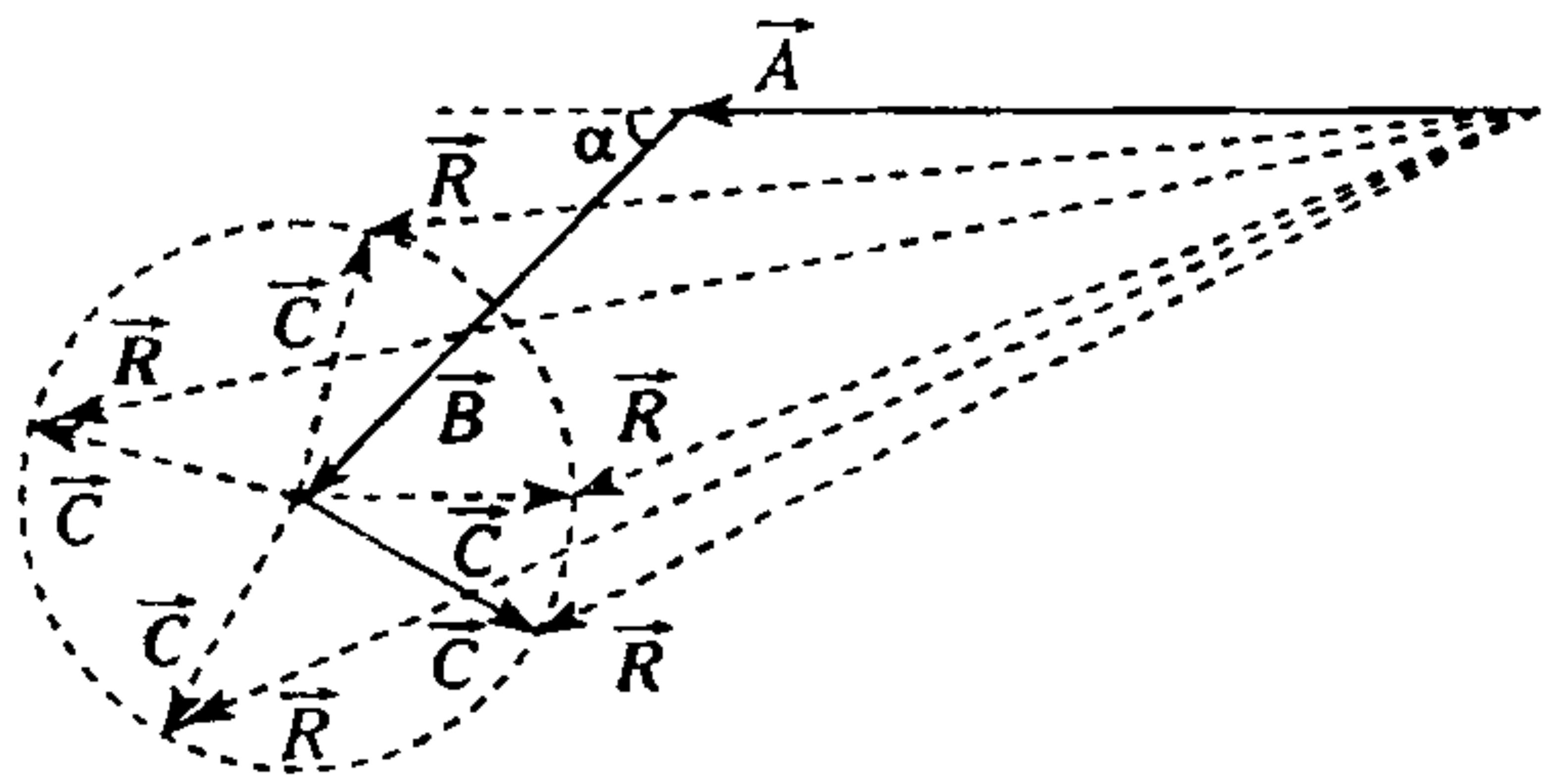
para nuestro caso

$$f=(7\cos\theta+(-1)\operatorname{sen}\theta)_{\text{mín}}=-\sqrt{(7)^2+(-1)^2}$$
$$=-5\sqrt{2}$$

$$R_{\text{mín}}=\sqrt{11\,450+300\sqrt{2}(-5\sqrt{2})}$$

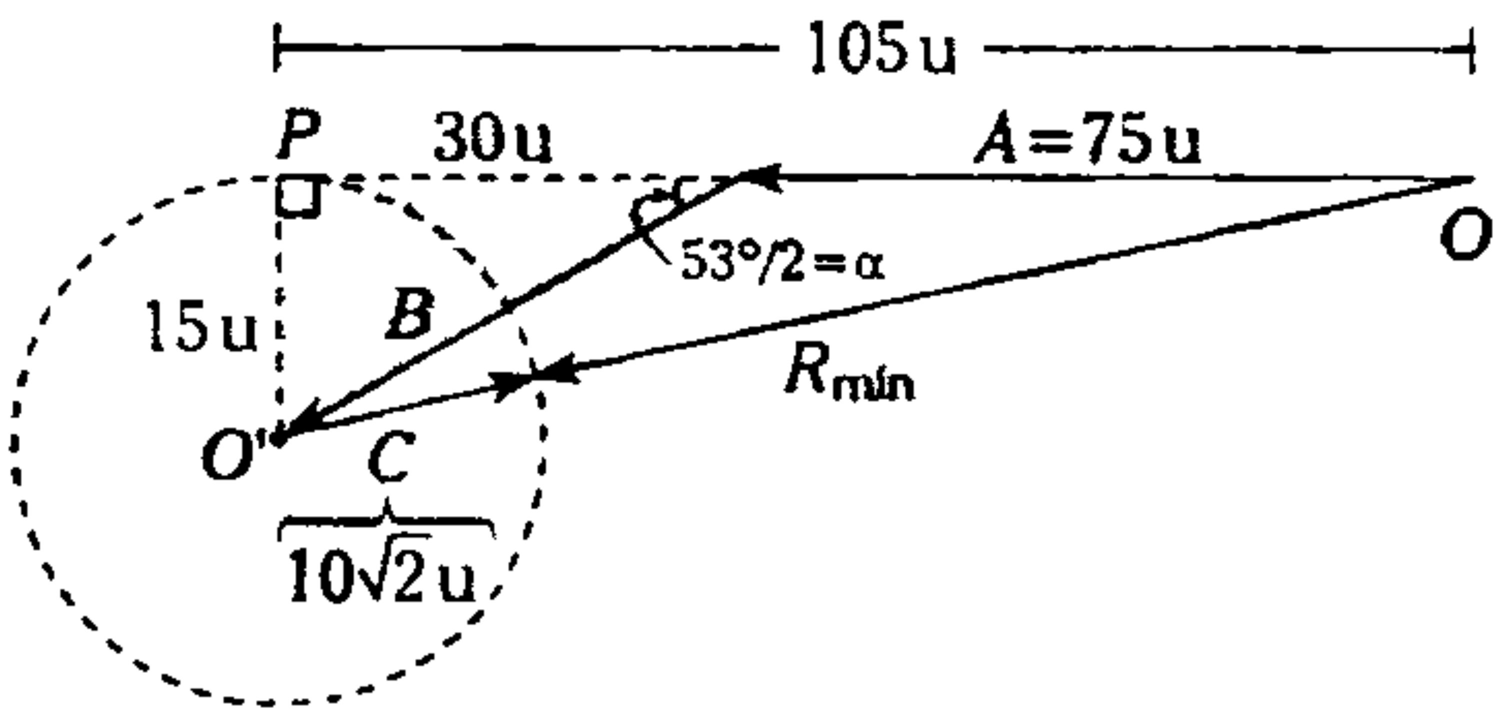
$$\therefore\ R_{\text{mín}}=\sqrt{8\,450}=65\sqrt{2}\text{ u}$$

2. *En forma geométrica*
Al considerar el método del polígono debemos disponer un vector a continuación de otro, teniendo en cuenta que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen sus módulos y direcciones definidos, pero el vector $\vec{C}$ solo tiene definido su módulo y no su dirección ya que el valor de θ no está definido.



Al graficar al vector $\vec{C}$ con múltiples direcciones, notamos que la resultante $(\vec{R})$ de los tres vectores (la cual resulta de unir el origen de $\vec{A}$ con el extremo de $\vec{C}$) también tiene múltiples direcciones, así como múltiples valores, ya que el segmento dirigido que la representa tiene diferentes longitudes. Ahora, a partir del gráfico hecho se puede obtener $\vec{R}$ mínimo, teniendo en cuenta que el segmento dirigido que represente a $\vec{R}$ debe tener la menor longitud, esto se obtendrá si $\vec{R}$ y $\vec{C}$ son colineales, como se muestra a continuación:

$B=15\sqrt{5}$ u



En el ⊾OPO' aplicando Teorema de Pitágoras

$$OO'=\sqrt{105^2+15^2}$$

$$C+R_{\text{mín}}=75\sqrt{2}\text{ u}$$

$$10\sqrt{2}\text{ u}+R_{\text{mín}}=75\sqrt{2}\text{ u}$$

$$\therefore\ R_{\text{mín}}=65\sqrt{2}\text{ u}$$

Problemas Propuestos

1. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de igual módulo forman un ángulo θ. ¿En qué relación están los módulos de los vectores $\vec{A}+\vec{B}$ y $\vec{A}-\vec{B}$?

A) $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ B) $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

D) $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) $\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)$

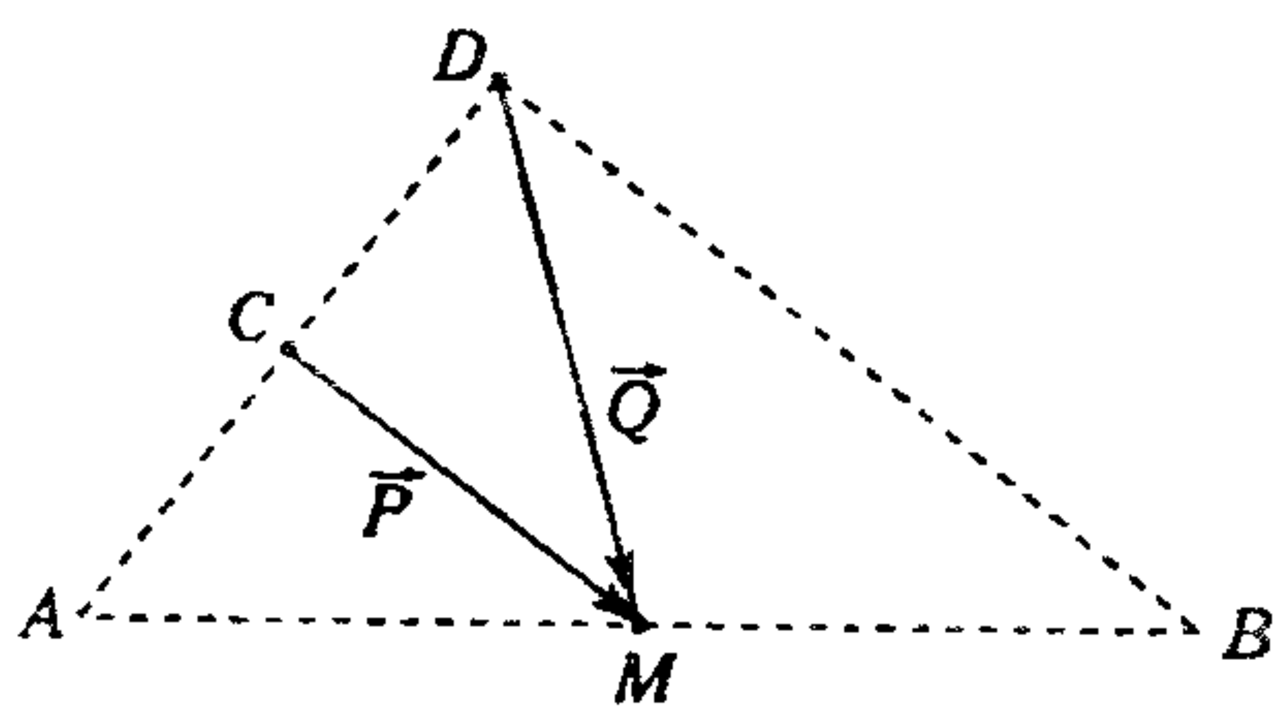
2. Se tiene dos vectores de módulo constante dispuestos sobre un plano, se sabe que el mayor y menor valor de su resultante es 32 u y 6 u, respectivamente. ¿Qué módulo tiene $\vec{A}-\vec{B}$, cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman 60°?

A) $2\sqrt{38}$ u B) $3\sqrt{76}$ u

C) $1{,}5\sqrt{76}$ u

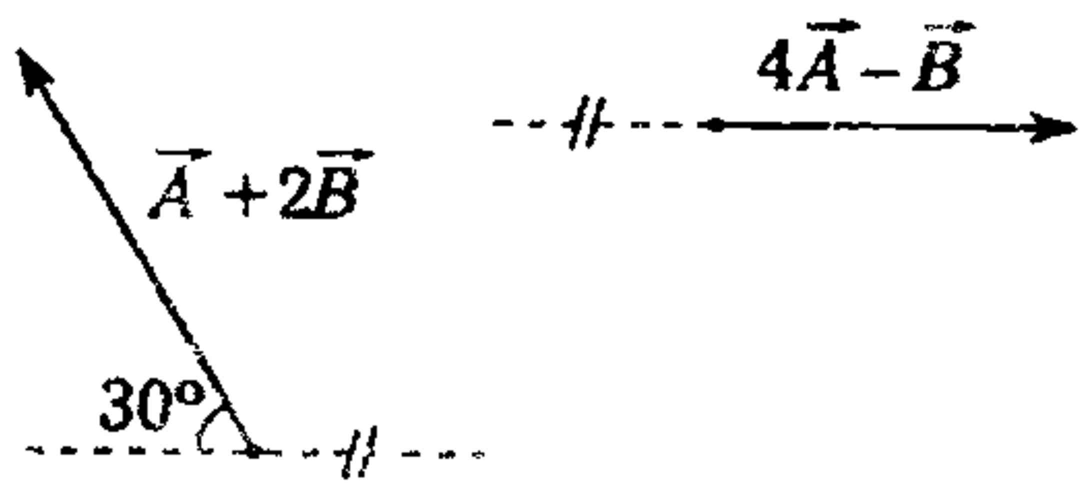
D) $1{,}5\sqrt{76}$ u E) $\sqrt{283}$ u

3. En la figura que se muestra, M es punto medio de AB, $AC = CD = 10$ u. Si la resultante de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ tiene un valor de 26 u, determine la medida del ángulo MAD. ($AB = 28$ u)



A) 60° B) 37° C) 53°
D) 50° E) 40°

4. Al realizar algunas operaciones con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se logró obtener los vectores siguientes:



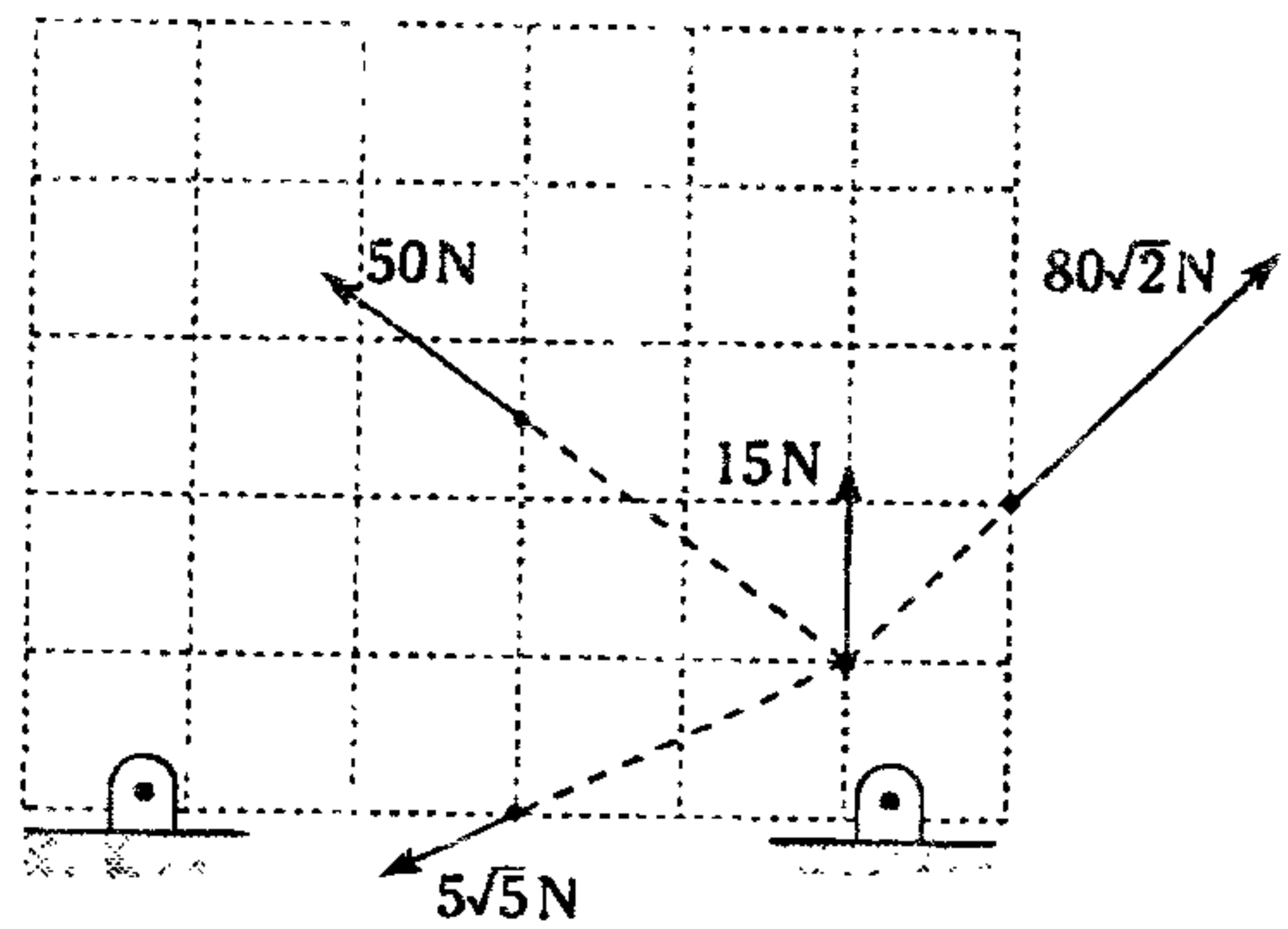
donde los módulos de los vectores son:

$$|4\vec{A}-\vec{B}| = 10\text{ u} \quad \text{y} \quad |\vec{A}+2\vec{B}| = 10\sqrt{3}\text{ u}$$

Determine el módulo de $7\vec{A}-4\vec{B}$

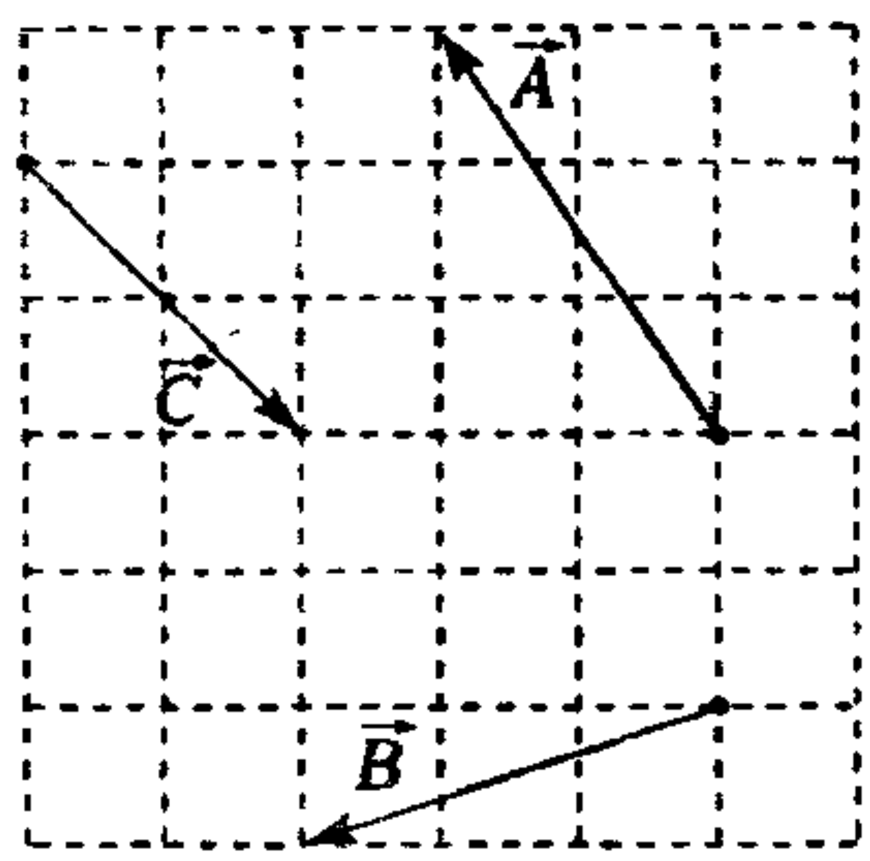
A) $10\sqrt{[illegible]}$ u B) $9\sqrt{7}$ u
C) $7\sqrt{5}$ u
D) $3\sqrt{14}$ u E) $5\sqrt{51}$ u

5. La figura representa una placa sobre la cual actúan cuatro fuerzas coplanares. Determine el módulo de la resultante de estas cuatro fuerzas.



A) $50\sqrt{17}$ N B) $40\sqrt{17}$ N
C) $30\sqrt{17}$ N
D) 120 N E) 20 N

6. En la figura, los vectores dados están relacionados entre sí por $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$, donde m y n son números reales. Determine m y n.

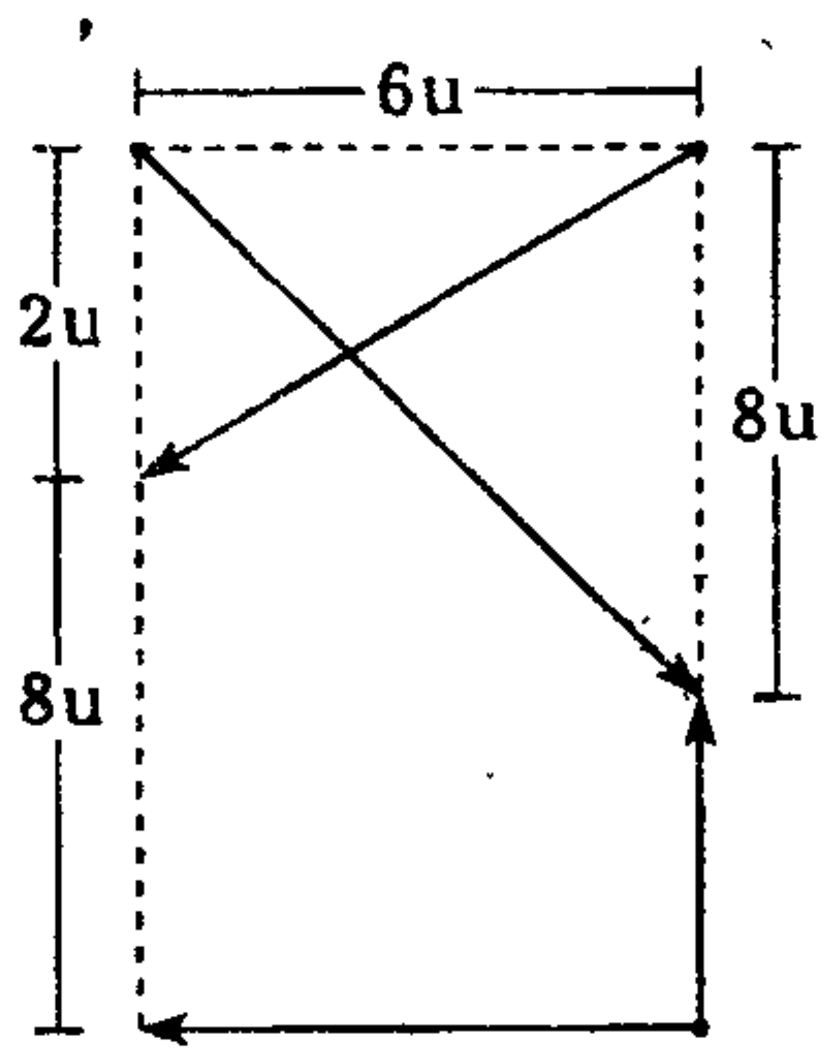


A) $-\frac{3}{11};-\frac{2}{11}$ B) $-\frac{4}{5};-\frac{2}{15}$

C) $-\frac{5}{11};-\frac{3}{11}$

D) $-\frac{8}{5};\frac{2}{15}$ E) $\frac{8}{15};-\frac{5}{8}$

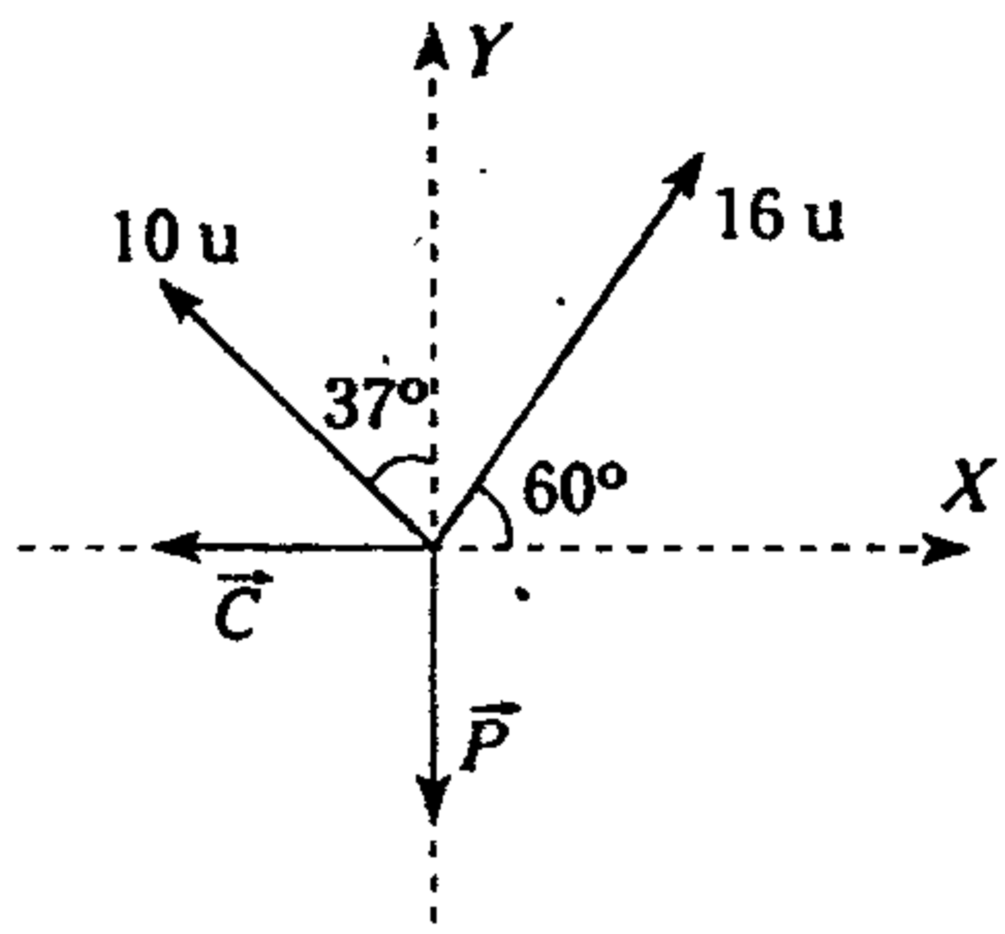
7. La figura que se muestra es un rectángulo. Determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados.



A) 8 u B) 10 u C) 12 u
D) 15 u E) 18 u

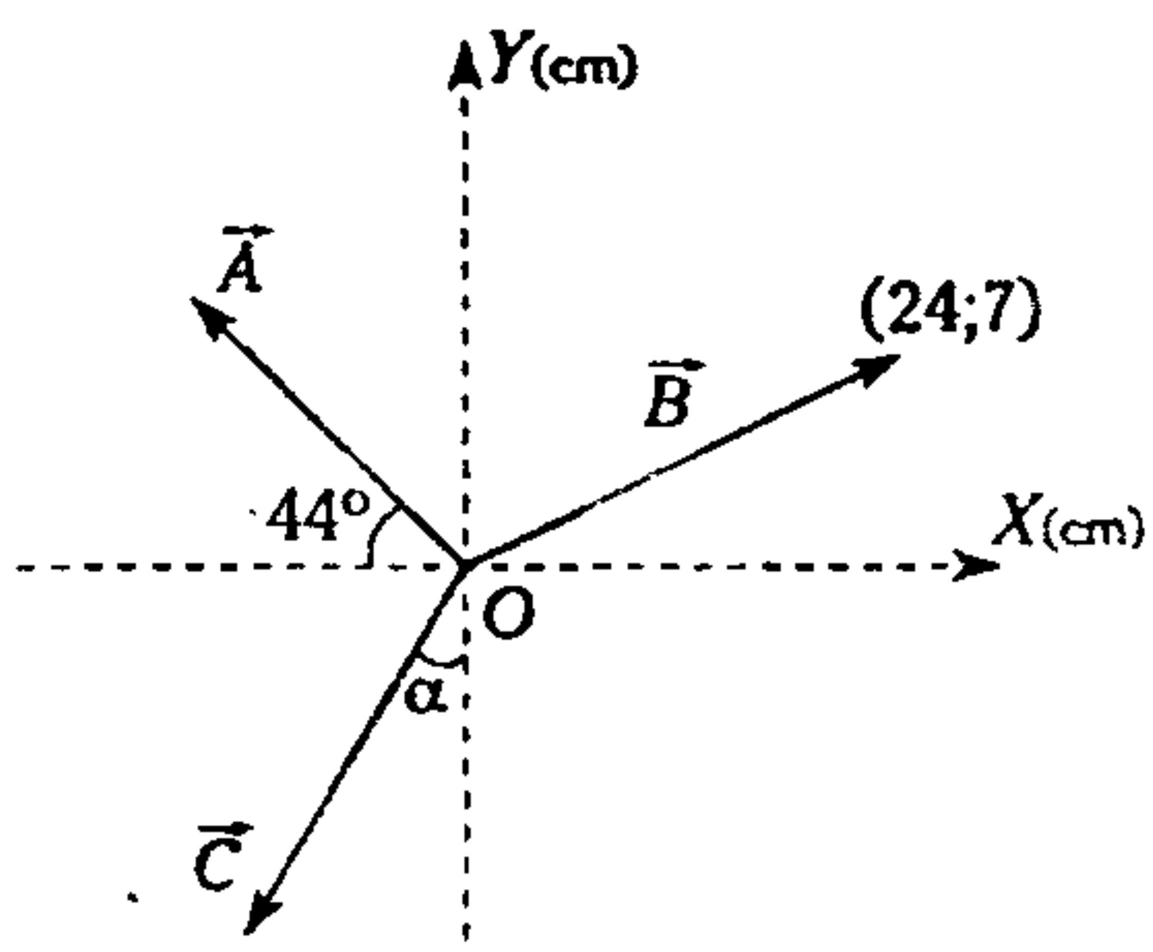
8. Si la resultante del sistema de vectores mostrados es $2(\sqrt{3}+1)(-\hat{j})$u, determine el módulo del vector $\vec{D}$, si verifica

$$\vec{D} = \vec{C} + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{5}\right)\vec{P}$$



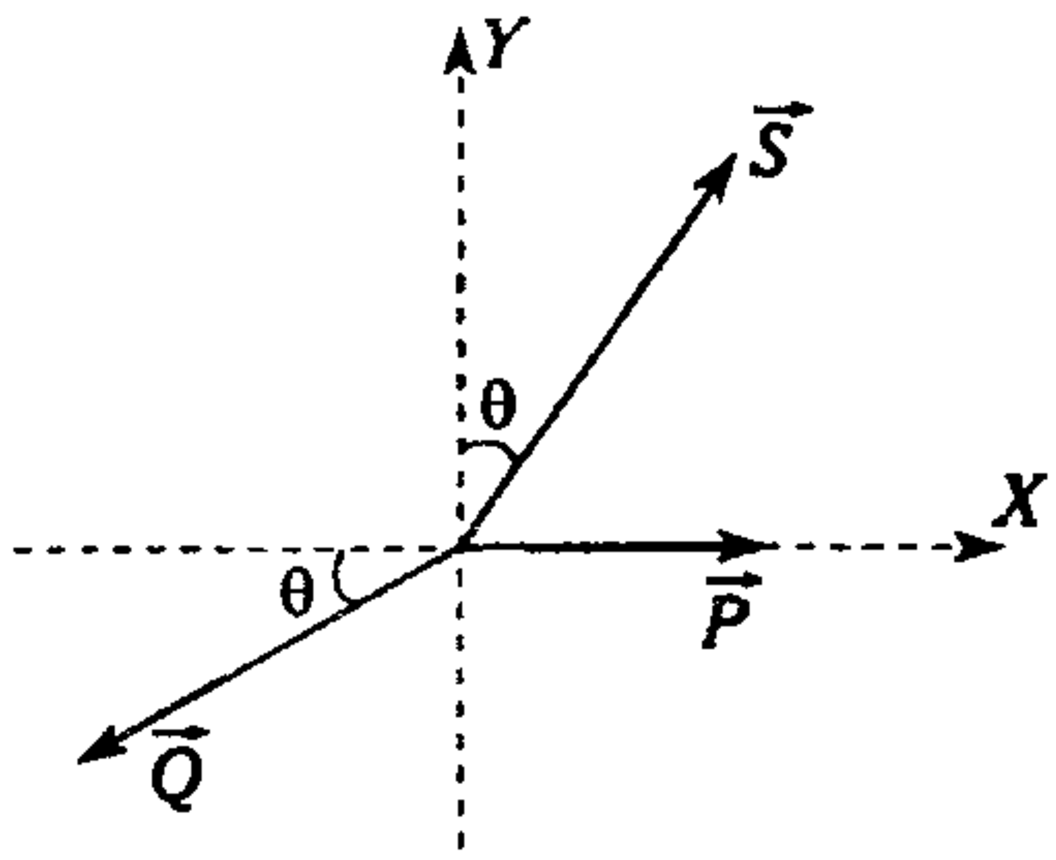
A) 2 u B) 4 u C) $2\sqrt{5}$ u
D) $4\sqrt{5}$ u E) $\sqrt{5}$ u

9. Se muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que verifican $|\vec{A}| = |\vec{B}| = \frac{|\vec{C}|}{2}$. Si la resultante de los tres vectores toma su menor valor, determine el valor del ángulo α y el valor de la resultante.



A) 16° y 24 cm B) 14° y 25 cm
C) 14° y 20 cm
D) 16° y 25 cm E) 14° y 50 cm

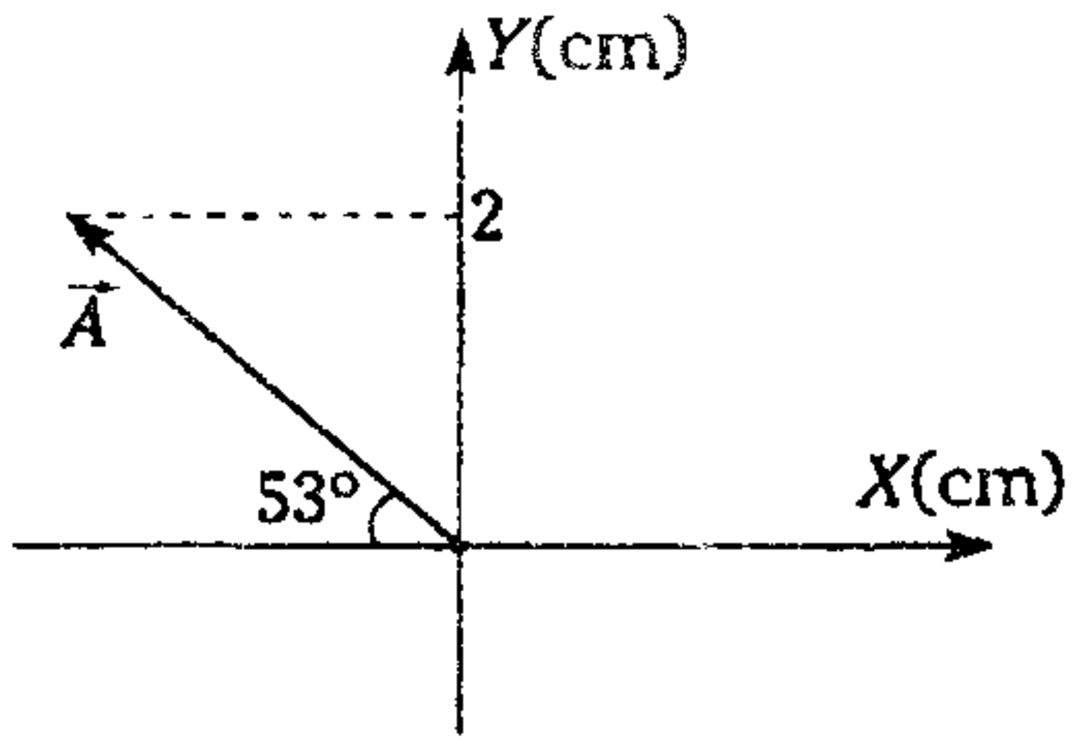
10. En la figura se muestra a tres vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{S}$; donde $|\vec{P}|=3\text{ u}$ y $|\vec{Q}|=2\sqrt{10}\text{ u}$. Determine el valor de m si se verifica $m\vec{P}+3\vec{Q}=n\vec{S}$ (m y n son números reales). Considere tan θ = 1/3



A) $\frac{14}{3}$ B) 5 C) $\frac{11}{3}$

D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{17}{3}$

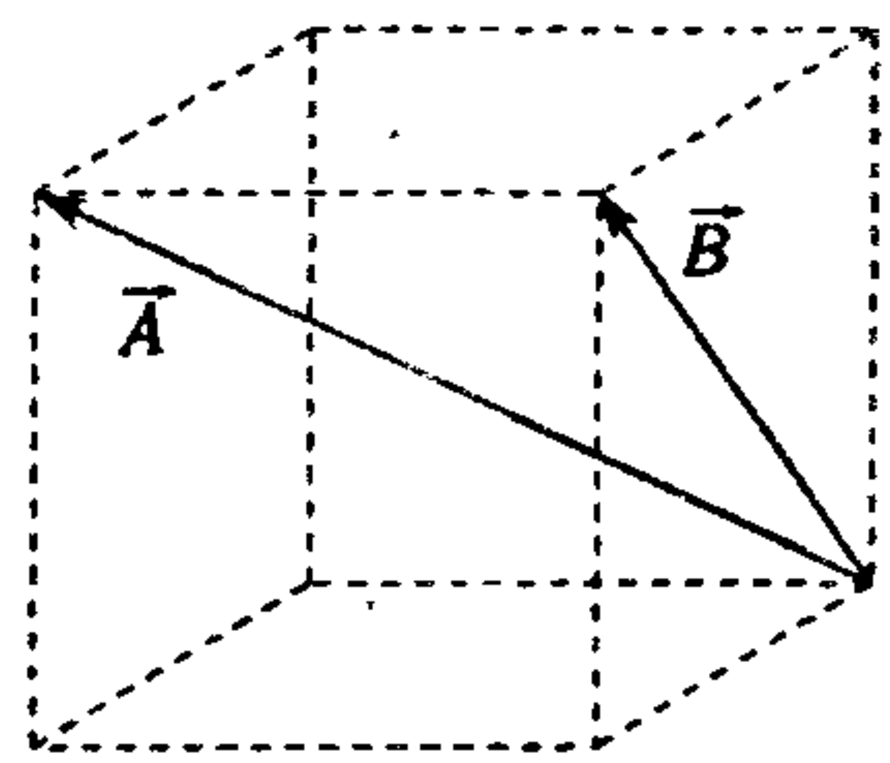
11. Se muestra un vector $\vec{A}$ constante. ¿Cuál es el menor valor de un vector $\vec{B}$ que hay que sumarle al vector $\vec{A}$ tal que la resultante esté sobre el eje X?



A) 1 cm B) 2 cm C) 1,5 cm

D) 2,5 cm E) 1,2 cm

12. En la figura se muestra dos vectores dispuestos sobre un cubo. Determine en qué relación se encuentran los módulos de los vectores $\vec{A}+\vec{B}$ y $\vec{A}-\vec{B}$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

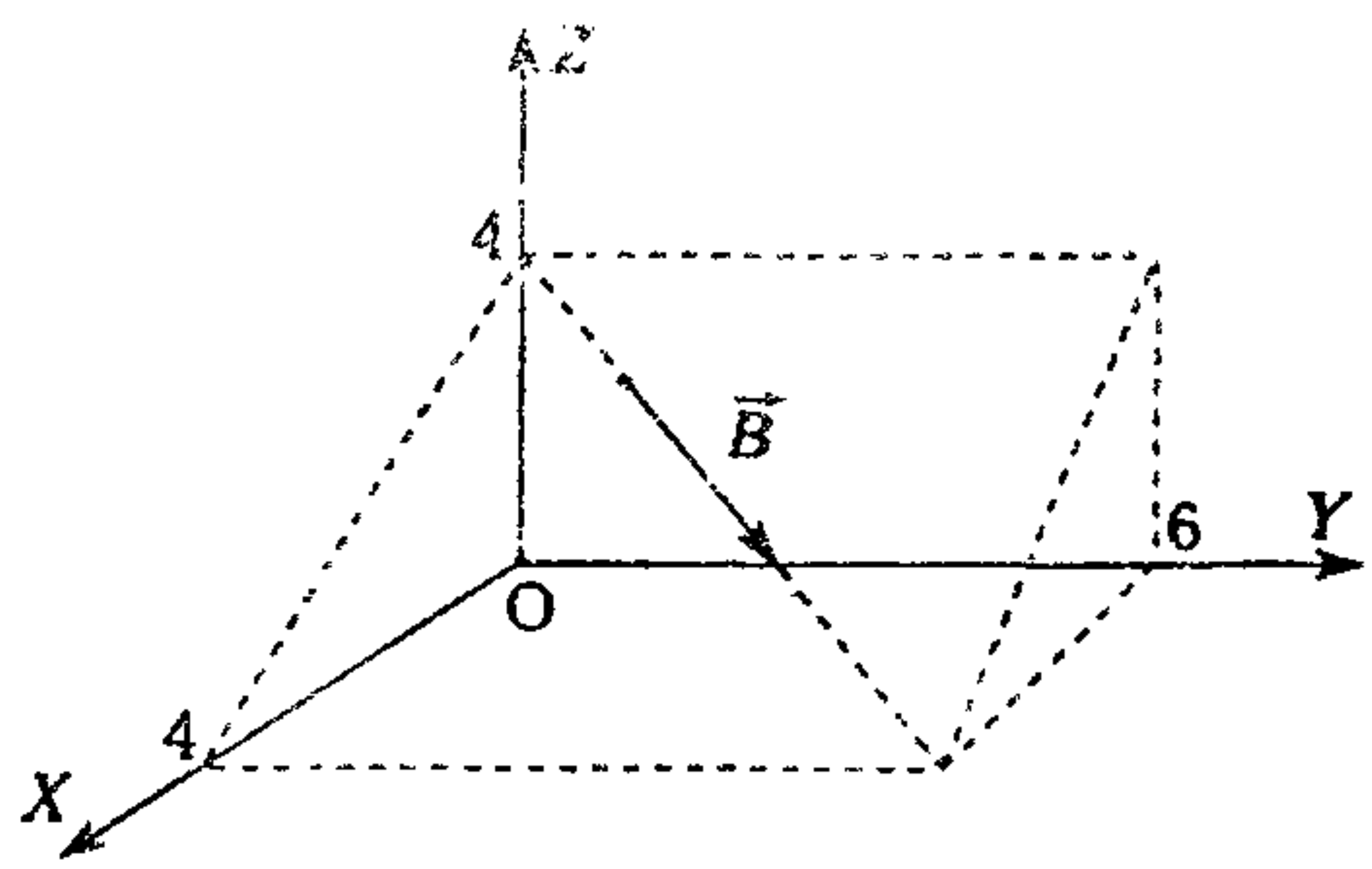
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) 3

13. Se tiene un hexágono regular de lado 4 u. Si de uno de sus vértices se empieza a trazar vectores dirigidos a cada uno de los vértices restantes, ¿qué módulo tiene la resultante del sistema de vectores?

A) 12 u B) 18 u C) 21 u

D) 24 u E) 20 u

14. A partir del grafico, determine el vector $\vec{B}$ si su módulo es $\frac{\sqrt{17}}{2}\text{u}$.

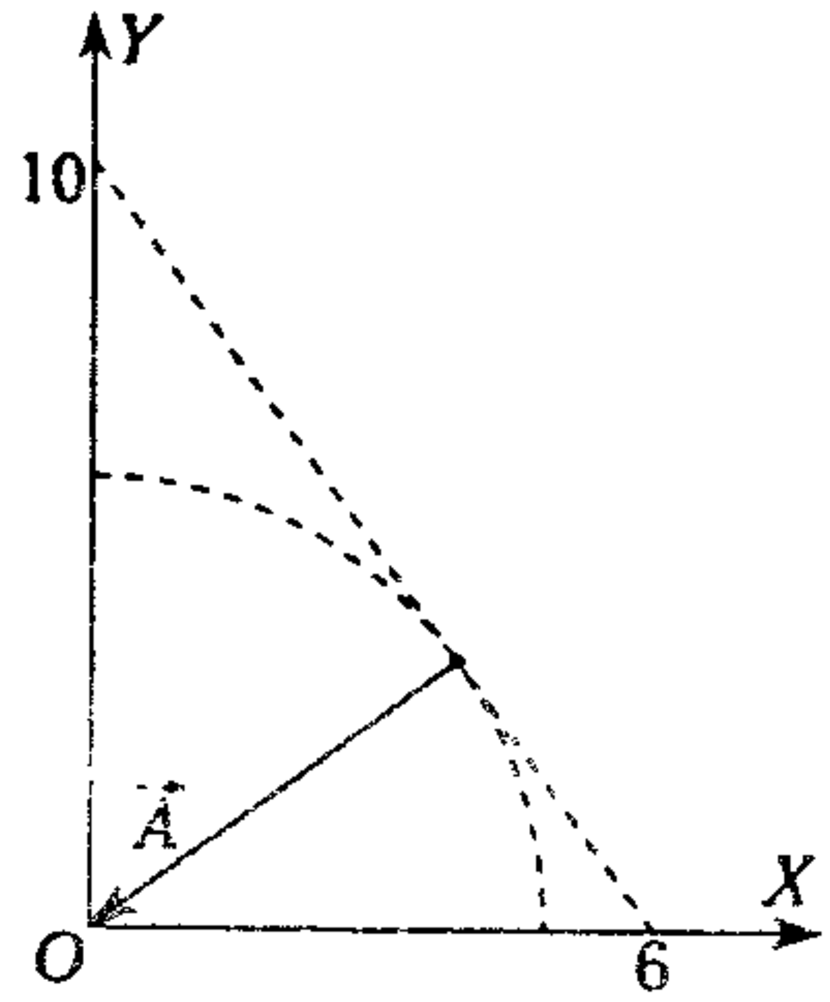


A) $\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ B) $\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-\hat{k}$

C) $3\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

D) $\hat{i}+\hat{j}\quad\hat{k}$ E) $3\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\hat{k}$

15. A partir del gráfico, determine el vector unitario del vector $\vec{A}$.



A) $-\frac{2}{\sqrt{34}}(5\hat{i}+3\hat{j})$

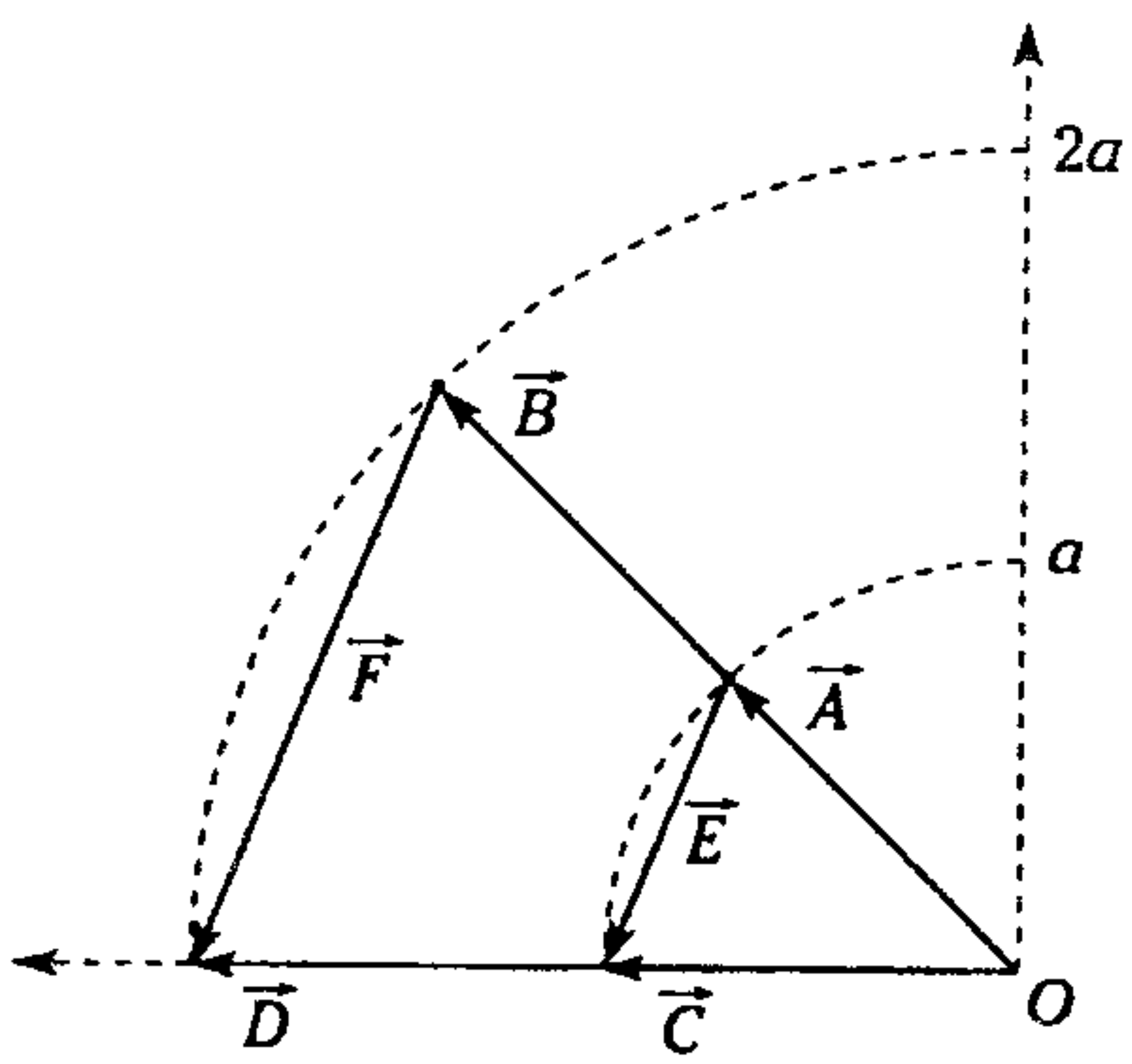
B) $\frac{1}{2\sqrt{34}}(5\hat{i}-3\hat{j})$

C) $-\frac{1}{\sqrt{34}}(5\hat{i}+3\hat{j})$

D) $\frac{2}{\sqrt{34}}(5\hat{i}+3\hat{j})$

E) $-\frac{2}{\sqrt{34}}(-5\hat{i}+2\hat{j})$

16. Se muestra un cuadrante sobre el cual se ha dispuesto un conjunto de vectores, de los cuales $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ tienen un origen común. Señale la alternativa incorrecta.



A) $\vec{B}-\vec{A}+\vec{E}=\vec{C}$

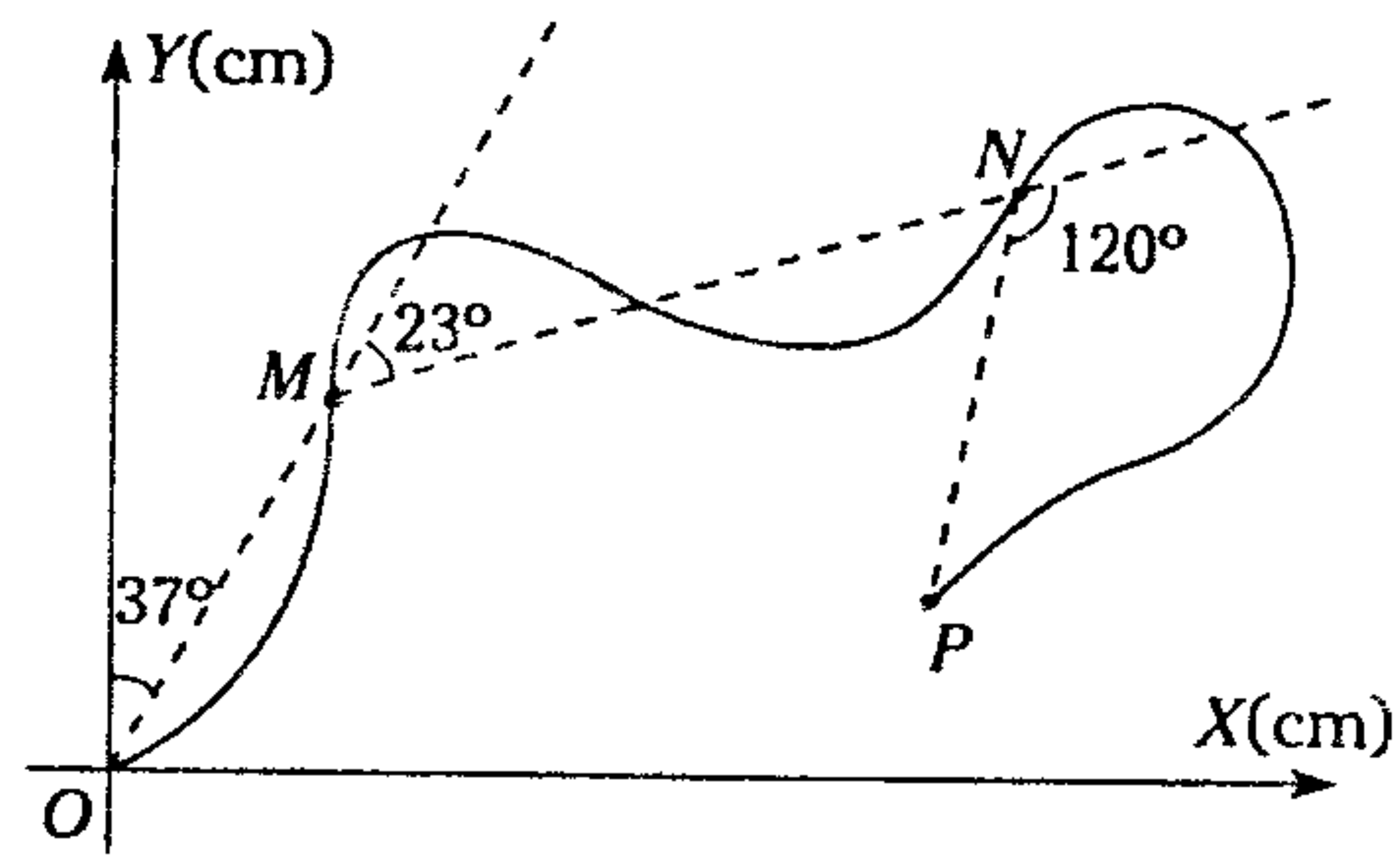
B) $\vec{A}+\vec{E}+\vec{C}+\vec{B}+\vec{F}=2\vec{D}$

C) $\vec{A}+\vec{E}+\vec{D}=-\vec{C}$

D) La componente horizontal de: $\vec{R}=\vec{A}+\vec{E}+\vec{C}+\vec{B}+\vec{D}$ es $4\vec{C}$

E) $\vec{A}+\vec{C}+\vec{E}=\vec{D}$

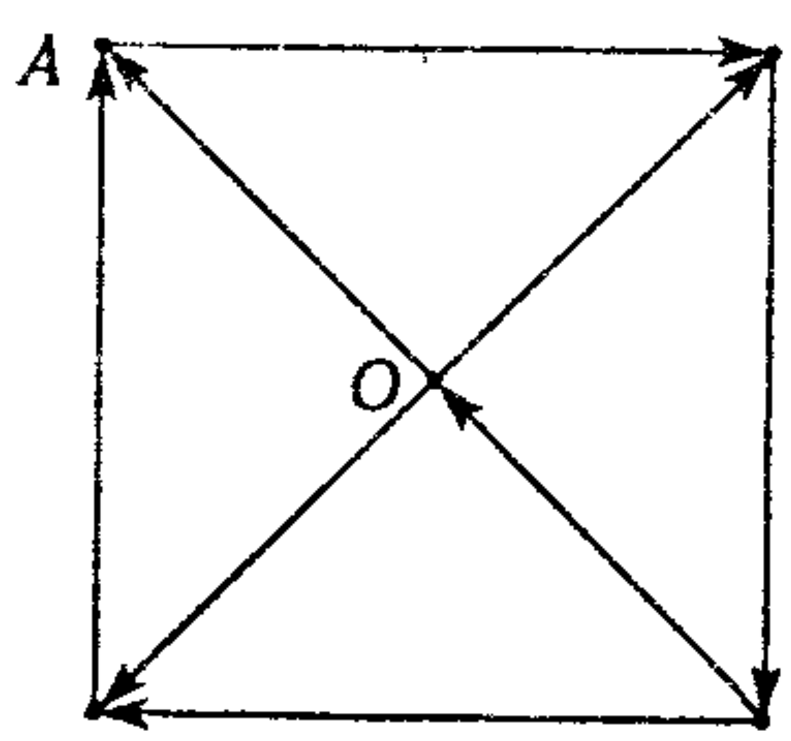
17. Una mosca luego de pasar por el origen de coordenadas sigue el trayecto mostrado para detenerse en P. Si $OM=15$, $MN=8\sqrt{3}$ y $NP=4\sqrt{3}$, determine su desplazamiento de O hacia P.



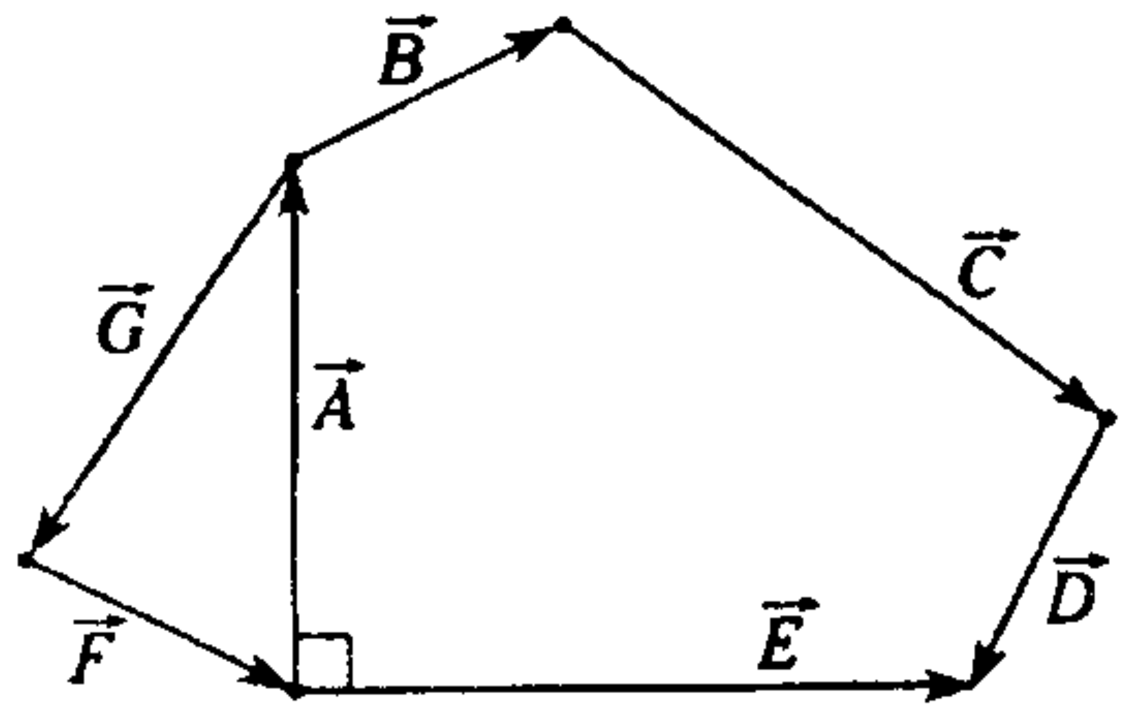
A) (20 ; –12) cm
B) (21 ; 12) cm
C) (–21 ; 9) cm
D) (–20 ; 12) cm
E) (21 ; 9) cm

18. Se muestra un conjunto de vectores dispuesto sobre un cuadrado. Si OA es de $3\sqrt{2}$ u, determine el módulo de la resultante de dichos vectores.

A) 6 u
B) $6\sqrt{2}$ u
C) 9 u
D) $9\sqrt{2}$ u
E) 12 u

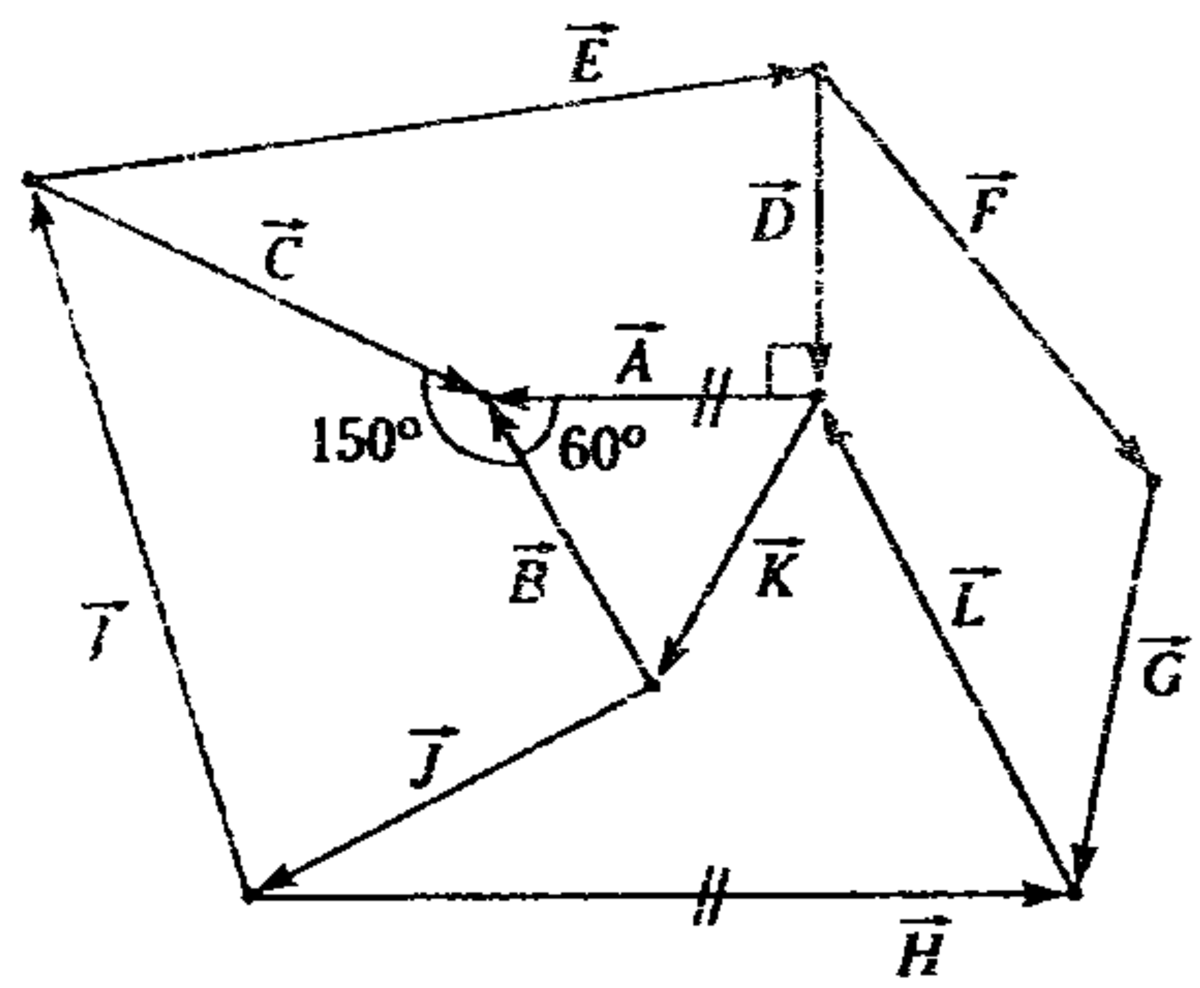


19. A partir del gráfico, determine el módulo de la resultante del sistema de vectores mostrados, siendo $|\vec{A}|=5\text{ u}$ y $|\vec{E}|=6\text{ u}$.



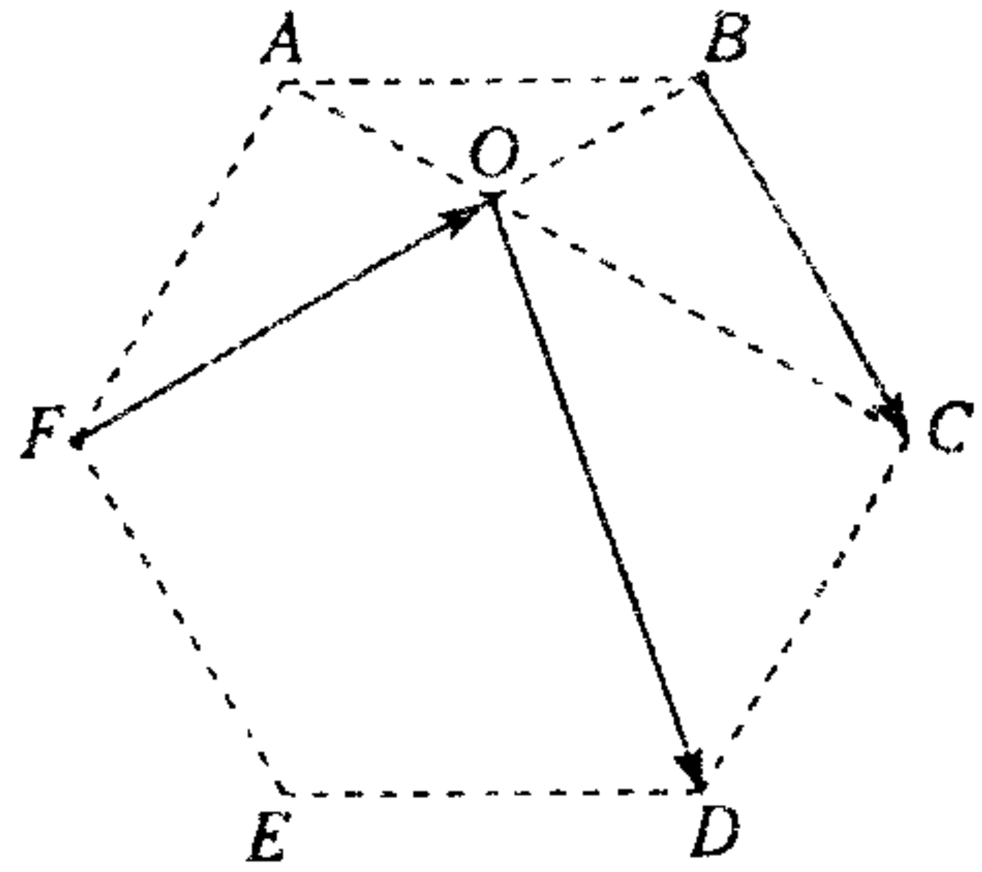
A) 12 u B) 13 u C) 14 u
D) 15 u E) 18 u

20. Se muestra un sistema de vectores que verifican que $|\vec{A}|=|\vec{B}|=|\vec{D}|=6\text{ u}$; $|\vec{C}|=6\sqrt{3}\text{ u}$ y $|\vec{H}|=8\text{ u}$. Determine el módulo de la resultante.



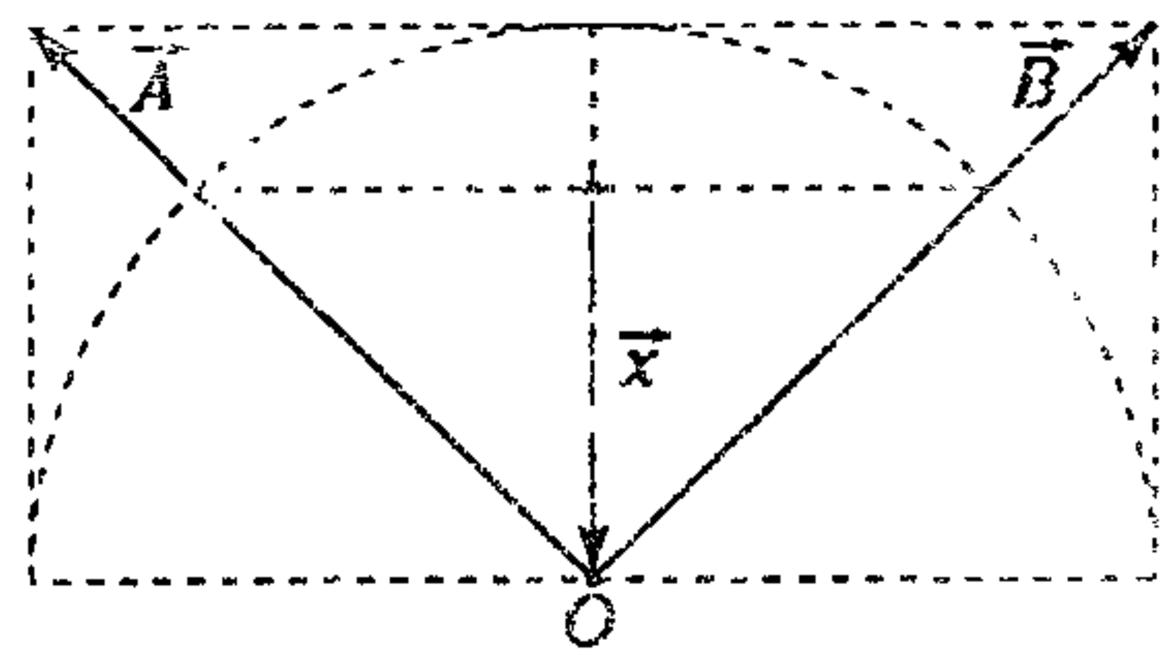
A) 5 u B) $5\sqrt{3}$ u
C) 10 u
D) $10\sqrt{3}$ u E) $6\sqrt{3}$ u

21. Se muestra un hexágono regular *ABCDEF* de lado 24 u. Determine el módulo de $\overrightarrow{FO}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OD}$.



A) 12 u B) 18 u
C) $40\sqrt{3}$ u
D) $30\sqrt{3}$ u E) 36 u

22. A partir del gráfico exprese al vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{A}+\vec{B})$

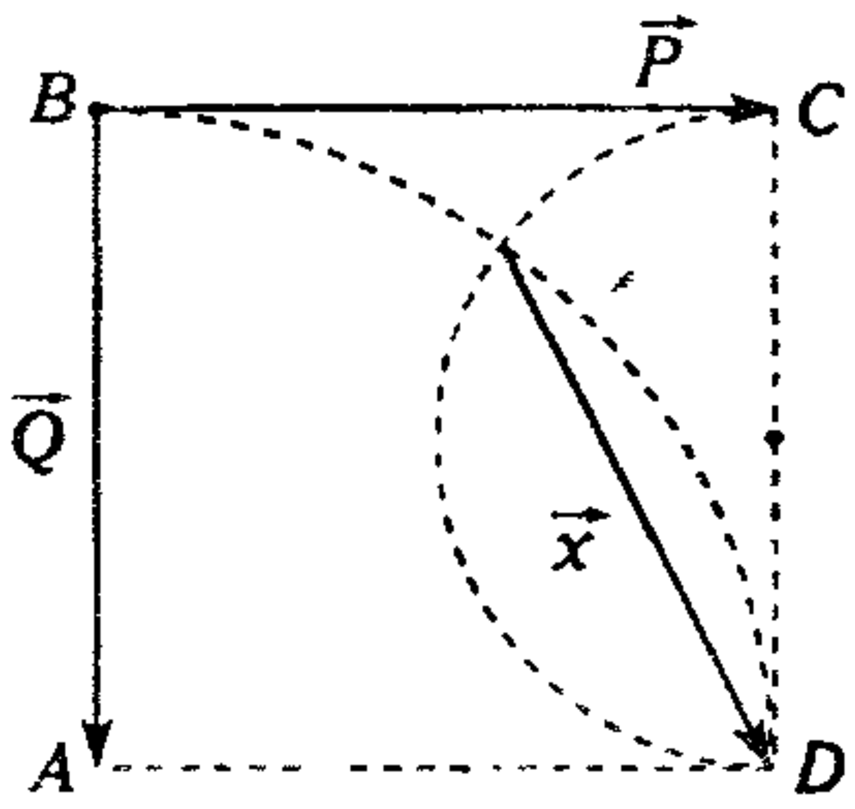
B) $-\frac{\sqrt{2}}{6}(\vec{A}+\vec{B})$

C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{A}+\vec{B})$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\vec{A}+\vec{B})$

E) $-\frac{3}{4}\sqrt{2}(\vec{A}+\vec{B})$

23. En la figura, ABCD es un cuadrado, exprese al vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$.



A) $\frac{2}{5}(\vec{P}+2\vec{Q})$

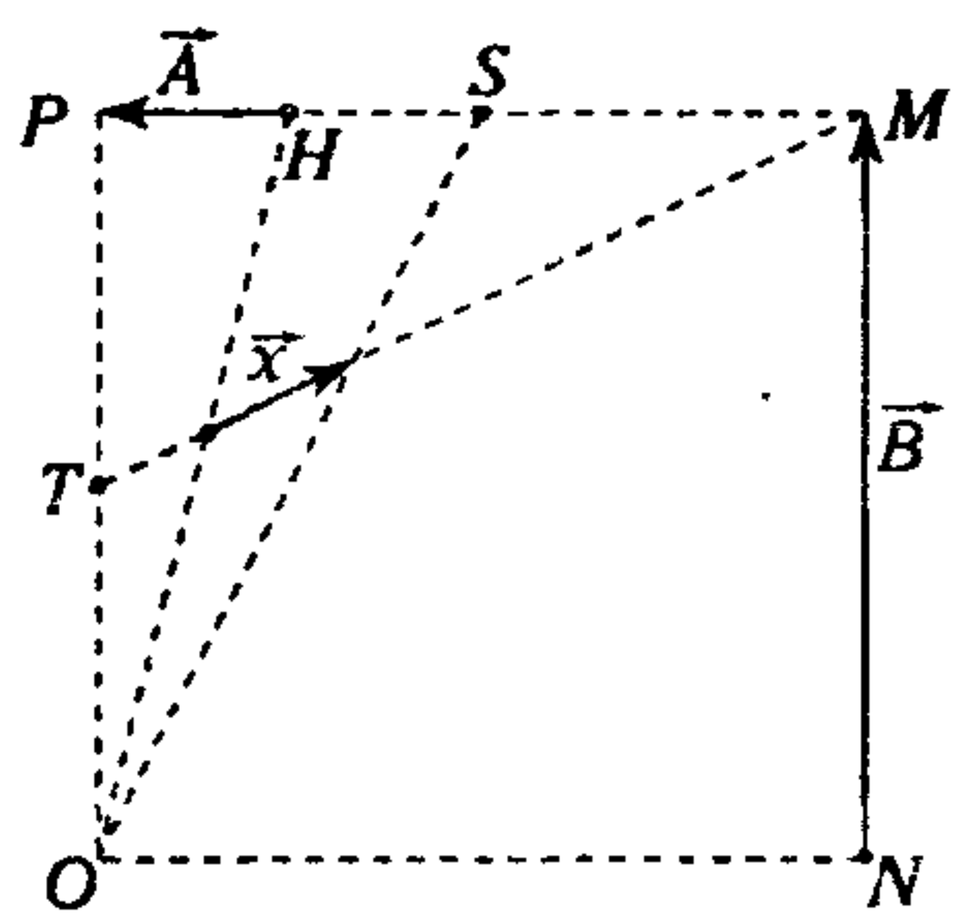
B) $\frac{1}{5}(\vec{P}+\vec{Q})$

C) $\frac{5}{2}(\vec{P}-3\vec{Q})$

D) $\frac{2}{5}(\vec{P}-2\vec{Q})$

E) $\frac{3}{5}(2\vec{P}+\vec{Q})$

24. En el gráfico, $PMNO$ es un cuadrado, donde S, T y H son puntos medios de PM, PO y PS, respectivamente. Exprese al vector $\vec{x}$ en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



A) $\frac{4}{7}(\vec{B}-2\vec{A})$

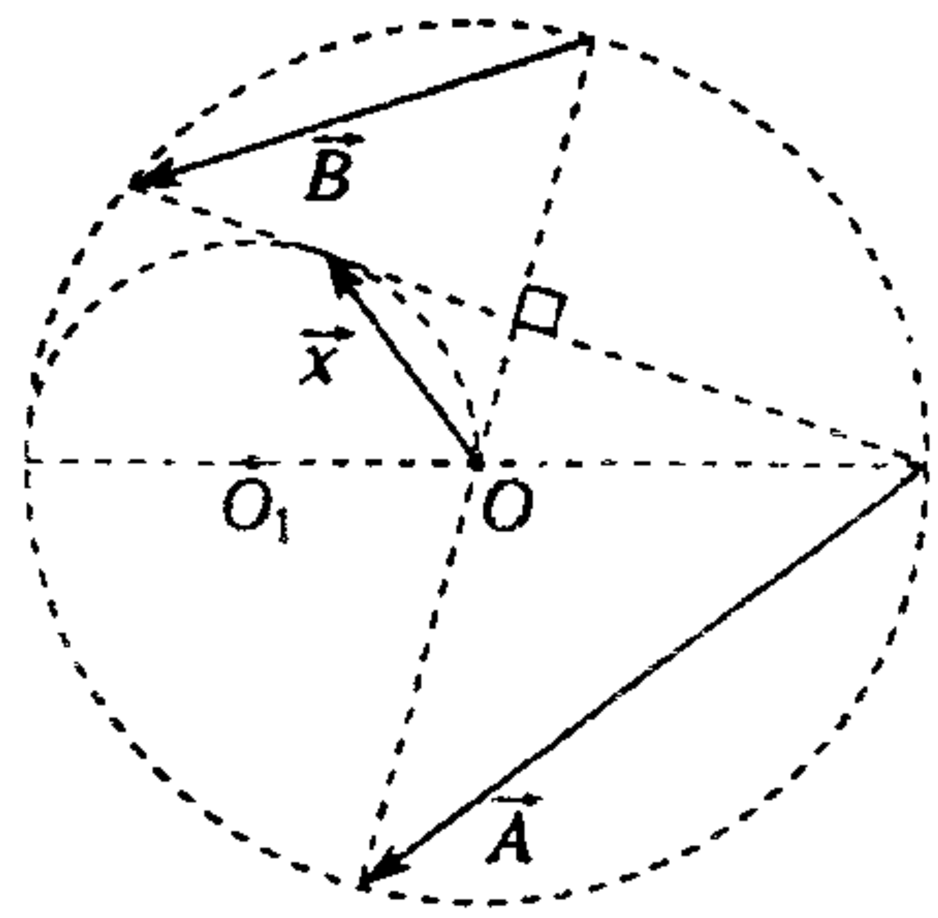
B) $\frac{4}{21}\left(\frac{\vec{B}}{2}-4\vec{A}\right)$

C) $\frac{2}{21}(2\vec{B}-3\vec{A})$

D) $\frac{2}{7}(\vec{B}-3\vec{A})$

E) $\frac{1}{21}(\vec{B}-4\vec{A})$

25. A partir del gráfico mostrado, al vector $\vec{x}$ se le puede expresar en función de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ según $\vec{x}=\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}$. Determine $\frac{\alpha}{\beta}$. Considere O y O_1 los centros geométricos de las circunferencias.



A) $\frac{1}{3}$

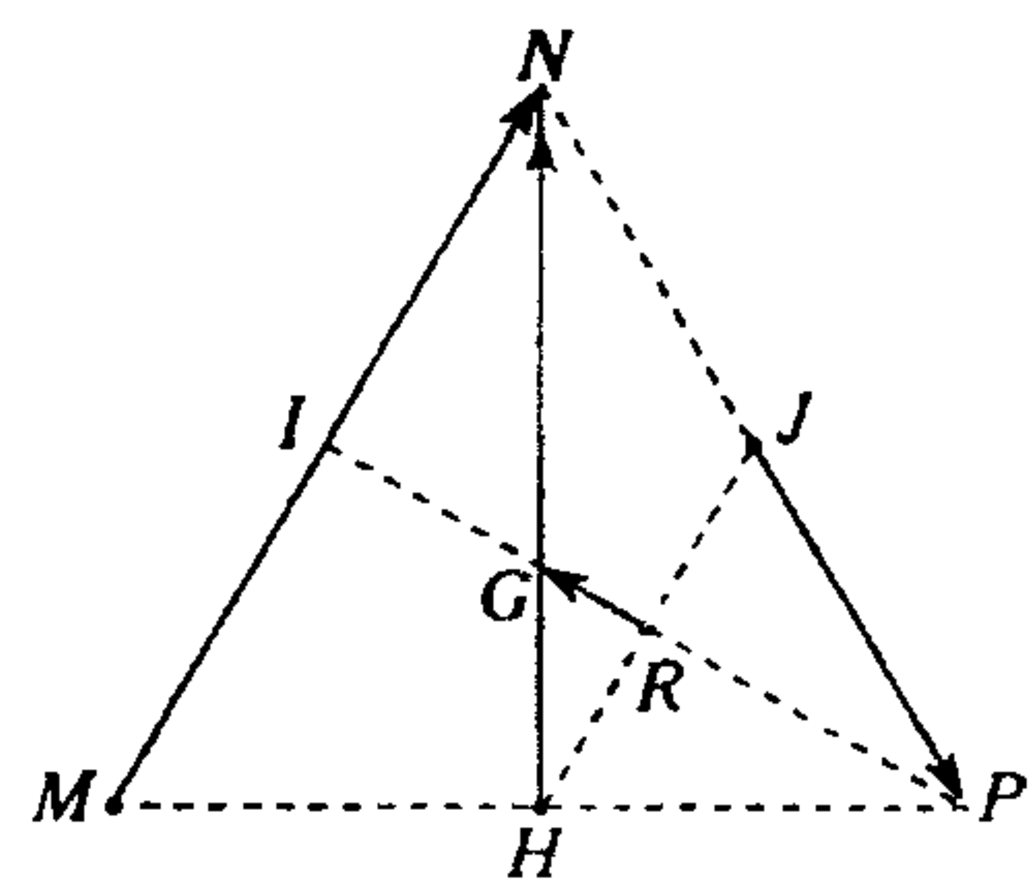
B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $-\frac{2}{3}$

E) -3

26. Se muestra un triángulo equilátero MNP donde H, I y J son puntos medios de MP, MN y NP, respectivamente. Si se verifica $\overrightarrow{HN}=m\overrightarrow{MN}+n\overrightarrow{JP}+\overrightarrow{RG}$ determine $\frac{m}{n}$.



A) -1

B) $-\frac{1}{2}$

C) $-\frac{1}{4}$

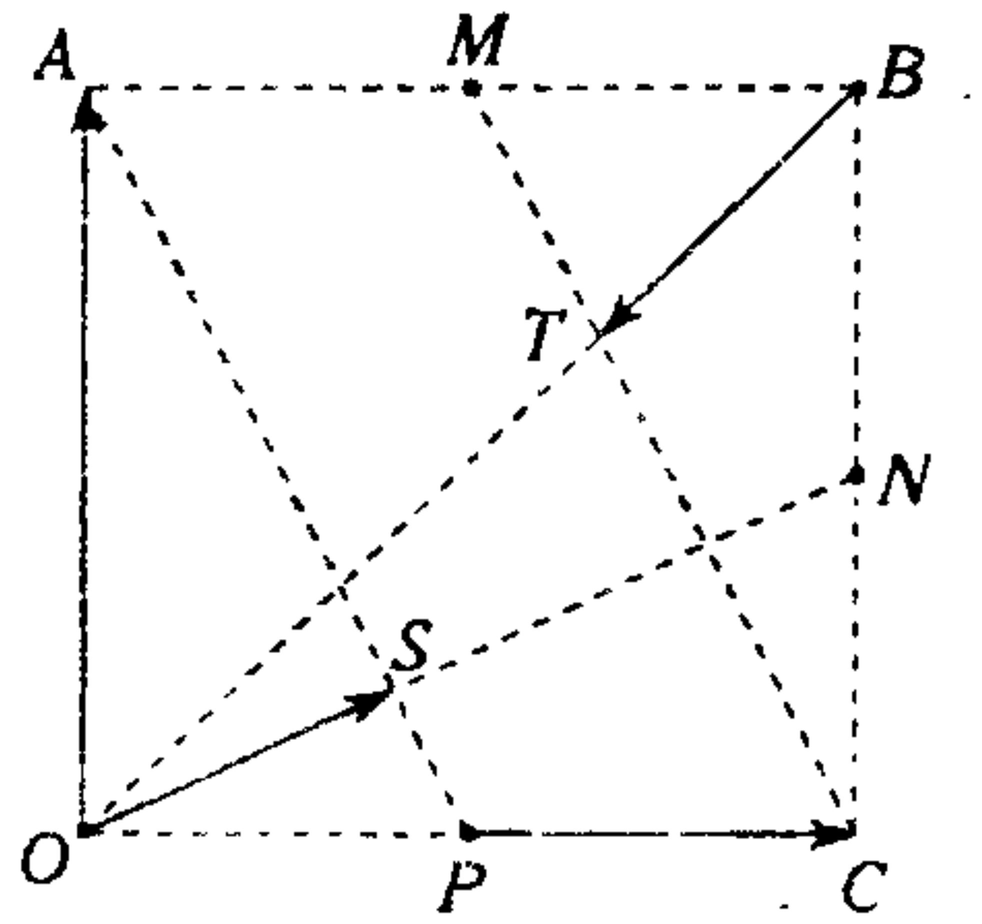
D) $-\frac{7}{8}$

E) $-\frac{(4-\sqrt{3})}{6}$

27. La figura $OABC$ es un cuadrado, donde M, N y P son puntos medios de AB, BC y OC, respectivamente. Si se verifica

$$\overrightarrow{BT}+\overrightarrow{OS}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{PC}$$

determine $\frac{\beta}{\alpha}$.



A) 1 B) 2 C) -1

D) -2 E) $-\frac{1}{2}$

28. Se tiene dos vectores concurrentes: $\vec{A}=2\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$ y $\vec{B}=2\hat{j}+8\hat{k}$. Determine un vector unitario perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

A) $\frac{3}{\sqrt{293}}(15\hat{i}-7\hat{j}+\hat{k})$

B) $\frac{1}{\sqrt{297}}(17\hat{i}+8\hat{j}+2\hat{k})$

C) $-\frac{2}{\sqrt{293}}(13\hat{i}-8\hat{j}+\hat{k})$

D) $-\frac{1}{\sqrt{293}}(15\hat{i}+8\hat{j}-2\hat{k})$

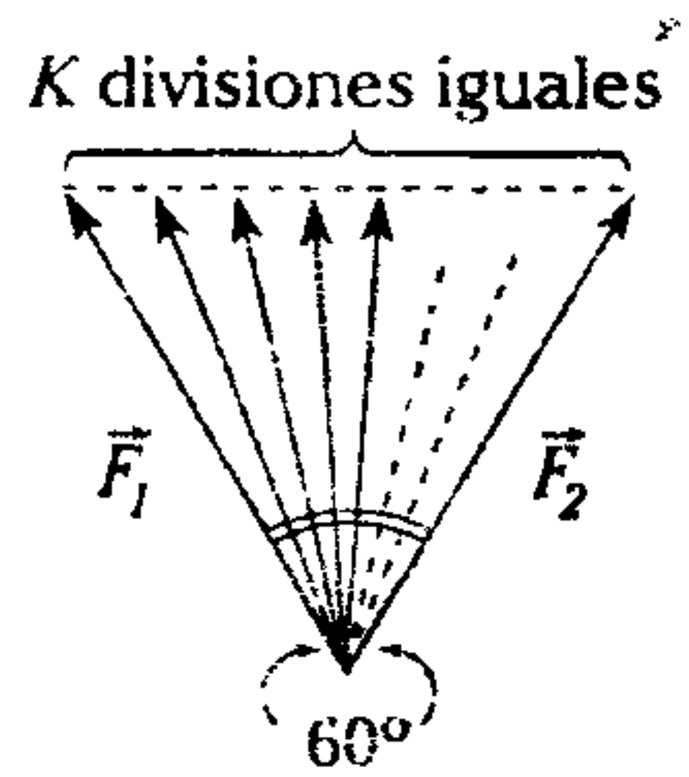
E) $-\frac{4}{\sqrt{297}}(13\hat{i}-7\hat{j}-2\hat{k})$

29. En el sistema de coordenadas XYZ se tiene tres puntos $P(3;\,4;\,2)$, $Q(2;\,-4;\,0)$ y $R(-6;\,-1;\,3)$. Determine el área del triángulo formado por dichos puntos.

A) $3\sqrt{29}\ u^2$ B) $6\sqrt{19}\ u^2$ C) $5\sqrt{19}\ u^2$

D) $6\sqrt{29}\ u^2$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{5174}\ u^2$

30. Halle el módulo de la fuerza resultante; si $F_1=30$ N; $F_2=18$ N, en el sistema de vectores mostrado.



A) $7(K+1)$ N B) $14(K+1)$ N C) $21(K+1)$ N

D) $12(K+1)$ N E) $28(K+1)$ N

31. Calcule el área total del tetraedro cuyos vértices están en los puntos
A (2; −1; 1) , B (5; 5; 4) ,
C (3; 2; −1) y D (4;1; 3)

A) 9 u^3 B) 6 u^3 C) 5 u^3
D) 4 u^3 E) 3 u^3

32. El volumen de un tetraedro es 5 u^3 si tres de cuyos vértices son los puntos: A (2; 1; −1), B (3; 0; 1), C (2; −1; 3). Halle las coordenadas del cuarto vértice D si se sabe que está en el eje Y.

A) (0; 8; 2) B) (0; 8; −1) C) −2; 6; 5
D) (1; −7; 0) E) (0; 8; 0)

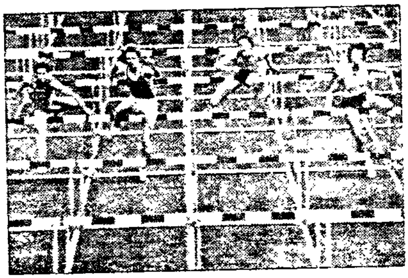
CLAVES

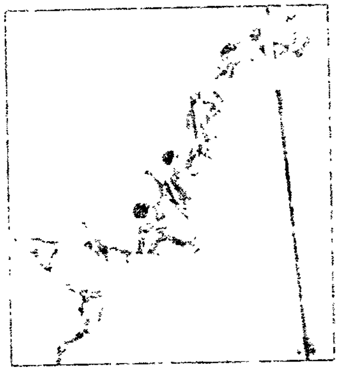
1	C	11	B	21	C
2	E	12	E	22	D
3	C	13	D	23	A
4	A	14	B	24	B
5	C	15	C	25	D
6	B	16	D	26	E
7	B	17	B	27	C
8	C	18	B	28	D
9	B	19	B	29	E
10	D	20	C	30	C
31	E	32	E		

CAPÍTULO III

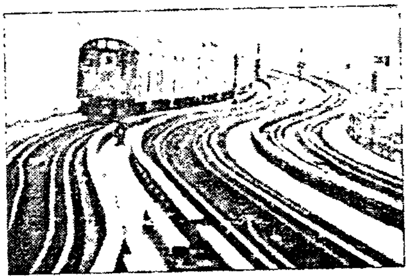
Cinemática

(a)





(b)



(c)

Fig. (a, b, c) Nos muestran algunos de los campos en donde la cinemática encuentra importantes aplicaciones. El deporte para el control de los tiempos; la técnica, para sincronizar los mecanismos; en el transporte, para el diseño de tendido de rieles.

LECTURA

¿CUÁNDO NOS MOVEMOS MÁS DE PRISA ALREDEDOR DEL SOL, DE DÍA O DE NOCHE?

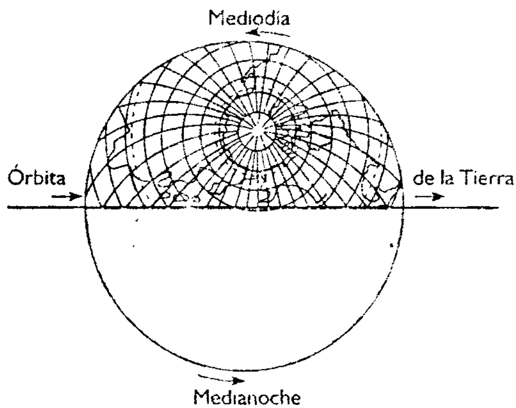
En una ocasión, los periódicos parisinos publicaron un anuncio según el cual, por 25 céntimos, se ofrecía dar a conocer un procedimiento de viajar, barato y sin el menor cansancio. No faltaron crédulos que enviaron sus 25 céntimos, cada uno de ellos recibió por correo una carta en la que se decía:

Ciudadano, quédese usted en su casa tranquilamente y recuerde que la Tierra da vueltas. Encontrándose en el paralelo de París, es decir, en el 49, usted recorre cada día 25 000 km. Si gusta disfrutar vistas pintorescas, abra los visillos de su ventana y contemple el cuadro conmovedor del firmamento.

El autor del anuncio fue juzgado por estafa, y cuando le leyeron la sentencia y pagó la multa correspondiente, dicen que adoptó una postura dramática y repitió solemnemente la célebre frase de Galileo:

-¡Eppur, si muove! (¡Y sin embargo, se mueve!)

En cierto sentido, el acusado llevaba razón, ya que cada habitante de la esfera terrestre, no sólo viaja al girar ésta alrededor de su eje, sino también, y con mayor velocidad, al realizar la Tierra su movimiento de traslación alrededor del Sol. Nuestro planeta, con todos sus habitantes recorre en el espacio 30 km por segundo, además de girar alrededor de su eje.



En el hemisferio de la Tierra que cuando es de noche la gente se mueve más de prisa que cuando es de día.

A propósito de esto se puede hacer una pregunta interesante: ¿Cuándo nos movemos más de prisa alrededor del Sol, de día o de noche?

Esta pregunta puede parecer extraña, puesto que, en todo momento, mientras en un lado de la Tierra es de día, en el otro es de noche. Entonces, ¿qué sentido puede tener dicha pregunta? al parecer, ninguno.

Sin embargo, no es así. El quid está en que lo que se pregunta no es cuándo la Tierra en su conjunto se traslada más de prisa, sino cuándo nos trasladamos mas de prisa entre las estrellas nosotros, es decir sus habitantes. Así formulada no se trata de una pregunta sin sentido, porque dentro del sistema solar nosotros tenemos dos movimientos: uno de traslación alrededor del Sol y otro, simúltaneo, de rotación alrededor del eje de la Tierra. Estos dos movimientos se combinan, pero cuando nos encontramos en el hemisferio en que es de día, el resultado de esta combinación es diferente del que se obtiene cuando estamos en el hemisferio que está de noche y se comprenderá que a medianoche la velocidad de rotación se suma a la de traslación de la Tierra, mientras que a mediodía, al revés, se resta de ella. Es decir, a medianoche nos movemos, en el sistema solar, más de prisa que a mediodía.

Como quiera que los puntos situados en el Ecuador recorren cerca de medio kilómetro por segundo, la diferencia entra las velocidades correspondientes a la medianoche y al mediodía en la zona ecuatorial llega a ser de todo un kilómetro por segundo.

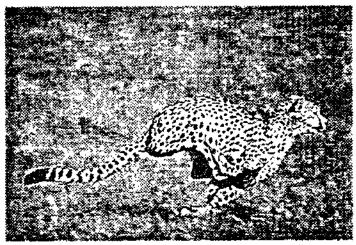
FUENTE: Física Recreativa. AUTOR: Y. Perelman. Pág.: 20 Tomo I

Cinemática

OBJETIVOS

- Establecer lo que viene a ser el movimiento mecánico y su relatividad.
- Describir matemáticamente el movimiento mecánico de los objetos sin considerar las causas que lo originan o modifican.
- Establecer los elementos del movimiento mecánico y su relación en diversas aplicaciones.
- Conocer las magnitudes desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Analizar el movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente variado.

INTRODUCCIÓN



El guepardo, el animal más rápido en campo abierto sobre la faz de la Tierra, en tramos cortos es capaz de alcanzar hasta 110 km/h, lo que equivale a 30 m/s (aprox.).

Muchas veces nuestro trabajo, estudio o quehaceres cotidianos nos obliga a viajar a distintos lugares. En estos casos debemos conocer la ruta o **trayectoria** que debemos seguir, en caso contrario, averiguamos la **dirección**, luego consideramos el **tiempo** que tardaríamos en llegar, si estamos muy apurados tomamos un medio de transporte para viajar más rápido. En estas actividades cotidianas se distingue que tenemos noción de algunos conceptos relacionados con el movimiento tales como trayectoria, dirección, tiempo, rapidez y otros, como el desplazamiento, velocidad y aceleración. Todos estos conceptos sirven para describir adecuadamente los movimientos mecánicos de muchos cuerpos, no solo de los medios de transporte como los automóviles, aviones y barcos, sino también de la Luna alrededor de la Tierra, de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento de los cometas e inclusive en ciertos casos, el movimiento de partículas como las moléculas, los iones, los electrones y otras partículas subatómicas. La descripción de los movimientos demanda clasificarlos según su trayectoria, velocidad o aceleración y en este proceso se establecen leyes y relaciones matemáticas (geométricas y algebraicas) que permiten saber cómo transcurrirá un determinado movimiento. Por ejemplo, al conocer las trayectorias del Sol, la Tierra y la Luna es posible predecir cada cuánto tiempo ocurrirá un eclipse solar o lunar. Estos conceptos, que sirven para describir el movimiento mecánico y las leyes que los rigen, forman parte de la Cinemática.

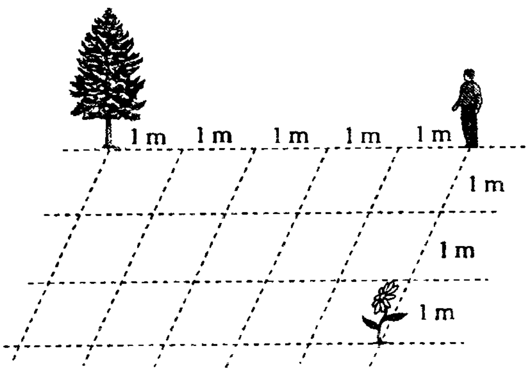
Con la Cinemática es posible describir matemáticamente casi todos los movimientos mecánicos sin recurrir a las causas que determinan cada tipo concreto de movimiento. En este sentido, proporciona una construcción teórica simplemente descriptiva, por ello también se le denomina **Geometría del Movimiento**.

La Cinemática Clásica, que es lo que vamos a discutir, se aplica en los casos donde la rapidez de los cuerpos es pequeña con respecto a la de la luz, que es del orden de 300 000 km/s y en el caso de velocidades más cercanas a la rapidez de la luz, hay que recurrir a la Cinemática Relativista. En este texto nos ocuparemos solo de la Cinemática Clásica. Como veremos, los movimientos mecánicos son muy variados, pueden ser simples o complejos. En este capítulo comenzaremos con el estudio de algunas magnitudes que nos permitan describir el movimiento mecánico de los cuerpos, tales como la posición, la velocidad y la aceleración. Luego aplicaremos estos conceptos para examinar los movimientos más simples como el movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente variado.

MOVIMIENTO MECÁNICO Y SUS ELEMENTOS

POSICIÓN $(\vec{r})$

Examinemos lo que se aprecia en el siguiente gráfico

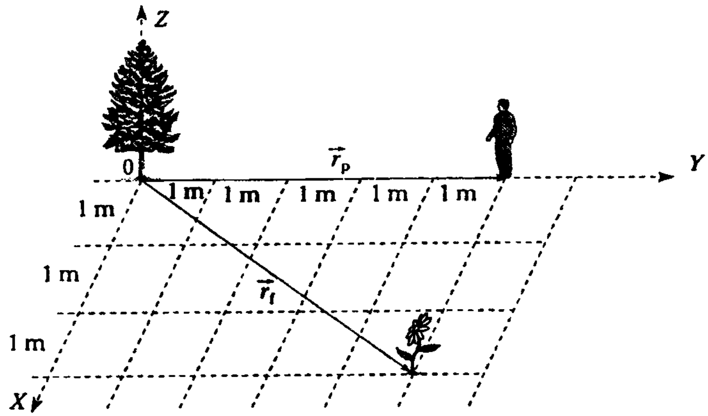


Si queremos estudiar lo que acontece con la persona, será necesario entonces definir su ubicación en el campo. ¿Cómo definimos la posición de la persona? Podemos establecer que su ubicación depende de una referencia, así también podemos afirmar que **la persona está a 5 m del árbol o esta a 3 m de la flor**. Cualquiera de estas proposiciones es justa y correcta.

En el primer caso, la referencia o lugar desde donde se indica la ubicación del hombre, es el árbol y, en el segundo caso, la referencia es la flor.

La información anterior no es suficiente para definir la posición de la persona, porque la persona puede estar a 5 m a la derecha o a la izquierda del árbol; así como también puede estar a 3 m delante o detrás de la flor. Por lo tanto, no basta conocer la referencia y cierta longitud, es necesario también definir una dirección. Para esto se requiere asociar al cuerpo de referencia un sistema de coordenadas y, a partir de este se podrá indicar la posición de cualquier objeto en el espacio.

Asociando al árbol un sistema de coordenadas, tendríamos lo siguiente



La **posición** de la persona respecto al árbol queda definida como

$$\vec{r}_p = (0;5;0)\,\text{m} = 5\hat{j}\ \text{m}$$

La **posición** de la flor respecto al árbol queda definida como

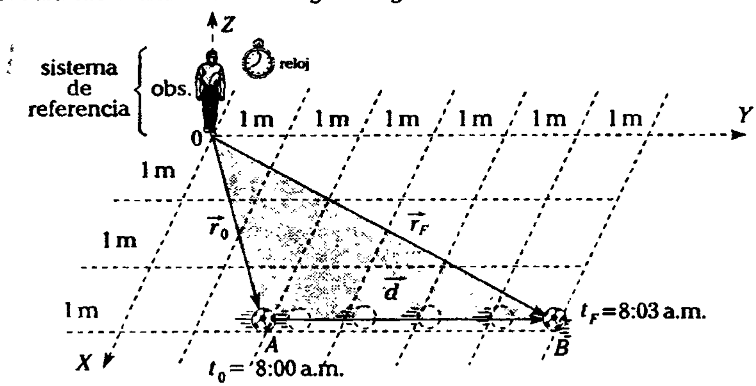
$$\vec{r}_p = (3;5;0)\,\text{m} = \left(3\hat{i} + 5\hat{j}\right)\text{m}$$

Como se puede observar, la posición es una magnitud física vectorial que define la ubicación de un objeto en un instante cualquiera, sobre un sistema de coordenadas.

SISTEMA DE REFERENCIA

Para definir la posición de un objeto en un instante cualquiera, es necesario definir previamente un sistema de coordenadas y un medidor del tiempo (cronómetro o reloj), todo ello asociado a un cuerpo de referencia. A ese conjunto formado por el sistema de coordenadas, reloj y cuerpo de referencia se denomina **sistema de referencia** (S.R.)

Con respecto a un sistema de referencia se puede afirmar o no, si un cuerpo experimenta movimiento. Para ello examinaremos el siguiente gráfico



Para la persona, el balón realiza un cambio continuo de posición porque el balón, en el instante t_0 = 8:00 a.m., está en la posición $\vec{r}_0=(3;2;0)\,\text{m}=(3\hat{i}+2\hat{j})\text{m}$ y a medida que transcurre el tiempo va ocupando otras posiciones tal que en el instante t_F = 8:03 a.m. su posición es $\vec{r}_F=(3;6;0)\text{m}$. Esto significa para el observador que el balón experimenta un movimiento mecánico.

¿Qué es el movimiento mecánico?

Es aquel fenómeno físico que consiste en el cambio continuo de posición (en el espacio y en el tiempo) que experimenta un cuerpo respecto a un sistema de referencia.

Para describir el movimiento mecánico utilizaremos sus propios elementos, lo cual nos permitirá agilizar nuestro análisis del movimiento mecánico realizado por un cuerpo.

Móvil

Viene a ser el cuerpo que experimenta movimiento mecánico respecto al sistema de referencia. Por ejemplo, el balón.

Trayectoria

Es la línea que resulta de unir todos los puntos por donde pasa el móvil; en consecuencia, puede ser rectilínea, circunferencial, elíptica, parabólica, helicoidal, etc.

Por ejemplo, el balón al moverse describe una línea recta $\overline{AB}$. Entonces, está realizando un movimiento rectilíneo.

Recorrido (e)

Es la medida de la longitud de la trayectoria descrita por el móvil.

$$\boxed{e = \text{longitud de la trayectoria}}$$

Unidad: metro (m); también en cm o km

En el gráfico anterior, el balón recorrió la longitud AB de la trayectoria rectilínea y afirmaremos que $e = AB = 3$ m.

Desplazamiento ($\vec{d}$)

Es una magnitud física vectorial que determina el cambio de posición que experimenta el móvil. Gráficamente lo representamos mediante un segmento de recta dirigido desde la posición inicial a la posición final.

$$\boxed{\vec{d}=\Delta\vec{r}=\vec{r}_F-\vec{r}_0}$$

En el gráfico anterior: $\vec{d}=d_{AB}\,\hat{j}=3\hat{j}$ m .

También este resultado se obtiene a partir del triángulo vectorial sombreado, donde

$$\vec{r}_0+\vec{d}=\vec{r}_F\,.$$

$$\vec{d}=\vec{r}_F-\vec{r}_0=(3;6;0)-(3;2;0)$$

$$\Rightarrow\ \vec{d}=(0;4;0)\text{m}=4\hat{j}\text{ m}$$

Distancia (d)

Es el módulo del desplazamiento.

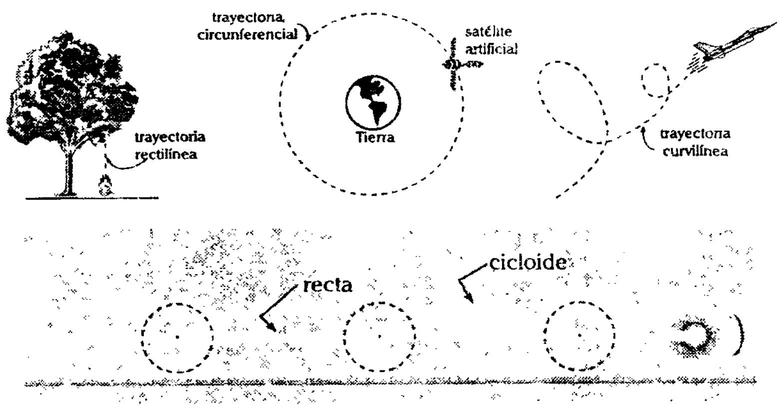
$$\boxed{d=|\vec{d}|}$$

En el ejemplo anterior: $d = AB = 4$ m

Intervalo de tiempo (Δt)

Determina la duración del cambio de posición o la duración de un evento físico. Para el ejemplo

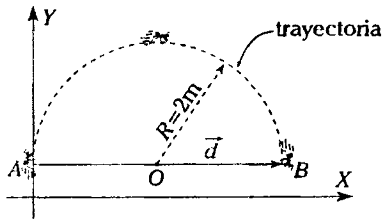
$\Delta t = t_F - t_0 = 3$ min



Clasificación del movimiento en función a la trayectoria. La gráfica muestra la trayectoria del centro y periferie de un disco que rueda sin deslizarse.

En el ejemplo planteado ¿qué particularidades hemos podido notar? Al ser la trayectoria rectilínea, el recorrido y la distancia son iguales en valor, 4 m.

Sin embargo ¿el recorrido y la distancia siempre podrán ser iguales en valor? Examinemos un caso donde la trayectoria es una semicircunferencia de 2 m de radio.



En la figura, se describe la trayectoria del insecto, moviéndose de A hacia B. ¿Cuánto es su recorrido?, ¿cuál es su desplazamiento? y ¿qué distancia avanzó?

Según la figura

- El recorrido (e) es la medida de la longitud de la semicircunferencia descrita.

$$e_{\left(\substack{\text{longitud de media}\\ \text{circunferencia}}\right)} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = \pi(2)$$

$$\Rightarrow \quad e = 2\pi = 6{,}28\text{ m}$$

- El desplazamiento $(\vec{d})$ es el segmento dirigido que une la posición inicial (A) con la posición final (B).
  Según la figura

$$\vec{d} = 2R\hat{i} = 2(2)\hat{i} = 4\hat{i}\text{ m}$$

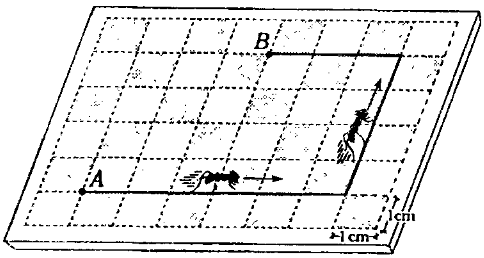
- La distancia (d) es el módulo del desplazamiento.

$$d = |\vec{d}| = 2R = 2(2) \quad \Rightarrow \quad d = 4\text{ m}$$

Por lo tanto, deducimos que **en un movimiento curvilíneo, el recorrido y la distancia tienen diferente valor**.

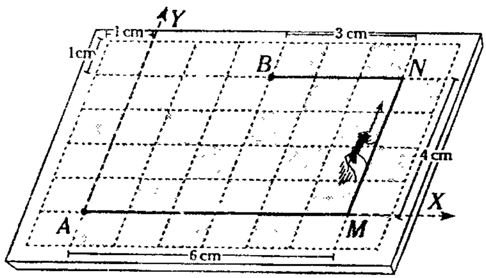
Ejemplo 1

Una hormiga se mueve en una región cuadrangular, siguiendo el trayecto que se muestra. Determine el recorrido, la distancia y el desplazamiento de la hormiga al ir desde A hasta B.



Resolución

Nos piden el e_{AB}, d_{AB} y $\vec{d}_{AB}$. Primero debemos elegir nuestro lugar de referencia. Por comodidad, escogemos el punto *A* y ubicamos nuestro sistema de coordenadas cartesianas.



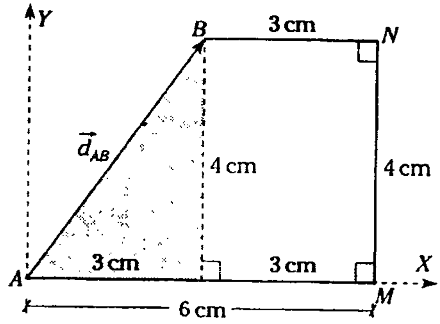
Para determinar el recorrido de *A* hacia *B*, dividimos todo el trayecto en tres tramos, de *A* hacia *M; M* hacia *N* y *N* hacia *B*. En consecuencia

$$e_{AB} = e_{AM} + e_{MN} + e_{NB}$$

$$e_{AB} = 6\text{ cm} + 4\text{ cm} + 3\text{ cm}$$

$$e_{AB} = 13\text{ cm}$$

Para determinar la distancia de *A* hacia *B*, debemos unir estos puntos mediante un segmento rectilíneo y así se formará el trapecio *AMNB*, tal como se muestra en la figura. Si desde el punto *B*, *trazamos un segmento perpendicular hacia el* lado *AM*, formaremos un triángulo rectángulo.

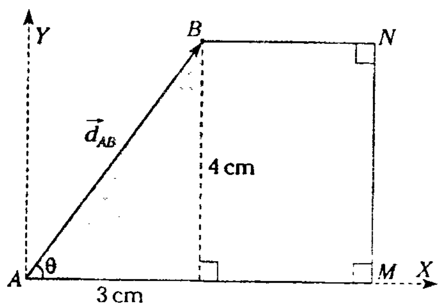


Por el Teorema de Pitágoras

$$d_{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\text{ cm}$$

Para determinar el desplazamiento desde *A* hacia *B* debemos conocer su módulo y su dirección.

Por ende, podemos aprovechar la figura y establecer el siguiente gráfico.



Conociendo $d_{AB} = 5\text{ cm}$ y del triángulo rectángulo notable $\theta = 53^\circ$, se obtendrá

$$\vec{d}_{AB} = 5\text{ cm}\underline{|53^\circ}$$

Otra forma de expresar también el vector desplazamiento es en función de sus componentes rectangulares y los vectores unitarios

$$\vec{d}_{AB} = (3\hat{i} + 4\hat{j})\text{cm}$$

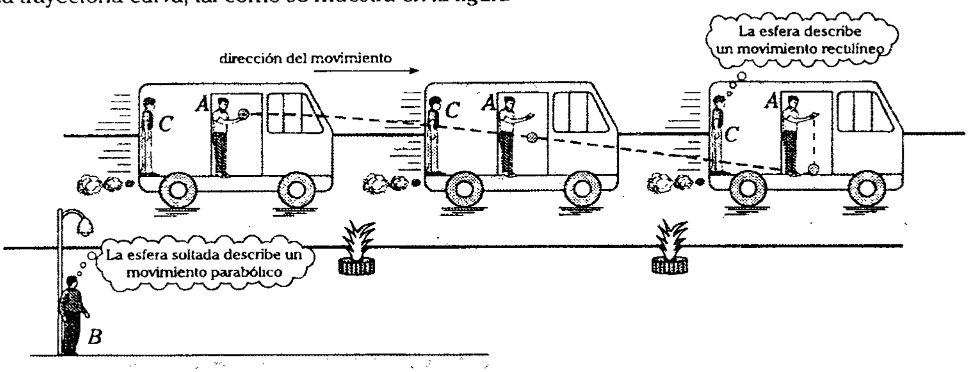
RELATIVIDAD EN EL MOVIMIENTO MECÁNICO

Todos los elementos involucrados en el movimiento mecánico dependen del sistema de referencia elegido. Para comprender esto, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que dos personas, *A* y *C*, se encuentran en el interior de un ómnibus, en donde la primera sostiene una esfera con su mano mientras que otra persona *B*, en reposo y ubicada al lado del poste, observa que la esfera se mueve junto con el joven y el ómnibus hacia la derecha, tal como se muestra.

De pronto, la persona *A* suelta la esfera y la persona *C* observa que la esfera desciende verticalmente.

En cambio, la persona *B* observa que la esfera desciende y avanza hacia la derecha describiendo una trayectoria curva, tal como se muestra en la figura



El movimiento de la esfera es observado por la persona *C* y la persona *B* desde lugares diferentes, ambas personas pueden considerarse como cuerpos de referencia. Si a cada persona le asociamos un sistema de coordenadas y un cronómetro, obtendremos dos sistemas de referencia tales que:

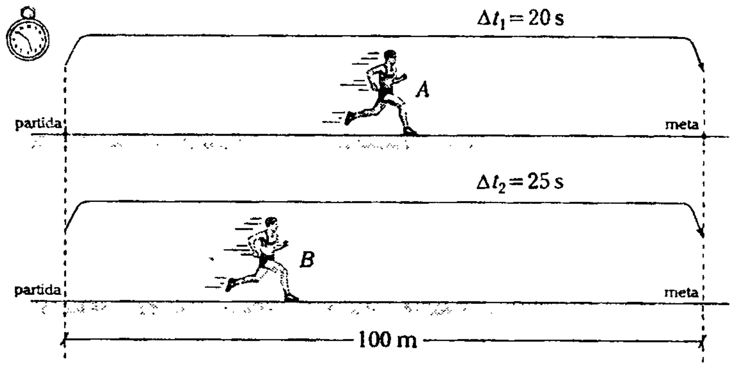
- Para el sistema de referencia asociado a la persona *C*, la trayectoria de la esfera es rectilínea y para la persona *B*, la trayectoria de la esfera es curvilínea.

- No solo la trayectoria es diferente para los dos sistemas de referencia, es evidente que también los demás elementos del movimiento mecánico, como el recorrido; el desplazamiento y la distancia, son diferentes. **Esto significa que el movimiento mecánico es relativo ya que éste puede ser diferente según el sistema de referencia que elijamos.** Por ello, cuando analicemos un determinado movimiento mecánico es necesario indicar con relación a qué sistema de referencia se analiza dicho movimiento.

En otro capítulo, discutiremos con mayor detalle sobre la relatividad del movimiento mecánico. Por el momento, supondremos que tenemos un sistema de referencia bien definido que por lo general estará asociado con la Tierra (sistema de referencia en reposo), salvo que se indique lo contrario.

RAPIDEZ Y VELOCIDAD

Iniciemos este estudio examinando una competencia atlética, la carrera de los 100 m con salida simultánea.



Los atletas salen en forma simultánea del punto de partida y recorren los 100 m, pero A demora 20 s y B demora 25 s podemos afirmar que

- El atleta A es más rápido que B.

Si podemos advertir que, en la naturaleza, algunos cuerpos son más rápidos que otros, ¿qué es la rapidez?

Es una magnitud escalar que matemáticamente se define como el recorrido realizado por el móvil durante un intervalo de tiempo.

$$\boxed{\text{rapidez} = \frac{\text{recorrido}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{e}{\Delta t}} \qquad \text{Unidad: } \frac{\text{m}}{\text{s}}; \frac{\text{km}}{\text{h}}; \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

A tiene una rapidez definida por

$$v_A = \frac{\text{recorrido de } A}{\text{tiempo}} = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

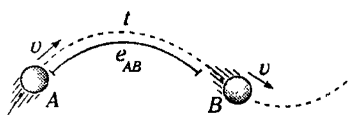
B tiene otra rapidez definida por

$$v_B = \frac{\text{recorrido de } B}{\text{tiempo}} = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

Por lo tanto $v_A > v_B$, A es más rápido que B

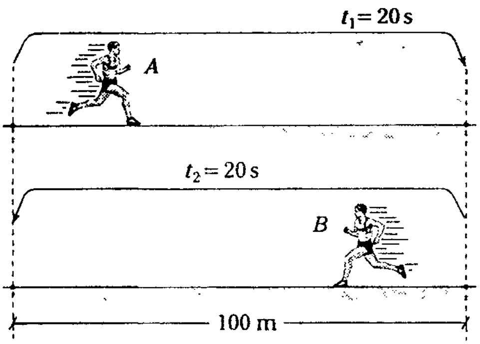
Nota

En un movimiento mecánico, sin importar la forma de la trayectoria, si la rapidez es constante el recorrido se calcula con



$$\boxed{e_{AB} = vt}$$

Consideremos que los atletas, A y B están separados a igual distancia que en el caso anterior y en forma simultánea cada uno corre hacia el punto de partida del otro.



En este caso, notamos que A y B recorren 100 m cada uno empleando 20 s. Por lo tanto, podemos afirmar que

$$v_A = v_B = \frac{\text{recorrido}}{\text{tiempo}} = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

Si A y B exhiben igual rapidez, ¿los atletas tienen igual movimiento mecánico? ¡No!

Podemos apreciar que el atleta A corre hacia la derecha, mientras que el atleta B corre hacia la izquierda. Concluimos que **los movimientos de los atletas se diferencian físicamente por sus direcciones.**

Cuando se analiza el movimiento mecánico, no solo será necesario precisar la rapidez, sino también debemos indicar la dirección y esto implica usar una magnitud vectorial que permita caracterizar el movimiento mecánico de un cuerpo, lo cual haremos mediante la **velocidad** $(\vec{v})$.

¿Qué es la velocidad y para qué nos sirve?

VELOCIDAD $(\vec{v})$

Es una magnitud vectorial que nos expresa la rapidez con la cual un cuerpo cambia de posición.

En función del intervalo de tiempo relativamente grande o pequeño, podemos establecer la velocidad media o la velocidad instantánea, respectivamente.

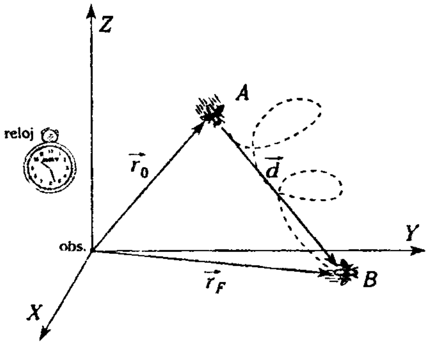
Velocidad media $(\vec{v}_m)$

Nos permite determinar el cambio de posición de un cuerpo en cierto intervalo de tiempo. Una vez determinada es considerada una velocidad constante que se le atribuye al cuerpo durante el intervalo fijado. Matemáticamente se define por

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$$ Unidad: m/s

Ejemplo 2

Consideremos un mosquito que vuela describiendo una trayectoria curvilínea (helicoide) como indica la figura.



De A hacia B, el mosquito emplea un intervalo de tiempo Δt y cambia de posición desde $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_F$ experimentando un desplazamiento. Entonces definimos para este caso

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

Del triángulo vectorial, tenemos

$$\vec{r}_0 + \vec{d} = \vec{r}_F$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \vec{r}_F - \vec{r}_0 = \Delta\vec{r}$$

Reemplacemos en (I)

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

Podemos plantear que $\vec{r}_0 = (4; 6; 8)m$; $\vec{r}_F = (8; 8; 0)m$, y $\Delta t = 2$ s, entonces al reemplazar en la fórmula para la velocidad media

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_F - \vec{r}_0}{\Delta t} = \frac{(8;8;0)-(4;6;8)}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_m = (2;2;4)\ \text{m/s}$$

Podemos advertir que la velocidad media expresa el desplazamiento del mosquito durante el intervalo de tiempo (Δt).

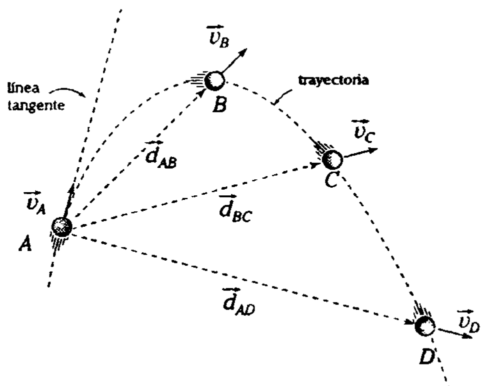
¿Qué dirección tiene la velocidad media?

Matemáticamente la velocidad media depende del desplazamiento $(\vec{d})$ entonces, su dirección debe coincidir con la del vector $\vec{d}$. En consecuencia

- La velocidad media presenta la misma dirección que el desplazamiento. $(\vec{v}_m \nearrow\!\!\nearrow \vec{d})$
- La velocidad media es independiente de la forma de la trayectoria.

Velocidad instantánea $(\vec{v})$

Para dar una noción o concepto de esta velocidad, analicemos el movimiento de un balón lanzado en A y que pasa por los puntos B, C y D.



En la figura podemos apreciar que:

- El balón empieza a moverse desde A.
- El balón describe una trayectoria curvilínea durante su movimiento.

  De la figura podemos establecer que: los intervalos de tiempo están en la relación

$$\Delta t_{AB} < \Delta t_{AC} < \Delta t_{AD}$$

Resulta evidente que en cada intervalo de tiempo referido, existan diferentes desplazamientos.

- Para los intervalos de tiempo mencionados respectivamente, se definen las velocidades medias $\vec{v}_B;\vec{v}_C;\vec{v}_D$, que son vectores contenidos en rectas secantes a la trayectoria curvilínea (deben coincidir con sus desplazamientos).
- Cuando se van considerando intervalos de tiempo cada vez más pequeños $(\Delta t_{AD},\Delta t_{AC},\Delta t_{AB})$ la velocidad media $(\vec{v}_m)$ correspondiente, cada vez se va aproximando a la recta tangente en A. Para un intervalo muy pequeño $(\Delta t \to 0)$ medido a partir de A la velocidad media es prácticamente tangente a la trayectoria.

A partir de estas observaciones, entonces ¿cómo podemos conceptuar la velocidad instantánea?

La velocidad instantánea es una magnitud vectorial que nos expresa la rapidez con la cual el móvil tiende a cambiar de posición en un instante de tiempo (intervalo de tiempo muy pequeño).

Matemáticamente, se plantea que

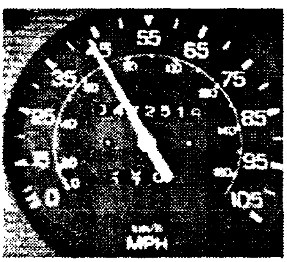
$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{v}_m=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

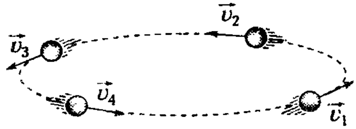
$$\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}}$$

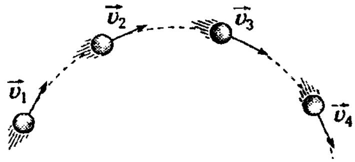
Esta fórmula nos expresa que la velocidad instantánea es la derivada de la posición $\vec{r}:(x;y;z)$ respecto del tiempo.

La velocidad instantánea en un movimiento curvilíneo, siempre es tangente a la trayectoria y continuamente cambia de dirección.

El velocímetro de un automóvil nos indica la rapidez instantánea.







Ejemplo 3

La posición de un auto está definida por $\vec{x}=(1+2t+3t^2)\hat{i}$ m; donde t está en segundos y x en metros. Determine la velocidad en el instante $t=1$ s.

Resolución

Para determinar la velocidad instantánea usaremos

$$\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (I)$$

Sabemos que

$$\vec{x}=(1+2t+3t^2)\hat{i}\text{ m}$$

Se debe derivar la posición $\vec{x}$ respecto del tiempo t.

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{x}}{dt}=\left(\frac{d(1)}{dt}+\frac{d(2t)}{dt}+\frac{d(3t^2)}{dt}\right)\hat{i}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=(0+2+3(2)t)\hat{i}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{x}}{dt}=(2+6t)\hat{i}$$

Evaluando esta expresión para $t=1$ s, se obtiene

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=8\hat{i}\text{ m/s}$$

Reemplazando en (I), la velocidad en el instante $t=1$ s, será

$$\vec{v}=8\hat{i}\text{ m/s}$$

Ejemplo 4

Un móvil realiza un movimiento mecánico de tal modo que su posición en el tiempo está dada por la ecuación $\vec{r}=(4t+2\,;\,3t+6)$m. Determine la velocidad en $t=2$ s y la velocidad media en el intervalo desde $t=0$ hasta $t=5$ s

Resolución

La posición es

$$\vec{r}=(4t+2\,,\,3t+6)\text{m}$$

también se puede expresar como

$$\vec{r}=(4t+2)\hat{i}+(3t+6)\hat{j}\text{ m}$$

Para determinar la velocidad instantánea, derivamos la posición respecto del tiempo

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[(4t+2)\hat{i}+(3t+6)\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}(4t+2)\hat{i}+\frac{d}{dt}(3t+6)\hat{j}$$

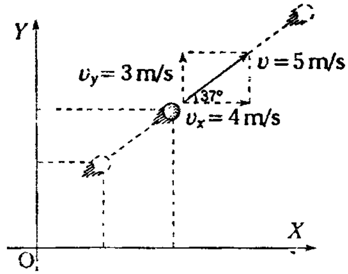
$$\vec{v}=\left[\frac{d(4t)}{dt}+\frac{d(2)}{dt}\right]\hat{i}+\left[\frac{d(3t)}{dt}+\frac{d(6)}{dt}\right]\hat{j}$$

$$\vec{v}=(4+0)\hat{i}+(3+0)\hat{j}$$

$$\vec{v}=(4\hat{i}+3\hat{j})\text{m/s}$$

Si la velocidad no depende del tiempo, esto significa que la velocidad es constante.

Gráficamente



Observe que la trayectoria es rectilínea ya que al ser la velocidad constante; la dirección de movimiento, que es igual a la dirección de la velocidad, debe ser constante.

¿Cómo calculamos la velocidad media?

Se sabe que

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_F-\vec{r}_0}{t_F-t_0} \qquad \text{(I)}$$

además

$$t_0=0\,;\,t_F=5\text{ s}$$

$$\vec{r}=(4t+2)\hat{i}+(3t+6)\hat{j}$$

en $t=0$ s; $\vec{r}_0=(2\hat{i}+6\hat{j})$m

en $t=5$ s; $\vec{r}_F=(22\hat{i}+21\hat{j})$m

Reemplazando en (I)

$$\vec{v}_m=\frac{(22\hat{i}+21\hat{j})-(2\hat{i}+6\hat{j})}{5}=\frac{20\hat{i}+15\hat{j}}{5}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_m=(4\hat{i}+3\hat{j})\text{m/s}$$

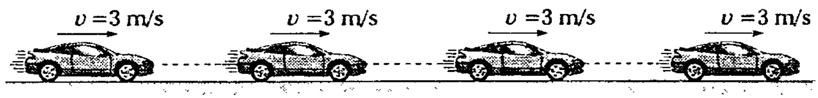
Importante

La resolución del ejemplo (2), concluye que, si la posición de un cuerpo depende del tiempo en forma lineal, entonces su velocidad media e instantánea son iguales y a la vez constantes. Esta conclusión, posteriormente se comprobará con otras magnitudes físicas.

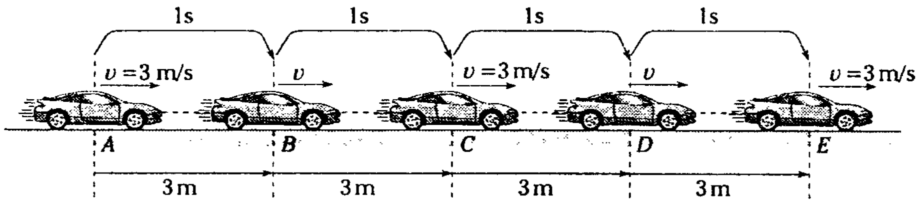
MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (M.R.U.)

Este movimiento generalmente lo realizan algunos automóviles en ciertas carreteras de gran longitud, donde avanzan uniformemente; también lo hacen las maletas sobre fajas transportadoras, algunos aviones, barcos, etc. ¿Cómo se caracteriza un M.R.U.?

Como su nombre lo indica, el móvil se desplaza en línea recta y su velocidad se mantiene uniforme, invariable o constante; es decir la rapidez y la dirección no varían. Por ejemplo:

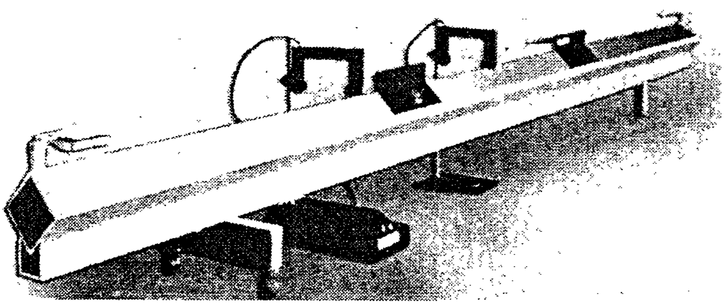


El automóvil de la figura en todo instante presenta una $\vec{\upsilon} = 3\hat{i}$ m/s y al ser su trayectoria rectilínea, implica en la práctica que cada 1 s el automóvil avanza 3 m hacia la derecha. Por consiguiente, cada 2 s recorrerá 6 m hacia la derecha; cada 3 s avanzará 9 m siempre hacia la derecha y así sucesivamente.



Es posible deducir que hay una correspondencia entre el desplazamiento efectuado y el intervalo de tiempo.

$$\frac{\vec{d}_{AB}}{\Delta t_{AB}} = \frac{\vec{d}_{AC}}{\Delta t_{AC}} = \frac{\vec{d}_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{\vec{d}_{AE}}{\Delta t_{AE}} = \text{cte.} = 3 \text{ m/s} \quad \text{(Representa la velocidad del automóvil)}$$



Carril de aire que permite hacer pruebas de un movimiento rectilíneo uniforme.

Por lo tanto, la ecuación del M.R.U. quedará definida por

$$\boxed{\vec{v}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}=\text{constante}}$$

(Ecuación característica)

Si consideramos solamente módulos y $\Delta t = t$, tendremos

$$\boxed{v=\frac{d}{t}\begin{cases} d=vt \\ t=\dfrac{d}{v} \end{cases}}$$

(Relaciones comunes)

donde las unidades pueden ser

d : en m, km

t : en s, h

$\Rightarrow$ v: en m/s, km/h

CARACTERÍSTICAS DEL M.R.U.

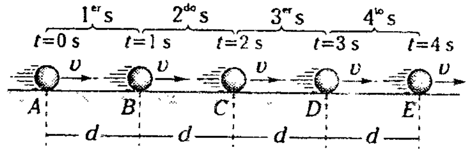
Si un cuerpo se mueve desarrollando un M.R.U. recordaremos que es un movimiento unidireccional en donde el cuerpo presenta desplazamientos iguales en intervalos de tiempos iguales y por último verificaremos que la velocidad media e instantánea son constantes e iguales.

Ejemplo 5

Cuando examinamos el movimiento de una pelota que experimenta un M.R.U., verificamos que en los cuatro primeros segundos recorre 6 m más que en el tercer segundo del movimiento. Determine el valor de la velocidad que presenta la pelota.

Resolución

Supongamos que la pelota se mueve sobre una pista horizontal y hacia la derecha; además, por experimentar un M.R.U. sus desplazamientos son iguales en intervalos de tiempos iguales.



Nos piden v y la podemos calcular en el tramo AB al considerar

$$v=\frac{d}{\Delta t}=\frac{d}{1}=d \qquad \text{(I)}$$

Por condición del problema

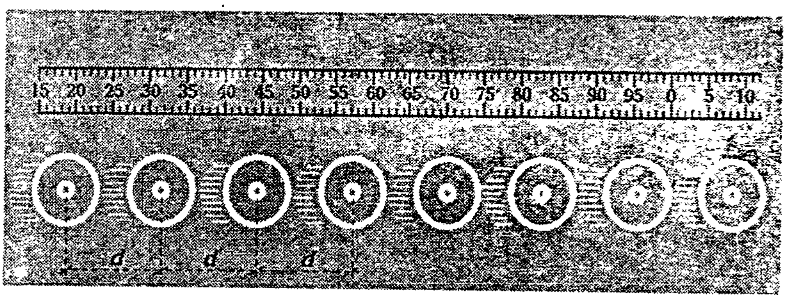
$d_{AE}=d_{CD}+6$

$4d=d+6$

$\Rightarrow d=2\text{ m} \qquad \text{(II)}$

Reemplazando (II) en (I)

$v=2\text{ m/s}$



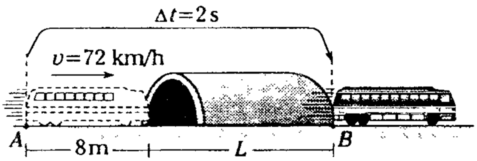
La gráfica muestra el deslizamiento de un disco con velocidad constante.

Ejemplo 6

Un ómnibus de 8 m de longitud desarrolla un M.R.U., desplazándose con una rapidez de 72 km/h Si el ómnibus emplea 2 s en atravesar completamente un túnel, ¿qué longitud presenta el túnel?

Resolución

En principio realizaremos un gráfico de acuerdo a las condiciones del problema.



Nos piden L con la condición de que el ómnibus desarrolle un M.R.U. cruzando completamente el túnel en 2 s, para un análisis más sencillo consideremos una parte del ómnibus (la que más convenga del gráfico). En este caso, vamos a tomar la parte posterior del ómnibus.

Por tratarse de un M.R.U. de A hacia B usamos

$$v=\frac{d_{AB}}{\Delta t}=\frac{8+L}{2} \qquad \text{(I)}$$

Como el tiempo se mide en segundos, la rapidez v debe estar en metros por segundo. Entonces

$$v=72\text{ km/h}=72\frac{(1\,000\text{ m})}{3\,600\text{ s}}$$

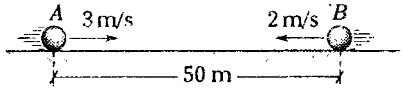
$$\Rightarrow \quad v=20\text{ m/s} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I), se tendrá

$$20=\frac{8+L}{2} \quad \Rightarrow \quad L=32\text{ m}$$

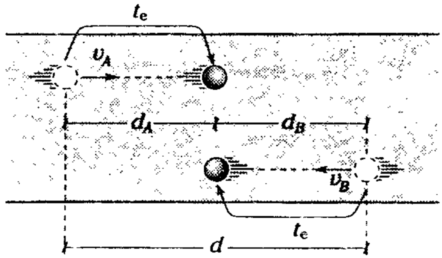
Ejemplo 7

Dos móviles, A y B, se desplazan con M.R.U. sobre pistas rectilíneas, muy cercanas y paralelas, con rapidez de 3 m/s y 2 m/s, respectivamente. A partir de las posiciones mostradas, ¿en qué intervalo de tiempo tardarán en encontrarse?



Resolución

Para determinar el intervalo de tiempo que tardan los móviles en encontrarse (tiempo de encuentro t_e), vamos a examinar el movimiento desde una vista superior.



Por tratarse de un M.R.U., al cabo de un tiempo $t=t_e$, los móviles A y B recorren

$$d_A=v_A\,t_e \quad \text{y} \quad d_B=v_B\,t_e$$

Además al observar la figura podemos afirmar que

$$d_A+d_B=d$$

$$v_A t_e+v_B t_e=d$$

$$\Rightarrow \quad t_e(v_A+v_B)=d$$

Por lo tanto

$$\boxed{t_e=\frac{d}{v_A+v_B}}$$

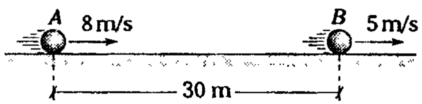
(Tiempo de encuentro)

Para el problema dado, reemplazamos datos

$$t_e=\frac{50}{3+2} \quad \Rightarrow \quad t_e=10\text{ s}$$

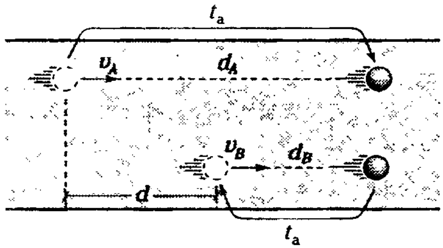
Ejemplo 8

Dos móviles, A y B se desplazan en la misma dirección con M.R.U. sobre pistas rectilíneas, muy cercanas y paralelas, con rapidez de 8 m/s y 5 m/s, respectivamente. A partir de las posiciones mostradas, ¿qué intervalo de tiempo tardará el móvil A en alcanzar al móvil B?



Resolución

Para determinar el intervalo de tiempo que tarda el móvil A en alcanzar al móvil B (tiempo de alcance t_a), también vamos a examinar el movimiento desde una vista superior



Por tratarse de un M.R.U., al cabo de un t_a los móviles A y B recorren

$$d_A = v_A t_a \quad \text{y} \quad d_B = v_B t_a$$

Además, al observar la figura podemos plantear que

$$d_A = d_B + d$$

$$v_A t_a = v_B t_a + d$$

$$\Rightarrow \; t_a(v_A - v_B) = d$$

Por lo tanto

$$\boxed{t_a = \frac{d}{v_A - v_B}}$$

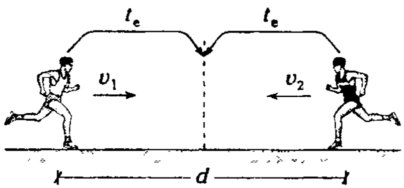
(Tiempo de alcance)

Para el problema dado

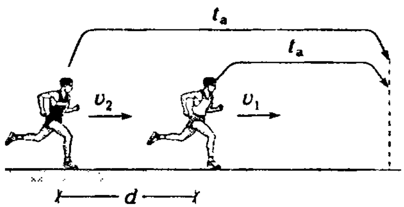
$$t_a = \frac{30}{8-5} \Rightarrow t_a = 10 \text{ s}$$

Observación

Después de haber resuelto los ejemplos 7 y 8, hemos deducido dos fórmulas que nos permitirán calcular el tiempo de encuentro y el tiempo de alcance en el M.R.U. En los problemas siguientes, las plantearemos en la medida que sean necesarias.



$$\boxed{t_e = \frac{d}{v_1 + v_2}}$$



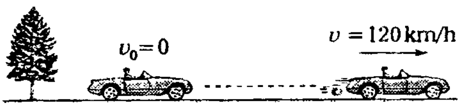
$$\boxed{t_a = \frac{d}{v_2 - v_1}} \; ; \; v_1 > v_2$$

ACELERACIÓN $(\vec{a})$

En los párrafos anteriores hemos descrito uno de los movimientos más simples que se observa en la naturaleza, el movimiento rectilíneo uniforme. Este movimiento lo suelen experimentar algunos cuerpos en la naturaleza en un intervalo de tiempo algo pequeño y luego empiezan a variar su velocidad en valor y/o dirección. A continuación se dan algunos ejemplos que muestran lo dicho.

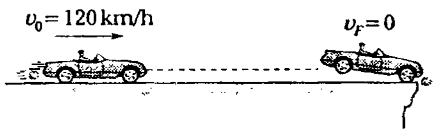
Caso I

Para iniciar el movimiento del automóvil, el chofer pisa el acelerador originando un aumento en la rapidez del automóvil, pero la dirección de la velocidad no cambia.



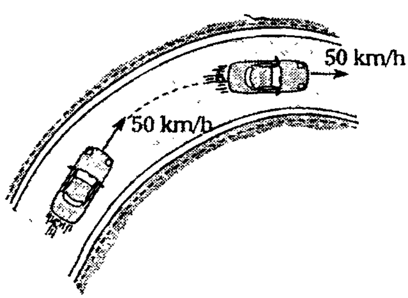
Caso II

Para no caer al precipicio el chofer pisa los frenos originando una disminución en la rapidez pero la dirección de la velocidad no cambia.



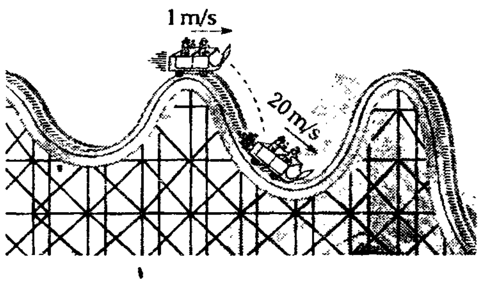
Caso III

La rapidez del automóvil se mantiene constante pero al llegar a la curva la dirección de la velocidad cambia.



Caso IV

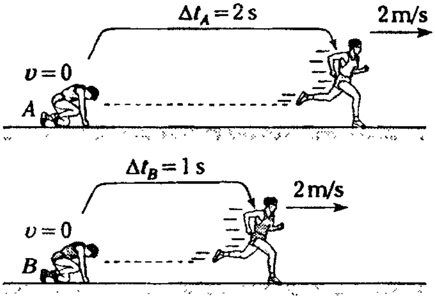
Al descender por la montaña rusa, aumenta la rapidez del automóvil y la dirección de la velocidad cambia.



Lo anterior nos muestra que la velocidad puede variar en valor y/o dirección. ¿Cómo y con qué podemos expresar y predecir estos cambios cualitativos y cuantitativos?

ACELERACIÓN MEDIA $(\vec{a}_m)$

Ahora revisemos el siguiente caso: Dos jóvenes empiezan a trotar tal como se muestra en la figura y se observa que los jóvenes experimentan el mismo cambio de velocidad sin tomar en cuenta el tiempo. Al tomar en cuenta el tiempo, el joven *B* lo hace en menor tiempo, es decir realiza un cambio de velocidad más rápido que el joven *A*.



Para poder describir cuantitativamente un suceso donde se controlen los cambios de velocidad de un cuerpo en el tiempo, usaremos una magnitud física vectorial denominada aceleración media $\left(\vec{a}_m\right)$, que matemáticamente se define como el cambio de velocidad $\left(\Delta\vec{v}\right)$ por unidad de tiempo, es decir

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \qquad \text{(I)}$$

Unidad: m/s^2

La aceleración nos determina qué tan rápido un cuerpo varía su velocidad.

Observación

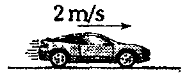
a. La aceleración expresada por la relación (I) se denomina aceleración media $\left(\vec{a}_m\right)$, la cual usaremos para determinar el cambio de velocidad de un cuerpo en cierto intervalo de tiempo.

b. La variación de la velocidad $\left(\Delta\vec{v}\right)$ se determina por $\Delta\vec{v} = \vec{v}_F - \vec{v}_0$,
donde $\vec{v}_F$: velocidad final
$\vec{v}_0$: velocidad inicial

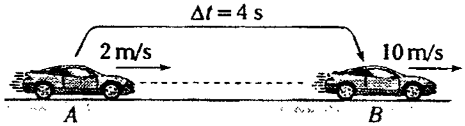
c. La variación de la velocidad es una cantidad vectorial que tiene la misma dirección que la aceleración (media).
La $\vec{a}_m \nearrow\nearrow \Delta\vec{v}$

Ejemplo 9

Un automóvil se traslada sobre una pista horizontal tal como se muestra. Si luego de 4s tiene una rapidez de 10 m/s, determine su aceleración media.



Resolución



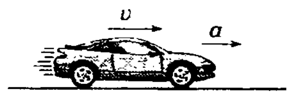
Tenemos que determinar la aceleración media del automóvil, es decir el cambio de su velocidad en el intervalo Δt. Usamos la definición

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

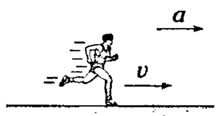
Por ser paralelas la $\vec{v}_0$ y la $\vec{v}_F$, podemos reemplazar sus valores en (I) y las direcciones las especificamos con un signo $\left(\xrightarrow{+} \text{ ó } \xleftarrow{-}\right)$.
A partir del gráfico tenemos

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(+10)-(+2)}{4} = +2 \text{ m/s}^2$$

El signo + expresa que la aceleración está dirigida hacia la derecha.
Para el automóvil tenemos



así podemos concluir que



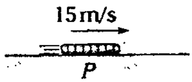
en estos casos el valor de la $\vec{v}$ aumenta (movimiento acelerado).

Observación

Para el caso en que un cuerpo se mueva en línea recta en una sola dirección y aumenta el valor de su velocidad, entonces su aceleración (media) tiene la misma dirección que su velocidad.

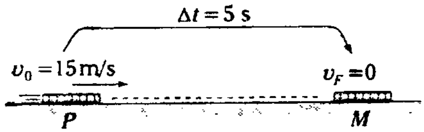
Ejemplo 10

Una moneda resbala sobre una superficie tal como se muestra. Si luego de 5 s se detiene, determine la aceleración media que experimentó.



Resolución

Según lo planteado por el enunciado, podemos tener



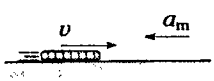
Determinaremos la $\vec{a}_m$ de la moneda usando la definición

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\cancel{\vec{v}_F} - \vec{v}_0}{\Delta t} = -\frac{\vec{v}_0}{\Delta t} = -\frac{(+15)}{5}$$

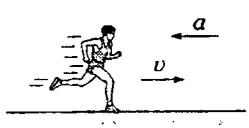
$$\Rightarrow \ \vec{a}_m = -3 \text{ m/s}$$

El signo menos nos indica que la aceleración está dirigida hacia la izquierda.

Para la moneda tenemos



También podemos plantear que



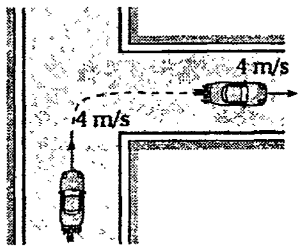
En estos casos el valor de la $\vec{v}$ disminuye (movimiento desacelerado).

Observación

Cuando un cuerpo se mueve en línea recta y en una sola dirección disminuyendo el valor de su velocidad, su aceleración media tiene dirección contraria a su velocidad.

Ejemplo 11

Un automóvil llega a una esquina y da la vuelta, tal como se muestra en la figura. Si la rapidez del automóvil permanece constante e igual a 4 m/s, ¿cuál es el módulo de la aceleración media que experimenta el automóvil? (La vuelta dura 2 s).



Resolución

El automóvil al dar la vuelta en la esquina experimenta cambios en la dirección del movimiento, en consecuencia hay cambios en la velocidad (de dirección) y para cuantificar los cambios empleamos la aceleración media.

Por definición

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t}\ ;\ \text{en módulo} \quad a_m = \frac{\left|\vec{v}_F - \vec{v}_0\right|}{\Delta t}$$

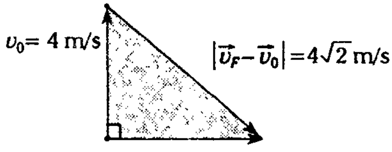
donde

$\vec{v}_F = 4$ m/s $(\rightarrow)$

$\vec{v}_0 = 4$ m/s $(\uparrow)$

$\Delta t = 0{,}5$ s

Para determinar la diferencia de velocidades, aquí no podemos reemplazar directamente los valores ya que las velocidades no son paralelas. Para determinar $\left(\vec{v}_F - \vec{v}_0\right)$ damos un tratamiento geométrico tal como se muestra en la figura.



Se deduce que

$$|\vec{v}_F-\vec{v}_0|=4\sqrt{2}\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow\ a_m=\frac{|\vec{v}_F-\vec{v}_0|}{\Delta t}=\frac{4\sqrt{2}\text{ m/s}}{2\text{s}}$$

$$\therefore\ a_m=2\sqrt{2}\text{ m/s}^2$$

Nota

Para el caso en que se tenga que determinar la aceleración media y las velocidades inicial $(\vec{v}_0)$ y final $(\vec{v}_F)$ no sean paralelas se recomienda dar un tratamiento geométrico.

Ejemplo 12

Una partícula se mueve sobre el plano *XY*; Si en un instante determinado tiene una velocidad dada por $\vec{v}_0=(4\hat{i}-5\hat{j})$m/s y su aceleración media en 2 s posteriores es $\vec{a}_m=(-\hat{i}+4\hat{j})$m/s^2, ¿qué rapidez tendrá la partícula luego de dicho intervalo?

Resolución

Como en el enunciado no se indica dónde está la partícula, al inicio o al final, podemos abstraernos del gráfico por ahora y por mientras calculamos la velocidad de la partícula $(\vec{v}_F)$ pasado los 2 s.
Consideramos la definición de la aceleración media.

$$\vec{a}_m=\frac{\vec{v}_F-\vec{v}_0}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow\ (-\hat{i}+4\hat{j})=\frac{\vec{v}_F-(4\hat{i}-5\hat{j})}{2}$$

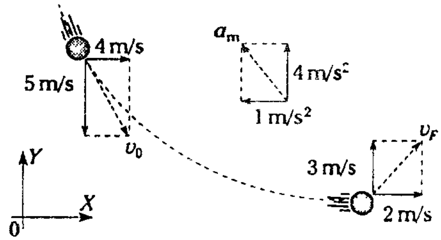
$$\Rightarrow\ \vec{v}_F=(\underbrace{2\hat{i}}_{v_x}+\underbrace{3\hat{j}}_{v_y})\text{m/s}$$

Como nos piden el módulo de $\vec{v}_F$, entonces planteamos

$$v_F=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2^2+3^2}$$

$$\therefore\ v_F=\sqrt{13}\text{ m/s}$$

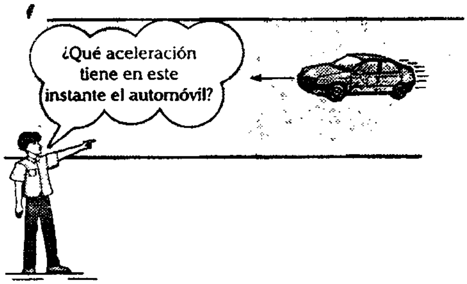
Para este problema podemos proponer el siguiente gráfico.



A partir del ejemplo anterior podemos ver en qué radica la importancia de poder conocer la aceleración de un cuerpo, con ella podemos precisar qué velocidad podrá tener un cuerpo en cualquier instante, es decir, determinar su velocidad instantánea.

Es interesante conocer los cambios que se pueden producir según el valor de la aceleración que experimenta un cuerpo. Por ejemplo, podemos mencionar que en un ser humano, sometido a aceleraciones pequeñas (cuando uno viaja en bus), no se registran cambios apreciables en sus actividades biológicas como la circulación de la sangre y la contracción de los músculos. No obstante, cuando un ser humano experimenta grandes aceleraciones (un astronauta en un cohete cuando empieza a elevarse), se registran cambios en los casos que hemos citado y hasta incluso se da un *incremento* en el peso de las personas. Con respecto a esto último se discutirá en detalle en el capítulo de Dinámica.

ACELERACIÓN INSTANTÁNEA



Como hemos podido desarrollar, a partir de la aceleración media podemos determinar los cambios de velocidad de un cuerpo en cierto intervalo de tiempo. También es importante precisar la aceleración de un cuerpo en un intervalo de tiempo pequeño o un instante de tiempo, es decir cuando Δt tienda a cero $(\Delta t \to 0)$, para ello, definimos la **aceleración instantánea** $(\vec{a})$, como el cambio de velocidad que experimenta un cuerpo en un intervalo de tiempo que tiende a cero. Matemáticamente

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

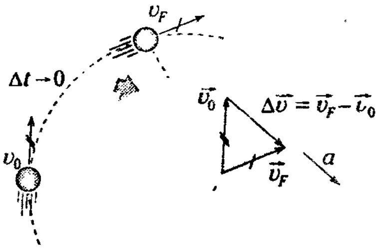
donde $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ viene a ser la definición de derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Entonces podemos plantear

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \text{ unidad: m/s}^2$$

Aceleración instantánea

Aquí tenga presente que la aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.



En un movimiento curvilíneo apunta hacia la zona cóncava de la trayectoria

Observación

a. Para el caso que la velocidad de un cuerpo sea función (dependa) del tiempo, es decir $\vec{v} = \vec{v}(t)$, y se desee determinar la aceleración en el instante $t = t_1$, se procede a derivar a la velocidad respecto del tiempo y luego a lo obtenido evaluarlo para $t = t_1$.

b. Sabemos que la velocidad (instantánea) se determina por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, entonces a partir de la definición de aceleración instantánea tendríamos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Lo cual se lee como la segunda derivada de la posición $(\vec{r})$, respecto del tiempo. En caso de contar con la posición de un cuerpo en función del tiempo podemos obtener su aceleración derivando en forma sucesiva dos veces la posición respecto del tiempo.

c. Recordar que la posición puede ser expresada por $\vec{r}$; $\vec{x}$; $\vec{y}$ o $\vec{z}$.

Ejemplo 13

Una partícula se mueve sobre el eje X y su posición queda determinada por $\vec{x}=(2t^3+2t)$m, donde t es el tiempo en segundos. Determine la velocidad de la partícula para $t=2$ s y la aceleración de la partícula para $t=1$ s.

Resolución

La partícula al moverse sobre el eje X desarrolla un movimiento rectilíneo, determinándose su posición para cualquier instante a partir de $\vec{x}=(2t^3+2t)$m.

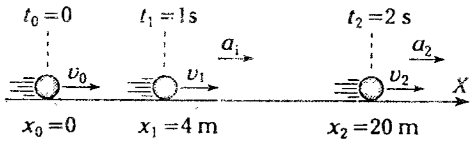
Por ejemplo

$t=0$; $\vec{x}_0=\vec{0}$

$t=1$ s ; $\vec{x}_1=+4$ m

$t=2$ s ; $\vec{x}_2=+20$ m

Sobre la trayectoria tendríamos



Ahora determinemos la $\vec{v}$, para $t_1=1$ s sería

$$\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{d}{dt}(2t^3+2t)=6t^2+2$$

Evaluando para $t_1=1$ s $\Rightarrow$ $\vec{v}_1=+8$ m

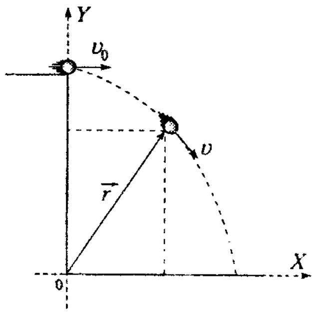
Calculemos la $\vec{a}$ para $t_2=2$ s, derivemos la velocidad respecto del tiempo.

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(6t^2+2)=12\,t$$

evaluando para $t_2=2$ s $\Rightarrow$ $\vec{a}=+24$ m/s^2

Ejemplo 14

Un proyectil es lanzado horizontalmente desde la azotea de un edificio y la posición del proyectil a partir del instante de lanzamiento viene dada por la ecuación $\vec{r}=(5t;\,80-5t^2)$ m. Determine la aceleración instantánea del proyectil.



Resolución

La posición $\vec{r}=(5t;\,80-5t^2)$ m también se puede expresar como

$$\vec{r}=5t\hat{i}+(80-5t^2)\hat{j}$$

Primero determinamos la velocidad instantánea derivando la posición respecto del tiempo.

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[5t\hat{i}+(80-5t^2)\hat{j}\right]$$

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}(5t)\hat{i}+\frac{d}{dt}(80-5t^2)\hat{j}$$

$$\vec{v}=(5t\hat{i}-10t\hat{j})\text{ m/s}$$

Ahora determinamos la aceleración instantánea al derivar la velocidad respecto del tiempo

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(5\hat{i}-10t\hat{j})$$

$$\vec{a}=-10\hat{j}\text{ m/s}^2$$

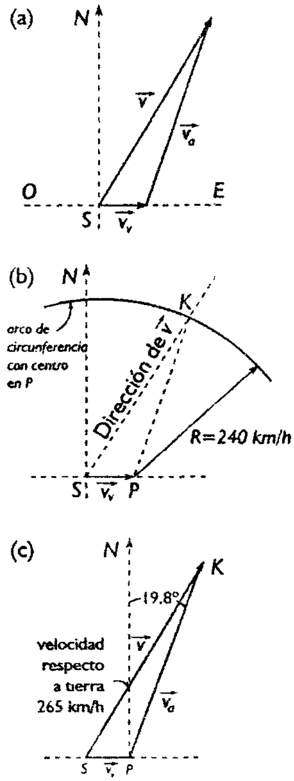
Observe que la aceleración instantánea es constante y dirigida en la direccion negativa del eje Y (vertical hacia abajo), esto como veremos más adelante corresponde a un movimiento parabólico de caída libre.

LECTURA

UN PROBLEMA DE NAVEGACIÓN

Supongamos que el capitán de un avión desea ir de una ciudad A a otra ciudad B, distante 900 kilómetros de A en una dirección norte 30° Este. Los meteorólogos le comunican que hay un viento que sopla de Oeste hacia el Este con una rapidez de 50 km/h y él sabe que el piloto proyecta mantener una rapidez de 240 km/h. Para llegar a B, el avión debe moverse sobre la tierra en una dirección norte 30° Este. El problema del capitán es indicar al piloto la dirección en la cual debe dirigirse el avión.

El capitán resuelve su problema construyendo un triángulo de vectores velocidad como el indicado en la Fig. (a). Aquí la velocidad $\vec{v}$ del avión respecto a tierra se obtiene sumando la velocidad $\vec{v}_v$ del viento y la velocidad relativa del avión respecto al aire $\vec{v}_a$. El navegante, en el diagrama, parte de un punto cualquiera S, como en la Fig. (b) Él sabe la dirección en la que debe ir el avión, es decir, la dirección de $\vec{v}$, y dibuja esta dirección a partir de S. También conoce la velocidad del viento y la gráfica a partir de S, la cual es dibujada con dirección hacia el Este con origen en S., y su longitud SP representa la rapidez del viento de 50 km/h. Para obtener la velocidad $\vec{v}$ del avión con respecto al suelo, el capitán debe sumarle la velocidad $\vec{v}_a$ del avión con respecto al aire. El vector $\vec{v}_a$ debe partir por consiguiente del punto P, y su longitud (dada por la velocidad del avión) debe representar 240 km/h. Si bien el capitán no sabe la dirección $\vec{v}_a$ de él puede trazar una circunferencia con centro en P y que la longitud del radio represente la velocidad de 240 km/h. En la Fig. (b) vemos la dirección de $\vec{v}$ que es norte 30° Este y el vector $\vec{v}_v$, que representa la velocidad del viento asimismo el círculo muestra los posibles extremos del vector $\vec{v}_a$, trazado con centro en P. Advierte que este círculo intercepta la dirección $\vec{v}$ del avión con respecto a Tierra, en un solo punto, el punto K de la figura. La velocidad del avión con respecto al aire debe tener precisamente la dirección que le lleve del punto P al punto K. Este es el único camino que tiene la dirección correcta del movimiento del avión sobre el suelo. El vector $\overrightarrow{PK}$ es por consiguiente $\vec{v}_a$.



La solución completa del problema que acabamos de exponer se indica en la Fig. (c) del triángulo de vectores velocidad deducimos que la orientación del avión es norte 19,8° Este. Esta es la solución al problema del capitán, que le podrá decir al piloto la dirección que debe seguir en vuelo.

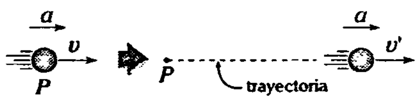
La tarea más importante del capitán antes del vuelo es determinar la dirección de vuelo, mas el piloto puede también preguntarle la duración del vuelo. Para contestar esta pregunta, el capitán obtiene el módulo de la velocidad respecto de tierra v=265 km/h, aproximadamente, y dividiendo los 900 kilómetros entre A y B por esta rapidez anuncia de antemano que el vuelo tendrá una duración de unas 3 horas 25 minutos.

MOVIMIENTOS CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Cuando un cuerpo cambia de posición con una aceleración constante puede describir.

Trayectoria rectilínea

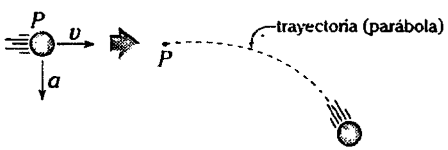
Para este caso debe verificarse que la velocidad y la aceleración deben ser paralelas o colineales, esto asegura que la trayectoria sea rectilínea. Por ejemplo



Tener presente que si un cuerpo empieza a moverse $\left(\vec{v}_0=\vec{0}\right)$ con $\vec{a}$ constante, describe también una línea recta en la dirección de su aceleración.

Trayectoria curvilínea

En este caso debe verificarse que la velocidad y la aceleración deben formar un ángulo diferente de 0° y 180°, ello asegura una trayectoria curva. Por ejemplo

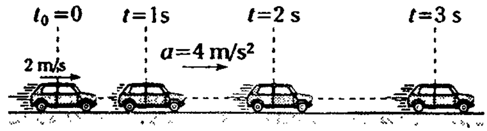


Sobre los casos mencionados primero nos ocuparemos de los casos con trayectoria rectilínea, más conocidos como movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.).

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (M.R.U.V.)

Revisemos el siguiente ejemplo, un automóvil se desplaza horizontalmente con una velocidad de $2\hat{i}$ m/s y repentinamente adquiere una aceleración constante igual a $4\hat{i}$ m/s^2.

Veamos qué se tiene sobre la trayectoria.

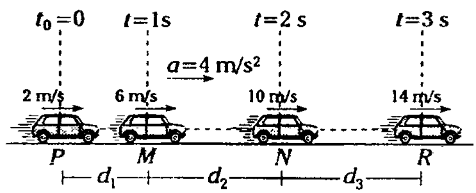


Debido a que la $\vec{a}$ y la $\vec{v}$ del automóvil son paralelas y tienen la misma dirección, esto determina que el automóvil se mueva en línea recta aumentando el valor de su velocidad ¿Cómo aumenta el valor de la velocidad? A esta pregunta podemos dar respuesta al interpretar el valor de la aceleración.

Se tiene

$$a=4\ \text{m/s}^2 \Rightarrow a=\frac{\Delta v}{t}=\frac{4\ \text{m/s}}{1\ \text{s}} \qquad \text{(I)}$$

De (I) planteamos que el automóvil varía el valor de su velocidad en 4 m/s (aumenta) en 1 s, y esto lo va repetir a medida que transcurra el tiempo. Ahora sobre la trayectoria, tenemos



Como podemos apreciar la velocidad del automóvil varía de manera uniforme, es decir guardando un orden, con lo cual concluimos que el automóvil experimenta un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V).

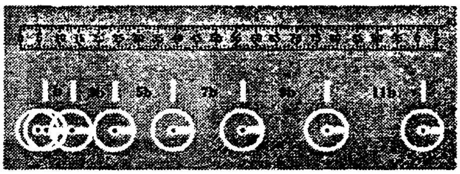
Nota

Sabemos que en un movimiento con velocidad constante (M.R.U.) se cubren desplazamientos iguales en tiempos iguales, pero al variar la velocidad ya no se cumple lo mismo.

Características del M.R.U.V.

Un M.R.U.V. tiene como principales características:

1. La aceleración se mantiene constante.
2. Es un movimiento con trayectoria rectilínea, no necesariamente en una sola dirección.
3. La velocidad del cuerpo experimenta cambios iguales en intervalos de tiempos iguales.
4. Para intervalos de tiempos iguales se tienen desplazamientos diferentes entonces, se debe cumplir que $d_1 \neq d_2 \neq d_3$.
5. La aceleración media e instantánea son constantes e iguales.



La gráfica nos muestra el movimiento uniformemente variado de un disco.

Fórmulas (escalares)[1] del M.R.U.V.

Las fórmulas que rigen este movimiento se pueden obtenerse sin ningún inconveniente a partir del cálculo integral y diferencial, pero nosotros las vamos a deducir de una manera más sencilla.

Partiremos considerando la definición de aceleración media $\left(\vec{a}_m\right)$.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{t}$$

Para el M.R.U.V. la $\vec{a}_m$ es la misma en cualquier intervalo de tiempo, es decir $\vec{a}_m = \vec{a} = \text{cte.}$; y al tomar solo módulos queda

$$a_m = \frac{\Delta v}{t} \Rightarrow a = \frac{v_F - v_0}{t}$$

$$\Rightarrow v_F = v_0 + a.t \qquad \text{(I)}$$

También recordemos la definición de velocidad media $\left(\vec{v}_m\right)$ en módulo.

$v_m = \dfrac{d}{t}$; donde v_m rapidez media

Como en el M.R.U.V., el módulo de la velocidad depende del tiempo en forma lineal (fórmula (I)), entonces, podemos plantear un promedio entre la v_0 y la v_F se obtiene así la rapidez media (v_m), luego se forma

$$d = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t \qquad \text{(II)}$$

Con las fórmulas (I) y (II) podemos obtener dos formulas más. Si reemplazamos (I) en (II)

$$d = \left(\frac{v_0 + (v_0 + at)}{2}\right)t$$

de donde

$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad \text{(III)}$$

(1) Las denominamos así ya que al usarlas reemplazamos solo los módulos de las magnitudes vectoriales que se relacionan.

La otra fórmula la deducimos reordenando (I) y la fórmula (II) como se indica

$$v_F - v_0 = at \quad \text{y} \quad v_F + v_0 = \frac{2d}{t}$$

Al multiplicar miembro a miembro estas dos relaciones, se tiene

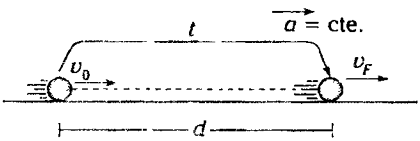
$$(v_F - v_0)(v_F + v_0) = (at)\left(\frac{2d}{t}\right)$$

$$\Rightarrow \; v_F^2 - v_0^2 = 2ad$$

$$\Rightarrow \; v_F^2 = v_0^2 + 2ad \qquad \text{(IV)}$$

Estas cuatro ecuaciones las hemos deducido suponiendo que el cuerpo que describe el M.R.U.V. va aumentando el módulo de su velocidad, pero nosotros las podemos escribir para el caso que aumente o disminuya el módulo de la velocidad de la siguiente forma:

Consideremos a un cuerpo que experimenta M.R.U.V. para un determinado tramo



$$\boxed{v_F = v_0 \pm at} \qquad (1)$$

$$\boxed{v_F^2 = v_0^2 \pm 2ad} \qquad (2)$$

$$\boxed{d = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}} \qquad (3)$$

$$\boxed{d = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t} \qquad (4)$$

De estas evaluaciones, en las tres primeras se usa el signo + o –, si en el cuerpo aumenta o disminuye el módulo de la velocidad, mientras que la cuarta ecuación se utiliza, aumente o disminuya el valor de la velocidad. Asímismo las cuatro ecuaciones son válidas para un M.R.U.V. unidireccional.

Nota

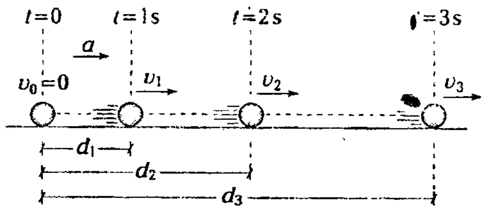
Cuando un cuerpo experimenta un M.R.U.V. unidireccional lo puede hacer sobre una línea horizontal, vertical o inclinada. En cualquiera de estos casos las ecuaciones son válidas.

Ejemplo 15

Consideremos a un cuerpo que empieza a moverse (inicia su movimiento) con una aceleración constante $(\vec{a})$. Describa su movimiento.

Resolución

Si el cuerpo se mueve sobre una superficie horizontal tenemos



Considerando la fórmula (1) se tiene $v_F = at$, cuya rapidez es proporcional al tiempo. Para cada tramo señalado se tiene

$$v_1 = a\,;\, v_2 = 2a\,;\, v_3 = 3a\,;\ldots;\ \text{etc.}$$

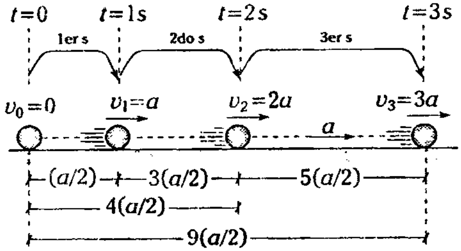
También al considerar la fórmula (3) se tiene

$$d = \frac{at^2}{2}$$

donde se deduce que un cuerpo que empieza a moverse con aceleración constante presenta desplazamientos proporcionales al cuadrado del tiempo transcurrido. Para cada tramo tenemos

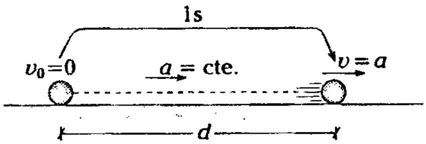
$$d_1 = \frac{a}{2}\ ;\ d_2 = 4\left(\frac{a}{2}\right)\ ;\ d_3 = 9\left(\frac{a}{2}\right);\ldots\ \text{etc.}$$

Con estos datos sobre la trayectoria podemos plantear en forma práctica.



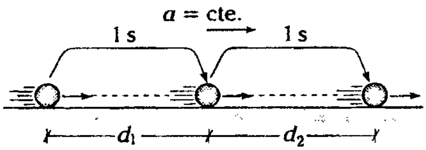
A partir del gráfico podemos establecer para la práctica que

a. El cuerpo al iniciar su movimiento en el primer segundo cubre una distancia igual a la mitad del valor de su aceleración.



$$\boxed{d=\frac{a}{2}}$$

b. La diferencia de distancias para segundos consecutivos nos da el valor de la aceleración.



$$\boxed{d_2-d_1=a}$$

c. El cuerpo, al iniciar su movimiento, para cada segundo que transcurre recorre distancias que están en la relación de los números impares. Por ello planteamos

$$1^{er} \text{ segundo } \Rightarrow d_1=1\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$2^{do} \text{ segundo } \Rightarrow d_2=3\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$3^{er} \text{ segundo } \Rightarrow d_3=5\left(\frac{a}{2}\right)$$

de donde se verifica

$$\frac{d_1}{1}=\frac{d_2}{3}=\frac{d_3}{5}=\frac{d_4}{7}=\ldots$$

Nota

La relación de las distancias que se establece cuando un cuerpo empieza a moverse con aceleración constante fue descubierto por Galileo Galilei, de ahí que a los números 1; 3; 5; 7; ... se les llame números de Galileo.

d. De la observación anterior, se deduce una ley de formación para las distancias cubiertas en el primer, segundo, tercer, ... , enésimo segundo del movimiento; que viene dada por

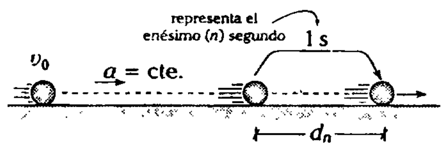
$$\boxed{d_n=(2n-1)\frac{a}{2}} \qquad \text{(I)}$$

donde

n : representa el enésimo segundo del movimiento.

d_n : representa la distancia cubierta en dicho segundo

La fórmula (I) es válida cuando un cuerpo empieza a moverse con aceleración constante, pero cuando un cuerpo se desplaza con una velocidad $(\vec{v}_0)$ y repentinamente adquiere una aceleración constante $(\vec{a})$ paralela a $(\vec{v}_0)$, la distancia que recorre en el enésimo segundo viene dada por



$$\boxed{d_n = v_0 + (2n-1)\frac{a}{2}} \qquad \text{(II)}$$

donde

n : representa el enésimo segundo del movimiento.

Ejemplo 16

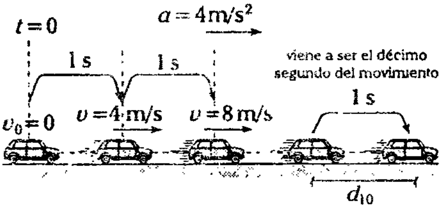
Un automóvil está sobre una pista horizontal experimentando una aceleración constante de 4 m/s^2. Determine la distancia que cubre en el décimo segundo de su movimiento, si el automóvil

a. inicia su movimiento.

b. inicialmente tenía una rapidez de 8 m/s.

Resolución

a. Para este caso el automóvil al iniciar su movimiento con una aceleración de 4 m/s^2, va aumentando el valor de su velocidad en 4 m/s en cada segundo, tal como lo mostramos sobre la trayectoria.



Para calcular la distancia en el décimo segundo podemos utilizar la fórmula (I), la cual plantea

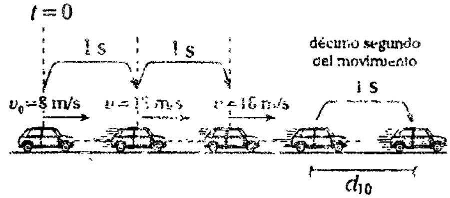
$$d_n = (2n-1)\frac{a}{2}$$

donde para este caso $n = 10$ y $a = 4 m/s^2$.

$$\Rightarrow \quad d_{10} = (2(10)-1)\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad d_{10} = 38 m$$

b. En este caso, al inicio se tiene una velocidad $v_0 = 8$ m/s y ya que el automóvil aumenta el valor de su velocidad en 4 m/s en cada segundo, se tiene sobre la trayectoria lo siguiente



Para determinar d_{10} podemos recurrir a la expresión (II) dada por

$$d_n = v_0 + (2n-1)\frac{a}{2}$$

En este caso $v_0 = 8 m/s$; $n = 10$ y $a = 4 m/s^2$

$$\Rightarrow \quad d_{10} = 8 + (2(10)-1)\frac{4}{2}$$

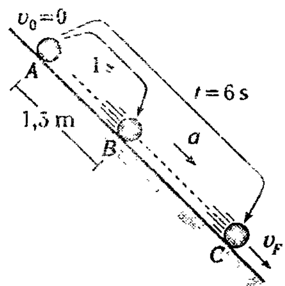
$$\Rightarrow \quad d_{10} = 48 m$$

Ejemplo 17

Una pequeña bola es abandonada sobre un plano inclinado y desciende aumentando su rapidez uniformemente. Si en el primer segundo de su movimiento recorre 1,5 m; ¿qué rapidez tendrá la bola luego de 6 s de haber sido soltada?

Resolución

En el enunciado se plantea que la bola es abandonada sobre un plano inclinado y va aumentando su rapidez, con ello la pequeña bola empieza a moverse ($v_0 = 0$) con una aceleración constante, es decir experimenta un M.R.U.V. Ahora sobre la trayectoria tenemos



Determinando v_F, para el tramo de A hacia C, usamos

$$v_F = \cancel{v_0} + at$$

$$\Rightarrow \quad v_F = a(6) \qquad \text{(I)}$$

Se requiere la aceleración a como de A hacia B y si se tiene el recorrido en el primer segundo del movimiento, entonces se debe verificar que

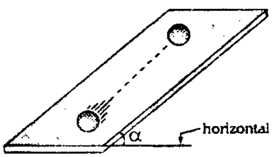
$$d_{AB} = \frac{a}{2} = 1{,}5$$

de donde $a = 3\ \text{m/s}^2$.

Finalmente en (I) $v_F = 18$ m/s.

Nota

Un plano inclinado viene a ser una superficie plana inclinada cierto ángulo con respecto a la horizontal. Este tipo de superficie fue utilizada por Galileo para deducir las leyes del movimiento uniformemente variado, ya que de esta forma hace el movimiento de caída más lento y más fácil de analizar.

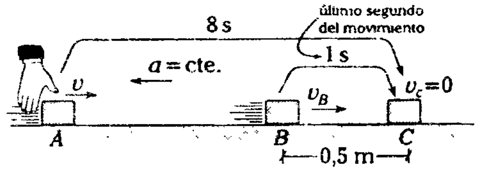


Ejemplo 18

Un pequeño bloque es lanzado sobre una superficie horizontal con una rapidez v. Si se sabe que estuvo en movimiento durante 8 s y en el último segundo recorrió 0,5 m; ¿qué valor toma v? (Considere que el bloque experimenta M.R.U.V.)

Resolución

Del enunciado se desprende que una vez que el pequeño bloque fue lanzado empieza a disminuir el valor de la velocidad uniformemente hasta que se detiene en 8 s (durante este tiempo experimentó M.R.U.V.) tal como se muestra.



Calculemos v si para el tramo de A hacia C podemos considerar que

$$v_F = v_0 - at$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v - a(8) \quad \Rightarrow \quad v = 8a \qquad \text{(I)}$$

Se requiere a, en el tramo de B hacia C transcurre 1 s, con ello podemos plantear que la rapidez en este tramo disminuye en el valor de la aceleración, con lo cual tenemos que $v_B = a$. Finalmente en dicho tramo planteamos

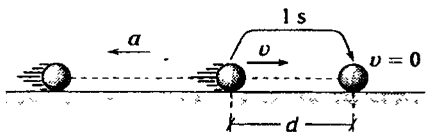
$$d_{BC} = \left(\frac{v_B + v_C}{2}\right) t_{BC}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5 = \left(\frac{a+0}{2}\right)1 \quad \Rightarrow \quad a = 1\ \text{m/s}^2$$

Por lo tanto, en (I) tenemos $v = 8(1) = 8$ m/s.

Nota

Después de haber resuelto este último ejemplo podemos concluir que en un M.R.U.V. desacelerado, un segundo antes de frenarse, el cuerpo recorre una longitud igual a la mitad del valor de la aceleración; es decir



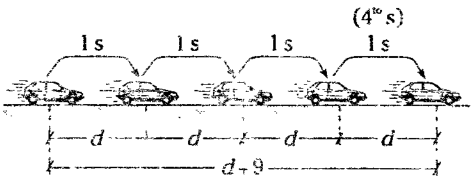
$$\boxed{d = \frac{a}{2}}$$

Problema 1

Cuando se analiza el movimiento de un automóvil que experimenta un M.R.U. notamos que en los cuatro primeros segundos recorre 9 m más que en el cuarto segundo. Determine la rapidez del automóvil.

Resolución

Graficando la posición del auto en cada segundo durante los cuatro primeros segundos.



Si en el cuarto segundo consideramos que el auto avanza d metros, entonces según el enunciado el auto avanzará $(d + 9)$ m, en los cuatro primeros segundos.

Recordando que en el M.R.U. un móvil avanza iguales distancias en cada segundo podemos indicar en el gráfico que en los demás segundos el auto también avanza d metros.

Con esto obtenemos la siguiente relación

$$4d = d + 9$$
$$\Rightarrow \; 3d = 9$$
$$\Rightarrow \; d = 3\text{ m}$$

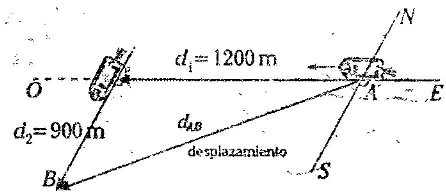
El resultado y la gráfica nos indica que el auto avanza 3 m en cada segundo, entonces la rapidez del auto es 3 m/s.

Problema 2

Un yate parte de un muelle en dirección oeste, luego de haber avanzado 1200 m cambia de dirección hacia el sur, logrando avanzar en esta dirección 900 m. Si el yate se mantuvo en movimiento durante 5 minutos, determine el módulo de la velocidad media desde que partió hasta que se detuvo.

Resolución

Consideremos al punto A como la ubicación del muelle, y si se trazan los ejes cardinales el yate avanza al oeste 1 200 m llegando a P. Seguidamente avanza hacia el sur 900 m hasta llegar a B. El segmento que parte de A y llega a B es el desplazamiento $\vec{d}_{AB}$.



Como nos piden el módulo de la velocidad media $(\vec{v}_m)$, entonces aplicamos

$$v_m = \frac{d_{AB}}{t} \qquad \text{(I)}$$

d_{AB} es el módulo del desplazamiento o distancia de A hacia B. De la figura, en el ⊿APB usando el Teorema de Pitágoras se tiene

$$d_{AB} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

Reemplazando los valores

$$d_{AB} = \sqrt{(1\,200)^2 + (900)^2} = 1\,500\text{ m}$$

t : tiempo empleado para ir de A hacia B.

$t = 5$ minutos $= 5(60)$s $\Rightarrow$ $t = 300$ s

Reemplazando en (I)

$$v_m = \frac{1\,500\text{ m}}{300\text{ s}} \;\Rightarrow\; v_m = 5\text{ m/s}$$

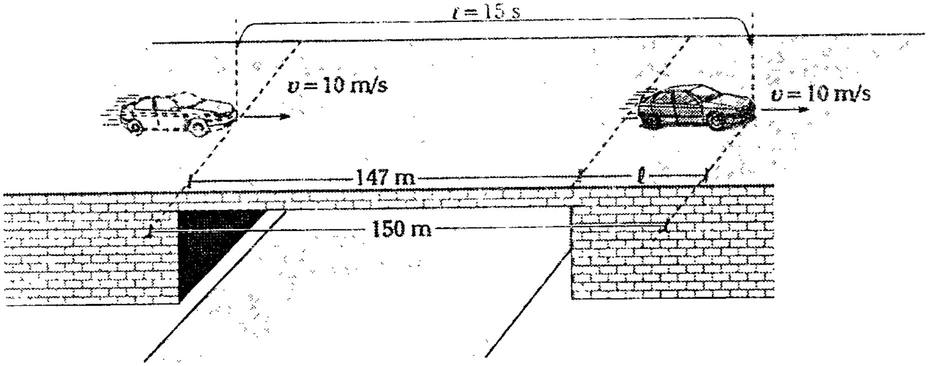
¿Qué significa físicamente este resultado? Significa que si el yate se moviera en la dirección del desplazamiento con rapidez constante de 5 m/s, llegaría a B cubriendo los 1 500 m en 5 minutos.

Problema 3

Para atravesar un puente de 147 m de longitud, un automóvil que se mueve con velocidad constante de módulo 10 m/s emplea 15 s. ¿Qué longitud tiene el automóvil?

Resolución

Según el enunciado, el automóvil se mueve a velocidad constante ($v=10$ m/s), es decir realiza un M.R.U.; y al emplear 15 s en atravesar el puente, significa que su parte delantera avanza 150 m. Como la longitud del puente es 147 m y el automóvil tiene una longitud ℓ, entonces desde el momento que el automóvil empieza a ingresar al puente hasta que termina de cruzarlo, su parte delantera habrá avanzado $d=(147+\ell)$ m y esto debe ser 150 m.



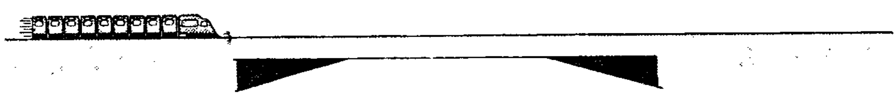
Si $147+\ell=150$ m,

se obtiene que $\ell=3$ m

por lo tanto, la longitud del automóvil es 3 m.

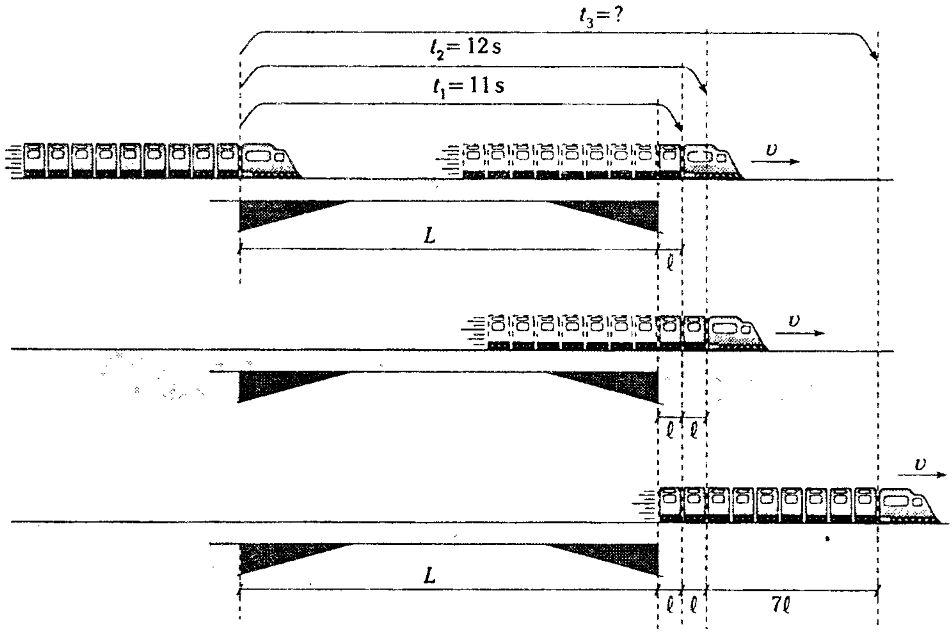
Problema 4

Un tren se dirige en línea recta y con rapidez constante de 10 m/s, a un puente recto de longitud. Si los vagones son de igual longitud (ℓ) y se sabe que un vagón cruza completamente el puente en 11 s y dos vagones juntos lo hacen en 12 s; ¿en cuánto tiempo cruzarán el puente nueve vagones juntos?



Resolución

Representemos gráficamente el instante en que el primer vagón empieza a cruzar el puente y el instante en que el primer, segundo y noveno vagón terminan de cruzar el puente.



Del gráfico notamos

- Para cruzar el puente, un vagón recorre una distancia de

  $d_1=L+\ell$

  en un tiempo $t_1=11$ s.
- Para cruzar dos vagones, deben recorrer

  $d_2=L+2\ell$

  en un tiempo $t_2=12$ s.
- Luego para los nueve vagones deben recorrer

  $d_9=L+9\ell$

  en un tiempo $t_3=?$

Como la rapidez en los tres casos es la misma es constante

$$v=\frac{d_1}{t_1}=\frac{d_2}{t_2}=\frac{d_3}{t_3}=10\text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \frac{L+\ell}{11}=\frac{L+2\ell}{12}=\frac{L+9\ell}{t_3}=10$$

(I) (II) (III)

De (I) tenemos $L+\ell=110$ m

y de (II) $L+2\ell=120$ m

Resolviendo

$\ell=10$ m y $L=100$ m

En (III)

$$\frac{100+90}{t_3}=10 \Rightarrow t_3=19\text{ s}$$

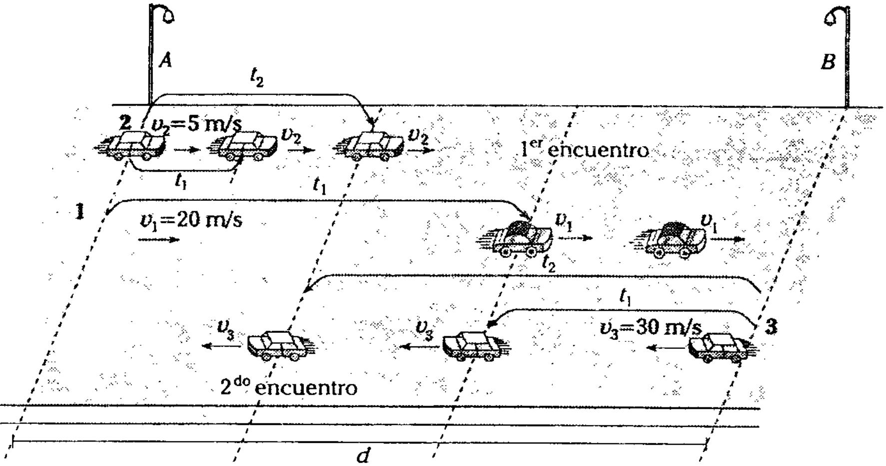
Luego los nueve vagones cruzarán el puente en 19 s.

Problema 5

Frente a un poste A pasan dos automóviles simultáneamente hacia un poste B con rapidez constante de 5 m/s y 20 m/s, respectivamente, sobre una pista rectilínea. Si en ese instante desde el poste B sale otro automóvil con rapidez constante de 30 m/s hacia el poste A y se cruza con los automóviles anteriores con un intervalo de 1 minuto, ¿qué distancia hay entre los postes A y B?

Resolución

Veamos lo que sucede.



Advierta que $v_1 > v_2$ y d es la distancia entre los postes A y B; por lo tanto, el automóvil (1) se encuentra primero con el automóvil (3) al cabo de un intervalo de tiempo t_1 (tiempo de encuentro).

$$t_1 = \frac{d}{v_1 + v_3} = \frac{d}{50} \qquad \text{(I)}$$

También, según la figura el automóvil (2), se encuentra con el automóvil (3) a partir del instante inicial, luego de un intervalo de tiempo t_2 (también tiempo de encuentro).

$$t_2 = \frac{d}{v_2 + v_3} = \frac{d}{35} \qquad \text{(II)}$$

Según la figura, observe que $t_2 > t_1$. Por lo tanto, $(t_2 - t_1)$ es el intervalo de tiempo que transcurre de un encuentro a otro.

Por dato del problema

$$t_2 - t_1 = 1 \text{ min} = 60\,\text{s} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III) se tiene

$$\frac{d}{35} - \frac{d}{50} = 60$$

donde

$d = 7\,000$

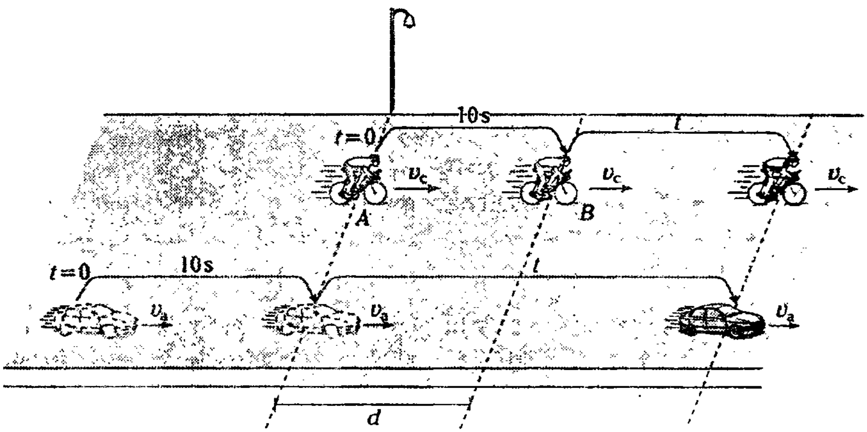
m = 7 km

Problema 6

Un ciclista que se desplaza sobre una pista rectilínea pasa frente a un poste con una rapidez constante de 5 m/s. Luego de 10 s lo hace un automóvil con una velocidad constante de 20 m/s y en la misma dirección, determine luego de cuántos segundos de haber pasado el automóvil frente al poste, el ciclista es alcanzado por el automóvil.

Resolución

Según el enunciado, el ciclista se mueve en línea recta y con una rapidez constante ($v_c = 5$ m/s), dadas según estas características de su movimiento, el ciclista realiza un M.R.U. Por otro lado el automóvil se mueve con velocidad constante ($v_a = 20$ m/s), lo que significa que el automóvil realizaba también un M.R.U. Consideremos que cuando el ciclista se encuentra frente al poste en ese instante el automóvil se encuentra detrás en una posición N; 10 s después, el ciclista se encuentra en una posición B y por condición del problema el automóvil está frente al poste. Como $v_a > v_c$ el automóvil luego de t segundos de pasar frente al poste alcanzará al ciclista.



Ahora como nos piden calcular t, lo cual representa un tiempo de alcance del automóvil sobre el ciclista, podemos plantear

$$t = \frac{d}{v_a - v_c} = \frac{d}{20-5} = \frac{d}{15} \qquad \text{(I)}$$

Pero d es la distancia que avanza el ciclista de A hacia B en 10 s con una rapidez constante de 5 m/s, lo que significa que en cada segundo el ciclista avanzará 5 m y en 10 s avanzará $d = 50$ m.

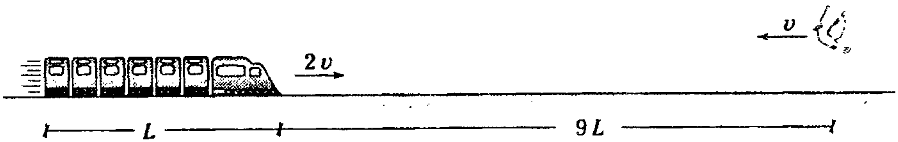
En (I)

$$t = \frac{50}{15} \Rightarrow t = \frac{10}{3} \text{ s}$$

por lo tanto el automóvil alcanza al ciclista luego de 10/3 s de haber pasado frente al poste.

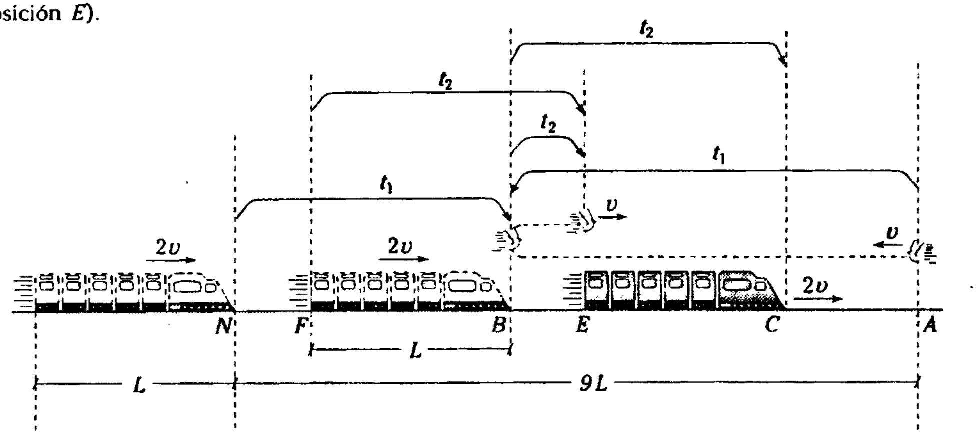
Problema 7

A partir del instante mostrado, determine cuánto recorre la paloma y el tren hasta el instante que la paloma se encuentra por encima de la parte posterior del tren. Considere que la paloma en el instante en que se encuentra sobre la parte delantera del tren se da vuelta para dirigirse en dirección contraria y con la misma rapidez. (Considere que la paloma y el tren desarrollan un M.R.U., también desprecie el intervalo de tiempo en el cual la paloma cambia su velocidad).



Resolución

En el siguiente diagrama mostramos el instante inicial, el instante en que la paloma se encuentra con la parte delantera del tren (posición B) y el instante en que la parte posterior da alcance a la paloma (posición E).



Del diagrama debemos determinar el recorrido del tren de N hacia C (e_{NC}) y el recorrido de la paloma de A hacia E (e_{ABE}). Como el tren y la paloma se mueven con rapidez constante, para el tren planteamos

$$e_{NC} = v_{\text{tren}} \cdot t_{NC}$$

$$e_{NC} = (2v)(t_1 + t_2) \qquad \text{(I)}$$

y para la paloma, análogamente

$$e_{AE} = v_{\text{paloma}} \cdot t_{AE}$$

$$e_{AE} = (v)(t_1 + t_2) \qquad \text{(II)}$$

Del diagrama, nótese que t_1 es el tiempo de encuentro (t_e) entre la parte delantera del tren y la paloma desde el momento en que la parte delantera se encuentra en N y la paloma se encuentra en A. Entonces

$$t_e = \frac{d_{AN}}{v_{\text{paloma}} + v_{\text{tren}}}$$

$$t_1 = \frac{9L}{v + 2v}$$

$$t_1 = \frac{3L}{v} \qquad \text{(III)}$$

Además t_2 es el tiempo de alcance (t_a) de la parte posterior del tren a la paloma, desde el momento en que la parte posterior se encuentra en F y la paloma se encuentra en B. Entonces

$$t_a = \frac{d_{FB}}{v_{tren} - v_{paloma}}$$

$$t_2 = \frac{L}{2v - v} \Rightarrow t_2 = \frac{L}{v} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente (III) y (IV) en (I) y (II)

$$e_{NC} = 2v\left(\frac{3L}{v} + \frac{L}{v}\right) = 8L$$

$$e_{AE} = v\left(\frac{3L}{v} + \frac{L}{v}\right) = 4L$$

Por lo tanto, el tren y la paloma recorren $8L$ y $4L$, respectivamente, hasta el instante en que la paloma se encuentra sobre la parte posterior del tren.

Observación

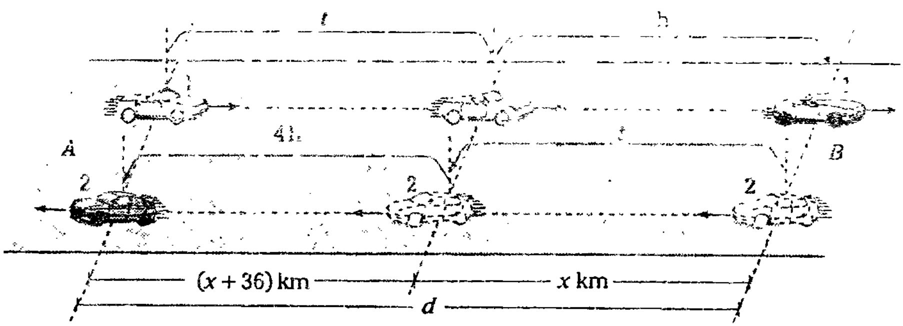
Se sugiere desarrollar el problema manejando proporciones para los recorridos, ya que pasa el mismo tiempo para ambos móviles y tienen rapidez constante.

Problema 8

Dos automóviles pasan simultáneamente por las estaciones A y B como se muestra. Si cuando se cruzan, un móvil habrá recorrido 36 km más que el otro, y a partir de ese instante el primero tarda 1 hora en llegar a B y el segundo 4 horas en llegar a A; determine la distancia entre las estaciones si son unidas por una pista rectilínea. (Considere que los automóviles realizan M.R.U. sobre vías paralelas).

Resolución

Según el enunciado, los automóviles realizan M.R.U. Desde el instante que los automóviles pasan simultáneamente frente a las estaciones, transcurre t horas hasta que se crucen y por condición del problema uno de ellos debe avanzar 36 km más que el otro. Este automóvil tendrá que ser el automóvil 1, porque luego del encuentro el automóvil 2 tarda más para llegar a la otra estación, lo cual nos permite deducir que el automóvil 1 presenta mayor rapidez. Ahora si consideramos que el automóvil 2 avanza x km hasta que se dé el encuentro, el automóvil 1 avanzará $(36 + x)$ km.



Del diagrama debemos calcular d, donde

$$d = (x+36)+x$$

$$\Rightarrow\ d = 2x+36 \qquad \text{(I)}$$

Ahora se requiere x y la calcularemos analizando a los automóviles, para ellos se cumple que

$$v = \frac{d}{t}$$

Para el automóvil 1: $\dfrac{x+36}{t} = \dfrac{x}{1}$

$$\Rightarrow\ xt = x+36 \qquad \text{(II)}$$

Para el automóvil 2: $\dfrac{x+36}{4} = \dfrac{x}{t}$

$$\Rightarrow\ (x+36)t = 4x \qquad \text{(III)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$\frac{x\cancel{t}}{(x+36)\cancel{t}} = \frac{x+36}{4x}$$

Resolviendo $x = 36$ km

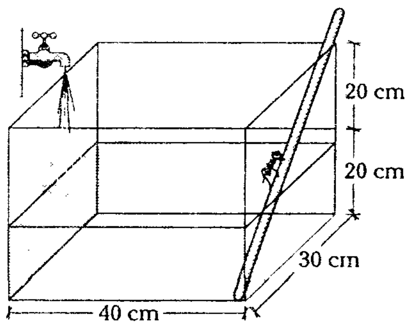
En (I) $\quad d = 2(36)+36$

$$d = 108 \text{ km}$$

por lo tanto, la distancia entre las estaciones es 108 km.

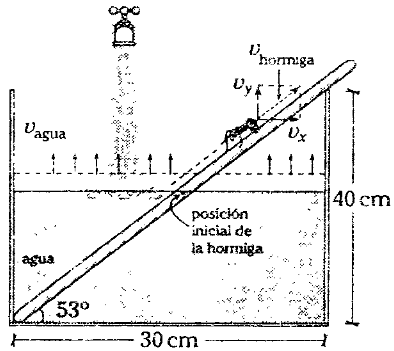
Problema 9

Al recipiente ingresa agua a razón constante de 600 cm^3/s. ¿Con qué mínima rapidez constante debe subir la hormiga por la superficie inclinada, a partir del instante mostrado, para no ser alcanzada por el agua?



Resolucion

Representemos gráficamente el desplazamiento de la hormiga y del nivel libre de agua, conforme ingrese el agua al recipiente (de una vista lateral).



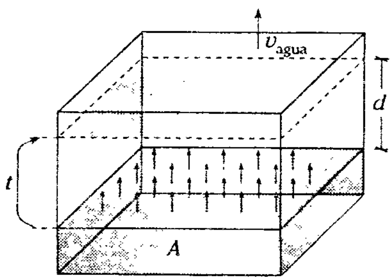
Al descomponer la velocidad de la hormiga ($v_{hormiga}$); deduciremos que

- si $v_y \geq v_{agua}$, la hormiga no será alcanzada por el nivel de agua
- si $v_y < v_{agua}$, la hormiga será alcanzada por el nivel de agua.

Entonces deducimos que la menor rapidez que debería presentar la hormiga, sin que pueda ser alcanzada por el nivel del agua que se eleva, se dará si

$$v_y = v_{agua} \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos la rapidez con la que se eleva el nivel del agua.



Por condición del problema en el recipiente ingresa por cada segundo $600\ cm^3$ de agua. De esta manera, el nivel del agua se eleva a velocidad constante (v_{agua}); entonces en un intervalo de tiempo t se tendrá d.

$$v_{agua}=\frac{d}{t} \qquad \text{(II)}$$

Además en t el volumen del agua habrá incrementado en ΔV, donde

$$\Delta V=Ad$$

Entonces

$$V_{\substack{\text{ingresa por}\\ \text{segundo}}}\cdot t=Ad$$

$$\frac{V_{\substack{\text{ingresa por}\\ \text{segundo}}}}{A}=\frac{d}{t} \qquad \text{(III)}$$

Igualando (II) y (III)

$$v_{agua}=\frac{V_{\substack{\text{ingresa por}\\ \text{segundo}}}}{A}=\frac{V}{A}$$

$$\Rightarrow\ v_{agua}=\frac{600\ cm^3/s}{30\ cm\times 40\ cm}$$

$$v_{agua}=25\ cm/s \qquad \text{(IV)}$$

(IV) en (I)

$$v_y=25\ cm/s$$

Pero de la descomposición de la velocidad de la hormiga

$$v_y=v_{hormiga}\,\text{sen}\,53°$$

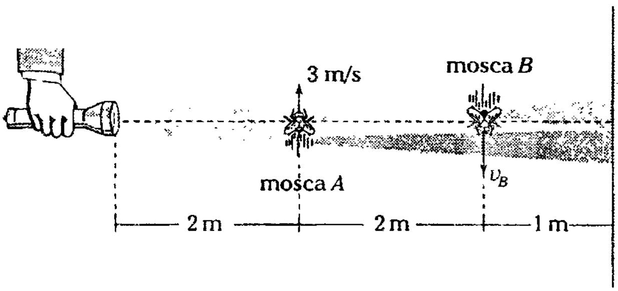
$$25=v_{hormiga}\frac{4}{5}$$

$$v_{hormiga}=2{,}5\ cm/s$$

Por lo tanto, la menor rapidez con la que se debe desplazar la hormiga para no ser alcanzada por el agua es 2,5 cm/s.

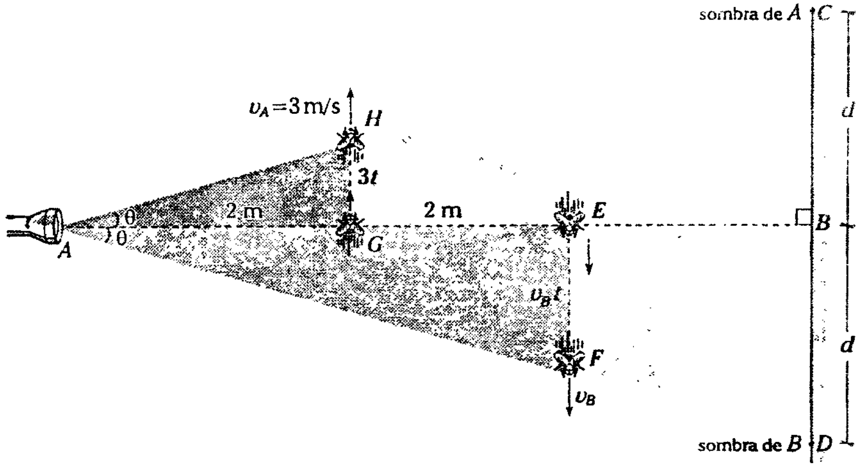
Problema 10

Dos moscas A y B experimentan M.R.U. tal como se muestra. Determine la rapidez de la mosca B, si consideramos que sus sombras proyectadas sobre la pared en todo instante tienen la misma rapidez.



Resolución

Las sombras de las moscas en la pared se representan en la porción de superficie que se ve oscura en la pared, debido a que las moscas evitan el paso de la luz hacia la pared. Como las moscas realizan M.R.U., las moscas A y B se mueven con velocidad constante de módulos $v_A=3$ m/s y v_B, respectivamente. Si desde el instante que las moscas están alineadas con la linterna transcurren t segundos, la mosca A debe avanzar $d_A=3t$ y la mosca B debe avanzar $d_B=v_Bt$. La proyección de la sombra de cada mosca habrá avanzado cierta distancia, las cuales deberán de ser iguales a d ya que por condición las sombras se desplazan con la misma rapidez. Representemos gráficamente lo deducido hasta el momento.

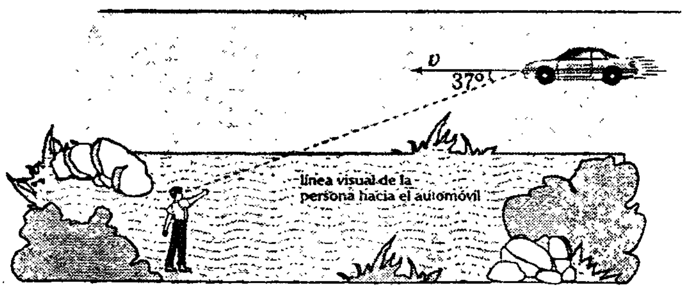


Del diagrama se deduce que el $\triangle ABC$ y el $\triangle ABD$ son congruentes, entonces $C\hat{A}B = B\hat{A}D = \theta°$. Por lo tanto, en el $\triangle AEH$: $\tan\theta = \frac{3t}{2}$ y en el $\triangle AEF$: $\tan\theta = \frac{v_B t}{4}$. Luego se debe cumplir $\frac{3t}{2} = \frac{v_B t}{4}$

Resolviendo, $v_B = 6$ m/s y por ende, la mosca B se desplaza con una rapidez de 6 m/s.

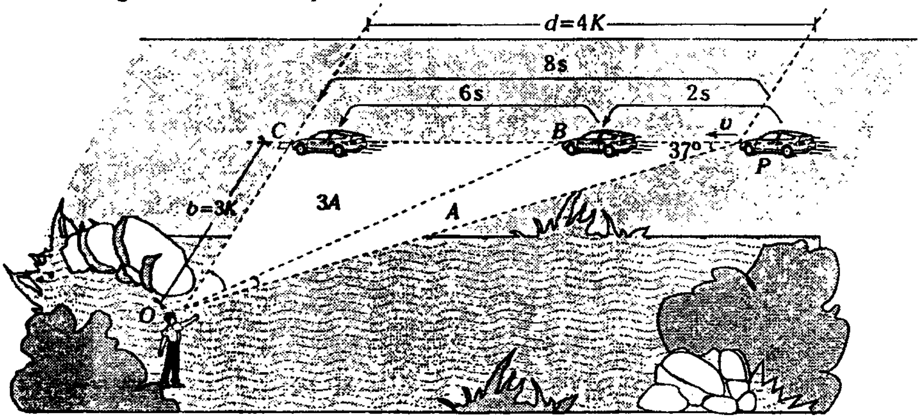
Problema 11

El gráfico nos muestra un automóvil que desarrolla M.R.U. sobre una pista horizontal. A cierta distancia de la pista se encuentra una persona que en todo instante observa al automóvil ¿Cuál será la rapidez del automóvil si a partir del instante mostrado la línea visual de la persona al automóvil barre un área de 216 m^2 cada 2 s? Considere que la menor distancia de separación entre el automóvil y la persona ocurre luego de 8 s a partir del instante mostrado. (No considere las dimensiones del automóvil).



Resolución

Representemos gráficamente el desplazamiento del automóvil.



En el diagrama se muestra que la menor distancia que existe entre el automóvil y el observador es b, en tal sentido, el automóvil para ir de P hacia C ha empleado 8 s. Ahora, como el automóvil desarrolla un M.R.U. tenemos de P hacia C.

$$v=\frac{d_{PC}}{t}=\frac{d}{8}=\frac{4K}{8}=\frac{K}{2} \qquad \text{(I)}$$

A continuación determinemos K. Por condición, la visual de la persona al automóvil barre un área $A=216\ m^2$ en 2 s; entonces en 8 s se barrerá un área de $4A$, donde del ⊾PCO.

$$4A=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{d\times b}{2}$$

Como ⊾PCO es un ⊾37° y 53°

$$4A=\frac{(4K)(3K)}{2}$$

$$A=\frac{3K^2}{2}$$

$$216=\frac{3K^2}{2} \Rightarrow K=12$$

entonces en (I)

$$v=6\ m/s$$

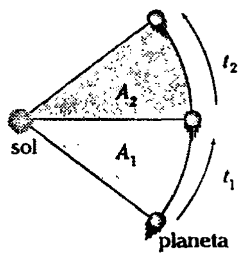
Nota

Observe que el segmento que une al automóvil con los ojos del observador barre áreas que son proporcionales al tiempo transcurrido.

$$\frac{t_{BC}}{t_{PB}}=\frac{6\ s}{2\ s}=\frac{3}{1}$$

Correspondientemente el área de las regiones triangulares, que tienen por base los segmentos BC y PB, está en relación de 3 a 1.

Esta característica también se observa en el movimiento orbital de los planetas en torno al Sol.



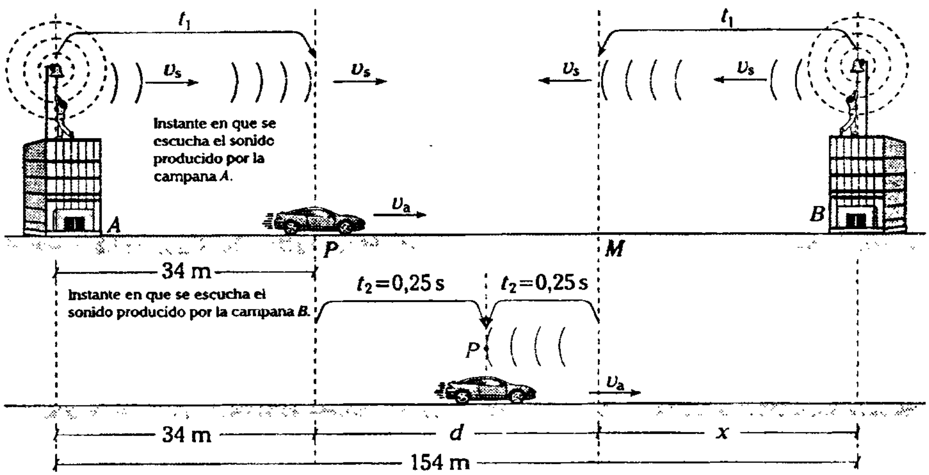
$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{t_1}{t_2}}$$

Problema 12

Al borde de una pista rectilínea se encuentran dos colegios A y B distanciados 154 m. El conductor de un automóvil, que se desplaza con rapidez constante entre los colegios, escucha el sonido de la campana de uno de ellos cuando se encuentra a 34 m de este, y luego de 0,25 s escucha el sonido de la otra campana. Si ambas campanas emitieron el sonido simultáneamente, determine la rapidez del automóvil. (v_s= 340 m/s)

Resolución

Según el enunciado, el automóvil desarrolla un M.R.U. Consideremos que está cerca al colegio A y se dirige al colegio B. Cuando han transcurrido t_1 segundos de haberse tocado simultáneamente las campanas, el conductor del automóvil escucha primero el sonido producido por una de las campanas que sería la del colegio A y estaría a 34 m de él. Esto determinaría que el colegio B se encuentre a una distancia de 154 m – 24 m = 120 m respecto del automóvil. Luego de t_2 = 0,25 s escucharía el sonido de la campana del colegio B; mientras que el sonido del colegio A lo adelanta.



Como los sonidos producidos se propagan en el aire con la misma rapidez, entonces los sonidos deben propagarse la misma distancia. En tal sentido del diagrama

$x = 34$ m y además $d = 86$ m

Ahora, para calcular la rapidez del automóvil podemos considerar la fórmula del tiempo de encuentro entre el automóvil a partir de P con el sonido que viene del colegio B a partir de M. Para este caso el tiempo de encuentro sería $t_e = t_2$, entonces planteamos

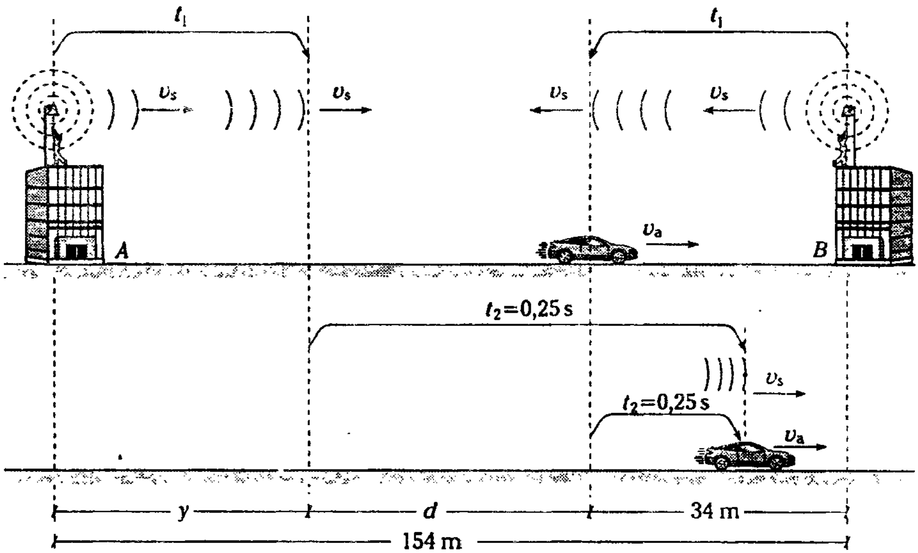
$$t_2 = \frac{d}{v_a + v_s} \Rightarrow 0,25 = \frac{86}{v_a + 340}$$

Se obtiene

$v_a = 4$ m/s

La respuesta anterior la hemos obtenido al suponer que el conductor escucha primero el sonido producido por la campana del colegio A; ahora resolvamos el problema considerando que el automóvil va del colegio A al colegio B, pero el conductor va a escuchar primero el sonido que proviene del colegio B.

De forma similar, al caso anterior, el conductor del automóvil escucharía primero el sonido producido por la campana B y luego de $t_2 = 0{,}25$ s de haber escuchado el sonido producido por la campana B escucharía el sonido producido por la campana A.



Se observa en el diagrama que cuando el conductor escucha el sonido producido por la campana B, la onda sonora producida por la campana A esta d metros detrás del conductor y luego de t_2 segundos esta alcanza al conductor, siendo así t_2 un tiempo de alcance que verifica

$$t_2 = \frac{d}{v_s - v_a}$$

Reemplazando

$$0{,}25 = \frac{d}{340 - v_a} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere d. A partir del gráfico tenemos que en el mismo intervalo de tiempo t_1 los sonidos producidos por las campanas deben propagarse a igual distancia entonces tenemos que $y = 34$ m con lo cual $d = 86$ m.

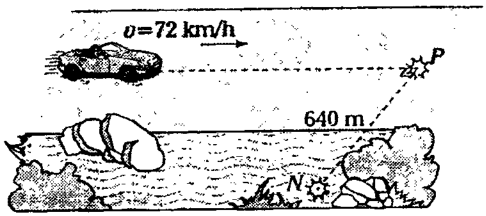
En (I) se obtiene

$$v_a = 4 \text{ m/s}$$

Problema 13

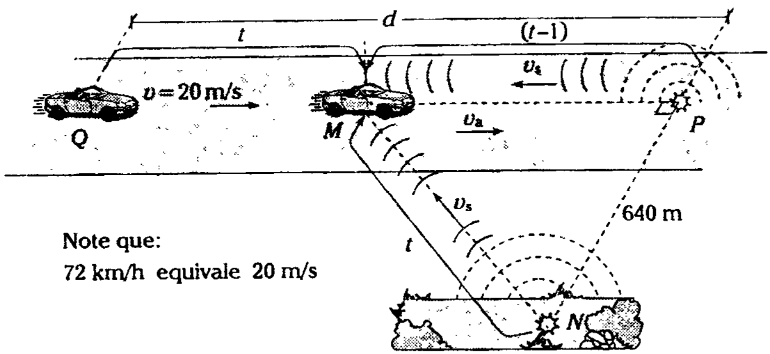
En el gráfico se muestra un automóvil que experimenta un M.R.U. En un determinado instante en N se produce una explosión y 1 s después otra ocurre en P. Si las explosiones son escuchadas simultáneamente por el conductor del automóvil, ¿a qué distancia de P estaba el automóvil cuando se produjo la explosión?

($v_s = 320$ m/s)



Resolución

Según el enunciado, consideremos que cuando el automóvil se encuentra en Q, en N se produce la primera explosión y luego de un segundo se produce la segunda explosión en P, las cuales son escuchadas simultáneamente por el conductor del automóvil en M. Si el automóvil emplea t segundos en ir de Q hacia M, entonces el sonido originado debido a la explosión en N tardaría en propagarse hacia M t segundos y el sonido originado debido a la explosión en P tardaría en propagarse $(t-1)$ segundos.



Note que:
72 km/h equivale 20 m/s

Del diagrama debemos encontrar la distancia entre Q y P o sea d, donde

$$d = \overline{QM} + \overline{MP} \qquad \text{(I)}$$

Como el automóvil realiza M.R.U. y el sonido se propaga a rapidez constante, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} \overline{QH} &= v_a t = 20t \\ \overline{MP} &= v_s(t-1) = 320(t-1) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

(II) en (I)

$$d = 20t + 320(t-1) \qquad \text{(III)}$$

Ahora se requiere t, lo cual podremos calcular a partir del ⊾MPN, si se aplica el Teorema de Pitágoras.

$$\overline{NM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 \qquad \text{(IV)}$$

De (II) $\overline{MP} = 320(t-1)$

además $\overline{NM} = v_s t = 320t$ (V)

Del diagrama $\overline{NP} = 640$ m

(V) en (IV)

$$(320t)^2 = (320\,(t-1))^2 + 640^2$$

$$t^2 = (t-1)^2 + 4$$

Resolviendo se obtiene

$$t = \frac{5}{2}\text{s}$$

Finalmente reemplazamos en (III)

$$d = 20\left(\frac{5}{2}\right) + 320\left(\frac{5}{2} - 1\right)$$

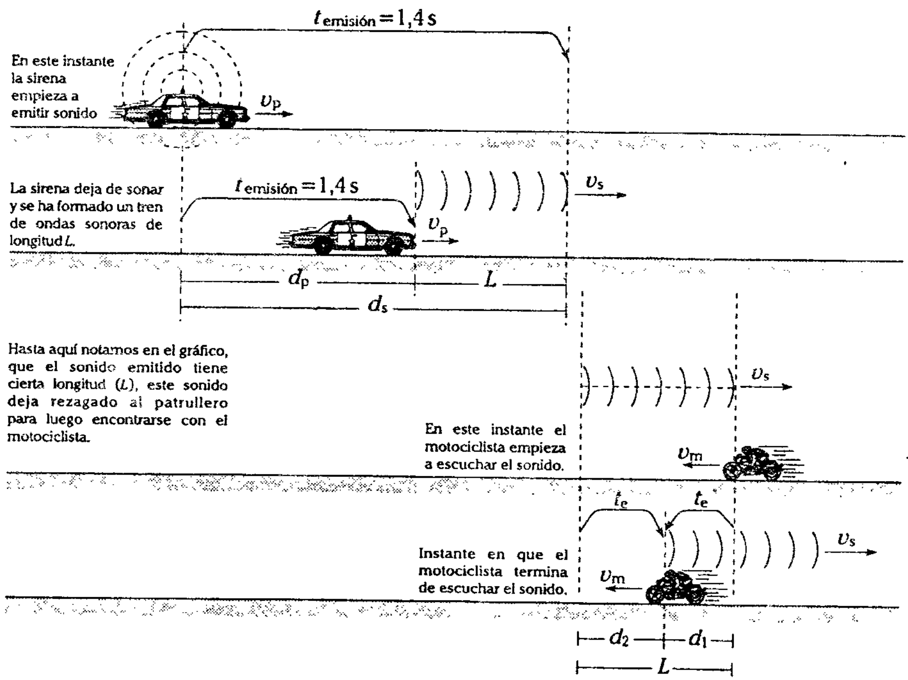
$$d = 530\text{ m}$$

Problema 14

Un patrullero se desplaza con una velocidad constante de 18m/s y de pronto activa su sirena durante 1,4 s. En la misma pista se desplaza un motociclista con una rapidez constante de 12m/s en dirección opuesta al patrullero. ¿Durante cuánto tiempo el motociclista escuchó el sonido de la sirena? ($v_{\text{sonido}} = 348\,\text{m/s}$)

Resolución

Representemos gráficamente lo ocurrido de acuerdo al enunciado.



Nos piden el intervalo de tiempo durante el cual el motociclista escucha el sonido. Según el gráfico anterior, sería t_e que es el tiempo de encuentro entre la parte posterior del sonido emitido y el motociclista. Para ello planteamos

$$t_e = \frac{L}{v_s + v_m} = \frac{L}{248+12} = \frac{L}{360} \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos L del diagrama

$$d_s = d_p + L$$

$$v_s \cdot t_{\text{emisión}} = v_p \cdot t_{\text{emisión}} + L$$

$$(348)(1,4) = 18(1.4) + L$$

Efectuando se tiene

$$L = 448 \text{ m} \qquad \text{(II)}$$

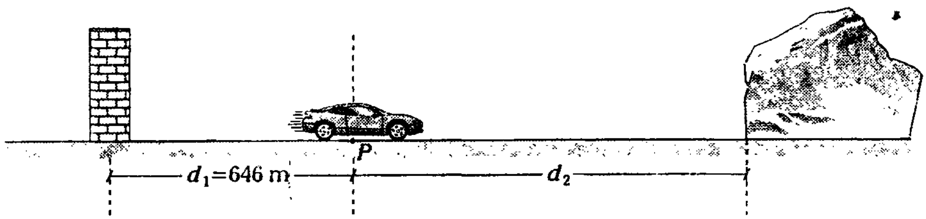
(II) en (I)

$$t_e = \frac{448}{360} \Rightarrow t_e = 1,28 \text{ s}$$

Por lo tanto, el motociclista escucha el sonido de la sirena durante 1,28 s.

Problema 15

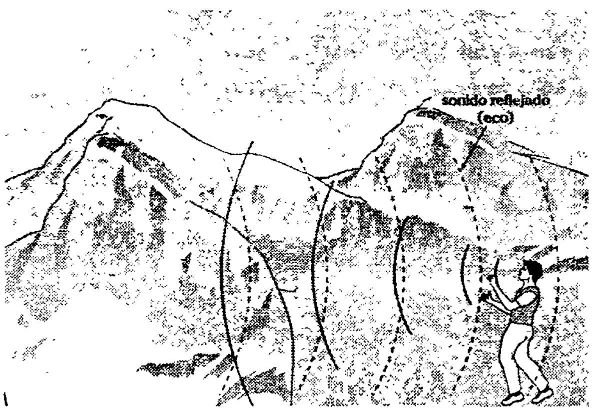
Un automóvil se mueve en línea recta con una rapidez constante de 17 m/s. Si en el instante mostrado el conductor toca la bocina y luego logra escuchar dos ecos consecutivos con una diferencia de 2 s, ¿cuál es la distancia entre el muro y el cerro? (Considere $v_{\text{sonido}} = 340$ m/s y además $d_2 > d_1$)



Resolución

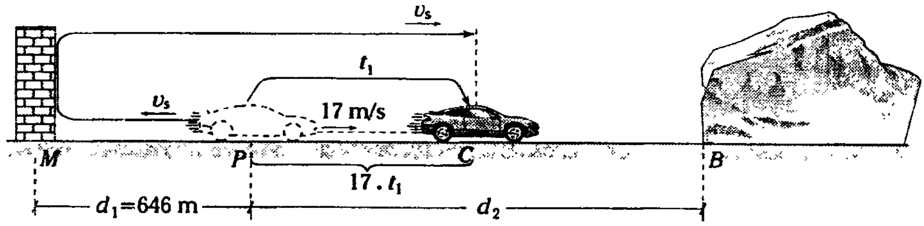
El sonido al propagarse si encuentra un obstáculo como un muro, cerro, etc. se refleja. Si este sonido reflejado es percibido por una persona, ella lo interpreta como **eco**.

En el instante que el automóvil pasa por P se producirá un sonido que se propaga tanto a la derecha como a la izquierda, tal que sus respectivos ecos se escucharán con un intervalo de 2 s según el enunciado. Sin embargo, no sabemos cuál de ellos será el primero en escucharse. En todo caso, evaluamos el intervalo de tiempo t_1 que tarda el sonido que se refleja en el muro y es escuchado en el automóvil, ya que conocemos d_1.



El eco, fenómeno ondulatorio muy conocido no es más que sonido reflejado.

Veamos el siguiente gráfico



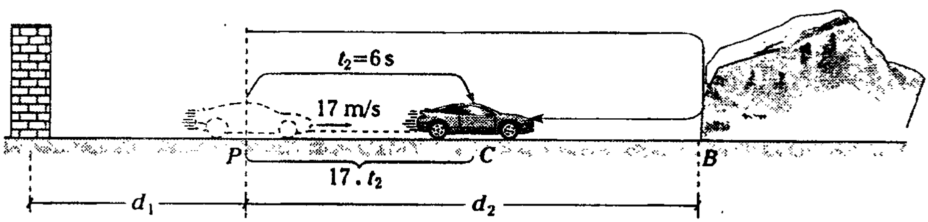
Del diagrama, el recorrido del sonido que va hacia el muro es

$$e_1 = \overline{PM} + \overline{MC}$$

$$\Rightarrow \quad v_s t_1 = d_1 + \left(d_1 + \overline{PC}\right) \quad \Rightarrow \quad 340t_1 = 2d_1 + 17t_1$$

$$\Rightarrow \quad 340t_1 = 2(646) + 17t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 4\ \text{s}$$

Luego, si consideramos que el sonido que se refleja en el cerro, se escucha 2 s después; entonces el tiempo que tarda en escucharse dicho sonido será $t_2 = t_1 + 2 = 6$ s. Con este dato determinamos d_2.



Del gráfico, tenemos que el recorrido del sonido hacia el cerro es

$$e_2 = v_s \cdot t_2$$

$$\overline{PB} + \overline{BC} = 340t_2$$

$$d_2 + (d_2 - 17t_2) = 340t_2$$

$$2d_2 = 357t_2$$

$$2d_2 = 357(6)$$

$$d_2 = 1\,059\,\text{m} \qquad \text{(II)}$$

Se comprueba que $d_2 > d_1$, lo cual concuerda con los datos del problema. Entonces esta solución es correcta, por lo tanto reemplacemos valores en la ecuación (I).

$$d = d_1 + d_2$$

$$d = 646 + 1\,059$$

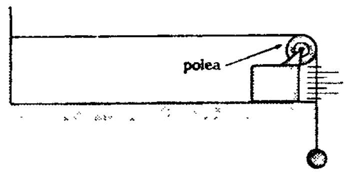
$$d = 1\,705\ \text{m}$$

Nota

Si consideramos que el sonido que se refleja en el cerro es escuchado 2 s antes que el otro, tendremos que $d_2 < d_1$, lo cual contradice el enunciado. Por tal motivo, descartamos tal posibilidad.

Problema 16

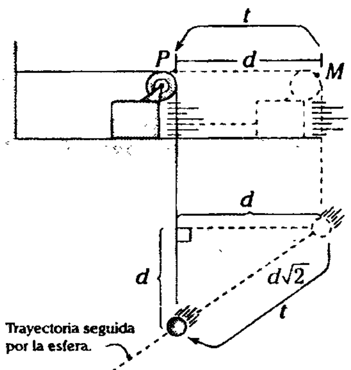
El gráfico nos muestra un bloque que se desplaza con una rapidez constante de 2 m/s. Determine la rapidez de la pequeña esfera unida a la cuerda inextensible.



Resolución

Conforme el bloque se desplaza hacia la izquierda, el tramo horizontal $(\overline{PM} = d)$ de la cuerda pasa de la posición horizontal a la vertical, eso hace que el tramo vertical de la misma se incremente.

A continuación



Como podemos constatar, la esfera experimenta un desplazamiento horizontal y a la vez un desplazamiento vertical. Lo primero es debido al desplazamiento del bloque y lo segundo debido al incremento del tramo vertical de la cuerda.

Al avanzar el bloque avanza con velocidad constante, los desplazamientos horizontal, vertical y neto de la esfera será, también con velocidad constante.

Por lo tanto, para determinar la rapidez de la esfera consideramos

$$v_e = \frac{d_e}{t} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere d_e, del gráfico se deduce que

$$d_e = d\sqrt{2}$$

si d es el desplazamiento del bloque, entonces $d = v_b . t$

$$\therefore\ d_e = (v_b . t)\sqrt{2}$$

En (I)

$$v_e = v_b\sqrt{2} = (2)\sqrt{2}$$

$$\therefore\ v_e = 2\sqrt{2}\ \text{m/s}$$

Nota

Una polea simple está formada por una rueda, generalmente acanalada. Se utiliza para transmitir movimiento mediante una cuerda o cadena que pasa por su acanalamiento.

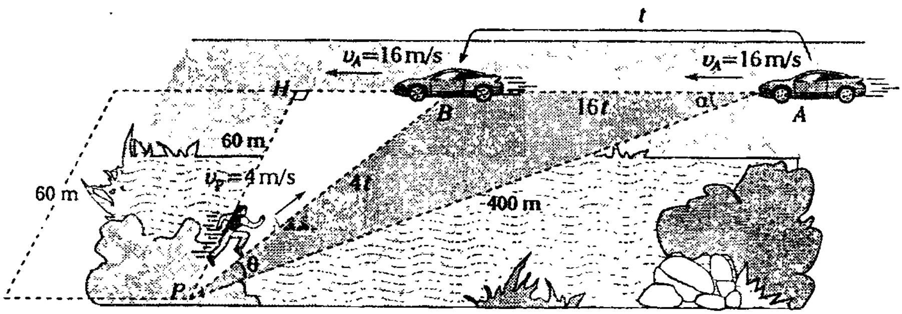
polea de una grúa

Problema 17

Una persona está situada a 60 m frente a una pista rectilínea por la cual viaja un automóvil con una rapidez uniforme de 16 m/s. En cierto instante el automóvil está a 400 m de la persona y esta empieza a correr hacia el encuentro del automóvil con una rapidez uniforme de 4 m/s. Determine el ángulo que forma la línea que une al automóvil con la velocidad de la persona para que esta se encuentre con aquel sobre la pista o en su defecto logre llegar antes que él.

Resolución

Grafiquemos lo que acontece.



Sea B el punto de encuentro del automóvil y la persona al cabo de t segundos, usando la ley de senos en el triángulo sombreado APB.

$$\frac{4t}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{16t}{\operatorname{sen}\theta_1} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1=4\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(I)}$$

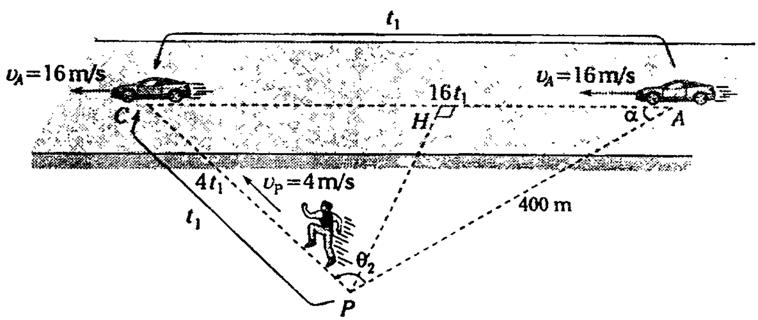
Para el ⊾PHA $\operatorname{sen}\alpha=\frac{\overline{PH}}{\overline{PA}}=\frac{60}{400}=\frac{3}{20}$

En (I)

$$\operatorname{sen}\theta_1=\frac{3}{5} \Rightarrow \theta_1=37°$$

Es el mínimo ángulo con el cual debe correr la persona para encontrarse con el automóvil.

Otra posibilidad es el ángulo máximo para el alcance, por lo cual tenemos



Usando la ley de senos en el triángulo sombreado $\triangle APC$.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{PC}=\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{AC} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{4t_1}=\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{16t_1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta_2=4\operatorname{sen}\alpha \qquad \text{(II)}$$

Del $\triangle AHP$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{60\,\text{m}}{400\,\text{m}}=\frac{3}{20}$$

En (II)

$$\operatorname{sen}\theta_2=4\left(\frac{3}{20}\right)=\frac{3}{5}$$

Como θ_2 es un ángulo obtuso $\theta_2>90°$, entonces deducimos que $\theta_2=143°$

Para el objetivo del problema la persona debe correr con direcciones tales que $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$.

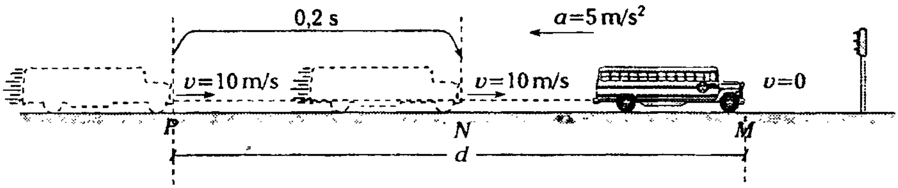
$$\therefore\ 37°\leq\theta\leq143°$$

Problema 18

Un ómnibus se mueve con una velocidad constante (v=10 m/s). Si el conductor observa que la luz del semáforo pasa a rojo, este reacciona luego de 0,2 s aplicando los frenos y haciendo que el ómnibus experimente una aceleración constante (a=5 m/s). ¿Qué distancia logró avanzar el ómnibus desde que el conductor observó el semáforo hasta detenerse?

Resolución

Como el ómnibus se mueve a velocidad constante (v= 10 m/s), este realiza un M.R.U. Ahora supongamos que cuando empieza a pasar por una posición P el conductor observa que la luz del semáforo pasa a rojo y transcurrido 0,2 s empieza a pasar por una posición N, donde el conductor recién aplica los frenos con el propósito de detener el ómnibus, originándole una aceleración constante de módulo a=5 m/s^2, hasta que se detiene en M; entonces el ómnibus desde P hacia N realiza un M.R.U. y desde N hacia M realiza un M.R.U.V.



Si de P hacia N realiza un M.R.U. con 10 m/s, entonces en cada segundo el ómnibus avanzará 10 m, y como de P a N emplea 0,2 s debe avanzar d_{PM} = 2 m. Luego, a partir de N hasta M realiza un M.R.U.V. donde

$$v_M^2=v_N^2-2a\cdot d_{NM}$$

$$0=10^2-2(5)d_{NM}$$

entonces

$$d_{NM}=10\,\text{m}$$

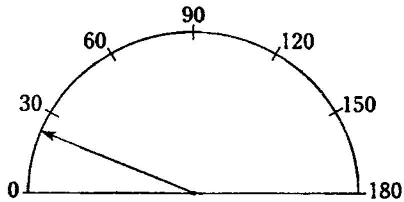
Por lo tanto, la distancia d que logra avanzar el ómnibus desde que el conductor observa que la luz del semáforo pasa a rojo hasta que se detiene el ómnibus es

$$d=d_{PN}+d_{NM}$$

$$d=2+10 \Rightarrow d=12\,\text{m}$$

Problema 19

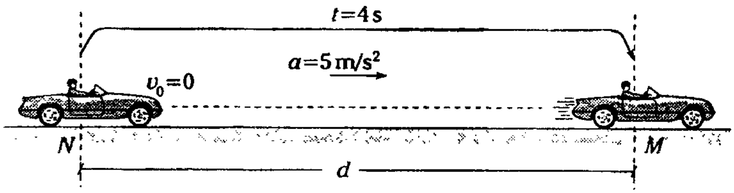
El diagrama mostrado corresponde a un velocímetro de un automóvil. Si desde el instante que el automóvil inicia su movimiento la aguja del velocímetro barre un ángulo de 90° en 5 s, ¿qué distancia avanza el automóvil en los cuatro primeros segundos de su movimiento? Considere que el automóvil desarrolla un M.R.U.V.



Resolución

Debemos saber que la aguja del velocímetro nos indica la rapidez que adquiere el automóvil en cualquier instante de tiempo; y cuando el automóvil parte del reposo ($v_0 = 0$), la aguja debe indicar cero. Por condición del problema, luego de 5 s de iniciado el movimiento del automóvil, la aguja barre un ángulo de 90°, y estaría indicando en este instante 90 km/h. Por consiguiente la rapidez del automóvil al transcurrir 5 s de iniciado su movimiento será $v = 90\,\text{km/h} = 25\,\text{m/s}$. Dado que el automóvil desarrolla un M.R.U.V. su rapidez debe aumentar uniformemente de cero a 25 m/s en 5 s, esto significa que en cada segundo su rapidez debe aumentar en 5 m/s. Finalmente el valor de la aceleración que experimenta el automóvil será $a = 5\,\text{m/s}^2$.

A continuación supongamos que el automóvil parte de una posición N y al transcurrir 4 s se encuentra en una posición M.



Del diagrama expuesto debemos determinar la distancia en los cuatro primeros segundos de iniciado el movimiento del automóvil, luego podemos usar

$$d = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}at^2$$

Reemplazando datos

$$d = 0(4) + \frac{1}{2}(5)(4)^2$$

$$d = 40\text{ m}$$

Por lo tanto, el automóvil en los cuatro primeros segundos de su movimiento avanza una distancia de 40 m.

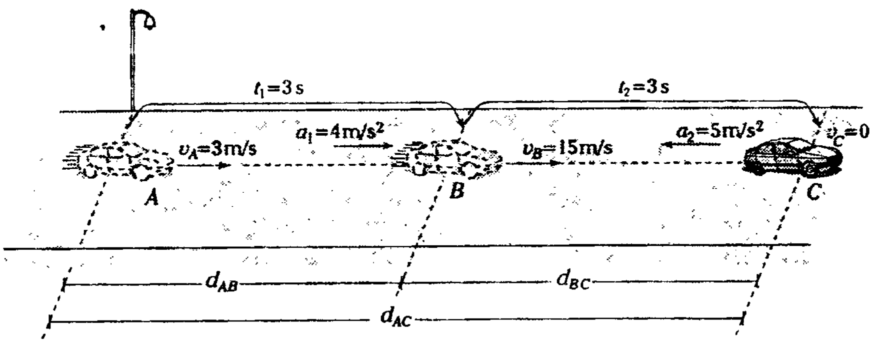
Problema 20

Un automóvil que se mueve en una pista rectilínea pasa frente de un poste con una rapidez de 3 m/s y una aceleración de 4 m/s^2; la cual se mantiene constante durante 3 s luego empieza a frenar con una aceleración constante de módulo 5 m/s^2, hasta detenerse. ¿Qué distancia logra avanzar el automóvil desde el instante que pasa frente al poste hasta que se detiene?

Resolución

Según el enunciado, el automóvil se mueve sobre una pista rectilínea y pasa frente a un poste con una rapidez de $v_A = 3$ m/s; y con una aceleración constante igual a $a_1 = 4$ m/s^2, la cual se mantiene así durante $t_1 = 3$ s, lo que significa que durante t_1 segundos el automóvil realiza un M.R.U.V.. Según esto, la rapidez del automóvil estaría **aumentando en** 4 m/s en cada segundo, y luego de 3 segundos de haber pasado frente al poste con una rapidez v_A, el automóvil se encuentra en una posición B con una rapidez de $v_B = 15$ m/s.

Cuando pasa por la posición B; por condición de problema, el automóvil empieza a frenar con una aceleración constante de módulo $a_2 = 5$ m/s^2, es decir el automóvil realizaría otro M.R.U.V. disminuyendo su rapidez en 5 m/s en cada segundo. Por lo tanto, si el automóvil pasa por la posición B con 45 m/s transcurrirá $t_2 = 3$ s y el automóvil se detendrá.



Del diagrama debemos encontrar la distancia entre A y C, donde $d_{AC} = d_{AB} + d_{BC}$

Como $$d_{AC} = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)t_1 + \left(\frac{v_B + v_C}{2}\right)t_2$$

$$\Rightarrow \quad d_{AC} = \left(\frac{3+15}{2}\right)3 + \left(\frac{15+0}{2}\right)(3)$$

Operando

$$d_{AC} = 49\ 5 \text{ m}$$

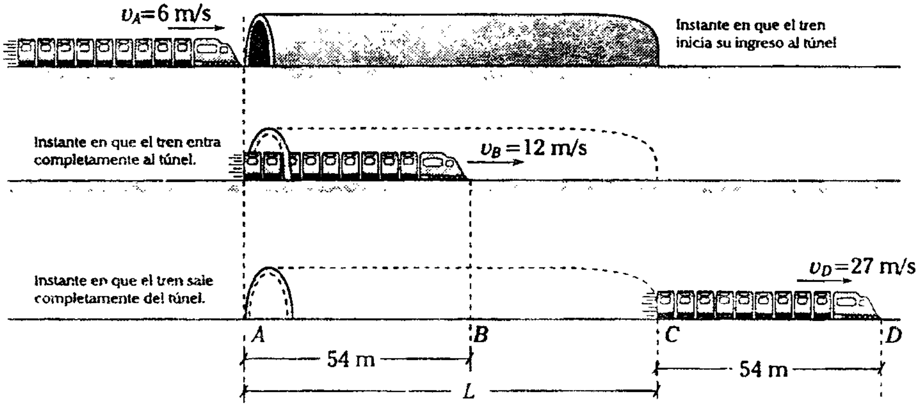
Por consiguiente, desde el instante que el automóvil pasa frente al poste hasta que se detiene recorre 49,5 m.

Problema 21

Un tren de 54 m de longitud experimenta un M.R.U.V. y se dirige a un túnel. La parte delantera ingresa con una rapidez de 6 m/s y la posterior con 12 m/s. Si la parte posterior del tren sale del túnel con una rapidez de 27 m/s, determine la longitud del túnel.

Resolución

Según lo planteado por el enunciado, la situación física sería



Del diagrama debemos determinar la longitud del túnel L; donde analizando el desplazamiento de la parte delantera del tren desde A hacia D.

$$v_D^2 = v_A^2 + 2ad_{AD}$$

$$27^2 = 6^2 + 2a(L+54) \qquad \text{(I)}$$

De la relación anterior necesitamos conocer el valor de aceleración a para determinar L; entonces determinemos a, para ello por conveniencia examinemos el desplazamiento de la parte delantera de A hacia B, donde

$$v_B^2 = v_A^2 + 2ad_{AB}$$

$$\Rightarrow \; 12^2 = 6^2 + 2a(54)$$

Efectuando $a = 1\ \text{m/s}^2$

En (I): $27^2 = 6^2 + 2(1)(L+54)$

Efectuando $L = 292{,}5$ m

Entonces la longitud del túnel es 292,5 m.

Nota

Los trenes de alta velocidad son capaces de desplazarse con rapidez superior a los 200 km/h, para lo cual disponen de vías especiales y sistemas de control adecuados. A este tipo de trenes pertenecen los trenes magnéticos cuyo funcionamiento se basa en la suspensión magnética para facilitar el desplazamiento de sus elementos a lo largo de la vía y gracias a lo cual se logra eliminar el rozamiento que sufren los trenes convencionales.

Problema 22

Un automóvil inicia su movimiento en línea recta con aceleración constante ($a = 4$ m/s^2), luego de cierto tiempo su rapidez empieza a disminuir a razón de 8 m/s en cada segundo hasta detenerse. Si el automovil se mantiene en movimiento durante 30 s, ¿cuál es la máxima rapidez que adquiere el automóvil?, ¿qué distancia logra avanzar hasta detenerse?

Resolución

El automóvil inicia su movimiento ($v_0 = 0$) logrando moverse en línea recta con una aceleración constante ($a_1 = 4$ m/s^2), por lo cual, la rapidez de este irá aumentando en 4 m/s cada 1 segundo. En tal sentido, la rapidez del automóvil luego de t_1 segundos de iniciado su movimiento será $v_1 = 4t_1$; v_1 y será la máxima rapidez que adquiera, porque, según condición del problema, luego de t segundos de iniciado su movimiento, la rapidez disminuye a razón de 8 m/s hasta detenerse. Es decir, frena con aceleración constante de módulo $a_2 = 8$ m/s^2; la rapidez va a disminuir en 8 m/s en segundo y se detiene pasado t_2 segundos.

Ahora, como el módulo de la aceleración (a_1) en el movimiento acelerado es la mitad del módulo de la aceleración (a_2) del movimiento desacelerado, entonces se demuestra que el tiempo que emplea el automóvil en el movimiento acelerado es el doble de lo que emplearía para frenar.

En tal sentido

$$t_1 = 2t_2 \qquad \text{(I)}$$

Por condición, el automóvil se mantiene en movimiento durante 30 s; entonces

$$t_1 + t_2 = 30 \text{ s} \qquad \text{(II)}$$

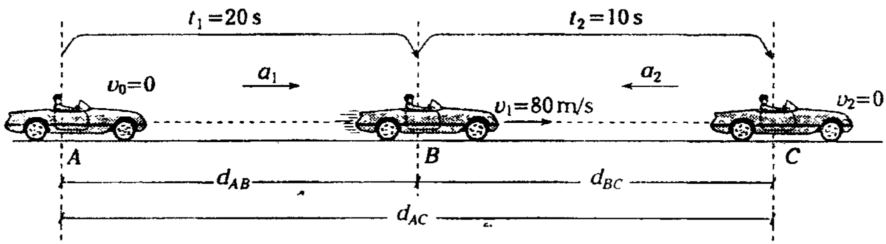
Reemplazamos (I) en (II)

$$2t_2 + t_2 = 30 \text{ s}$$

por lo tanto

$$t_2 = 20 \text{ s}$$

Según este resultado, el automóvil se encontraría acelerando durante 20 s y frenando durante 10 s; siendo la máxima rapidez que adquiere $v_1 = 4t = 4(20) = 80$ m/s.



Del diagrama, la distancia que logra avanzar el automóvil es la distancia entre A y C (d_{AC}); donde

$$d_{AC} = d_{AB} + d_{BC}$$

Definiendo d_{AB} y d_{BC} mediante una ecuación del M.R.U.V.

$$d_{AC} = \left(\frac{v_0 + v_1}{2}\right)t_1 + \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)t_2$$

Reemplazando

$$d_{AC} = \left(\frac{0 + 80}{2}\right)(20) + \left(\frac{80 + 10}{2}\right)(10)$$

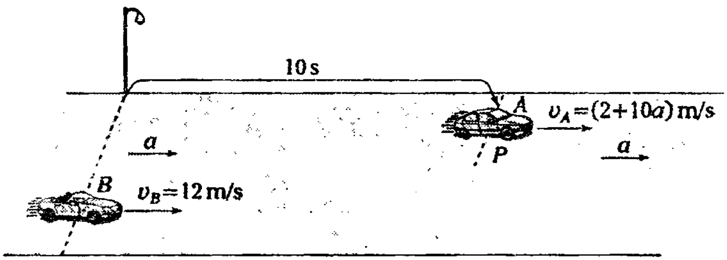
Efectuando $d_{AC} = 1\,200$ m.

Problema 23

Un automóvil A pasa frente a un poste con una rapidez de 2 m/s y avanza con una aceleración constante de módulo a en línea recta. Después de 10 s pasa otro automóvil B por el mismo poste con una rapidez de 12 m/s en la misma dirección y con igual aceleración. ¿Para qué valores de a el automóvil B deberá alcanzar al automóvil A?

Resolución

El automóvil A realiza un M.R.U.V. con una aceleración a, entonces luego de 10 s de haber pasado frente al poste con una rapidez de 2 m/s, se encuentra en una posición P con una rapidez de $(2+10a)$m/s ya que la rapidez en cada segundo aumenta en a. En dicho instante el automóvil B se encuentra pasando frente al poste.



Si los automóviles experimentan la misma aceleración a en cada segundo, la rapidez de cada automóvil aumentará de a en a, entonces para que el automóvil B alcance al automóvil A, la rapidez del automóvil B debe ser mayor que la del automóvil A en cualquier instante.

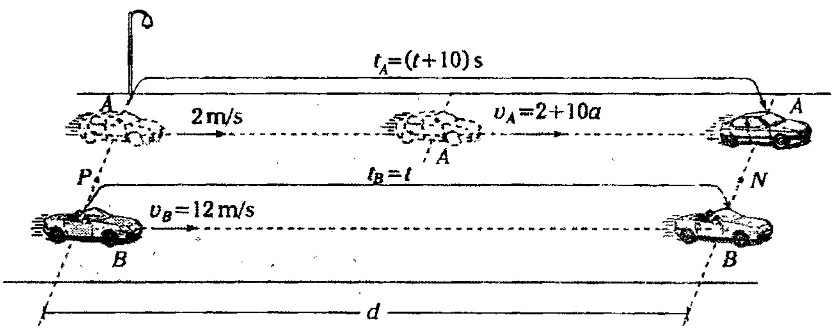
En tal sentido $v_A > v_B$

$$12 > 2 + 10a \Rightarrow a < 1 \text{ m/s}^2$$

Por lo tanto, el automóvil B daría alcance al automóvil A, si el módulo de aceleración a se encuentra comprendido en el siguiente intervalo.

$$0 < a < 1 \text{ m/s}^2$$

¿Al cabo de cuántos segundos desde que el automóvil B pasa frente al poste se puede dar el alcance?



Del diagrama, a partir del poste hasta el alcance

$$d_{\text{automóvil } A} = d_{\text{automóvil } B}$$

Como ambos realizan un M.R.U.V. se tiene

$$v_{0(A)}t_A + \frac{1}{2}a t_A^2 = v_{0(B)}t_B + \frac{1}{2}a t_B^2$$

Reemplazando

$$2(t+10)+\frac{1}{2}a(t+10)^2 = 12t+\frac{1}{2}at^2$$

Resolviendo

$$a = \frac{t-2}{t+5} \qquad \text{(I)}$$

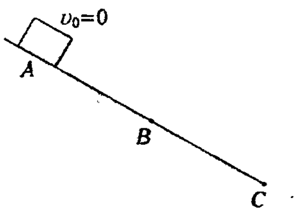
pero $0 < a < 1$ (II)

(I) en (II) $0 < \dfrac{t-2}{t+5} < 1$

$t > 2$ s

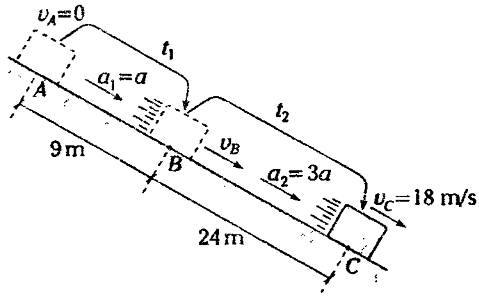
Problema 24

Sobre el plano inclinado que se muestra a continuación, un bloque es soltado en A. ¿Luego de cuántos segundos de ser soltado pasa por la posición C, si en el tramo $\overline{AB}$ experimenta una aceleración constante que es la tercera parte de la aceleración constante que experimenta en el tramo $\overline{BC}$ y la rapidez que presenta al pasar por la posición C es 18 m/s? $\left(\overline{AB} = 9\text{m} ; \overline{BC} = 24\text{m}\right)$



Resolución

Luego de soltar el bloque sobre el plano inclinado ($v_A = 0$) en la posición mostrada A, este desciende sobre el plano inclinado con una aceleración a, y en t_1 segundos pasa por la posición B y luego al ingresar sobre el tramo $\overline{BC}$ su aceleración es el triple de la que tenía en el tramo $\overline{AB}$, es decir $3a$, lo cual se puede dar si el tramo $\overline{BC}$ es más liso o menos áspero que el tramo $\overline{AB}$. Sobre lo primero diremos que el bloque en el tramo $\overline{BC}$ acelera empleando t_2 segundos en desplazarse de B hacia C y al pasar por B su rapidez es de $v_C = 18$ m/s.



A partir del diagrama debemos encontrar el tiempo que emplea el bloque en ir de A hacia B.

$$t = t_1 + t_2 \qquad \text{(I)}$$

Para encontrar t_1 y t_2 necesitamos conocer a y al examinar el M.R.U.V. en el tramo $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, puesto que en ambos tramos el bloque experimenta una aceleración constante, se tiene lo siguiente

- En el tramo $\overline{AB}$ usamos

$$v_B^2 = \cancel{v_A^2} + 2ad_{AB}$$

$$v_B^2 = 2(a)(9)$$

$$v_B^2 = 18a \qquad \text{(II)}$$

- En el tramo $\overline{BC}$ empleamos

$$v_C^2 = v_B^2 + 2(3a)d_{BC}$$

$$18^2 = v_B^2 + 144 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) en (III)

$$18^2 = 18a + 144a$$

se obtiene

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

Ahora determinemos

t_1 y t_2

En el tramo $\overline{AB}$ usamos la siguiente fórmula

$$d_{AB}=\upsilon_A t_1+\frac{1}{2}a_1 t_1^2$$

$$9=\frac{1}{2}(2)t_1^2$$

$$t_1=3\text{ s} \qquad \text{(IV)}$$

En el tramo $\overline{BC}$

$$d_{AB}=\upsilon_B t_2+\frac{1}{2}a_2 t_2^2 \Rightarrow d_{AB}=\upsilon_B t_2+\frac{1}{2}(3a)t_2^2$$

$$24=\upsilon_B t_2+\frac{1}{2}(3\times 2)t_2^2$$

$$24=\upsilon_B t_2+3t_2^2 \qquad \text{(V)}$$

υ_B es la rapidez final del bloque en el tramo $\overline{AB}$ y en este tramo el bloque experimenta una aceleración de $a=2$ m/s^2, lo que significa que conforme el bloque va descendiendo su rapidez aumenta en 2 m/s en cada segundo, en tal sentido como A parte del reposo y emplea 3 s para llegar a B, la rapidez del bloque en B será $\upsilon_B=6$ m/s.

Reemplazando en (V)

$$24=6t_2+3t_2$$

Resolviendo

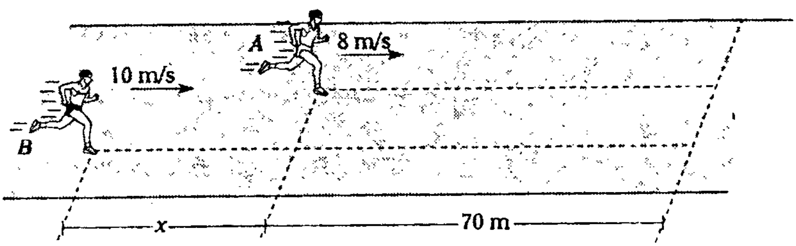
$$t_3=2\text{ s} \qquad \text{(VI)}$$

(IV) y (VI) en (I)

$$t=3+2 \Rightarrow t=5\text{ s}$$

Problema 25

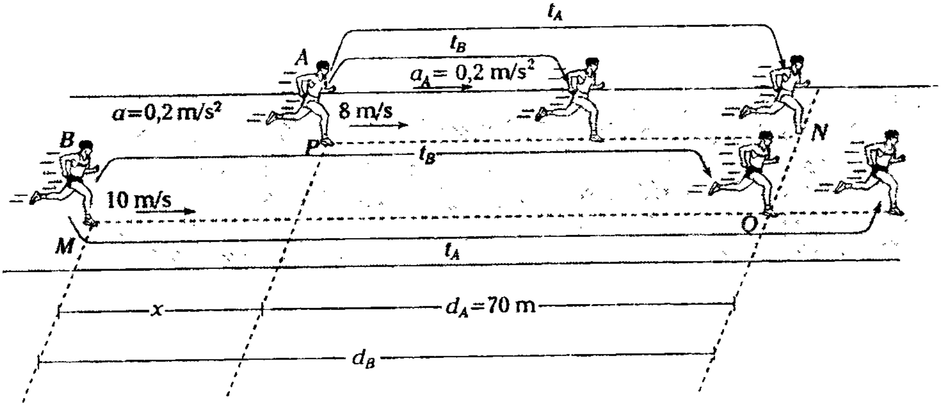
Se muestra el instante en que dos atletas se encuentran en el último tramo recto de una competencia de relevos. Debido al cansancio, el atleta A recorre en cada segundo 0,2 m menos de lo que recorrió el segundo anterior; mientras que el atleta B mantiene su rapidez constante. Determine x, de tal manera que el atleta B gane la competencia.



Resolución

Según el enunciado el atleta B se mueve con una rapidez constante y al hacerlo en línea recta realiza un M.R.U.; A su vez el atleta A recorre 0,2 m menos en cada segundo, con una aceleración constante de módulo $a=0{,}2$ m/s^2 (por lo explicado en teoría) y como se mueve en línea recta realiza por lo que se afirma que un M.R.U.V. Si para que el atleta B llegue primero a la meta, el tiempo t_B debe ser menor que el tiempo t_A que emplea el atleta A, entonces $t_B < t_A$.

Entonces para ello cuando el atleta B llegue a la meta, el atleta A todavía no ha debido llegar a la meta y cuando el atleta A llega a la meta el atleta B habrá pasado la meta, lo cual se representa en la siguiente figura.



A continuación determinemos t_A y t_B.

De la figura, de P hacia N, para el atleta A (M.R.U.V.) usamos

$$d_A = v_{0(A)}t_A - \frac{1}{2}at_A^2$$

Reemplazando

$$70 = 8t_A - \frac{1}{2}(0{,}2)t_A^2$$

entonces

$$t_A = 10\,\text{s} \qquad \text{(I)}$$

De la figura, de M hacia Q, para el atleta B (M.R.U.)

$$t_B = \frac{d_B}{v_B}$$

Reemplazando

$$t_B = \frac{x+70}{10} \qquad \text{(II)}$$

Como $t_B < t_A$ planteamos

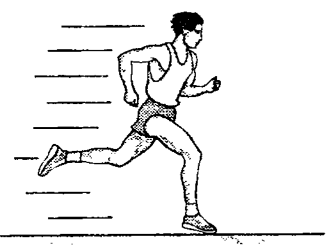
$$\frac{x+70}{10} < 10$$

$$x < 30\text{ m}$$

Por lo tanto, para que el atleta B gane la competencia x debe ser menor de 30 m; si $x = 30$ m ambos atletas pasarían simultáneamente por la meta, y si $x > 30$ m el atleta A llegaría a la meta antes que el atleta B.

Nota

Los atletas de alta competencia, por lo general, recorren los 100 m en un tiempo que oscila entre los 9,79 s y los 10,30 s.

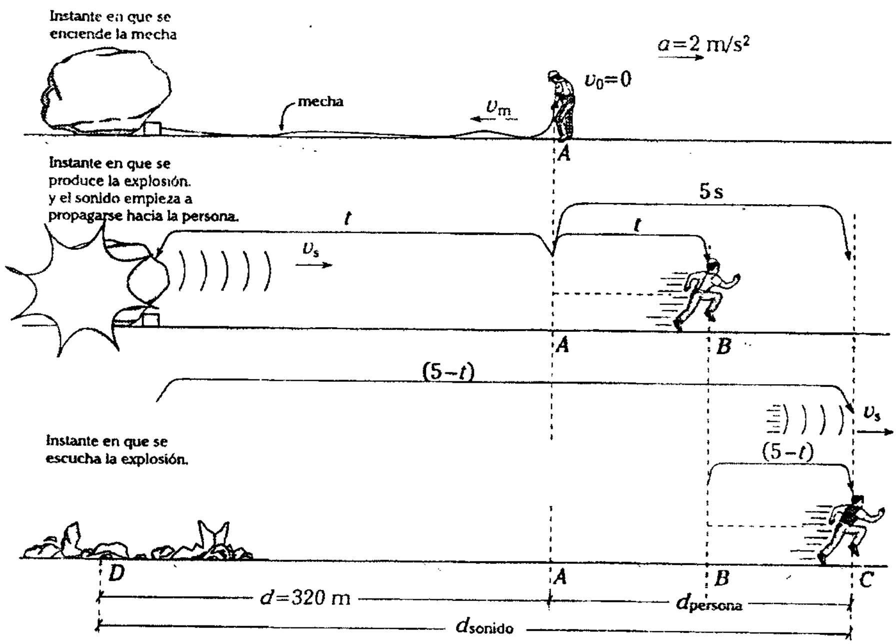


Problema 26

Una roca, que se encuentra en una carretera, impide el paso de los vehículos, como resulta pesado retirarla, se decide fragmentarla utilizando dinamita. Para ello, una persona ubica debajo de la roca un par de cartuchos y extiende la mecha, cuya longitud es de 320 m. Si la persona enciende la mecha y empieza a correr en dirección contraria al consumo de la mecha, con una aceleración constante de módulo $a = 2\ \text{m/s}^2$ y logra escuchar la explosión después de 5 s de haber encendido la mecha, determine la rapidez constante del consumo de la mecha. (Considere que la rapidez del sonido es 345 m/s).

Resolución

Según el enunciado, una vez que se enciende la mecha en la posición A, la mecha se consume con una rapidez constante (v_m) y la persona inicia un M.R.U.V. con una aceleración constante $a = 2\ \text{m/s}^2$ en dirección opuesta al consumo de la mecha. Suponiendo que transcurrido t_1 segundos se produce la explosión y la persona se encuentra en una posición B a partir de ese instante, el sonido (producto de la explosión) empieza a propagarse y suponemos que será escuchado por la persona en una posición más adelante (en C), luego de $(5-t)$ segundos de iniciada la propagación del sonido, ya que según condición transcurre 5 s desde que se encendió la mecha hasta que se escucha la explosión.



En el consumo de la mecha de A hacia D, como v_m es constante se deduce que

$$v_m = \frac{d}{t}$$

$$\Rightarrow \quad v_m = \frac{320}{t} \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos t, del diagrama

$$d_s = d_p + 320$$

Como el sonido se propaga con rapidez constante y la persona realiza un M.R.U.V. se tiene

$$v_s\, t_{DC} = v_0 \cdot \cancel{t_{AC}} + \frac{1}{2} a t_{AC}^2 + 320$$

$$345(5-t) = \frac{1}{2}(2)(5)^2 + 320$$

entonces $t = 4\text{ s}$ (II)

(II) en (I)

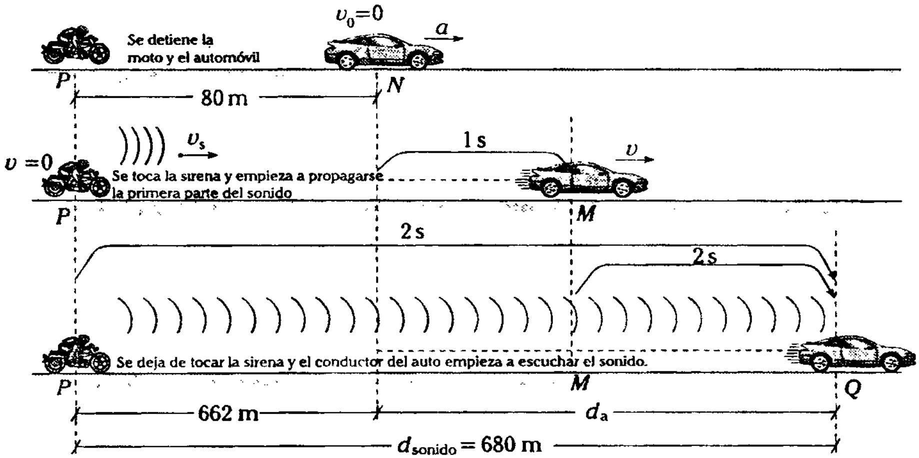
$$v_m = 80\text{ m/s}$$

Problema 27

En el gráfico se muestra a un policía motorizado en persecución de un automóvil; mas debido a una falla mecánica la motocicleta se detiene así también el automóvil se detiene a 662 m. Al percatarse de esta situación el conductor del automóvil escapa, el automóvil inicia un M.R.U.V. 1 s después el policía de tránsito toca la sirena de la moto durante 2 s. Si el conductor del automóvil escucha la sirena cuando el policía deja de tocarla, ¿cuál es el módulo de la aceleración con la que el automóvil reanuda su movimiento?
(Considere que la rapidez del sonido es $v_s = 340$ m/s).

Resolución

Consideremos que la moto se detiene en una posición P, entonces a 80 m más adelante se detiene en una posición N el automóvil, ahora cuando ha transcurrido 1 s de iniciado su M.R.U.V. con una aceleración a, el automóvil se encuentra en una posición M. En ese instante el policía de tránsito toca la bocina estando en reposo y el sonido de la sirena empieza a propagarse, transcurriendo 2 s de esto, el automóvil se encuentra en la posición Q donde su conductor empieza a escuchar el sonido de la sirena, la cual ha dejado de sonar. Entonces como desde el instante que se toca la sirena hasta el instante que el conductor empieza a escuchar la sirena transcurre 2 s y como el sonido se propaga con una rapidez constante de 340 m/s, en 2 s se habrá propagado 680 m.



Del diagrama

$$d_a = 680\text{ m} - 662\text{ m}$$

entonces

$$d_a = 18\text{ m}$$

Definiendo la distancia para el M.R.U.V. del automóvil se tiene

$$d_a = \cancel{v_0} t_{NQ} + \frac{1}{2} a t_{NQ}^2 = 18$$

Evaluando

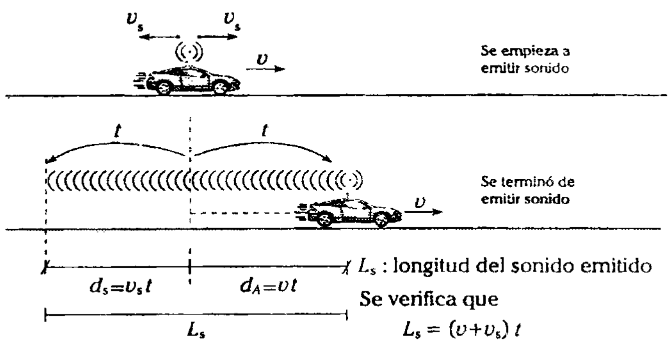
$$\frac{1}{2}(a)(3)^2 = 18$$

$$\Rightarrow \quad a = 4\text{ m/s}^2$$

Por lo tanto, el automóvil reinicia su movimiento con una aceleración de módulo de 4 m/s^2.

Nota

Cuando se emite sonido desde una fuente de movimiento durante cierto intervalo de tiempo, el sonido emitido tendrá cierta longitud que será diferente a la que se tendría si la fuente estuviera en reposo. Además la longitud del sonido emitido dependerá de la dirección de la parte de sonido que se utiliza, por ejemplo:



L_s : longitud del sonido emitido

Se verifica que

$$L_s = (v+v_s)\,t$$

Problema 28

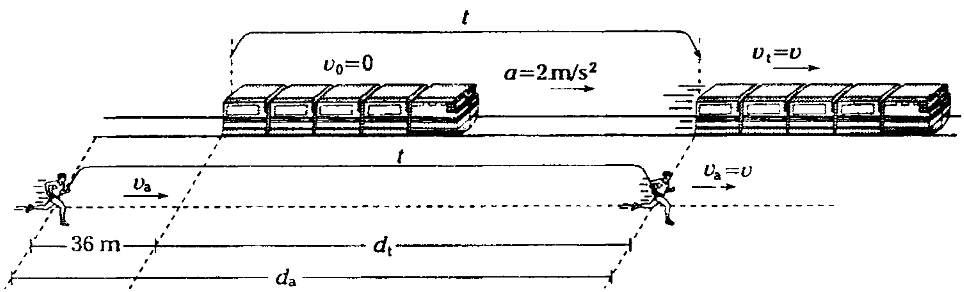
Una atleta se mueve con velocidad constante paralelamente a las vías de un tren, cuando se encuentra a 36 m del último vagón, el tren inicia su movimiento con una aceleración constante de 2 m/s^2 moviéndose en la misma dirección del atleta ¿Con qué rapidez mínima debe desplazarse el atleta para dar alcance al tren?

Resolución

Según el enunciado el atleta se mueve a velocidad constante, es decir realiza un M.R.U., mientras que el tren inicia su movimiento ($v_0 = 0$) con una aceleración constante ($a = 2$ m/s^2), lo que significa que el tren realizará un M.R.U.V. Ahora, si el atleta debe dar alcance al tren con la menor rapidez posible debemos tener presente lo siguiente:

- Mientras la rapidez del atleta es mayor que la rapidez del tren ($v_a > v_t$), el atleta se acercará a la parte posterior del tren, lo alcanzará y lo pasará.
- Una vez que el atleta pasa a la parte posterior del tren y $v_a = v_t$, lo cual ocurrirá ya que el tren acelera; el atleta dejará de alejarse de la parte posterior del tren y la parte posterior empezará a dar alcance al atleta, lo alcanzará y pasará.

Entonces para que el atleta alcance a la parte posterior del tren se debe cumplir que $v_{atleta} > v_{tren}$, luego la rapidez del atleta será mínima si al dar alcance a la parte posterior el atleta presenta la misma rapidez del tren ($v_{atleta} = v_{tren}$) lo cual significaría que una vez que el atleta dé alcance a la parte posterior del tren, este se alejaría; supongamos que esto ocurre luego de t segundos.



Como el atleta realiza un M.R.U, se tiene

$$v_a = \frac{d_a}{t} = v \qquad \text{(I)}$$

Examinando la parte posterior del tren, en cada segundo su rapidez irá aumentando de 2 m/s en 2 m/s ya que su aceleración es $a = 2$ m/s^2, entonces luego de t segundos de iniciado su movimiento, su rapidez v será $v = 2t$. En tal sentido

$$t = \frac{v}{2} \qquad \text{(II)}$$

De la figura

$$d_a = 36 + d_t \qquad \text{(III)}$$

Definiendo d_t para la parte posterior del tren de una ecuación del M.R.U.V. se tiene

$$d_t = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(2)t^2 = t^2$$

Reemplazamos en (III)

$$d_a = 36 + t^2 \qquad \text{(IV)}$$

(II) en (IV)

$$d_a = 36 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 \qquad \text{(V)}$$

Reemplazamos (II) y (V) en (I)

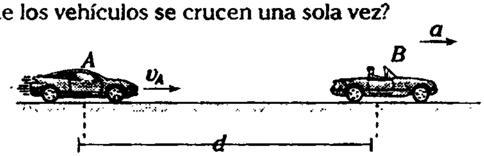
$$\frac{36 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}{\left(\frac{v}{2}\right)} = v$$

Resolviendo $v = 12$ m/s

$$\therefore\ v_a = 12\,\text{m/s}$$

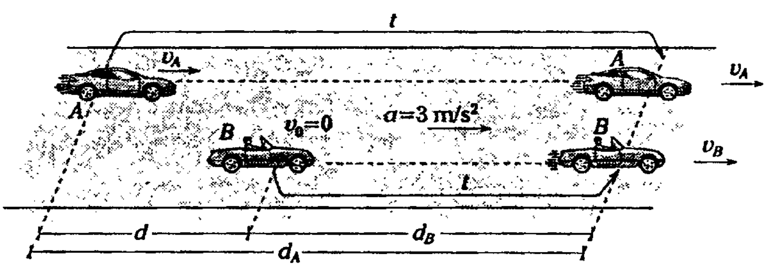
Problema 29

Se muestran dos vehículos A y B sobre una pista rectilínea, A realiza un M.R.U. con una rapidez de 18 m/s, mientras que B inicia un M.R.U.V. con una aceleración de módulo $a = 3$ m/s^2, ¿cuánto debe ser la distancia d para que los vehículos se crucen una sola vez?



Resolución

Según el enunciado del problema, el automóvil A realiza un M.R.U. ($v_A = 18$ m/s), mientras que el automóvil B inicia su movimiento ($v_B = 0$) realizando M.R.U.V. en la misma dirección que se mueve A. Si los automóviles deben encontrarse juntos una sola vez, el automóvil A debe alcanzar al automóvil B, para ello la rapidez del automóvil A debe ser mayor que la rapidez del automóvil B ($v_A > v_B$), una vez que el automóvil A alcanza al automóvil B no lo puede pasar, porque si lo pasa, el automóvil B que acelera en un determinado instante tendrá la misma rapidez que el automóvil A, en ese instante A deja de alejarse de B y luego de esto la rapidez de B supera a la de A y en consecuencia el automóvil B alcanzará al automóvil A encontrándose juntos por segunda vez; en tal sentido para que no ocurra esto, cuando el automóvil A alcanza al automóvil B, el automóvil A debe tener la misma rapidez que el automóvil B ($v_A = v_B$), suponiendo que esto ocurre luego de t segundos ahora podemos realizar el siguiente diagrama:



Hemos deducido que cuando el automóvil A alcanza al automóvil B, la rapidez de los automóviles son iguales; entonces en el diagrama

$$v_A = v_B = 18 \text{ m/s}$$

Determinamos v_B mediante la siguiente ecuación del M.R.U.V.

$$v_B = v_0 + a_B t$$

$$18 = 0 + 3t \Rightarrow t = 6 \text{ s}$$

Luego, del gráfico $d = d_B - d_A$

Definimos d_A con la ecuación del M.R.U. y d_B con una ecuación del M.R.U.V.

$$d = \left(\cancel{v_0 t} \frac{1}{2} a_B t^2\right) - v_A t$$

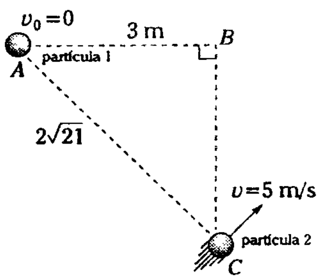
Reemplazando datos

$$d = \frac{1}{2}(3)(6)^2 - 18(6)$$

se tiene $d = 30$ m.

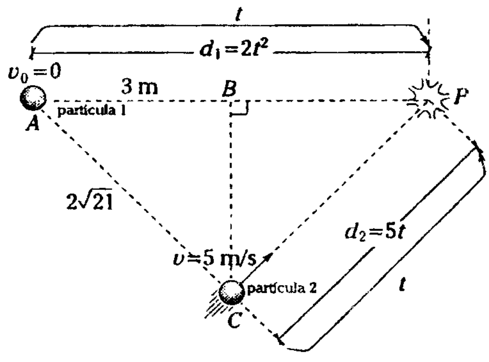
Problema 30

En el diagrama se muestra el instante en que la partícula 1 inicia su movimiento con una aceleración constante de módulo 4 m/s^2 hacia la derecha y la posición de una partícula 2 que se mueve con una velocidad constante. Si las partículas chocan, determine luego de cuántos segundos, de iniciado el movimiento de la partícula 1, ocurre esto y además determine la dirección de la velocidad de la partícula 2. (Considere que las partículas se mueven en un plano horizontal)



Resolución

Según el enunciado del problema, la partícula 1 inicia su movimiento ($v_0 = 0$) hacia la derecha realizando un M.R.U.V. con una aceleración de módulo $a = 4$ m/s^2, mientras que la partícula 2 se mueve con velocidad constante ($v = 5$ m/s). Como ambas partículas realizan un movimiento rectilíneo, ellas chocarán en la intersección de sus trayectorias, según se muestra en la gráfica. Supongamos que desde la posición A hasta la posición de choque P han transcurrido t segundos. Note que t es el tiempo que nos piden determinar. Podemos plantear entonces de manera gráfica



Ahora del $\triangle ABC$, del Teorema de Pitágoras se obtiene

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$(2\sqrt{21})^2 = (3)^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{BC} = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

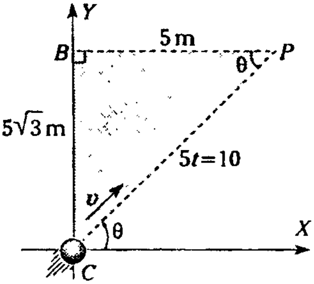
Podemos calcular t en el $\triangle PBC$, usando el Teorema de Pitágoras

$$\overline{CP}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BP}^2$$

$$\Rightarrow \ (5t)^2 = (5\sqrt{3})^2 + (2t^2 - 3)$$

$$\Rightarrow \ t = 2\ \text{s}$$

Según el resultado, las partículas chocarán luego de 2 s después que la partícula 1 inicia su movimiento. A continuación determinemos la dirección θ de la velocidad de la partícula 2. La dirección es la orientación del vector velocidad respecto del eje X, tal como se muestra en el siguiente diagrama.



Aprovechando el $\triangle PBC$, por ángulos alternos, el ángulo $BPC = \theta$. Como el cateto $\overline{BP}$ es la mitad de la hipotenusa del $\triangle PBC$ se deduce que este triángulo es notable de 30° y 60° siendo $\theta = 60°$.

Problema 31

Una cebra está a 20 m de un leopardo que la observa. Cuando la cebra en reposo se da cuenta de la presencia del leopardo escapa con una aceleración constante de 2 m/s², en ese instante el leopardo tiene una rapidez constante de 8 m/s para capturar a la cebra. ¿Alcanzará el leopardo a la cebra? y si no la llega a alcanzar, ¿cuál es la mínima distancia a la cual se aproxima el leopardo?

Resolución

Podemos resaltar que:

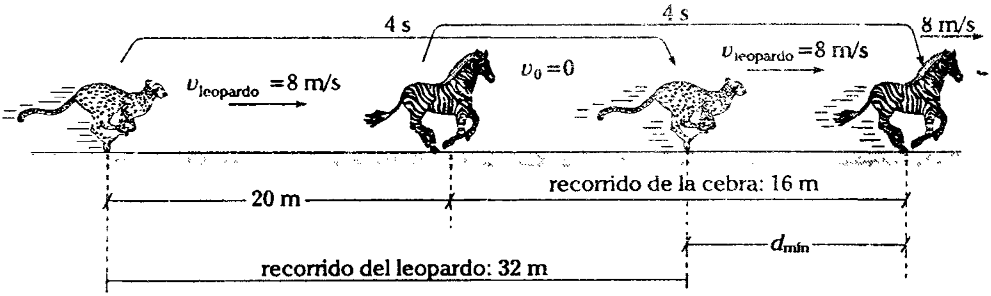
- El leopardo corre con rapidez constante de 8 m/s.
- La cebra parte del reposo ($v = 0$), pero acelera con 2 m/s². Esto significa que cada 1 s su rapidez aumenta en 2 m/s, por ende, luego de 2 s su rapidez será 4 m/s, luego de 3 s su rapidez será 6 m/s y después de 4 s su rapidez será 8 m/s, así sucesivamente.
- Hay un intervalo durante el cual $v_{\text{leopardo}} \geq v_{\text{cebra}}$. Dicho intervalo se da durante los 4 primeros segundos en los cuales el leopardo puede alcanzar a la cebra.
- Hay otro intervalo $t > 4$ s en el cual $v_{\text{leopardo}} < v_{\text{cebra}}$ Si el leopardo aún no ha alcanzado a la cebra, entonces ya no la podrá alcanzar.

Si el leopardo dispone de 4 s para alcanzar a la cebra, entonces ¿la podrá alcanzar?

Veamos lo que sucede, dado que en 4 s el leopardo se acerca recorriendo $vt = 8(4) = 32$ m y la cebra en dicho intervalo se aleja

$$d = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \ \Rightarrow \ d = 0(4) + \frac{1}{2}(2)(4)^2 = 16\ \text{m}$$

Al haber una separación previa de 20 m, entonces



deducimos que el leopardo no logra alcanzar a la cebra, pues al cabo de 4 s la mínima distancia de separación es $d_{mín}=36-32=4\,\text{m}$ y luego la $v_{cebra}>v_{leopardo}$ (ya no hay alcance).

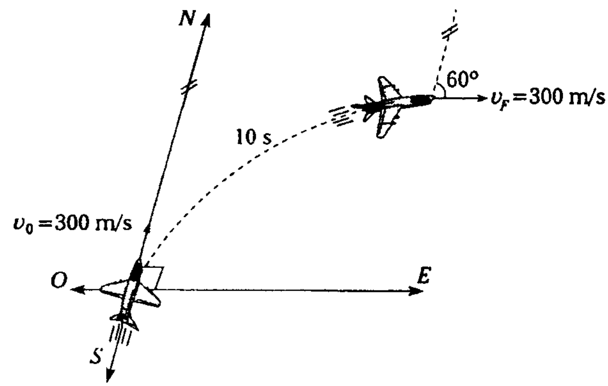
$\therefore\ d_{mín}=4\text{ m}$

Problema 32

Un avión se dirige horizontalmente hacia el norte. Si el piloto cambia su rumbo 60° hacia el este en diez segundos y logra mantener en vuelo al avión con una rapidez constante de 300 m/s, determine el módulo de la aceleración media durante dicha maniobra.

Resolución

El avión durante la maniobra se desplaza con una rapidez constante de 300 m/s, lo que significa que el módulo de la velocidad no cambia. Esto nos llevaría a pensar que el avión no experimenta aceleración alguna, mas la velocidad no solo queda definida por su módulo, sino también por su dirección y como el avión cambia de dirección, norte 60° Este, la velocidad también cambiará de dirección. Por consiguiente, el avión experimentará una aceleración debido al cambio de dirección de la velocidad, lo cual se expresa en el siguiente gráfico.

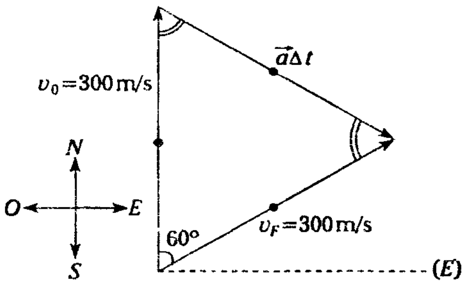


Si matemáticamente la aceleración media $(\vec{a}_m)$ se define así

$$\vec{a}=\frac{\vec{v}_F-\vec{v}_0}{\Delta t}$$

entonces $\vec{a}\,\Delta t=\vec{v}_F-\vec{v}_0$ (I)

Representando vectorialmente (geométricamente) a la expresión (I)



El ángulo de 60° entre las velocidades es dato puesto que los vectores velocidad tienen igual módulo, entonces el triángulo formado es equilátero

$\Rightarrow\ a\,\Delta t=300$ (I)

pero por dato

$\Delta t=10$s (II)

(I) en (II)

$a(10)=300$

$\Rightarrow\ a=30$ m/s^2

Por lo tanto, en la maniobra el avión experimenta una aceleración media cuyo módulo es de 30 m/s^2.

Problema 33

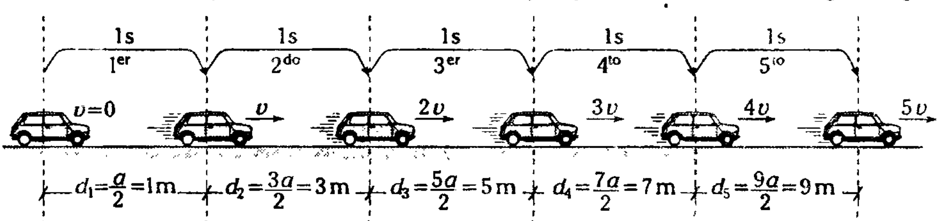
Un automóvil inicia su movimiento y se mueve en línea recta con una aceleración constante de modo que en dos segundos consecutivos recorre 7 m y 9 m, respectivamente. Determine cuánto es el módulo de la aceleración y en qué segundo de su movimiento recorre 5 m.

Resolución

Como el automóvil se mueve en línea recta y con aceleración constante, el automóvil realiza un M.R.U.V. Si en todo M.R.U.V. los recorridos en dos segundos consecutivos se diferencian en un valor igual al módulo de aceleración a, y como el automóvil recorre en dos segundos consecutivos 7 m y 9 m, se tiene que

$a=9-7=2$ m/s^2

Además se sabe que todo cuerpo que parte del reposo para realizar un M.R.U.V. en el primer segundo de su movimiento recorre la mitad del valor de la aceleración y en los segundos consecutivos su recorrido va aumentando en un valor igual al valor de la aceleración, cuya representación se da en el siguiente gráfico.



Del diagrama se puede deducir que el automóvil logra recorrer 5 m en el tercer segundo.

Problemas Propuestos

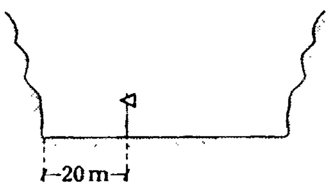
1. Dos móviles A y B, separados por 50 m, se mueven en la misma dirección con rapidez constante de 40 y 15 m/s, respectivamente, Señale al cabo de cuánto tiempo mínimo, A estará 150 m delante de B.

A) 6 s B) 8 s C) 10 s
D) 2 s E) 12 s

2. Un roedor se encuentra a 20 m debajo de un halcón y al observarlo huye rectilíneamente hacia un agujero, que se encuentra a 15 m delante de él, con una rapidez constante de 3 m/s. Determine la rapidez media del halcón, si este caza al roedor justo cuando ingresaba al agujero.

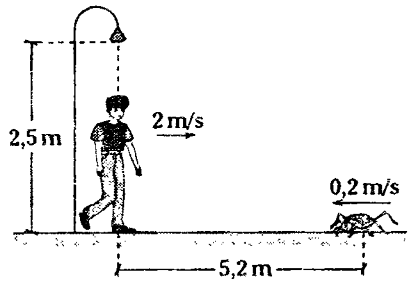
A) 3 m/s B) 4 m/s C) 5 m/s
D) 6 m/s E) 8 m/s

3. El altavoz situado entre dos montañas emite un sonido hacia la derecha. El eco de dicho sonido llega a la montaña de la izquierda en 4 s luego de ser emitido. Determine la distancia entre las montañas. (v_s = 340 m/s)



A) 670 m B) 650 m C) 690 m
D) 1 360 m E) 1 340 m

4. En la figura mostrada el niño y la tarántula se mueven con velocidad constante a partir del instante mostrado. Indique luego de cuántos segundos la tarántula empezará a ser cubierta por la sombra del niño cuya altura es de 1,5 m .



A) 0,25 s B) 0,5 s C) 0,75 s
D) 1 s E) 1,5 s

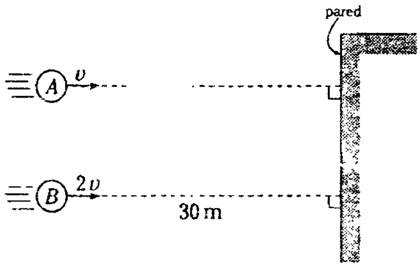
5. Dos móviles, A y B, pasan simultáneamente por un mismo lugar experimentando un M.R.U. en la misma dirección con rapidez de 10 m/s y 5 m/s respectivamente. ¿Luego de cuánto tiempo los móviles equidistarán de un punto que se encuentra a 300 m delante del lugar por el cual pasaron simultáneamente?

A) 30 s B) 40 s C) 35 s
D) 25 s E) 50 s

6. Un tren, que se desplaza con velocidad constante, cruza un túnel de 120 m en 8 s. Si una persona sentada al lado de una de las ventanas del tren nota que permanece 4 s dentro del túnel, determine la longitud del tren.

A) 120 m B) 180 m C) 200 m
D) 110 m E) 240 m

7. La gráfica muestra el lanzamiento simultáneo de dos esferas A y B sobre un piso. Determine cuánto recorre A hasta el instante que se cruza con B. Considere que la esfera B rebota instantáneamente con la misma rapidez que, ambas experimentan M.R.U.



A) 40 m B) 15 m C) 30 m
D) 20 m E) 35 m

8. Una persona al encontrarse a orillas del mar, se percata de que mar adentro se produjo una explosión y reconoce que la diferencia de los tiempos de llegada de los sonidos por el aire y por el agua es de 11 s. ¿A qué distancia de la persona se produjo la explosión. Si la rapidez del sonido en el aire y el agua es de 340 m/s y 1440 m/s respectivamente?

A) 3 935 m B) 3 824 m C) 4 920 m
D) 5 100 m E) 4 896 m

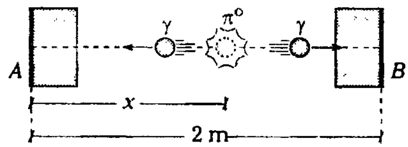
9. Un tren de 60 m de longitud se desplaza en línea recta con una rapidez constante de 40 m/s y demora en cruzar un puente t segundos. Si hubiese duplicado su rapidez, habría empleado dos segundos menos en cruzarlo. Determine la longitud del puente (en km).

A) 0,2 B) 0,15 C) 0,12
D) 0,1 E) 0,08

10. Un automóvil se va alejando en línea recta y perpendicular a un muro con rapidez de 20 m/s. Si a cierta distancia de este el conductor toca la bocina, y escucha el eco después de 4 s, ¿a qué distancia del muro se encontrará el conductor cuando escucha el eco? Considere $v_{sonido} = 340$ m/s

A) 640 m B) 320 m C) 720 m
D) 600 m E) 520 m

11. Los contadores A y B, que registran el instante de la llegada de un rayo gama, se encuentran separados 2 m. Entre ellos tuvo lugar la desintegración de una partícula subatómica conocida como *meson* π^0 en dos fotones γ. ¿En qué lugar sucedió la desintegración, si el contador A registró uno de los fotones 10^{-9} s más tarde que el contador B? (Considere que la rapidez de los fotones es de $3 . 10^8$ m/s)

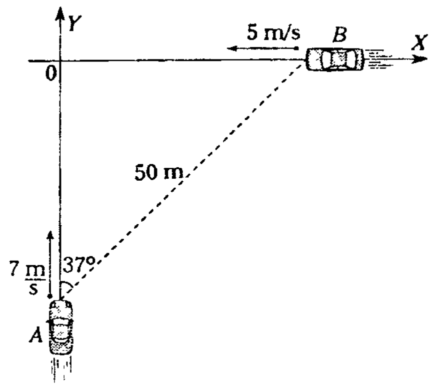


A) 0,75 m B) 0,85 m C) 1,095 m
D) 1,15 m E) 1,25 m

12. Frente a una estación A pasan dos móviles que se desplazan en línea recta con rapidez constante de 5 m/s y 20 m/s, para dirigirse hacia otra estación B. En ese instante por la estación B pasa otro móvil que se dirige hacia A con 30 m/s y se cruza con los anteriores, con un intervalo de tiempo de 1 minuto. ¿Qué distancia hay entre las estaciones A y B?

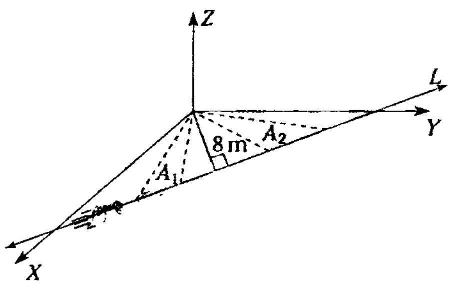
A) 5 km B) 6 km C) 6,5 km
D) 7 km E) 7,5 km

13. Dos automóviles, A y B, realizan M.R.U. con 7 m/s y 5 m/s, respectivamente. A partir del instante mostrado, determine el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que dichos automóviles equidisten del origen de coordenadas.



A) 3 s B) 5 s C) 6 s
D) 8 s E) 2 s

14. Un insecto realiza un M.R.U. y se desplaza a lo largo de la recta L. Si el área A_1 es de 40 m^2 y fue barrido en 5 s; indique cuánto es el área A_2, dado que se barrió en 8 s, y además con qué rapidez vuela el insecto.



A) 60 m^2 ; 2 m/s B) 56 m^2 ; 4 m/s
C) 64 m^2 ; 4 m/s
D) 64 m^2 ; 2 m/s E) 60 m^2 ; 1 m/s

15. Se había determinado que la rapidez constante de un móvil en trayectoria rectilínea era de 1 m/s, pero después se comprobó que a la medida de longitud usada le faltaba un decímetro de metro y que el cronómetro utilizado se adelantaba en 1/20 de segundo por cada segundo. Determine la verdadera rapidez del móvil en m/s.

A) 6/7 B) 20/21
C) 18/19
D) 19/21 E) 9/10

16. Una camioneta se desplazaba con velocidad constante por una avenida y de pronto, el chofer escucha un ruido característico (cuando las ruedas pasan de un pavimento a otro) él cual es escuchado cada 0,2 s. Determine la longitud de un pavimento, si la camioneta permanece completamente durante 6 s en él. Considere que los centros de la llanta delantera y posterior están separados 3 m.

A) 90 m B) 91 m
C) 93 m
D) 95 m E) 97 m

17. Un estudiante se encuentra a 3 m del centro de una ventana de 1 m de ancho y un bus, que experimenta M.R.U., se mueve por una pista paralela a la ventana con una distancia de 87 m. Si el bus de 10 m de longitud fue observado por el estudiante durante 8 s, ¿qué valor tiene la velocidad del bus (en km/h)?

A) 10 B) 15
C) 12
D) 18 E) 20

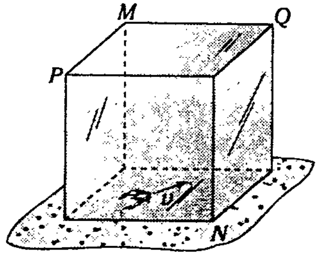
18. Un automóvil desarrolla un M.R.U. sobre una pista horizontal con una rapidez de 30 m/s y logra acercarse perpendicularmente hacia una pared si de pronto toca la bocina durante cierto tiempo, ¿en qué relación se encuentra el tiempo durante el cual se tocó la bocina y el tiempo durante el cual el conductor escucha el eco ($v_{\text{sonido}} = 330\,\text{m/s}$)?

A) 1　　B) 1,2　　C) 1,33
D) 1,5　　E) 1,66

19. En los vértices de un triángulo equilátero de lado L se encuentran tres hormigas. Ellas empiezan a moverse simultáneamente con una rapidez v constante. Si la primera hormiga mantiene invariablemente su curso hacia la segunda, la segunda hacia la tercera y la tercera hacia la primera; ¿al cabo de qué intervalo de tiempo las hormigas logran estar en un mismo lugar?

A) $\frac{L}{v}\sqrt{3}$　　B) $\frac{2L}{3v}$　　C) $\frac{L}{v}$
D) $\frac{L}{v}\frac{\sqrt{3}}{3}$　　E) $\frac{3L}{2v}$

20. Un escarabajo se encuentra moviéndose con rapidez constante de 2 cm/s en el interior de una caja cúbica tal como se muestra. Si el escarabajo va desde el vértice P al vértice Q moviéndose por las paredes internas de la caja pasando por su base, ¿qué mínimo tiempo demorará el escarabajo en dicho recorrido?
(Considere $MN = 10\sqrt{30}$ cm)



A) 40 s　　B) 45 s　　C) 48 s
D) 50 s　　E) 54 s

21. Una polilla ingresa volando por la ventana de un aula y un estudiante nota que la distancia que separa a la polilla del techo cambia a razón de 0,5 m por segundo, entre la polilla y la pared lateral cambia a razón d_1 metros por segundo, entre ella misma y la pared del fondo a razón de d_2 metros por segundo. Después de 3 s que la polilla ingresó, esta choca con una de las esquinas del fondo. Determine qué valor tiene la velocidad de la polilla, si las dimensiones del aula son 3 m de altura; 4,5 m de ancho y 6 m de largo; además, la polilla ingresó al aula estando a 3 m de una de las paredes laterales.

A) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ m/s　　B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ m/s　　C) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ m/s
D) A o B　　E) B o C

22. Un esquiador inicia su movimiento realizando M.R.U.V. Si recorre la segunda mitad de su trayecto empleando 10 s, determine el tiempo empleado en la primera mitad de su recorrido.

A) 10 s　　B) $10(1+\sqrt{2})$ s
C) $10(\sqrt{2}-1)$ s
D) 5 s　　E) $5(1+\sqrt{2})$ s

23. Un atleta inicia un movimiento rectilíneo con aceleración constante, la cual le permite aumentar su rapidez a razón de 5 m/s cada 2 s. Determine el menor tiempo que emplea el atleta para recorrer los primeros 60 m, si la máxima rapidez que puede alcanzar es 5 m/s.

A) 12 s B) 11 s
C) 10 s
D) 13 s E) 14 s

24. Un ciclista se desplaza con una rapidez de 15 m/s. Si antes de llegar a un bache gira 32° el timón de la bicicleta (maniobra que realiza sin cambiar la rapidez y durante 0,15 s); determine el módulo de la aceleración media que experimenta el ciclista en dicho intervalo de tiempo.

A) 80 m/s^2 B) 64 m/s^2
C) 84 m/s^2
D) 60 m/s^2 E) 56 m/s^2

25. Un automóvil inicia su movimiento con aceleración constante de 2,5 m/s^2, si luego de cierto tiempo empieza a disminuir su rapidez a razón de 5 m/s^2 hasta que se detiene y el tiempo total empleado del automóvil fue de un minuto, determine su recorrido y el tiempo durante el cual estuvo aumentando su rapidez.

A) 2 000 m ; 40 s B) 3 000 m ; 20 s
C) 1 000 m ; 40 s
D) 1 000 m ; 20 s E) 3 000 m ; 40 s

26. Dos partículas P y Q se mueven sobre el eje x con velocidades constantes de + 30 m/s y − 12 m/s, respectivamente. Cuando dichas partículas pasan por las posiciones $\vec{x}_P=-120$ m y $\vec{x}_Q=+180$ m, la partícula P adquiere una aceleración constante de -3m/s^2. ¿Qué distancia separará las partículas cuando tengan la misma velocidad?

A) 3 m B) 6 m
C) 9 m
D) 11 m E) 12 m

27. Un automóvil se mueve sobre una pista horizontal, experimentando M.R.U. con 20 m/s, y se dirige a un camión en reposo cuando el automóvil está a 80 m del camión, este inicia su movimiento en la misma dirección del automóvil con una aceleración constante a. ¿Qué valores debe tener a para que el automóvil nunca alcance al camión?

A) $a>2$ m/s^2 B) $a>1{,}5$ m/s^2
C) $a>2{,}4$ m/s^2
D) $a>2{,}5$ m/s^2 E) $a>3$ m/s^2

28. Una partícula ubicada en el punto $A(0;75)$ cm inicia su movimiento con una aceleración constante igual a $\vec{a}=(1{,}5\hat{i}-2\hat{j})$cm/s^2. Si la máxima rapidez que puede alcanzar la partícula es de 15 cm/s, ¿qué distancia separa a la partícula del origen de coordenadas 8 s después de iniciado su movimiento?

A) $5\sqrt{10}$ cm B) $15\sqrt{10}$ cm
C) $7{,}5\sqrt{10}$ cm
D) $10\sqrt{10}$ cm E) $17{,}5\sqrt{10}$ cm

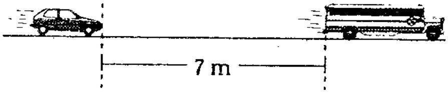
29. Una partícula se mueve sobre el plano XY experimentando M.R.U.V. y en el instante inicial la partícula presenta la posición $P(-12;9)$ m y una velocidad $\vec{v}=(3\hat{i}+4\hat{j})$m/s . Si las áreas que barre el vector posición cada 2 s disminuyen en 15 m^2, determine el módulo de la aceleración (en m/s^2).

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75
D) 1 E) 1,5

30. Dos móviles A y B experimentan movimientos rectilíneos uno hacia el otro con rapidez constante de 10 m/s y 20 m/s, respectivamente. Si en el instante que están separados 275 m, B empieza a frenar con una aceleración constante de módulo 1 m/s^2, determine a qué distancia se encontrarán separados cuando tengan igual rapidez.

A) 20 m B) 25 m C) 30 m
D) 15 m E) 35 m

31. Un automóvil de 3 m de longitud y un ómnibus se desplazan en la misma dirección por vías paralelas y rectilíneas con una rapidez constante de 5 m/s y 10 m/s, respectivamente. Si en el instante mostrado el automóvil acelera a razón de 10 m/s^2 con la intención de adelantar al omnibus, determine la longitud del ómnibus dado que el automóvil logra su objetivo luego de 3 s a partir del instante mostrado.



A) 12 m B) 20 m C) 25 m
D) 14 m E) 10 m

32. En una pista rectilínea se desplazan dos automóviles y pasan por una estación con igual rapidez, $v=10$ m/s, y con un intervalo de tiempo de 4 s. En el instante que pasa el segundo automóvil frente a la estación, empiezan a acelerar con 2 m/s^2 y 4 m/s^2, respectivamente. Determine, luego de cuántos segundos, desde que acelera, este logra alcanzar al primero.

A) $\sqrt{10}$ s B) $2\sqrt{10}$ s C) $2\sqrt{5}$ s
D) $4\sqrt{5}$ s E) $8\sqrt{5}$ s

33. Un conductor se desplaza por una autopista recta con una rapidez constante de 25 m/s y un camión sale para adelantarlo 105 m . ¿Cuál es la aceleración mínima constante que puede asegurar la parada del vehículo para no chocar con el camión, si consideramos que el conductor tiene un tiempo de reacción de 0,2 s?

A) $\frac{25}{4}$ m/s^2 B) $\frac{25}{2}$ m/s^2 C) $\frac{5}{4}$ m/s^2
D) $\frac{25}{8}$ m/s^2 E) $\frac{5}{8}$ m/s^2

34. Un tren de 64 m de longitud se encuentra en reposo a cierta distancia de un túnel rectilíneo de 101 m de largo e inicia su movimiento con una aceleración constante. Si la parte delantera del tren ingresa con una rapidez de 6 m/s y la posterior con 10 m/s, ¿qué rapidez tendrá dicho tren en el instante en que la mitad de este está saliendo del túnel?

A) 11 m/s B) 12 m/s C) 13 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

35. Desde dos estaciones A y B, separadas 144 m, inician su movimiento dos automóviles con aceleración constante de módulo 4 m/s^2 y 2 m/s^2, respectivamente. Si después de 4 s parte de la estación B un tercer automóvil, determine el módulo de la aceleración del tercer automóvil, de tal manera que los tres automóviles se crucen simultáneamente. Considere que los tres automóviles se mueven en carriles paralelos.

A) 3 m/s^2 B) 3,5 m/s^2 C) 4 m/s^2
D) 4,5 m/s^2 E) 5,5 m/s^2

36. Un automóvil se mueve con una velocidad constante de módulo 20 m/s. Si en un instante dado a d metros, delante de él parte otro automóvil con una aceleración constante de 2,5 m/s^2 y se mueve en la misma dirección, determine d para que A y B se crucen en una sola oportunidad.

A) 100 m B) 160 m C) 70 m
D) 50 m E) 80 m

37. Una partícula se mueve sobre el eje x donde su posición queda definida por $\vec{x}=\left(\frac{t^3}{3}-4t^2+16t+10\right)$m ; t en segundos.
Con respecto a las siguientes proposiciones, indique verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

- Durante el intervalo $t\in[0;4]$ la partícula se mueve hacia la derecha.
- A partir de $t>4$ la partícula se mueve hacia la izquierda aumentando su rapidez.
- Durante el intervalo $t\in[0;4]$ el recorrido de la partícula es 64/3 m.

A) VVV B) FVV C) FVF
D) VFV E) FFF

38. Un gusano de longitud L se desplaza con una rapidez v sobre una superficie horizontal en línea recta y en un determinado instante cambia la dirección de su movimiento en 90°. Determine a partir de ese instante el tiempo que transcurre hasta que la distancia entre sus extremos sea mínima y cuánto vale dicha distancia.

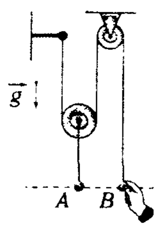
A) $\frac{L}{v};\frac{L\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{L}{2v};\frac{L}{2}\sqrt{2}$ C) $2\frac{L}{v};\frac{L}{2}\sqrt{2}$
D) $\frac{L}{4v};\frac{L}{2}\sqrt{2}$ E) $\frac{L}{v};\frac{L}{2}\sqrt{3}$

39. Un automóvil se mueve en línea recta con una velocidad constante avanzando una distancia d para luego adquirir una aceleración constante de módulo a, disminuyendo su velocidad hasta que se detiene. Determine el tiempo de movimiento del automóvil, si se sabe que es mínimo.

A) $\sqrt{\frac{d}{a}}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{a}}$ C) $\sqrt{\frac{2d}{a}}$
D) $2\sqrt{\frac{d}{a}}$ E) $\sqrt{\frac{d}{2a}}$

40. En la figura, se tiene una canica A de acero y otra B de madera niveladas en reposo. Si soltamos B, A recorre durante el tercer segundo de su movimiento 5 m. ¿En cuánto se desnivelan A y B al cabo de 3 s de abandonar A?

A) 9 m
B) 12 m
C) 15 m
D) 24 m
E) 27 m



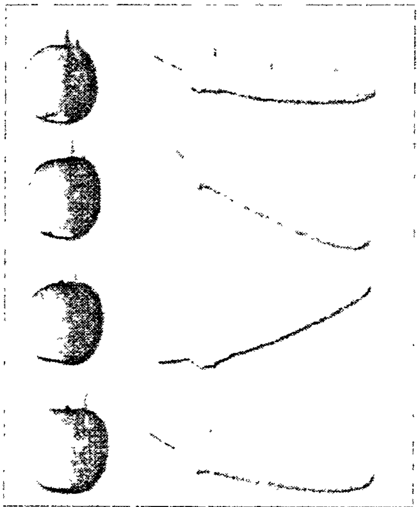
CLAVES

1	A	11	D	21	E	31	B
2	C	12	D	22	B	32	B
3	E	13	B	23	D	33	D
4	D	14	D	24	E	34	C
5	B	15	C	25	A	35	D
6	A	16	C	26	B	36	E
7	D	17	D	27	D	37	D
8	E	18	B	28	B	38	B
9	D	19	B	29	B	39	D
10	C	20	D	30	B	40	E

IV

CAPÍTULO

Movimientos de caida libre



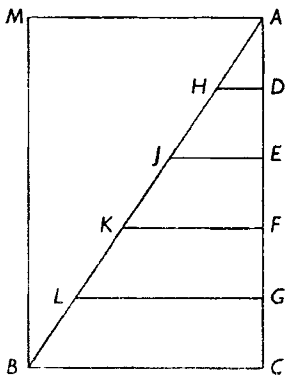
(a)

(b)

Para la caída de los cuerpos, durante mucho tiempo se planteó que los más pesados caen más rápido. **Fig. (a)** En ausencia de aire muestra lo contrario. **Fig. (b)** Algo similar ocurrió con el movimiento parabólico, como el que sigue el chorro de agua.

G. GALILEI Y LA PRUEBA DEL MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

Galilei al estudiar detenidamente la rodura de pequeñas esferas sobre un plano inclinado, estableció que la velocidad y los desplazamientos deben aumentar en proporción simple con respecto al tiempo. Esta relación la podemos encontrar escrita en su obra Diálogo sobre dos nuevas ciencias (1638). La cita textual que reproducimos a continuación, contiene las mismas palabras de Galilei.



La demostración de Galilei de que un cuerpo que inicia su movimiento uniformemente variado, la distancia cubierta por el cuerpo es la mitad de la distancia que él habría cubierto si estuviera moviéndose todo el tiempo con la misma velocidad

En el movimiento acelerado, el aumento (de velocidad), siendo continuo, usted puede dividir los grados de velocidad (*valores de velocidad* en el moderno lenguaje), que aumentan continuamente en una cantidad determinada, a causa de que cambiando a cada momento son infinitos.

Por tanto, podremos ejemplificar mejor nuestro propósito trazando un triángulo *ABC* (ver figura). Tomemos en el lado *AC* tantas partes iguales como nos plazca, *AD, DE, EF, FG, GC* y tracemos por los puntos *D, E, F, G* líneas rectas paralelas a la base *BC*. Supongamos ahora que las partes señaladas en la línea *AC* representan tiempos iguales y que las paralelas trazadas por los puntos *D, E, F* y *G* representan para nosotros los grados de velocidad acelerada que aumentan.

Igualmente en el mismo tiempo y que el punto *A* sea el estado de reposo, partiendo del cual el cuerpo ha adquirido, por ejemplo, en el tiempo *AD* el grado de velocidad *DH*, en el segundo tiempo supondremos que ha aumentado la velocidad de *DH* a *EJ* y asimismo en los tiempos siguientes, de acuerdo con el aumento de las líneas *FK, GL*, etc. Pero, a causa de que la aceleración es continua de momento a momento y no por saltos de una cierta parte del tiempo a otra, representando el punto *A* el momento de menor velocidad, esto es, el estado de reposo, y *AD* el primer instante de tiempo siguiente, es evidente que, antes de adquirir el grado de velocidad *DH* en el tiempo *AD*, el cuerpo debe haber pasado por grados cada vez más pequeños adquiridos en los infinitos instantes que hay en el tiempo *DA*, correspondiendo a los infinitos puntos de la línea *DA*. Por tanto, para representarnos los infinitos grados de velocidad que preceden al grado *DH* es necesario imaginar líneas sucesivamente más cortas que se suponen están trazadas por los infinitos puntos de la línea *DA* y paralelas a *DH*.

Estas líneas infinitas representan para nosotros la superficie del triángulo *AHD*. Así, podemos imaginar toda distancia recorrida por el cuerpo, con el movimiento que comienza en el reposo y acelerado uniformemente, haber pasado y hecho uso de infinitos grados de velocidad que aumentan conforme a las infinitas líneas, que comenzando desde el punto A se suponen trazadas paralelamente a la línea *HD* y a las restantes *JE, KF* y *LG*, continuando el movimiento hasta donde se quiera.

Completemos ahora el paralelogramo *AMBC* y prolonguemos hasta el lado BM, no solo las paralelas señaladas en el triángulo, sino también aquellas otras paralelas, en número infinito, que imaginamos trazadas desde todos los puntos del lado *AC*; y como *BC*, que es la mayor de estas infinitas paralelas del triángulo, representa para nosotros el grado mayor de velocidad adquirido por el movil en el movimiento acelerado y la superficie entera de dicho triángulo era la masa y la suma de toda la velocidad con la cual en el tiempo *AC* recorrió cierto espacio, así ahora el paralelogramo es una masa y agregado de un número igual de grados de velocidad, pero cada uno igual al mayor *BC*. Esta masa de velocidades será el doble de la masa de las velocidades crecientes en el triángulo, como dicho paralelogramo es doble del triangulo y, por tanto, si el cuerpo que al caer empleó los grados acelerados de velocidad correspondientes al triángulo *ABC* ha recorrido tal distancia en tal tiempo, es muy razonable y probable que, empleando las velocidades uniformes correspondientes al paralelogramo, recorrerá con un movimiento igual en el mismo tiempo una distancia doble que la recorrida por el movimiento acelerado.

Debemos tener en cuenta que este confuso lenguaje fue usado por Galilei para demostrar por primera vez las leyes de la caída libre vertical de los cuerpos.

FUENTE: Biografía de la Física. AUTOR: G. Gamow. Pág.: 30

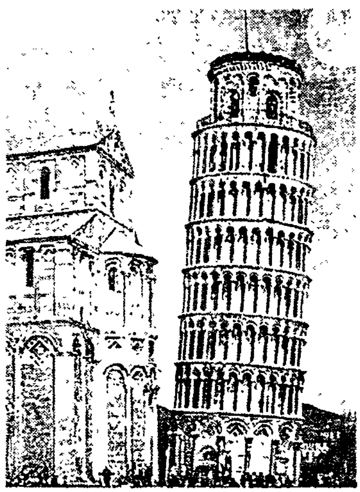
Movimientos de caída libre

OBJETIVOS

- Comprender por qué al movimiento se le califica como caída libre.
- Deducir la trayectoria de los objetos a partir de la dirección de la velocidad inicial y la dirección de la aceleración de la gravedad.
- Establecer las características del movimiento vertical y el movimiento parabólico de caída libre de los objetos.

INTRODUCCIÓN

Se sabe por experiencia propia que, al ser soltada, una piedra desciende hasta tocar la superficie de la tierra, este hecho es conocido por el hombre desde su aparición sobre el planeta. En la antigüedad ya se especulaba cómo debía estar relacionado el tiempo de caída de los cuerpos con el peso[1] de los mismos.

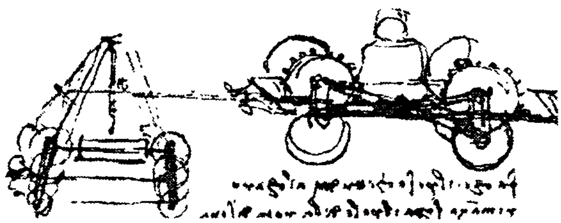


La histórica Torre de Pisa (Italia), en donde según se comenta Galileo Galilei hizo algunas de sus pruebas para verificar sus hipotesis.

Entre los diversos planteamientos que se dieron destaca el del filósofo griego Aristóteles, quien en su obra *sobre los cielos* señala: La rapidez de caída de los objetos es proporcional al peso de los mismos.

De tal planteamiento Aristóteles dedujo que un objeto al caer recorre una distancia en determinado tiempo y un objeto más pesado cubre la misma distancia en menor tiempo, de donde concluimos que el tiempo de caída de los cuerpos es inversamente proporcional al peso. Por ejemplo, si un cuerpo pesa el doble que otro, tardará la mitad de tiempo en caer la misma altura.

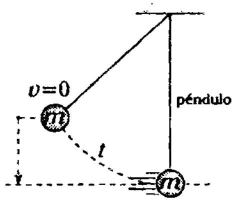
(1) **Peso.** Es así como se denominaba a lo que hoy en día se denomina masa. El concepto de peso se detallará en el capítulo sobre estática



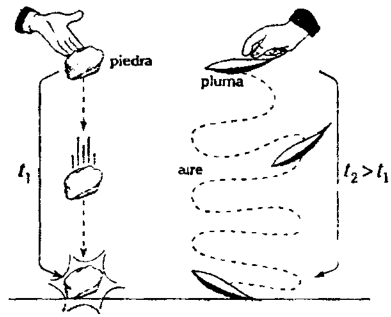
Leonardo Da Vinci, entre otras actividades que realizaba, fue un gran inventor de muchos mecanismos y dispositivos. La fotografía muestra el esquema de un prototipo de un automóvil que funcionaba con resortes.

Hoy en día bastaría poner en práctica un método simple de medida del tiempo para demostrar experimentalmente que un cuerpo de peso doble que otro, emplea el mismo tiempo en caer. Sin embargo, esto era un problema, por ejemplo, para los sabios del Renacimiento, Leonardo Da Vinci, uno de ellos, llegó a plantear sobre la caída de los cuerpos que la rapidez de caída es directamente proporcional al tiempo. Se trató de demostrar ésta y otras teorías en la práctica misma, pero surgían algunos inconvenientes, como por ejemplo la acentuada rapidez con que se producía la caída de los cuerpos.

El problema de la caída de los cuerpos fue resuelto en cierta forma por el sabio Florentino Galileo Galilei haciendo rodar bolas de bronce pulido sobre un canal practicado en una tabla, de esta forma Galileo hacía que la caída de los cuerpos transcurriera más lenta y al relacionar los desplazamientos de las bolas con el tiempo, pudo determinar las velocidades en diferentes instantes. También a partir de sus experimentos sobre el movimiento pendular, Galileo puso en tela de juicio la tesis según la cual el tiempo de caída dependía del peso de los cuerpos. En sus experimentos verificó que el tiempo de oscilación del cuerpo que está suspendido de un hilo, no depende del peso del cuerpo, por ello Galileo señalaba que Aristóteles estaba equivocado, mas se le presentó una dificultad. Si el peso de un cuerpo no influye en el tiempo de caída, ¿por qué una piedra y una pluma al ser soltadas de la misma altura no caen al mismo tiempo? Esta situación la superó hábilmente Galileo al plantear que en ausencia del aire la piedra y la pluma descienden en línea recta y para iguales desplazamientos se emplean iguales intervalos de tiempo.



Galileo interpretó como caída al descenso del cuerpo y el tiempo (t) no dependía de la masa (m).



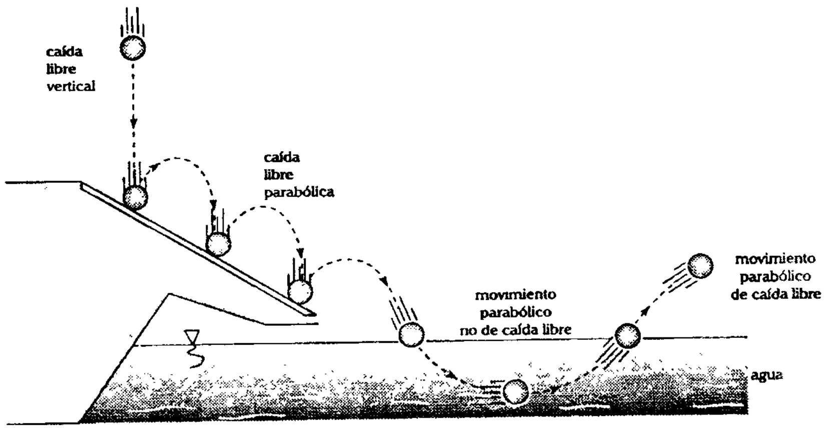
En presencia del aire, la pluma describe un trayecto complicado y demora más en llegar a la superficie.

Años más tarde, el físico-químico francés Robert Boyle realizó un experimento de caída libre en un tubo de vacío de aire y demostró la validez de la tesis de Galileo.

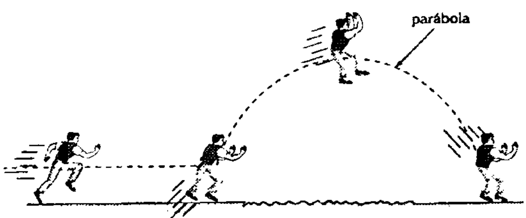
LA CAÍDA LIBRE

El hecho de dejar de lado los efectos del aire (sobre todo la resistencia que ofrece) cuando un cuerpo ha sido soltado permite establecer que lo único que lo afecta es la atracción de la Tierra, con lo cual se afirma que **el cuerpo está en caída libre**. Son movimientos de caída libre, según su trayectoria, el movimiento vertical, parabólico, circular y elíptico.

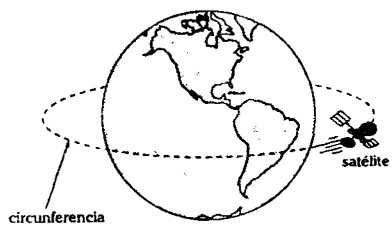
En ausencia de los efectos del aire se tiene, según la figura



El objeto primero realiza movimiento vertical de caída libre, luego del choque rebota y realiza movimiento parabólico de caída libre, pues sobre él sólo actúa la atracción de la Tierra. Posteriormente al ingresar al agua, la esfera realiza un movimiento parabólico con la concavidad hacia arriba, pero ya no es de caída libre ¿Por qué? Porque no sólo actúa la fuerza de gravedad, sino también una acción de parte del agua. Finalmente la pequeña esfera sale del agua y realiza nuevamente movimiento parabólico de caída libre.



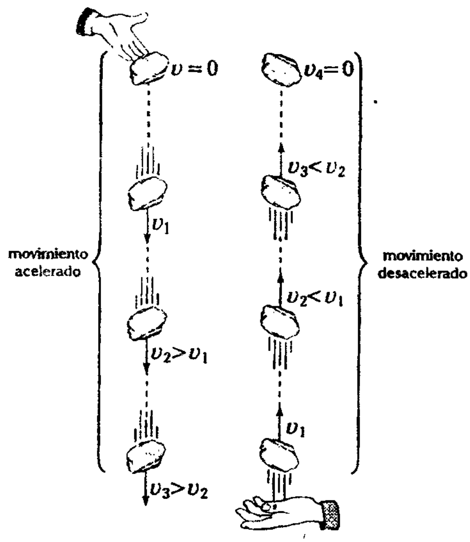
El deporte salto largo en ausencia de efectos del aire sería un ejemplo de movimiento parabólico de caída libre.



Si consideramos que lo único que afecta al satélite artificial es la atracción terrestre entonces desarrolla un movimiento circunferencial de caída libre.

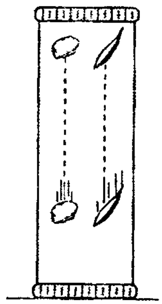
MOVIMIENTO VERTICAL DE CAÍDA LIBRE

Si soltamos una piedra desde cierta altura, observaremos que describe una trayectoria vertical mientras desciende con una rapidez aumentativa, es decir, su movimiento hacia abajo es acelerado. Mas, si la lanzamos verticalmente hacia arriba, apreciaremos que su rapidez disminuye conforme asciende hasta que se hace cero, es decir, su movimiento hacia arriba es desacelerado.



Este movimiento en particular fue estudiado experimentalmente por Galileo Galilei haciendo uso de un método nuevo en el campo de las ciencias. Fue él quien descubrió las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos y de los proyectiles en caída libre. Mediante sus observaciones, Galileo había llegado a la conclusión de que todos los cuerpos que se dejan caer desde la misma altura llegarían simultáneamente al piso independien-temente de que sean pesados o livianos.

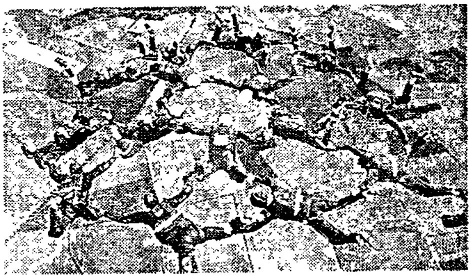
Se dice que Galileo subió a la torre inclinada de Pisa para hacer una demostración experimental; dejó caer varias esferas de diferentes pesos que llegaron juntas al suelo causando de esta manera reacciones entre los presentes quienes creían hasta ese entonces que un cuerpo pesado caía más rápidamente que uno liviano.



En un tubo donde se ha extraído el aire, la pluma y la piedra caen en igual tiempo.

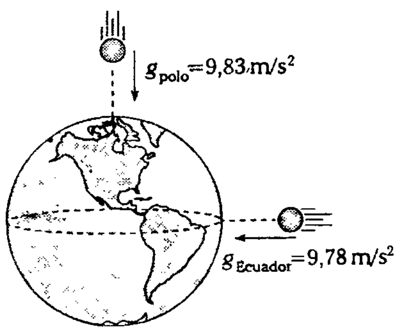
Aunque puede decirse que este hecho es contradictorio con la realidad, puesto que si soltamos una esfera de acero y una pluma desde la misma altura, el primero llega al piso antes que la pluma, esto se puede explicar por la acción del aire, el cuál ofrece resistencia al movimiento de los cuerpos. Pero, si de alguna manera se eliminara el aire, ambos cuerpos caerían simultáneamente. Esto se comprobó experimentalmente después del experimento de Galileo cuando se inventó la bomba de vacío.

Experimentos cuidadosos realizados por Galileo, demostraron que cuando un cuerpo es soltado desde cierta altura recorre distancias que son proporcionales al cuadrado del tiempo. Debido a esto se concluyó que se trataba de un movimiento con aceleración constante, o sea un movimiento uniformemente acelerado. Esto era válido para todos los cuerpos, al despreciar la resistencia del aire.



Algunos paracaidistas se valen de la resistencia del aire para descender con rapidez constante y así realizar algunas acrobacias.

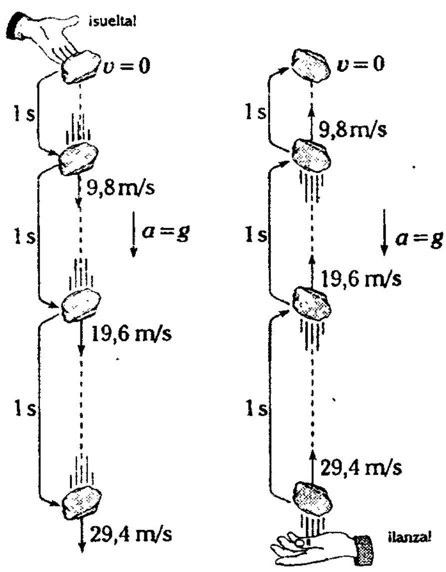
La aceleración que experimentan los cuerpos en caída libre se denomina **aceleración de la caída libre** (también suele llamarse la aceleración de la gravedad) que se denota con la letra g. Su valor depende del lugar de la superficie terrestre donde se analice y varía entre 9,83 m/s^2 en los polos hasta 9,78 m/s^2 en la zona ecuatorial.



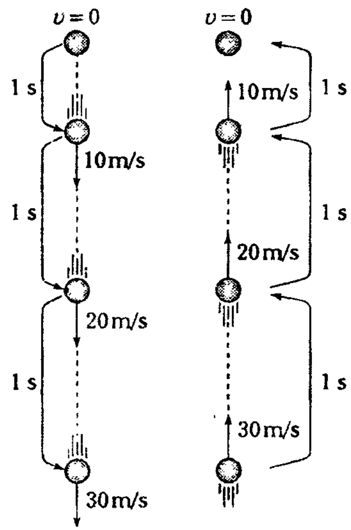
La aceleración de la caída libre es mayor en los polos y menor en el Ecuador.

El valor que suele aceptarse internacionalmente para la aceleración de la caída libre es 9,8 m/s^2. Por lo tanto, si no consideramos la resistencia del aire, un cuerpo que desciende verticalmente aumentará su rapidez en 9,8 m/s cada 1 segundo. Asimismo, un cuerpo que asciende verticalmente disminuirá su rapidez en 9,8 m/s cada 1 segundo.

El valor 9,8 m/s^2 para la aceleración de la caída libre es considerado constante cuando el cuerpo se encuentra a alturas pequeñas en comparación con el radio de la Tierra (R_T = 6 400 km), aunque esto no es del todo cierto porque la aceleración causada por la atracción terrestre depende de la distancia desde el cuerpo hasta el centro de la Tierra. Pero estas variaciones por ser muy pequeñas se pueden despreciar. Las gráficas siguientes nos muestran cómo varía la rapidez de un cuerpo en caída libre en las proximidades de la superficie terrestre.



Para fines prácticos se acostumbra redondear el módulo de $\vec{g}$ a $10\,m/s^2$. Esto quiere decir que cuando un cuerpo asciende verticalmente su rapidez disminuirá en cada segundo 10 m/s. Asimismo, cuando el cuerpo desciende, su rapidez en cada segundo aumentará en 10 m/s, como puede apreciarse en la siguiente figura:



CARACTERÍSTICAS DEL M.V.C.L.

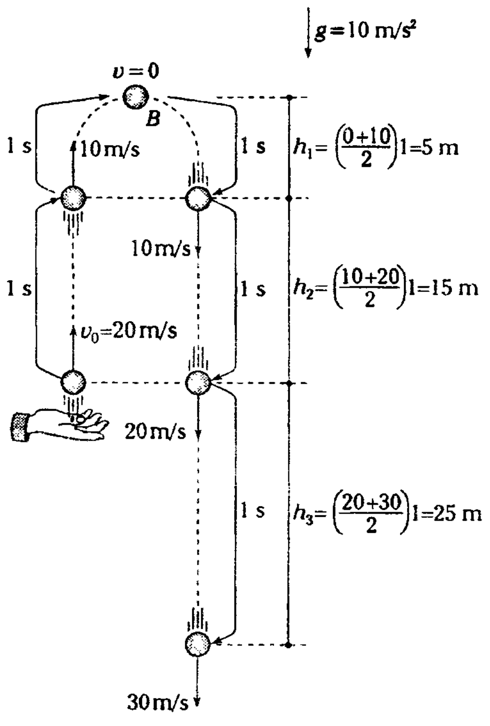
1. Sólo actúa la atracción de la Tierra sobre el cuerpo (se desprecia la resistencia del aire).
2. La atracción terrestre le origina al objeto una aceleración constante $g \approx 10\ m/s^2 = \text{cte}$. (en las inmediaciones de la superficie terrestre).
3. El movimiento vertical de caída libre es un M.R.U.V. y por lo tanto usaremos sus mismas fórmulas o ecuaciones de modo que se cambia $d = h$ y $a = g$.

$$\boxed{h = \left(\frac{\upsilon_0 + \upsilon_F}{2}\right)t} \qquad \boxed{h = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{\upsilon_F = \upsilon_0 \pm gt} \qquad \boxed{\upsilon_F^2 = \upsilon_0^2 \pm 2gh}$$

Las ecuaciones se utilizarán con el signo (+) cuando el cuerpo desciende (movimiento acelerado) y el signo (–) cuando asciende (movimiento desacelerado).

Si un cuerpo asciende y luego desciende, se recomienda analizar el movimiento por tramos, es decir, primero se analizará en el ascenso y luego en el descenso. Otra forma de analizar este movimiento es con las ecuaciones vectoriales, esto será detallado más adelante. Por ahora veamos en detalle un ejemplo que nos permita entender el significado físico que tiene el módulo de $g = 10\,m/s^2$. Esto tiene doble significado físico, como pasaremos a explicar con el siguiente caso ilustrativo donde se ha lanzado verticalmente hacia arriba una esfera con una rapidez inicial de 20 m/s; véase segundo a segundo lo que sucede.



Observamos que

- La rapidez de la esfera cada 1 s varía en 10 m/s.
- La altura recorrida también cada 1 s varía en 10 m.
- Se alcanza el punto más alto (B) cuando la rapidez es nula.

¿Cuánto recorrió durante el tercer segundo de su movimiento? Esta pregunta implica considerar el tiempo ordenado. Vemos según la figura que recorre 5 m durante el tercer segundo.

¿Cuánto recorrió la esfera durante los 3 primeros segundos de su movimiento? Aquí ya es necesario contabilizar los 3 primeros segundos, vemos que recorre $15+5+5=25$ m.

Siendo $g=10$ m/s^2 se concluye que en cada 1 s la rapidez (v) varía en 10 m/s y también la altura (h) varía en 10 m.

En la práctica considere las siguientes observaciones:

- El tiempo de subida se puede calcular con
$$t_{sub}=\frac{v_{lanzam}}{g}$$
- A un mismo nivel
$$v_{sub}=v_{baj}$$
$$t_{sub}=t_{baj}$$
$$\vec{v}_{sub}\neq\vec{v}_{baj}$$
- No confundir tercer segundo (orden) con tres segundos (la duración).

A continuación examinemos otros ejemplos ilustrativos.

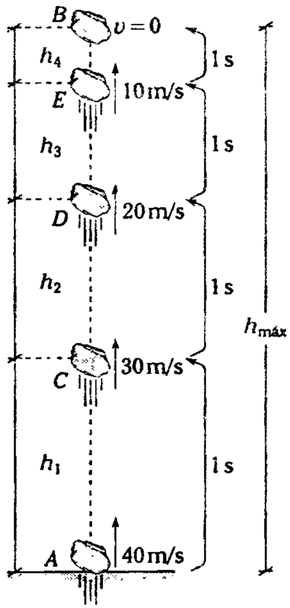
Ejemplo 1

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con 40 m/s, desde la superficie terrestre. Analicemos el movimiento de la piedra durante el ascenso y el descenso. (Desprecie la resistencia del aire y use $g=10$ m/s^2)

Resolución

Cuando la piedra asciende, su rapidez disminuye en 10 m/s en cada 1 s.

Veamos



Los recorridos en cada segundo del ascenso los podemos calcular con $h=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)t$

En el primer segundo de movimiento recorre h_1 (de A hacia C), donde

$$h_1=\frac{(40+30)}{2}\times1=35\text{ m}$$

asimismo durante el segundo segundo (de C hacia D)

$$h_2=\frac{(30+20)}{2}\times1=25\text{ m}$$

El recorrido durante el tercer segundo (de D hacia E)

$$h_3=\frac{(20+10)}{2}\times1=15\text{ m}$$

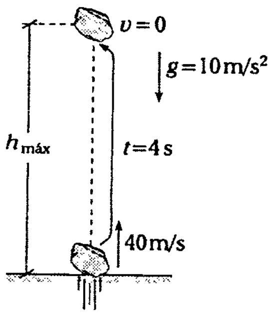
El recorrido durante el cuarto segundo (de E hacia B)

$$h_4=\frac{(10+0)}{2}\times1=5\text{ m}$$

Cuando la piedra ha alcanzado la posición más alta ($v=0$) su altura máxima es 80 m. Esta altura máxima también se puede calcular usando la misma fórmula anterior en el tramo AB de manera directa.

$$h_{máx}=\frac{(40+0)}{2}\times4=80\text{ m}$$

Ahora, si no hubiera analizado el movimiento segundo a segundo la altura máxima también se podría calcular así



Usando la fórmula del M.R.U.V.

$$v_F^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$0 = 40^2 - 2\times 10 \times h_{máx}$$

$$\therefore\ h_{máx} = \frac{1600}{20} = 80\ \text{m}$$

También podemos notar que el intervalo de tiempo empleado en el ascenso es 4 s.

$$t_{sub} = 4\ \text{s}$$

Esto puede demostrarse al aplicar en el tramo de ascenso la siguiente ecuación:

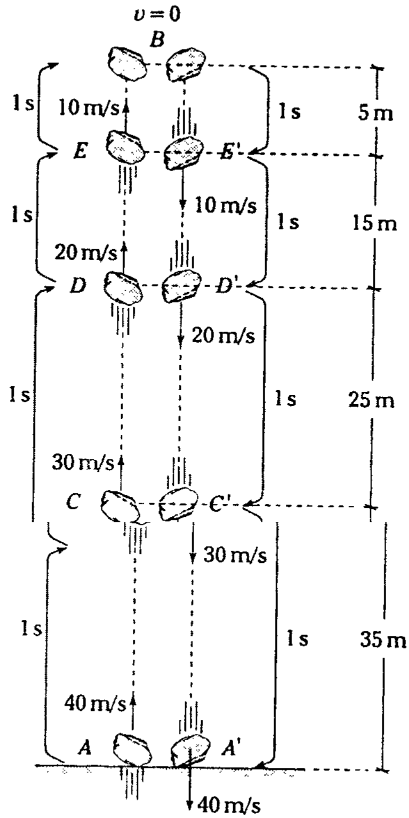
$$t_{sub} = \frac{v_{lanzam.}}{g}$$

$$\Rightarrow\ t_{sub} = \frac{40}{10}$$

$$\Rightarrow\ t_{sub} = 4\ \text{s}$$

Para el movimiento de descenso ya se ha demostrado anteriormente cuáles son sus características. En el primer segundo de descenso recorre 5 m y en cada segundo que transcurre recorre 10 m más que el segundo anterior.

Comparando el movimiento de ascenso y el de descenso tendremos lo siguiente:



De este último gráfico podemos verificar nuevamente las observaciones respecto del M.V.C.L.

- En un tramo, el tiempo empleado en subir es igual al que emplea en bajar

  $$t_{sub} = t_{baj}$$

  Por ejemplo

  $$t_{AB} = t_{BA} = 4\ \text{s}$$

  $$t_{AD} = t_{DA} = 2\ \text{s}$$

- A un mismo nivel, la rapidez del cuerpo cuando asciende y desciende es la misma.

  $v_{sub} = v_{baj}$

  Por ejemplo

  $v_A = v_{A'} = 40$ m/s

  $v_C = v_{C'} = 30$ m/s

  $v_D = v_{D'} = 20$ m/s

Se ha podido notar que cuando un cuerpo sube y luego baja, el análisis realizado para el movimiento es, primero, en el ascenso y luego en el descenso. Algunas veces cuando procedemos así las cosas se tornan algo laboriosas. Estas dificultades se pueden resolver si abreviamos con un análisis vectorial del movimiento, es decir, utilizando las ecuaciones vectoriales del M.V.C.L., las cuales son

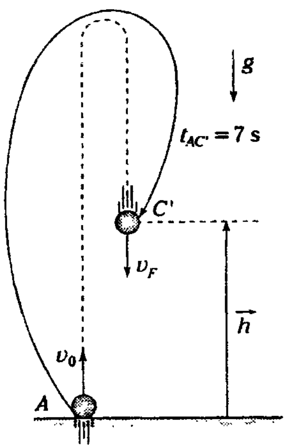
$$\boxed{\vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{g}t}$$

$$\boxed{\vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2}$$

$$\boxed{\vec{h} = \left(\frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_F}{2}\right)t}$$

en donde si las magnitudes están orientadas hacia arriba se reemplazan con signo positivo y si están orientadas hacia abajo, con signo negativo.

Análisis vectorial del M.V.C.L.



Determinemos, según la figura, la altura de la esfera luego de 7 s del lanzamiento

$$\vec{h} = \vec{v}_0 t_{AM'} + \frac{1}{2}\vec{g}t_{AM}^2$$

$$\vec{h} = (+40)(7) + \frac{1}{2}(-10)(7)^2 = +35 \text{ m}$$

¿Qué tiempo permanece en el aire? Para saberlo usamos la fórmula

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + \vec{g}\, t_{AA'}$$

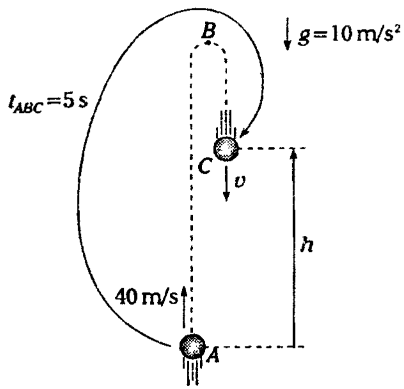
$$-40 = +40 + (-10)t_{AA'}$$

$$\therefore\ t_{AA'} = 8 \text{ s}$$

Veamos otro ejemplo de aplicación de las ecuaciones vectoriales.

Ejemplo 2

Una persona lanza una piedra, verticalmente hacia arriba, con una rapidez de 40 m/s. Determine su rapidez luego de 5 s de su lanzamiento, asimismo a qué altura respecto del punto de lanzamiento se encuentra. (Desprecie la resistencia del aire y use $g = 10$ m/s^2)



Resolución

Por ser el lanzamiento, vertical y hacia arriba, con $v_0 = 40$ m/s empleará 4 s en el ascenso; así al transcurrir 5 s desde que se lanzó la piedra, ésta se encontrará descendiendo.

Como el objetivo del ejercicio es ver la forma vectorial del M.V.C.L. analicemos el trayecto ABC.

- Cálculo de la velocidad final. Usamos la ecuación

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

$$\vec{v}_F=(+40)+(-10)5$$

$$\vec{v}_F=40-50$$

$$\therefore\ \vec{v}_F=-10\ \text{m/s}$$

La velocidad final nos indica que al cabo de 5 segundos la piedra desciende verticalmente con una rapidez de 10 m/s.
Note que el tiempo empleado $t=5$ s es durante el movimiento de ascenso y descenso, y no piense que es el tiempo sólo de ascenso o de descenso.

- Cálculo de altura h. Usando la ecuación

$$\vec{h}=\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{h}=(+40)5+\frac{1}{2}(-10)5^2$$

$$\vec{h}=200-125$$

$$\therefore\ \vec{h}=+75\ \text{m}$$

Este resultado nos indica que la piedra se encuentra a 75 m arriba o sobre el punto de lanzamiento.

Nota

Cuando se trabaja sólo verticalmente no es necesario utilizar continuamente el vector unitario $\hat{j}$, de aquí en adelante usaremos una regla de signos al utilizar los vectores. Los vectores que apuntan hacia arriba se consideran positivos y los que apuntan hacia abajo se consideran negativos. Por ejemplo

$\vec{v}=v\hat{j}$
pondremos
$\vec{v}=+v$

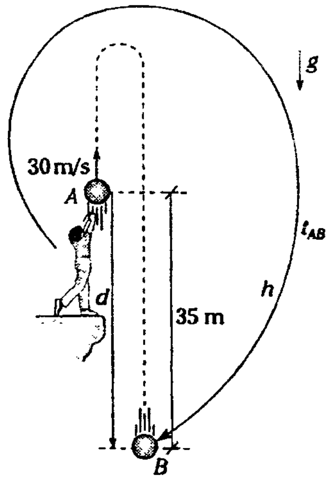
$\vec{v}=-v\hat{j}$
pondremos
$\vec{v}=-v$

Ejemplo 3

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba y con 30 m/s desde el borde de un acantilado. Despreciando la resistencia del aire y usando $g=10$ m/s^2, ¿al cabo de qué tiempo la piedra estará 35 m debajo del punto de lanzamiento?

Resolución

El enunciado lo podemos bosquejar de la siguiente manera:



Aplicando las ecuaciones vectoriales del M.V.C.L., se tiene que

$$\vec{d}=\vec{v}_0t_{AB}+\frac{1}{2}\vec{g}t_{AB}^2$$

$$(-35)=(+30)t_{AB}+\frac{1}{2}(-10)t_{AB}^2$$

$$-35=30t_{AB}-5t_{AB}^2$$

Ordenando, tenemos

$$(t_{AB}-7)(t_{AB}+1)=0$$

$$t_{AB}=7\ \text{s}\quad \text{o}\quad t_{AB}=-1\ \text{s}$$

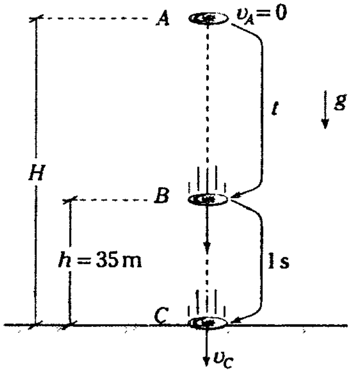
Como el intervalo de tiempo no puede ser negativo consideramos $t_{AB}=7$ s.

Problema 1

Una moneda se suelta desde cierta altura respecto a la superficie terrestre. Si observamos que en el último segundo de su caída recorre 35 m, ¿desde qué altura fue soltada la moneda? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

Supongamos que la moneda fue soltada de una posición A, que está a una altura H respecto del suelo; entonces al ser soltada, su rapidez inicial es cero ($v_A = 0$) y realiza un M.V.C.L. tal como se muestra a continuación.



- En el tramo de A hacia B podemos usar

$$h_{AB} = \cancel{v_A t_{AB}} + \frac{1}{2} g t_{AB}^2$$

$$H - 35 = \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$\therefore \quad H = 35 + 5t^2 \qquad \text{(I)}$$

- En el tramo de A hacia C, también usamos

$$h_{AC} = \cancel{v_A t_{AC}} + \frac{1}{2} g t_{AC}^2$$

$$H = \frac{1}{2}(10)(t+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad H = 5(t+1)^2 \qquad \text{(II)}$$

Ahora igualamos las ecuaciones (I) y (II)

$$35 + 5t^2 = 5(t^2 + 1)$$

$$35 + \cancel{5t^2} = \cancel{5t^2} + 10t + 5$$

$$30 = 10t$$

$$\therefore \quad t = 3 \text{ s}$$

En (II)

$$H = 5(3+1)^2$$

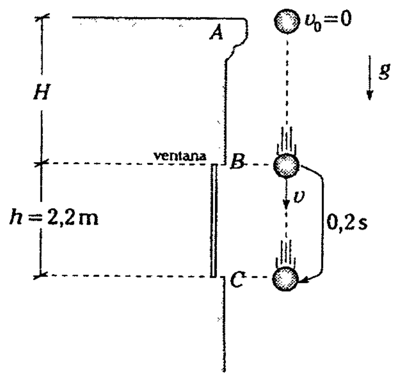
$$\Rightarrow \quad H = 80 \text{ m}$$

Problema 2

Se deja caer una piedra desde la azotea de un edificio, observándose que tarda 0,2 s en pasar por una ventana de 2,2 m de altura. ¿Qué longitud existe entre la azotea del edificio y la parte superior de la ventana? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

Una vez que la piedra es soltada ($v_0 = 0$) desde la azotea comienza a describir un M.V.C.L., tal como se muestra en el siguiente diagrama.



Del diagrama se puede observar que luego de haber sido soltada la piedra, desciende H metros y se encuentra frente a la parte superior de la ventana con una rapidez v, asimismo se puede notar que al pasar frente de la ventana de $h = 2{,}2$ m demora 0,2 s.

Para hallar H en el tramo de A hacia B empleamos la siguiente ecuación:

$$v_F^2 = \cancel{v_0^2} + 2gH$$

Reemplazando

$$v^2 = (2)(10)H$$

entonces

$$H = \frac{v^2}{20} \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación, necesitamos v para determinar H; entonces en el tramo de B hacia C es conveniente usar la siguiente ecuación:

$$h = vt + \frac{1}{2}gt^2$$

Reemplazando

$$2{,}2 = v(0{,}2) + \frac{1}{2}(10)(0{,}2)^2$$

Resolviendo

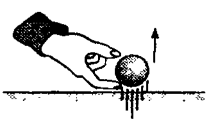
$$v = 10 \text{ m/s}$$

En (I)

$$H = 5 \text{ m}$$

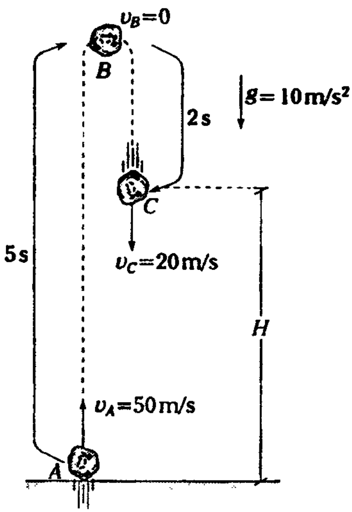
Problema 3

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra, tal como se muestra, con una rapidez de 50 m/s. ¿A qué altura se encontrará la piedra luego de 7 s? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Graficando lo que acontece.



Como la aceleración de la gravedad es $g = 10$ m/s y en su ascenso la piedra desacelera, entonces en cada segundo de su ascenso la rapidez de la piedra disminuye en 10 m/s. Entonces, habiéndose lanzado la piedra con una rapidez de $v = 50$ m/s transcurrirá 5 s, la piedra habrá alcanzado su altura máxima y 2 segundos más tarde en C su rapidez será de 20 m/s.

Nos piden H y como el movimiento es de subida y de bajada resulta conveniente usar la ecuación vectorial

$$\vec{H} = \vec{v}_A t_{AC} + \frac{1}{2}\vec{g}t_{AC}^2$$

Reemplazando

$$+H = (+50)(7) + \frac{1}{2}(-10)(7)^2$$

Efectuando

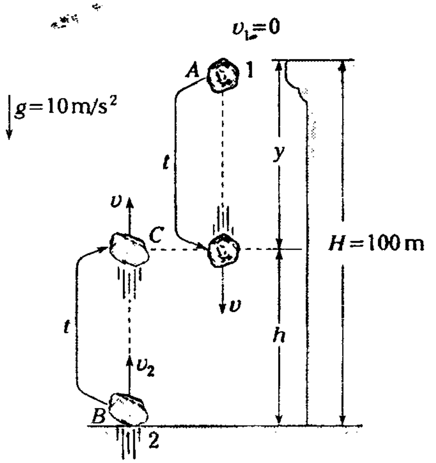
$$H = 105 \text{ m}$$

Problema 4

Desde una altura de 100 m se deja caer una piedra y al mismo tiempo desde la superficie de la tierra es lanzada otra piedra. Si las dos piedras tienen la misma rapidez cuando se cruzan, ¿a qué distancia de la superficie, las dos piedras se cruzan?
(g = 10 m/s²)

Resolución

La piedra (1) que es soltada, inicia (v_1 = 0) un M.C.V.L.; mientras que la piedra (2) que es lanzada verticalmente hacia arriba en forma simultánea, comienza a describir un M.V.C.L. con una rapidez v_2. Por condición del problema, luego de t segundos de haberse soltado la piedra (1) y lanzado la piedra (2) ellas se cruzan con igual rapidez, tal como se muestra en el siguiente diagrama.



De la figura, para la piedra que desciende usamos

$$v^2 = \cancel{v_1^2} + 2gy$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2gy \qquad \text{(I)}$$

Para la piedra que asciende también

$$v^2 = v_2^2 - 2gh \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) con (II)

$$v_2^2 - 2gh = 2gy$$

$$\Rightarrow \quad v_2^2 = 2g(y+h) = 2(10)(100)$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = 20\sqrt{5}\ \text{m/s} \qquad \text{(III)}$$

Nos piden h para la piedra que sube

$$h = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = 20\sqrt{5}t - \frac{1}{2}(10)t^2 \qquad (*)$$

Hallemos t

- Para la piedra que baja

$$v = \cancel{v_A} + gt$$

$$v = 10t \qquad \text{(IV)}$$

- Para la piedra que sube

$$v = v_2 - gt$$

Reemplazando (III) y (IV) en esta última relación

$$10t = 20\sqrt{5} - 10t$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{5}\ \text{s}$$

En (*)

$$h = 20\sqrt{5}(\sqrt{5}) - 5(\sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow \quad h = 75\ \text{m}$$

Observación

Existe otro procedimiento para resolver el problema anterior, para ello podríamos hacer una abstracción, por ejemplo consideramos que $\vec{g} = \vec{0}$. ¿Qué implica esto? Implica que

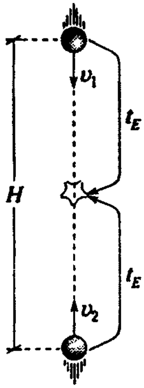
1. La piedra soltada no caerá y v_1 = 0.
2. La piedra lanzada se elevará con v_2 = cte. y realizará M.R.U.
3. Entonces v_2 recorre H en t segundos.

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{H}{t}$$

$$\therefore \quad t = \frac{H}{v_2} = \frac{100}{20\sqrt{5}} = \sqrt{5}\ \text{s}$$

Al considerar $\vec{g} = \vec{0}$ para las piedras, es como considerar que la Tierra no los atrae.

Con respecto al problema anterior, para la práctica se recomienda usar



Se demuestra que el tiempo de encuentro (t_E) es

$$\boxed{t_E = \frac{H}{v_1 + v_2}}$$

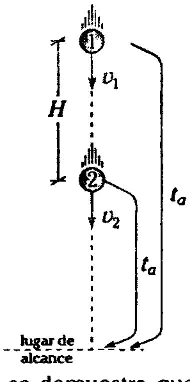
donde

t : representa el tiempo de encuentro entre los objetos.

H : separación vertical inicial.

v_1 y v_2 : la rapidez inicial de los cuerpos.

Análogamente se puede demostrar para lanzamientos en igual dirección



Siendo $v_1 > v_2$ se demuestra que el tiempo de alcance (t_a) es

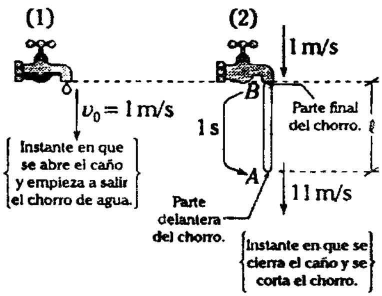
$$\boxed{t_a = \frac{H}{v_1 - v_2}}$$

Problema 5

Al abrir un caño que se encuentra a gran altura respecto del piso, sale durante 1 s un chorro de agua con una rapidez de 1 m/s. Luego de 0,5 s de cerrar el caño, el chorro empieza a pasar por una ventana, demorándose 1,1 s en pasarla completamente. Determine la altura de la ventana. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

Lo que en cierta medida hace sencillo el análisis y descripción del problema, es que cuando se cierra el caño, el chorro aún no pasa frente a la ventana; eso permite que primero analicemos la formación de la columna de agua (chorro) y luego su paso frente a la ventana.



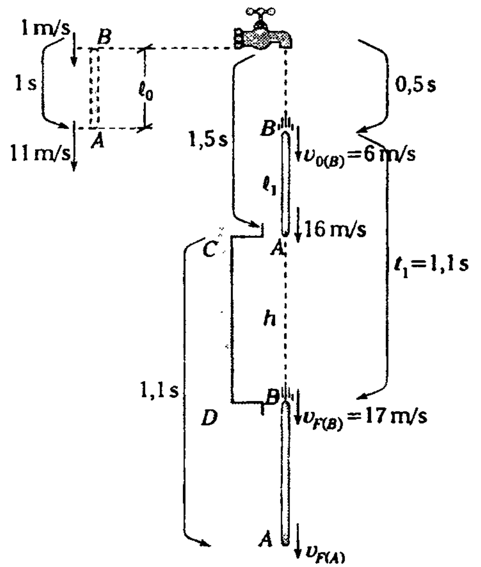
Podemos notar que al cerrar el caño, el chorro presenta una determinada longitud ℓ (que incluso se puede calcular) que es la separación entre la parte delantera y posterior del chorro. Sin embargo, ¿qué ocurre luego?

Los gotas que salen del caño, una vez que lo hacen, experimentan luego caída libre y por ello, conforme se cierra el caño la rapidez de la primera gota es mayor que la rapidez de la última. De ahí en adelante todas las gotas que constituyen el chorro realizan un movimiento de caída libre, pero con diferente rapidez. Por ello la longitud del chorro de agua aumenta conforme él desciende.

Observación

En el problema se está considerando que el chorro de agua es un conjunto de gotas, las cuales caen en forma independiente sin influenciar unas en otras. Como sabemos, este modelo no se ajusta a lo real, pero es necesario para los fines del problema.

Ahora, como indica el problema, luego de 0,5 s de cerrar el caño, el chorro comienza a pasar frente a una ventana y pasa frente a ella durante 1,1 s. Veamos



Haciendo uso de $d=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)t$ se demuestra que $\ell_0=6$ m y $\ell_1=11$ m . ¡Verifíquelo!

Para que todo el chorro cruce la ventana es necesario que su parte posterior (B) en 1,1 s llegue a la parte inferior de la ventana con una rapidez de $v_{F(B)}=17$ m/s. Ahora para calcular h para la parte posterior (B) aplicamos

$$d=\frac{\left(v_{0(B)}+v_{F(B)}\right)}{2}t_1$$

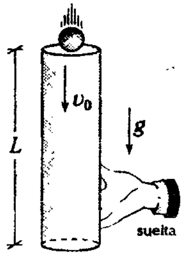
$$\Rightarrow\ h+11=\left(\frac{6+17}{2}\right)1,1$$

$$\Rightarrow\ h+11=12,65$$

$$\therefore\ h=1,65\ \text{m}$$

Problema 6

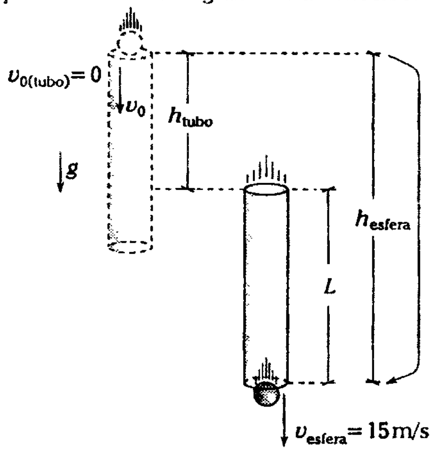
Una canica se lanza verticalmente hacia abajo con una rapidez de $v_0=5$ m/s, en dicho instante se suelta un tubo, tal como se indica. Si cuando la canica abandona el tubo presenta una rapidez de 15 m/s, ¿qué longitud tiene el tubo? (Considere $g=10$ m/s^2).



Resolución

Al lanzar la esfera hacia abajo y soltar al tubo ($v_0=0$) se deduce que la esfera desciende más rápido que el tubo, razón por la cual en algún instante saldrá por el otro extremo.

Representemos en un gráfico lo acontecido.



¿Qué tiempo ha transcurrido para la esfera hasta que sale del tubo?

Como su $v_0 = 5$ m/s y su $v_F = 15$ m/s entonces este incremento de 10 m/s sucede solo durante $t = 1$ s. Este mismo intervalo de tiempo transcurre para el tubo. Por otro lado podemos notar del gráfico que la longitud del tubo es

$$L = h_{esfera} - h_{tubo} \qquad \text{(I)}$$

donde

h_{esfera} : es lo que desciende la esfera hasta que abandona el tubo.

h_{tubo} : es lo que desciende el tubo hasta que la esfera lo abandona.

Determinemos cada una de estas distancias.

- Para la esfera planteamos

$$h_{esfera} = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t = \left(\frac{5+15}{2}\right)(1)$$

$$\Rightarrow \; h_{esfera} = 10\,\text{m}$$

- Para el tubo, luego de 1 s de ser soltado recorre

$$h_{tubo} = \cancel{v_{0_{tubo}} t} + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; h_{tubo} = \frac{1}{2}(10)(1)^2$$

$$\Rightarrow \; h_{tubo} = 5\,\text{m}$$

Reemplazando en (I)

$$L = 10 - 5 \;\Rightarrow\; L = 5\,\text{m}$$

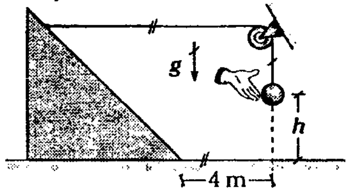
Otro criterio para resolver

Razonemos: la canica incrementó su rapidez de 5 m/s a 15 m/s, esto por propiedad del M.V.C.L. sucede en $t = 1$ s. Entonces, ahora si consideramos $\vec{g} = \vec{0}$ el tubo al soltarlo no cae y la esfera lanzada con 5 m/s conservará su velocidad y realizará M.R.U. durante 1 s.

Por lo tanto, en 1 s la esfera recorrerá 5 m, que es la longitud del tubo.

Problema 7

El sistema mostrado se encuentra en reposo y al ser soltada la pequeña esfera desciende con una aceleración de 1 m/s^2 pero al transcurrir 2 s el hilo se rompe. Determine h sabiendo que la esfera logra impactar con el vértice inferior de la cuña. ($g = 10$ m/s^2)

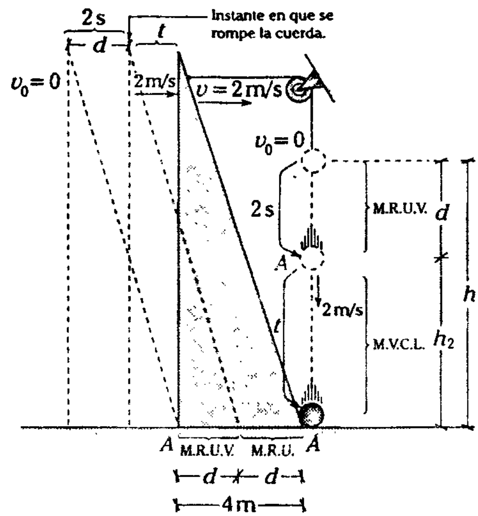


Resolución

La esfera acelera uniformemente con $a = 1$ m/s^2, esto significa que su rapidez a partir del reposo aumenta en 1 m/s; entonces luego de 2 s su rapidez es $v_2 = 2$ m/s y desciende

$$d = \left(\frac{v_0 + v_2}{2}\right)t = \left(\frac{0+2}{2}\right)(2) = 2\,\text{m}$$

En dicho intervalo, la cuña también habrá recorrido 2 m hacia la derecha porque está unida a la esfera mediante la misma cuerda (tienen igual aceleración en módulo).



¿Cuánto le falta recorrer aún a la cuña para que choque su vértice con la esfera que cae? Le falta recorrer 2 m y lo recorre con velocidad constante de $v = 2$ m/s, ya que al romperse la cuerda ya no le afecta la aceleración de 1 m/s². Con dicha velocidad, la cuña recorre los 2 m que le faltan durante 1 s. Por lo tanto, el vértice A de la cuña colisiona con la esfera luego de 3 s.

Por otro lado, la esfera hizo M.R.U.V. durante 2 s, y en $t = 1$ s debe recorrer h_2 y llegar al vértice A con un M.V.C.L. Calculemos h_2 usando

$$h_2 = v_A t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \ h_2 = 2 + \frac{1}{2}(10)(1)$$

$$\Rightarrow \ h_2 = 7 \text{ m}$$

Nos piden h, del gráfico se establece que

$$h = 2 + h_2$$

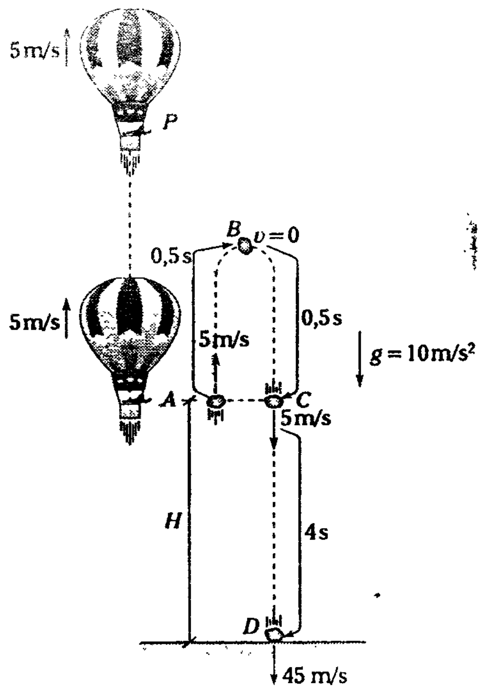
$$\therefore \ h = 9 \text{ m}$$

Problema 8

Un globo aerostático asciende verticalmente con una rapidez constante de 5 m/s y a cierta altura H sobre la superficie de la Tierra, un tripulante deja caer una piedra, la cual llega a la superficie después de 5 s. Determine H. ($g = 10$ m/s²)

Resolución

Como el globo aerostático asciende verticalmente con una rapidez constante de $v = 5$ m/s, en tal sentido todo cuerpo que se encuentra en él se eleva con la misma rapidez del globo. Ahora cuando el globo se encuentra a una altura H y la piedra es soltada, conservará la velocidad que tenía antes de que la suelten y por ello, seguirá elevándose e iniciará un M.V.C.L. Esto ocurrirá a partir de una posición A y el globo continuará elevándose con rapidez constante tal como se muestra en el siguiente diagrama.



En el gráfico, cuando la piedra se encuentra en la posición B alcanzó su altura máxima, mientras que en A ha presentado una rapidez de 5 m/s. Por lo tanto, ella ha debido de emplear 0,5 s para llegar a B; el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada, de B hacia C también emplearía 0,5 s y como en un mismo nivel la rapidez de subida es igual a la rapidez de bajada, en C la rapidez de la piedra es 5 m/s. No obstante le falta 4 s para caer al piso. Si cada 1 s incrementa su rapidez en 10 m/s, entonces impacta en el piso con $v_D = 45$ m/s.

Finalmente, la altura H será calculada con

$$H = \left(\frac{v_C + v_D}{2}\right) t_{CD} = \left(\frac{5+45}{2}\right)(4)$$

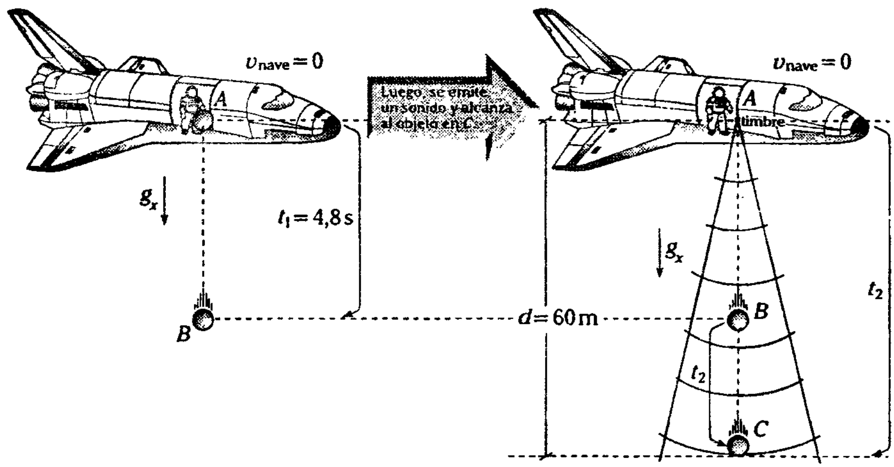
$$\therefore \ H = 100 \text{ m}$$

Problema 9

Una nave espacial al llegar a un planeta desconocido se mantiene en reposo a cierta altura respecto de su superficie. Un tripulante desea medir la aceleración de la gravedad de dicho planeta para lo cual deja caer un objeto y luego de 4,8 s el tripulante presiona el timbre, emite un sonido y alcanza al objeto luego de recorrer 60 m. Si la rapidez del sonido en el planeta es 300 m/s, ¿qué módulo tiene la aceleración de la gravedad del planeta? (Desprecie la resistencia de la atmósfera al movimiento del objeto).

Resolución

Por condición del problema, el objeto se suelta y la nave se mantiene en reposo ($v_{nave} = 0$), lo cual nos permitiría deducir que el objeto inicia su descenso ($v_{objeto} = 0$) vertical (bajo la acción de la atracción de planeta). En tal sentido el objeto realiza un M.V.C.L. tal como se muestra en el siguiente diagrama:



En el diagrama se muestra que luego de $t = 4,8$ s de haberse soltado el objeto en A, este se encuentra en B. En ese instante el tripulante toca el timbre y la onda sonora que se genera logra alcanzar al objeto en C al propagarse 60 m (por condición del problema) para lo cual vamos a suponer que transcurre t_2 segundos.

Con estos datos del objeto, de A hacia C este hace M.V.C.L. y recorre una

$$d = \cancel{v_A t} + \frac{1}{2} g_x t^2$$

Reemplazando

$$60 = \frac{1}{2} g_x (t_1 + t_2)^2$$

$$60 = \frac{1}{2} g_x (4,8 + t_2)^2 \qquad \text{(I)}$$

Según esta expresión necesitamos t_2 y así determinar g_x, para lo cual consideramos que el sonido se propaga con rapidez constante de A hacia C y recorre una distancia

$$d_{sonido} = v_{sonido} t_2$$

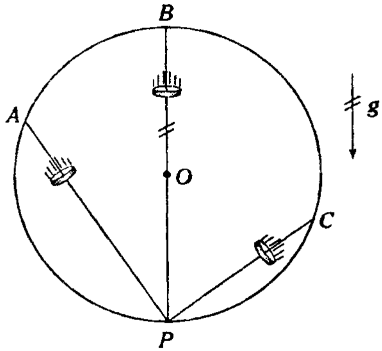
Reemplazando datos

$$60 = 300 t_2 \Rightarrow t_2 = 0,25$$

En (I): $\quad g_x = 4,8 \text{ m/s}^2$

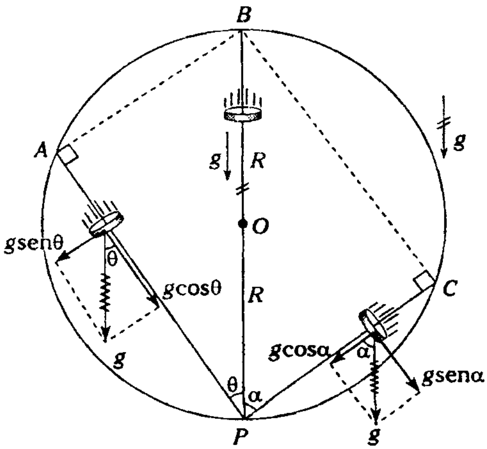
Problema 10

Desde la periferia del aro en forma simultánea se sueltan anillos lisos en A, B y C. ¿Cuál de ellos llega primero al punto P? (Considere que BP es diámetro vertical). *(Problema de Galilei, 1638)*



Resolución

Los 3 anillos lisos resbalan de modo que de B hacia P el anillo resbala con $\vec{g}$, pero los otros resbalan con una componente de la aceleración de la gravedad. (Esto se demostrará en el capítulo de Dinámica).



- Para el anillo soltado en A este recorre

$$d_{AP}=\cancel{v_A t_{AP}}+\frac{1}{2}a_{AP}t_{AP}^2$$

$$2R\cos\theta=\frac{1}{2}(g\cos\theta)t_{AP}^2$$

$$\therefore\ t_{AP}=2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

- Para el anillo soltado en B este desciende

$$d_{BP}=v_B t_{BP}+\frac{1}{2}a_{BP}t_{BP}^2$$

$$2R=\frac{1}{2}(g)t_{BP}^2$$

$$\therefore\ t_{BP}=2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Finalmente, el anillo soltado en C recorre

$$d_{CP}=\cancel{v_C t_{CP}}+\frac{1}{2}a_{CP}t_{CP}^2$$

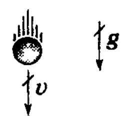
$$2R\cos\alpha=\frac{1}{2}(g\cos\alpha)t_{CP}^2$$

de donde $t_{CP}=2\sqrt{\frac{R}{g}}$

A partir de los resultados obtenidos, afirmaremos que los tres anillos llegan simultáneamente a P, con recorridos diferentes.

Problema 11

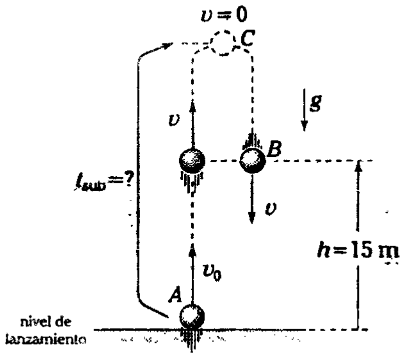
Se muestra a una canica luego de 3 s de haber sido lanzada verticalmente. Si a partir de dicho instante, desciende 15 m más hasta que llega al lugar de lanzamiento, determine el tiempo que estuvo en ascenso. (g = 10 m/s^2)



Resolución

Consideremos que la canica fue lanzada de una posición A y luego de 3 s se encuentra en una posición B. Ahora según condición del problema cuando desciende 15 m a partir de B, retorna al lugar de lanzamiento; entonces para que suceda lo descrito la canica ha debido de ser lanzada verticalmente hacia arriba, de un nivel inferior del nivel que contiene a B; tal como se muestra.

Dato: $t_{AB} = 3$ s



Utilizando la propiedad de caída libre que plantea que *cada 1 s la altura que recorre varía en 10 m*, deducimos que los últimos 15 m los recorre en 1 s y que la altura anterior (de C hacia B) es 5 m, lo que demora en dicho tramo es 1 s.

Por otro lado como cada 1 s la rapidez varía en 10 m/s deducimos que la canica fue lanzada con $v_0 = 20$ m/s y $v_B = 10$ m/s; entonces demora en ascender

$$t_{sub} = 2 \text{ s}$$

Otro criterio (usando fórmula vectorial)

Como nuestro objetivo en el problema es determinar el tiempo de subida, donde

$$t_{sub} = \frac{v_0}{g} = \frac{v_0}{10} \qquad \text{(I)}$$

necesitamos conocer la rapidez de lanzamiento v_0; en tal sentido como de A hacia B se conoce el tiempo ($t = 3$ s), la aceleración de la gravedad (g) y la canica está de subida y bajada empleamos la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{h} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Reemplazando datos

$$+15 = \vec{v}_0(3) + \frac{1}{2}(-10)(3)^2$$

$$\vec{v}_0 = +20 \text{ m/s}$$

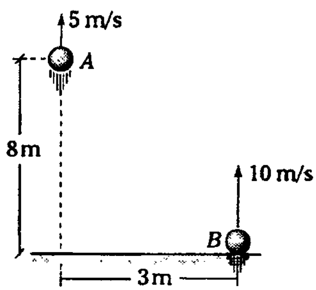
Según este resultado la canica es lanzada verticalmente hacia arriba (por el signo +) con una rapidez de $v_0 = 20$ m/s.

En (I)

$$t_{sub} = 2 \text{ s}$$

Problema 12

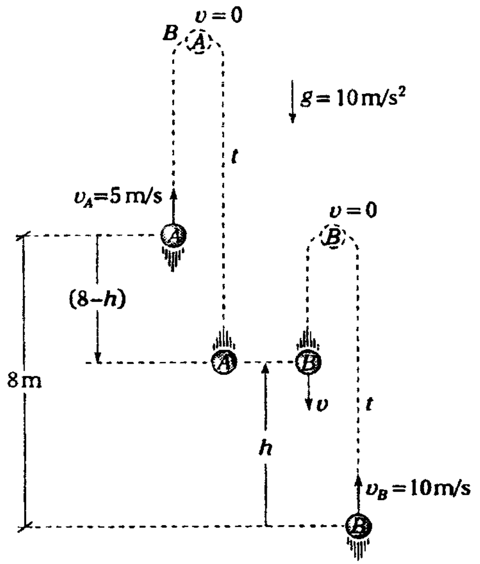
Las esferas A y B se lanzan simultáneamente tal como se muestra; determine la rapidez de la esfera B en el instante en que está lo más cerca posible de A. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Una vez que las esferas son lanzadas, estos realizan simultáneamente M.V.C.L. Ahora nos piden determinar la rapidez de la esfera B en el instante que está lo más cerca posible de A, esto ocurrirá cuando B se encuentre en el mismo nivel que A.

Para evitamos el hecho de precisar si las esferas se encuentran en ascenso o descenso, supongamos que cuando las esferas se encuentran en un mismo nivel, ellas están descendiendo, lo cual transcurrirá luego de t segundos de haberlas lanzado simultáneamente; tal como se muestra a continuación:



Del diagrama, cuando la esfera B se encuentra al mismo nivel que A, presenta una rapidez v. Ahora para determinar v examinando el M.V.C.L de la esfera B convenientemente empleamos la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

Reemplazando tenemos

$$\vec{v}=+10-10t \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación necesitamos t para determinar v, para lo cual empleamos la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{d}=\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Para la esfera A

$$-(8-h)=(+5)t-5t^2 \qquad \text{(II)}$$

Para la esfera B

$$+h=(+10)t-5t^2 \qquad \text{(III)}$$

Restando (II) y (III)

$$t=1{,}6\,s \qquad \text{(IV)}$$

(IV) en (I)

$$\vec{v}=+10-(10)(1{,}6)$$

$$\vec{v}=-6\,m/s$$

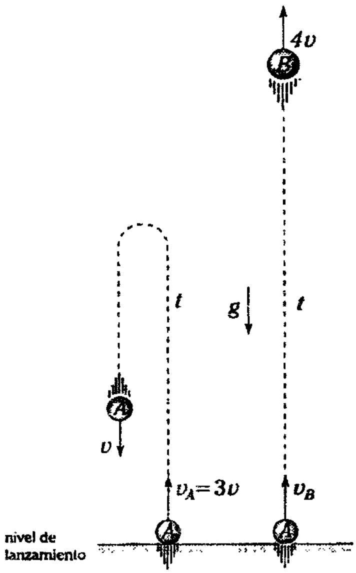
Según este resultado, cuando la esfera B se encuentra en el mismo nivel que A, ella se encuentra descendiendo y con una rapidez de 6 m/s, lo cual se corrobora con lo supuesto.

Problema 13

Dos esferas A y B se lanzan vertical y simultáneamente hacia arriba, desde el mismo nivel; luego de t segundos sus velocidades son $-v$ y $+4v$, respectivamente. Si A se lanzó con $3v$, determine la relación de rapidez en el instante de lanzamiento de las esferas A y B. (Desprecie la resistencia del aire)

Resolución

Una vez que las esferas son lanzadas verticalmente, ellas realizan un M.V.C.L. y según el enunciado la esfera A es lanzada con una rapidez de $3v$. Sin embargo, no se precisa con qué rapidez fue lanzada la esfera B, entonces consideraremos que la esfera B fue lanzada con una rapidez v_B. Asimismo se sabe que luego de t segundos de haberse lanzado las esferas, las esferas A y B presentan una velocidad de $-v$ y $+4v$ respectivamente; en donde el signo negativo nos indica que la velocidad está dirigida hacia abajo, mientras que el signo positivo nos indica que la velocidad está dirigida hacia arriba. En tal sentido, la esfera A debe encontrarse en descenso mientras que la esfera B en ascenso, tal como se muestra en el siguiente diagrama.



Ahora como piden determinar

$$R=\frac{v_A}{v_B}=\frac{3v}{v_B} \qquad \text{(I)}$$

necesitamos v y v_B; para ello examinamos independientemente el M.V.C.L. de cada esfera. En este caso, como la esfera A sube y baja es conveniente emplear la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

Reemplazando

$$-v=+3v-10t$$

$$v=5/2\,t \qquad \text{(II)}$$

Luego para la esfera B empleamos la siguiente ecuación:

$$\vec{v}_F=\vec{v}_0+\vec{g}t$$

Reemplazando datos

$$4v=v_B-10t \qquad \text{(III)}$$

Ahora reemplazamos (II) en (III)

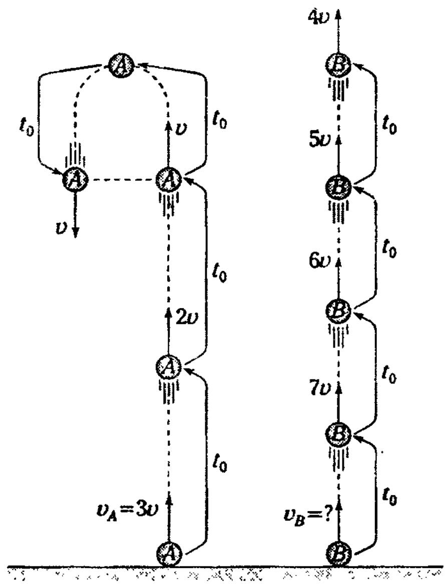
$$v_B=20t \qquad \text{(IV)}$$

Por último (II) y (IV) en (I)

$$R=3/8$$

Otro método

Como se trata de un M.R.U.V. para un mismo intervalo de tiempo ocurren los mismos cambios de v, entonces gráficamente planteamos



Obsérvese que

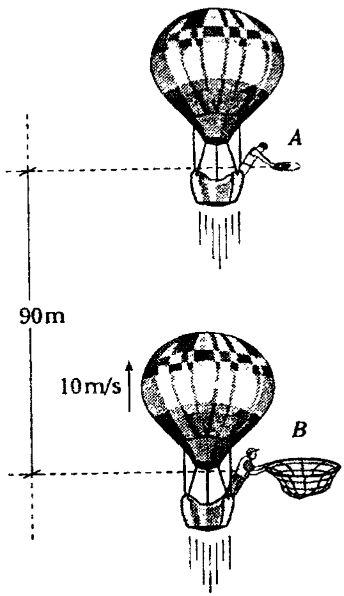
- Para ambas esferas transcurre igual intervalo de tiempo.
- Cada t_0 segundos la v varía en v m/s, entonces se deduce en forma regresiva para B que $v_B=8v$

Nos piden

$$R=\frac{v_A}{v_B}=\frac{3v}{8v}=\frac{3}{8}$$

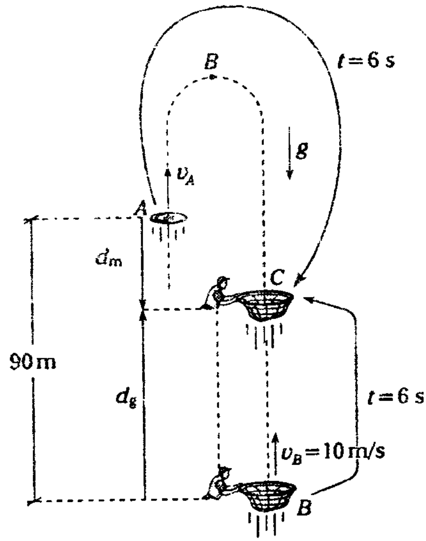
Problema 14

Los globos aerostáticos ascienden verticalmente con velocidad constante. Si en el instante mostrado desde el globo A se suelta una moneda y luego de 6 s la persona ubicada en el globo B atrapa la moneda, determine la rapidez con la que se encuentra elevando el globo A. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

Una vez que la moneda es soltada del globo A adquiere la velocidad de dicho globo y por ello se sigue elevando pero afectada de la aceleración de la gravedad, en tal sentido una vez que la moneda se suelta realizará un M.V.C.L. con una rapidez inicial v_A. Ahora como el globo B se eleva a velocidad constante se tiene que en 6 s se elevará $d_g=v_Bt=10\times 6=60$ m; esto significaría que la persona ubicada en el globo B desde el instante que suelta la moneda hasta que la atrapa se eleva 60 m, tal como se muestra en el siguiente diagrama.



Del diagrama se puede notar que

$$d_m=90-d_g=90-60=30 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \; d_m=30 \text{ m}$$

Como nuestro propósito en el problema es v_A, entonces durante el movimiento de la moneda de A hacia C su desplazamiento es calculable con

$$\vec{d}_m=\vec{v}_At+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Reemplazando datos

$$-30=\vec{v}_A(6)-5(6)^2$$

$$\vec{v}_A=+25 \text{ m/s}$$

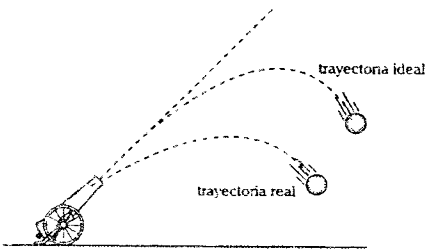
Este resultado nos indica que luego de ser soltada, la moneda se mueve verticalmente hacia arriba (por el signo) con una rapidez de 25 m/s.

Por lo tanto, el globo A se eleva con una rapidez de 25 m/s.

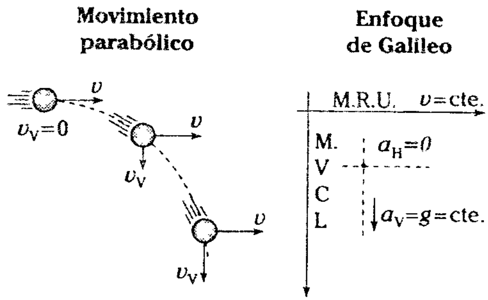
MOVIMIENTO PARABÓLICO DE CAÍDA LIBRE

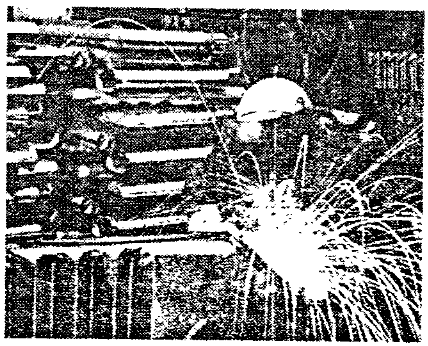
Este movimiento que vamos a analizar, como todos los movimientos de caída libre, es una aproximación de casos reales, como por ejemplo: el lanzamiento de jabalina, el salto largo, el movimiento de una pelota de béisbol, el disparo de un proyectil desde un cañón, etc. Como podemos ver, son innumerables las situaciones que se asemejan a un movimiento con trayectoria parabólica.

El estudio de balística, parece que en el Renacimiento, impulsó el análisis del movimiento de los proyectiles; sobre todo para obtener los mayores alcances horizontales. Los eruditos de aquella época consideraban que la trayectoria (parabólica) que seguían los proyectiles era el resultado del conflicto entre la atracción de la Tierra y el ímpetu del cuerpo, pero como no tenían conocimiento de la inercia, no podían explicar satisfactoriamente el movimiento parabólico[2].



El enfoque del movimiento de los proyectiles lo resolvió de manera astuta Galileo Galilei, ya que consideraba que dicho movimiento resultaba de la unión de dos movimientos que se realizan independiente y simultáneamente. Según Galileo el movimiento del proyectil a lo largo de la horizontal es uniforme, es decir, $\vec{v}_H = \text{cte.}$, mientras que a lo largo de la vertical es uniformemente variado debido a que consideró constante la aceleración de la gravedad.



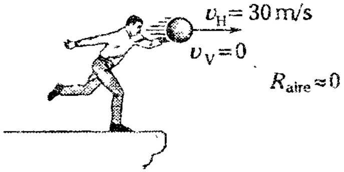


La foto muestra los arcos parabólicos que siguen las partículas incandescentes que se originan a la hora de soldar.

(2) *Inercia. Propiedad asignada a todos los cuerpos por la cual tienden a conservar su movimiento (se ampliará en el capítulo de Dinámica).*

Descripción del movimiento parabólico

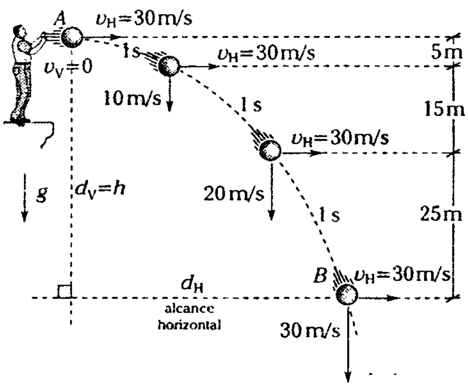
Plasmemos la idea dada por Galileo examinando el siguiente caso: Una piedra es lanzada horizontalmente con 30 m/s desde el alto de un acantilado por un joven (considere $g = 10\ m/s^2$).



He aquí las siguientes consideraciones:

1. Despreciamos efectos del aire para que la piedra esté en caída libre, solo bajo el efecto de la atracción terrestre.
2. Como el lanzamiento es horizontal, a la piedra se le comunica velocidad solo en dicha dirección $\upsilon_H = 30$ m/s y $\upsilon_V = 0$, como el aire no ofrece resistencia ésta no cambiará.
3. Verticalmente la piedra inicia su movimiento $\upsilon_V = 0$ y por acción de la aceleración de la gravedad en cada 1 s su rapidez varía en 10 m/s.

∴ Con las consideraciones planteadas el movimiento de la piedra será así



- **Horizontalmente**
  El movimiento de la piedra es uniforme, entonces $\upsilon_H = 30$ m/s (cte.) y en esta dirección se tienen características del M.R.U.

∴ Cada 1 s la piedra avanza 30 m en dicha dirección, luego en 3 s: $d_H = 90$ m.
También el alcance horizontal (d_H) realizado se puede calcular así

$$\boxed{d_H = \upsilon_H t}$$

donde t es el intervalo de tiempo utilizado en efectuar dicho alcance.

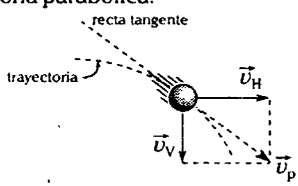
Verticalmente
En esta dirección hay la influencia de la atracción de la Tierra. Esto se refleja en el efecto que ejerce sobre la variación de la velocidad (aceleración $\vec{g}$ causada por la atracción terrestre) de modo que cada 1 s su velocidad vertical (υ_V) aumenta en 10 m/s y su descenso aumenta también en 10 m cada un segundo. Efectivamente durante el primer segundo desciende 5 m, luego 15 m, después 25 m, ... así sucesivamente. La componente vertical está sujeta a las leyes del movimiento vertical de caída libre ya estudiadas en el apartado anterior, de ahí que el desplazamiento vertical en 3 s sería

$$d_V = (5 + 15 + 25) = 45\ m$$

y para cualquier instante de tiempo se puede calcular así

$$\vec{d}_V = \vec{\upsilon}_{0V} t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Debemos tener en cuenta que la velocidad de la piedra en cualquier instante es tangente a la trayectoria parabólica.



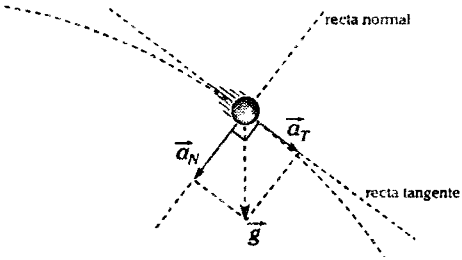
de donde, en función de los componentes definimos vectorialmente

$$\vec{\upsilon}_p = \vec{\upsilon}_H + \vec{\upsilon}_V$$

En módulo

$$\boxed{|\vec{v}_P| = \sqrt{v_H^2 + v_V^2}}$$

También es importante tener en cuenta que en todo instante la aceleración del objeto es $\vec{g}$ y en algunos casos podemos descomponerla rectangularmente, por ejemplo



$$\boxed{\vec{g} = \vec{a}_N + \vec{a}_T}$$

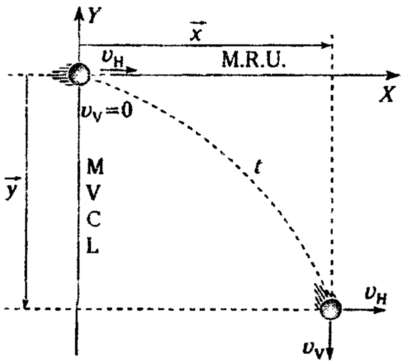
donde

$\vec{a}_N$: aceleración normal (cambia sólo la dirección de la velocidad).

$\vec{a}_T$: aceleración tangencial (cambia sólo el módulo de la velocidad).

Ahora pasemos a demostrar que la trayectoria es realmente la parábola.

Como el movimiento ocurre en el plano cartesiano XY; será necesario hallar una relación entre dichas coordenadas. Empezamos trazando nuestro plano cartesiano cuyo origen coincide con la posicion de lanzamiento así



- Horizontalmente se verifica un M.R.U.

$$x = v_H t$$

$$\therefore \quad t = \frac{x}{v_H} \qquad \text{(I)}$$

- Verticalmente (M.V.C.L.), usamos la ecuación vectorial

$$\vec{y} = \vec{v}_{0V}\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

Reemplazando

$$\vec{y} = 0\left(\frac{x}{v_H}\right) + \frac{1}{2}(-g)\left(\frac{x}{v_H}\right)^2$$

Simplificando

$$\vec{y} = \left(\frac{-g}{2v_H^2}\right)x^2$$

donde

$$\frac{-g}{2v_H^2} = K\ ; \quad K = \text{constante}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{y} = Kx^2}$$

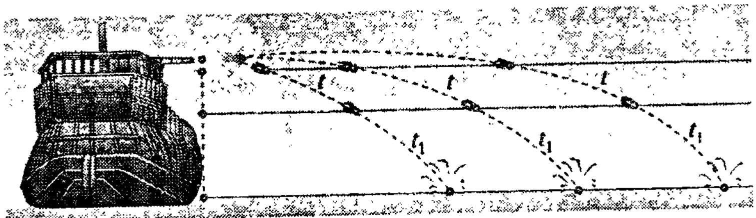
es la ecuación de una parábola con vértice en el origen de coordenadas y como $K < 0$, es cóncava o abierta hacia abajo.

Por lo tanto, la piedra realiza un movimiento parabólico de caída libre (M.P.C.L.).

Conclusión

En lo sucesivo al analizar un movimiento parabólico de caída libre (M.P.C.L.) lo describiremos como dos movimientos simultáneos e independientes que se desarrollan en direcciones perpendiculares.

- Horizontalmente sujeto a las características del M.R.U. $(\vec{v}_H = \text{cte.})$
- Verticalmente haciendo uso de las características de la caída libre vertical $(\vec{g} = \text{cte.})$

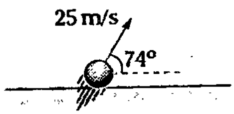


El lanzamiento de los proyectiles impulsó el estudio del movimiento parabólico. La figura muestra el hecho siguiente: el descenso vertical es independiente de la velocidad horizontal de lanzamiento.

A continuación con este criterio, podemos analizar y resolver los siguientes ejemplos ilustrativos:

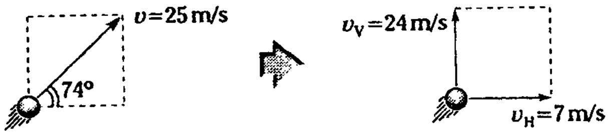
Ejemplo 4

Una canica es lanzada desde el piso, tal como se muestra. ¿Qué rapidez tendrá luego de 1,5 s? ¿Luego de cuántos segundos del lanzamiento su rapidez es mínima? ¿Qué altura máxima alcanza?

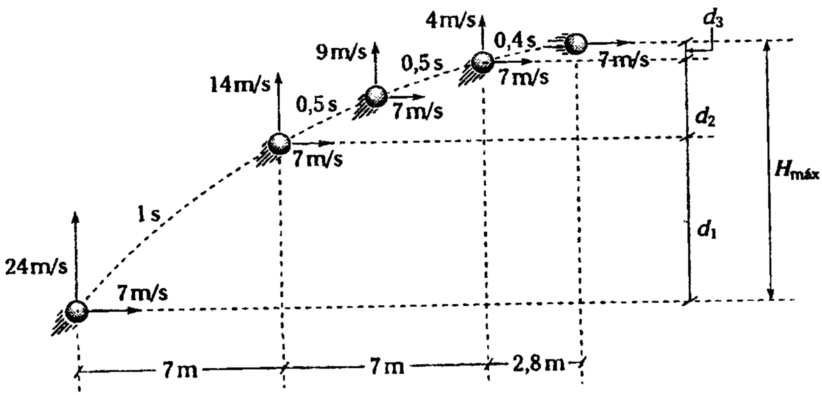


Resolución

Como se conoce la velocidad de lanzamiento y el ángulo de tiro para analizarlo como se ha indicado, debemos necesariamente descomponer rectangularmente a la velocidad.



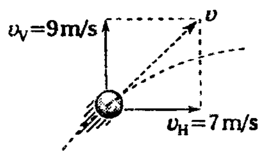
Sobre la trayectoria tenemos



Nótese

- Horizontalmente $v_H = 7$ m/s , cada 1 s en esta dirección recorre 7 m.
- Verticalmente $v_{0V} = 24$ m/s , cada 1 s la rapidez disminuye en 10 m/s. Entonces cada 1/2 s la rapidez disminuye en 5 m/s.

$\therefore$ Es fácil advertir que luego de 1,5 s la rapidez instantánea será



donde

$$v = \sqrt{v_H^2 + v_V^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130}$$

$$\therefore \quad v = 11{,}4 \text{ m/s}$$

Ahora calculemos la menor rapidez. A partir de la figura deducimos que se obtuvo el punto más alto de la trayectoria y para ello transcurrió

$$t = 1 + 1 + 0{,}4 = 2{,}4 \text{ s}$$

También su altura máxima vendría dada por

$$H_{\text{máx}} = d_1 + d_2 + d_3$$

pero la podemos calcular usando directamente

$$H_{\text{máx}} = \left(\frac{v_{0V} + v_{FV}}{2}\right) t_{\text{sub}}$$

$$\Rightarrow \quad H_{\text{máx}} = \left(\frac{24 + 0}{2}\right) 2{,}4 \text{ m}$$

$$\therefore \quad H_{\text{máx}} = 28{,}8 \text{ m}$$

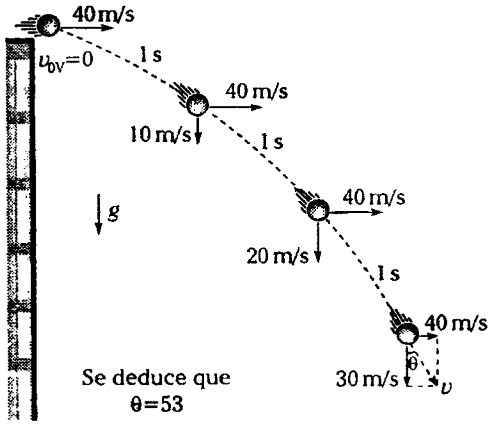
Ejemplo 5

Un balón sale horizontalmente con 40 m/s de la parte alta de una torre. ¿Qué aceleración tangencial y normal tendrá al cabo de 3 s? (Considere $g = 10$ m/s^2)

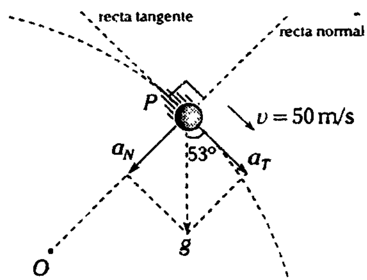
Resolución

Como el balón sale horizontalmente, en la dirección vertical su velocidad es nula ($v_{0V} = 0$). Ahora bosquejamos el M.P.C.L. considerando que

- Horizontalmente $v_H = 40$ m/s.
- Verticalmente v_V aumenta en 10 m/s cada 1 s, tal como se indica a continuación.



Luego de 3 s la rapidez es 50 m/s y en dicho instante la aceleración es la $\vec{g}$. Para definir las aceleraciones normal y tangencial debemos necesariamente descomponer rectangularmente a $\vec{g}$, así



- La aceleración tangencial será

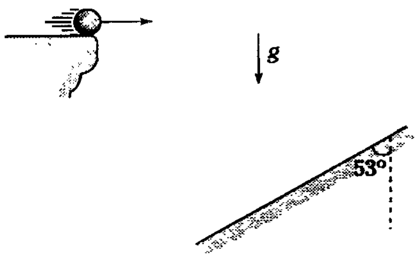
$$a_T = g\cos 53° = 10\left(\frac{3}{5}\right) = 6 \text{ m/s}^2$$

- La aceleración normal es

$$a_N = g\,\text{sen}\,53° = 10\left(\frac{4}{5}\right) = 8 \text{ m/s}^2$$

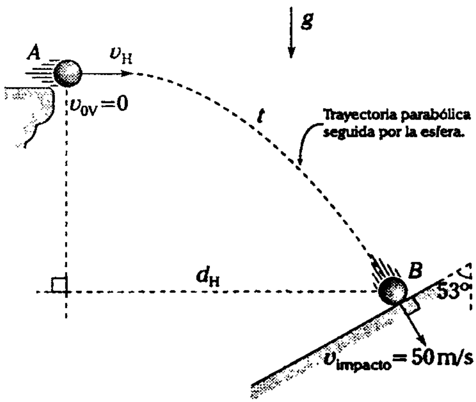
Ejemplo 6

Se muestra cómo una pequeña esfera abandona un acantilado, luego impacta en forma perpendicular en la superficie inclinada con 50 m/s. Determine el alcance horizontal de la esfera hasta ese instante. (g = 10 m/s^2)



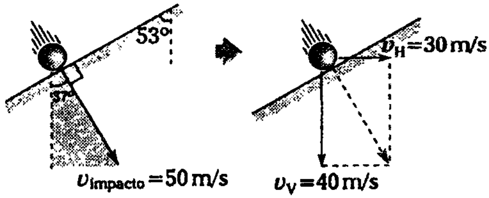
Resolución

A partir del gráfico dado, se deduce que la pequeña esfera abandona horizontalmente el acantilado. Para el instante dado en la dirección vertical no tiene rapidez (v_{0V} = 0), tal como lo mostramos en la figura siguiente.



El alcance horizontal (d_H) pedido queda determinado por $d_H = v_H t$, ya que la componente horizontal de la velocidad no cambia.

La componente horizontal de la velocidad la podemos obtener al descomponer rectangularmente la velocidad de impacto $\left(\vec{v}_{impacto}\right)$ sobre la superficie.



Por último, el tiempo (t) que emplea la esfera de A hacia B lo podremos calcular tomando en cuenta el cambio que sufre la componente vertical $\left(\vec{v}_V\right)$ de la velocidad.

De A hacia B sobre la vertical planteamos

$$v_F = v_0 + g\,t$$

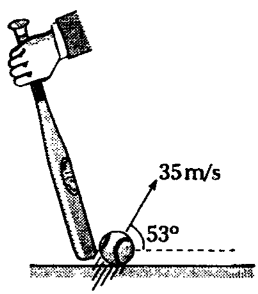
$$\Rightarrow \quad 40 = 0 + 10t \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ s}$$

Luego, el alcance horizontal será

$$d_H = v_H t = 120 \text{ m}$$

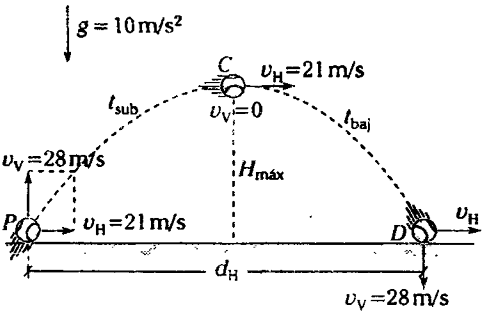
Ejemplo 7

Una pelota de béisbol después de haber sido golpeada con el bate sale impulsada tal como se muestra. Determine el tiempo que permanece en vuelo, la altura máxima y el alcance hasta que impacta sobre la superficie. (g = 10 m/s^2)



Resolución

Una vez que la pelota deja de hacer contacto con el bate, ella empieza a describir una parábola (completa) hasta el instante en que impacta en la superficie tal como se muestra en la figura. Cuando la esfera asciende la componente vertical $\left(\vec{v}_V\right)$ de su velocidad comienza a disminuir hasta alcanzar su punto más alto ($v_V = 0$) y en su descenso va en aumento, mientras que la componente horizontal de la velocidad para todo instante no cambia (v_H = cte.).



El tiempo que la esfera permanece en vuelo (t_{vuelo}) viene determinado por $t_{vuelo} = 2t_{sub}$ o $t_{vuelo} = 2t_{baj}$, ya que se verifica $t_{sub} = t_{baj}$. Ahora sobre la dirección vertical de P hacia C determinamos t_{sub} con

$$t_{sub} = \frac{v_V}{g} = \frac{28}{10} = 2{,}8\text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad t_{vuelo} = 2(2{,}8) = 5{,}6\text{ s}$$

También hay que determinar la $H_{máx}$

La $H_{máx}$ se puede calcular (de P hacia C) por medio de

$$H_{máx} = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t_{sub}$$

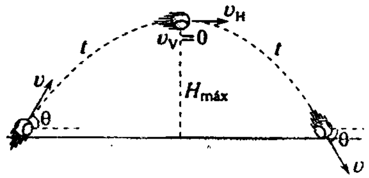
$$\Rightarrow \quad H_{máx} = \left(\frac{28+0}{2}\right)2{,}8 \quad \Rightarrow \quad H_{máx} = 39{,}2\text{ m}$$

Finalmente determinamos el alcance horizontal (d_H) considerando de P hacia D

$$d_H = v_H t_{vuelo} = 21(5{,}6) \quad \Rightarrow \quad d_H = 117{,}6\text{ m}$$

Observación

La pelota al salir y llegar a la superficie tiene en valor la misma componente vertical de la velocidad, con lo cual la rapidez de lanzamiento y de impacto son iguales tal como se muestra a continuación.

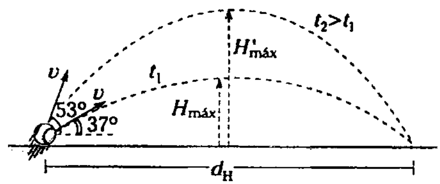


Propiedades del M.P.C.L.

1. A un mismo nivel
   - $t_{sub} = t_{baj}$
   - $\vec{v}_{sub} \neq \vec{v}_{baj}$
   - En módulo: $\left|\vec{v}_{sub}\right| = \left|\vec{v}_{baj}\right|$
2. Además un cuerpo alcanza su $H_{máx}$ en el instante que la componente vertical $\left(\vec{v}_V\right)$ de la velocidad sea nula.

Nota

Después de haber discutido el ejemplo anterior, se le puede proponer al lector que si el ángulo de lanzamiento fuese el complemento del ángulo de 53° verificase que el alcance horizontal coincide, pero la altura máxima y el tiempo de vuelo resultan diferentes.



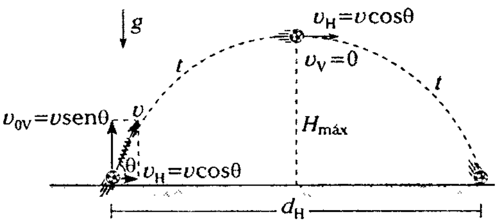
Por lo tanto, el lanzamiento de un cuerpo con la misma rapidez bajo ángulos complementarios determina el mismo alcance horizontal sobre una superficie horizontal.

Ejemplo 8

Un futbolista le aplica un puntapié a un balón en reposo, y este al salir con cierta velocidad $(\vec{v})$ forma un ángulo (θ) con el horizonte. Si el futbolista se encuentra sobre una superficie horizontal, ¿para qué valor de θ se obtendrá el máximo alcance?

Resolución

Según el enunciado tenemos



Como el ejemplo señala para qué valor de θ el d_H (alcance horizontal) es máximo, veamos qué relación existe entre d_H y θ; y a partir de dicha relación veremos cuando d_H es máximo.

El alcance horizontal viene dado por

$$d_H = v_H t_{vuelo}$$

$$\Rightarrow \quad d_H = (v\cos\theta)(2t) \qquad \text{(I)}$$

En el gráfico t nos representa el tiempo de subida el cual determinamos a partir de la dirección vertical usando

$$t_{sub} = \frac{v_{0V}}{g}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v}{g}\text{sen}\theta$$

Reemplazando en (I)

$$d_H = (v\cos\theta)2\left(\frac{v\,\text{sen}\,\theta}{g}\right) = \frac{v^2}{g}(2\text{sen}\cos\theta)$$

Mediante identidades trigonométricas se tiene

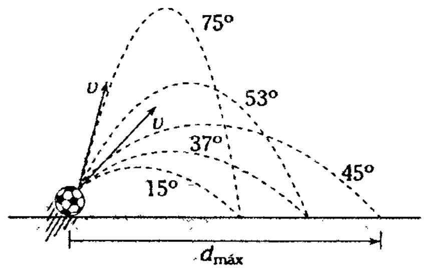
$$d_H = \frac{v^2}{g}\text{sen}(2\theta) \qquad \text{(II)}$$

En (II), d_H será máximo cuando $\text{sen}(2\theta)$ sea máximo, pero se sabe que

$$\underbrace{\text{sen}(2\theta)}_{\text{máx}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\theta = 90°$$

$$\therefore \quad \theta = 45°$$

Se concluye que el d_H es máximo sobre una superficie horizontal para un ángulo de lanzamiento de 45°. A partir de este resultado para la misma rapidez de lanzamiento (v) pero con diferentes ángulos de tiro, podemos plantear el siguiente esquema de trayectos parabólicos.



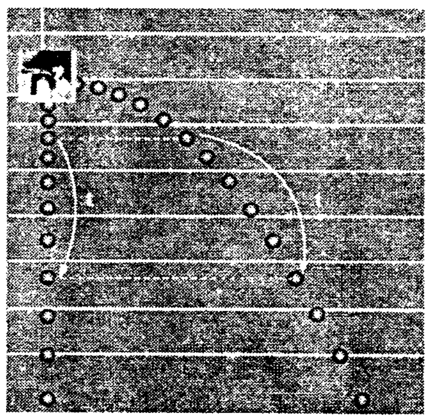
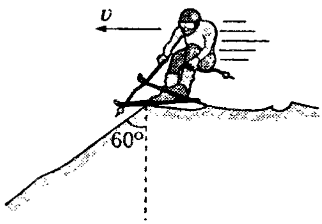


Foto estroboscópica con destellos de 1/10 s que muestra a una esfera que ha sido soltada y al mismo tiempo otra es lanzada horizontalmente del mismo lugar. Para cualquier intervalo de tiempo en la dirección vertical descienden lo mismo.

Problemas Resueltos

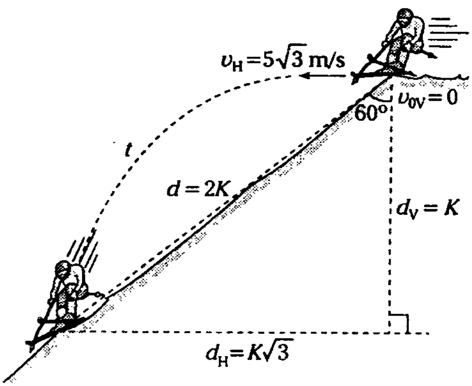
Problema 1

En el gráfico se muestra a un esquiador que deja horizontalmente una pendiente con una rapidez de $5\sqrt{3}$ m/s. Calcule su alcance sobre dicha pendiente. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Una vez que el esquiador deja la pendiente horizontalmente, en la dirección vertical tiene velocidad nula ($v_{0V} = 0$) y empieza a describir un M.P.C.L. Luego de t segundos de haber abandonado la pendiente, impacta en ella, avanza horizontalmente d_H metros y desciende verticalmente d_V metros, tal como se muestra en el siguiente diagrama:



Según el enunciado del problema debemos determinar el alcance d sobre la pendiente, donde el diagrama

$$d = 2K \qquad \text{(I)}$$

además se deduce que

$$\left.\begin{aligned} d_V &= K \\ d_H &= K\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Como d_V es el módulo del desplazamiento vertical y verticalmente el esquiador realiza un M.V.C.L. se tiene que

$$d_V = v_{0V}\,t + \frac{1}{2}g t^2$$

Como $v_{0V} = 0$ entonces

$$d_V = \frac{1}{2}g t^2 \qquad \text{(III)}$$

Por otro lado, d_H es el módulo del desplazamiento horizontal y horizontalmente el esquiador realiza un M.R.U. Entonces

$$d_H = v_H t$$

Elevando miembro a miembro al cuadrado (por conveniencia)

$$d_H^2 = v_H^2 t^2 \qquad \text{(IV)}$$

Dividiendo (III) entre (IV)

$$\frac{d_V}{d_H^2} = \frac{\frac{1}{2}g t^2}{v_H^2 t^2} \qquad \text{(V)}$$

Reemplazando (II) en (V)

$$\frac{K}{(K\sqrt{3})^2} = \frac{\frac{1}{2}(10)}{(5\sqrt{3})^2}$$

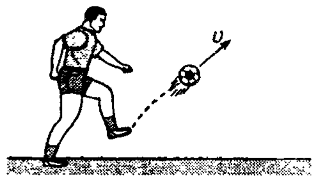
$$\Rightarrow \; K = 5$$

En (I)

$$d = 2(5) = 10\,\text{m}$$

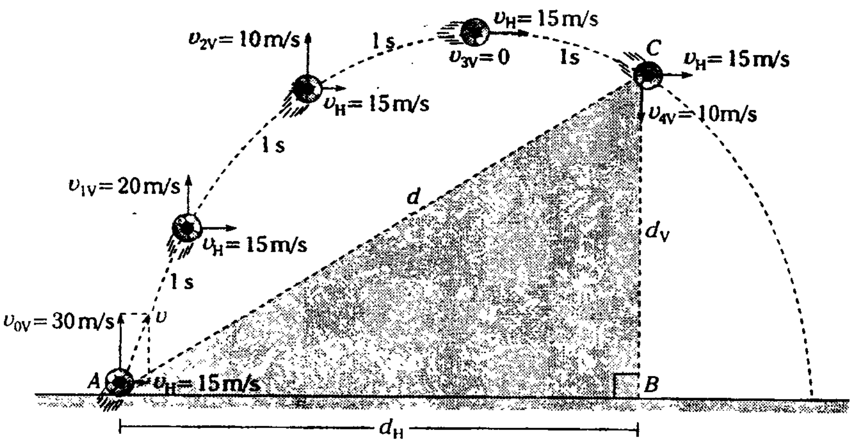
Problema 2

En un partido de fútbol, un jugador realiza un saque de meta y le comunica a la pelota una velocidad $\vec{v}$=(15;30)m/s. ¿A qué distancia del lugar de lanzamiento se encuentra la pelota luego de 4 s? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Una vez que la pelota es impulsada ésta realizará un M.P.C.L. tal como se muestra



Como la velocidad con la que se impulsa la pelota es $\vec{v}=(15\,;30)$, entonces en dicho instante las componentes horizontal y vertical de esta velocidad serán v_H= 15 m/s y v_{0V} = 30 m/s, respectivamente.

Si nuestro propósito es determinar a qué distancia d del lugar de lanzamiento se encuentra la pelota luego de 4 s, entonces debemos determinar la posición en la que se encuentra. Para ello, recordemos que verticalmente en el ascenso la rapidez va disminuyendo en 10 m/s en cada segundo, entonces como la componente vertical inicial es v_{0V} = 30 m/s, en 3 s la pelota se encuentra en su posición más alta. Según esto, podemos garantizar que transcurridos los 4 s la pelota se encuentra descendiendo por la posición C tal como se muestra en el diagrama.

En el ⊿ABC, d es la hipotenusa; donde

$$d=\sqrt{d_H^2+d_V^2} \qquad \text{(I)}$$

A continuación encontremos d_H y d_V; al examinar el M.P.C.L. de la pelota de A hacia C

- Horizontalmente (M.R.U.)

$$d_H=v_H t_{AC}$$

$$\Rightarrow\ d_H=15(4)$$

$$d_H=60\,\text{m} \qquad \text{(II)}$$

- Verticalmente (M.V.C.L.)
  Como la pelota está de subida y bajada empleamos la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{d}=\vec{v}_{0V}t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow\ +d_V=+30(4)+\frac{1}{2}(-10)(4)^2$$

$$d_V=40\,\text{m} \qquad \text{(III)}$$

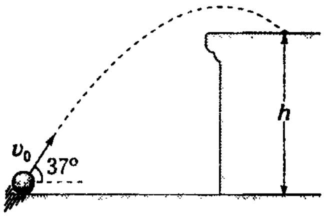
(II) y (III) en (I)

$$d=\sqrt{60^2+40^2}$$

$$d=20\sqrt{13}\,\text{m}$$

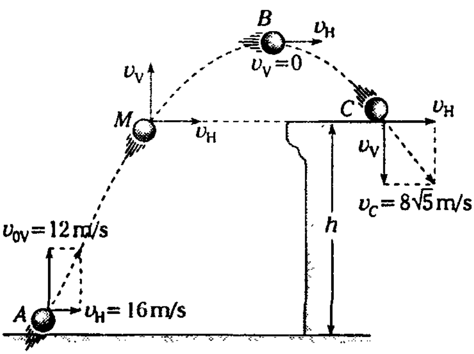
Problema 3

En la posición A se lanza la esfera con una rapidez $v_0=20$ m/s y se observa que impacta sobre el muro, con una rapidez de $8\sqrt{5}$ m/s. Determine h. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

Según la dirección de lanzamiento de la esfera, podemos garantizar que la esfera realizará un M.P.C.L.



En el diagrama que se muestra, al descomponer la velocidad de lanzamiento sobre la horizontal y vertical, tenemos

$$v_H=16\text{ m/s} \ \text{ y } \ v_V=12\text{ m/s}$$

Ahora, como la componente horizontal v_H en todo M.P.C.L. se mantiene constante, esto significaría que la componente horizontal de la velocidad $\vec{v}_0$ con la que impacta la esfera en el muro sería $v_H=16$ m/s y como el módulo de la velocidad con la que impacta la esfera en el muro es $v_C=8\sqrt{5}$ m/s; entonces el módulo de la componente vertical v_V en C será

$$v_C^2=v_V^2+v_H^2$$

$$(8\sqrt{5})^2=v_V^2+(16)^2$$

$$v_V=8\,\text{m/s}$$

Nuestro propósito en el problema es determinar h y según lo deducido examinamos el movimiento en la dirección vertical de A hacia M empleando la siguiente ecuación:

$$v_V^2=v_{0V}^2-2gh$$

Reemplazando

$$v_V=12^2-2(10)h \qquad \text{(I)}$$

pero en M la $v_V=8$ m/s, ya que en un mismo nivel la velocidad vertical de subida y bajada tienen el mismo módulo.

En (I): $h=4$ m

Otro criterio para calcular h

Por los cambios que sufre la componente vertical de la velocidad se establece que

$$t_{AC}=t_{AB}+t_{BC}=1{,}2\text{ s}+0{,}8\text{ s}$$

$$\Rightarrow\ t_{AC}=2\,\text{s}$$

Luego aplicamos ecuación vectorial (de A hacia C)

$$\vec{h}=\left(\frac{\vec{v}_{0V}+\vec{v}_V}{2}\right)t_{AC}=\frac{(+12)+(-8)}{2}\cdot 2$$

$$\vec{h}=+4\,\text{m}$$

El signo (+) indica desplazamiento hacia arriba.

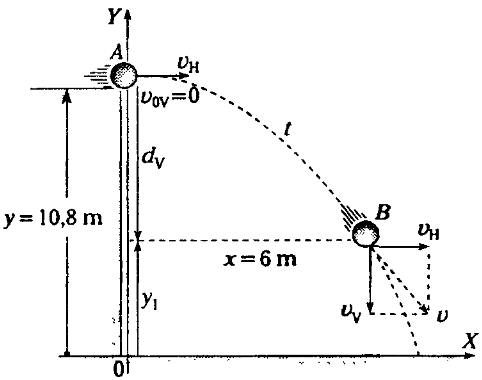
Problema 4

Desde una azotea se lanza horizontalmente una pelota, la cual describe una trayectoria definida por la ecuación $x^2 + 10y = 108$. Determine la rapidez de la pelota cuando pase por $x = 6$ m. ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

De la ecuación de la trayectoria se deduce que $y = 10,8 - \frac{x^2}{10}$, que es la ecuación de una parábola.

Si la pelota describe un M.P.C.L. y $x=0$, entonces $y=+10,8$ m. Ahora como la pelota se lanzó horizontalmente se tiene



Luego de t segundos del lanzamiento, por dato $x=6$ m y si reemplazamos el valor de x, también y por y_1 en la ecuación de la trayectoria

$$\Rightarrow \quad y_1 = 10,8 - \frac{x^2}{10}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 10,8 - \frac{6^2}{10}$$

$$\therefore \quad y_1 = +7,2 \text{ m}$$

De este resultado deducimos que la pelota, al transcurrir t segundos, todavía se encuentra a 7,2 m del piso, habiendo descendido $d_V=3,6$ m.

Ahora, como nuestro propósito es determinar la rapidez v de la pelota cuando $x=6$ m, entonces el diagrama

$$v = \sqrt{v_H^2 + v_V^2} \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación necesitamos conocer v_H y v_V, para lo cual examinamos el movimiento de la pelota horizontal y verticalmente.

Horizontalmente (M.R.U.)

$$v_H = \frac{x}{t} = \frac{6}{t} \qquad \text{(II)}$$

Debemos encontrar t para determinar v_H y para ello es conveniente examinar el movimiento en la dirección vertical.

Hacemos uso de

$$d_V = v_{0V}\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como $v_{0V}=0$ ya que la pelota se lanza horizontalmente, al reemplazar datos se tiene

$$3,6 = 0t + \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{6\sqrt{2}}{10}\text{s} \qquad \text{(III)}$$

(III) en (II)

$$v_H = 5\sqrt{2} \text{ m/s} \qquad \text{(IV)}$$

A continuación determinemos v_V, para ello en la dirección vertical empleamos la siguiente ecuación:

$$v_V^2 = \cancel{v_{0V}^2} + 2gd_V$$

Reemplazando

$$v_V^2 = 2(10)(3,6)$$

Resolviendo

$$v = 6\sqrt{2} \text{ m/s} \qquad \text{(V)}$$

(IV) y (V) en (I) se obtiene

$$v = \sqrt{122} \text{ m/s}$$

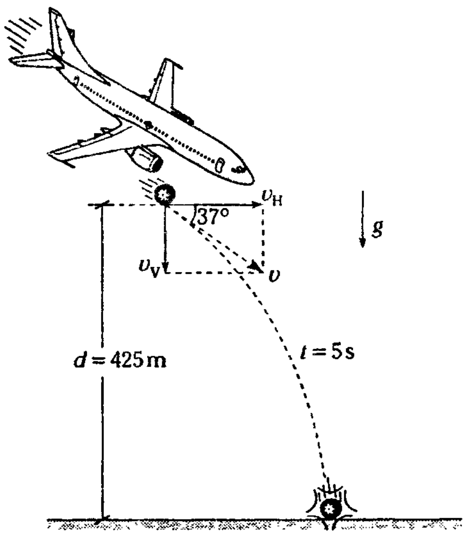
Problema 5

Un avión está en picada y formando un ángulo de depresión de 37°. Cuando se encuentra a 425 m de altura, se cae un neumático llega al suelo después de 5 s. ¿Qué rapidez tenía el avión en aquel instante? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

Resolución

Para calcular la rapidez del avión vamos a analizar sólo al neumático.

Una vez que el neumático se desprende del avión, presentará la misma velocidad que el avión, y luego efectuará un M.P.C.L., así tenemos



Para calcular υ, sólo vamos a trabajar en la dirección vertical, entonces tenemos

$$\upsilon_V = \upsilon \operatorname{sen} 37°$$

$$\upsilon_V = \upsilon\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = \upsilon_V\left(\frac{5}{3}\right) \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación, necesitamos υ_V para determinar υ; entonces usamos

$$d = \upsilon_V t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow \quad 425 = \upsilon_V(5) + \frac{1}{2}(10)(5)^2$$

$$\upsilon_V = 60\,\text{m/s}$$

Por lo tanto, al reemplazar en (I) se tiene

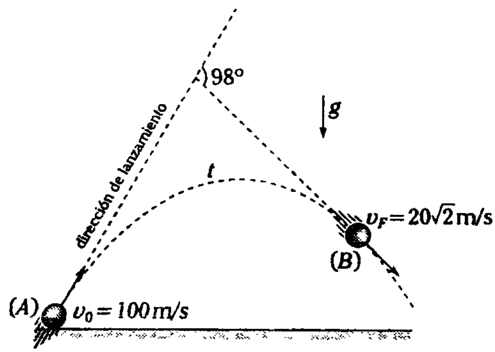
$$\upsilon = 100\,\text{m/s}$$

Problema 6

Un objeto es lanzado oblicuamente con una rapidez de 100 m/s; determine el tiempo que transcurre desde el instante que es lanzado hasta el instante que adquiere una velocidad de módulo $20\sqrt{2}$ m/s; el cual forma un ángulo de 98° con la velocidad de lanzamiento. ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

Resolución

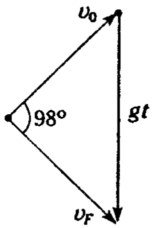
Consideramos que el objeto es lanzado desde la posición A y luego de t segundos de haberlo lanzado se encuentra en la posición B en donde la velocidad forma un ángulo de 98° con la dirección de lanzamiento, tal como se muestra a continuación.



Hasta ahora hemos trabajado por componentes un M.P.C.L., pero algunas veces es conveniente tratarlo geométricamente. Para todo movimiento con aceleración constante (M.R.U.V., M.V.C.L. o M.P.C.L.) se puede usar

$$\vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

Como las magnitudes en esta fórmula no son paralelas podemos proceder a formar un triángulo



En el triángulo formado, aplicamos ley de cosenos

$$(gt)^2 = v_0^2 + v_F^2 - 2v_0v_F\cos 98°$$

$$100t^2 = (100)^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2(100)(20\sqrt{2})(-\text{sen}\,8°)$$

$$t^2 = 100 + 8 - 40\sqrt{2}\left(\frac{-1}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$t^2 = 116$$

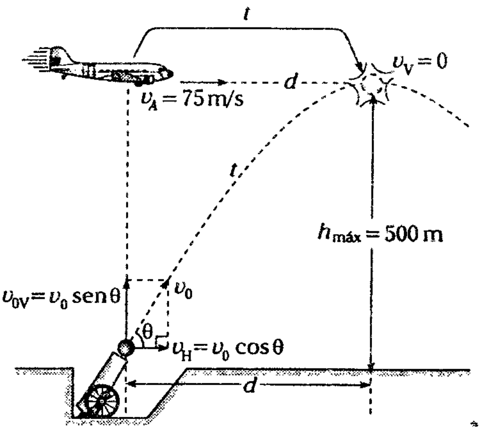
$$\therefore\ t = 2\sqrt{29}\ \text{s}$$

Problema 7

Un avión se desplaza horizontalmente a una altura de 500 m y con una rapidez de 75 m/s. Cuando pasa sobre un cañón atrincherado, este dispara, ¿cuál debe ser el ángulo de disparo del cañón para que el proyectil, cuando alcance su altura máxima, le impacte al avión? ($g = 10\ \text{m/s}^2$)

Resolución

Nos piden el ángulo de lanzamiento para que el proyectil le impacte al avión tal como se muestra en la siguiente figura:



De la figura, analizamos al proyectil en la dirección vertical y para ello usamos

$$\cancel{v_V^2} = v_{0V}^2 - 2gh_{\text{máx}}$$

$$v_{0V}^2 - 2gh_{\text{máx}}$$

Reemplazando

$$(v_0\,\text{sen}\,\theta)^2 = 2(10)(500)$$

$$v_0\,\text{sen}\,\theta = 100 \qquad \text{(I)}$$

Ahora en la dirección horizontal planteamos

$$d = v_H t$$

$$d = v_0\cos\theta\, t \qquad \text{(II)}$$

Pero del M.R.U. del avión se plantea

$$d = v_A t$$

$$\Rightarrow d = 75t \qquad \text{(III)}$$

Dividimos (II) entre (III)

$$v_0\cos\theta = 75 \qquad \text{(IV)}$$

Ahora dividimos (I) entre (IV) y se obtiene

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

De esta relación se deduce que θ tendría que valer 53°.

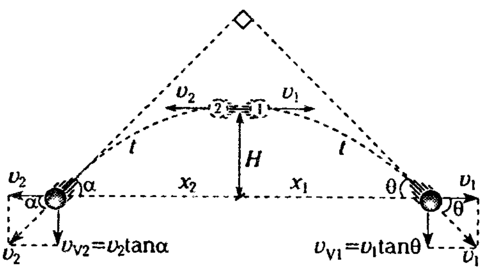
Problema 8

Desde cierta altura respecto de la superficie se lanzan simultáneamente desde un mismo lugar dos canicas con velocidades $\vec{v}_1 = v_1\,\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_2 = -v_2\,\hat{i}$ m/s. ¿Qué distancia separa a las partículas cuando sus velocidades son perpendiculares?

Resolución

Siendo la velocidad de lanzamiento $\vec{v}_1 = v_1\,\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_2 = -v_2\,\hat{i}$ m/s, el vector unitario $\vec{i}$ nos indica que las canicas son lanzadas a lo largo del eje X, es decir horizontalmente y el signo (+) nos indica que la primera canica es lanzada hacia la derecha, mientras que el signo (-) nos indica que la segunda partícula es lanzada hacia la izquierda; luego ambas realizarán un M.P.C.L.

Ahora, como las canicas son lanzadas horizontalmente en el mismo instante, en la dirección vertical ambas empiezan a descender ($v_V = 0$), en tal sentido, en todo instante se encontrarán en el mismo nivel, pero con diferente inclinación como indica la figura.



En el diagrama se puede observar que luego de t segundos de haberse lanzado las canicas, la distancia d que las separa cuando sus velocidades son perpendiculares es

$$d = x_1 + x_2 \qquad \text{(I)}$$

Para la canica 1 en la horizontal planteamos

$$x_1 = v_1 t$$

También para la canica 2 tenemos

$$x_2 = v_2 t$$

Lo calculado para x_1 y x_2 lo reemplazamos en (I)

$$d = v_1 t + v_2 t = (v_1 + v_2)t \qquad \text{(II)}$$

Si v_1 y v_2 son datos d resultará en función de estos, y como t es una variable introducida necesitamos conocer t.

Para la canica 1, en la dirección vertical planteamos

$$v_{V1} = v_{0V} + gt$$

$$v_1 \tan\theta = 0 + gt$$

$$v_1 \tan\theta = gt \qquad \text{(III)}$$

Para la canica 2, también consideramos lo mismo

$$v_{V2} = v_{0V} + gt$$

$$v_2 \tan\alpha = gt \qquad \text{(IV)}$$

pero, si

$$\theta + \alpha = 90°$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \cot\theta$$

Reemplazando en (IV)

$$\Rightarrow v_2 \cot\theta = gt \qquad \text{(V)}$$

Ahora, notamos que la relación (III) = (V)

$$v_2 \cot\theta = v_1 \tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \tan^2\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} \qquad \text{(VI)}$$

(VI) en (III)

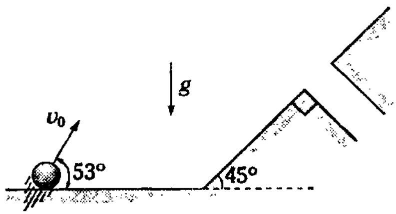
$$t = \frac{v_1}{g}\sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \sqrt{\frac{v_1 v_2}{g}}$$

Finalmente en (III)

$$d = \frac{(v_1 + v_2)\sqrt{v_1 v_2}}{g}$$

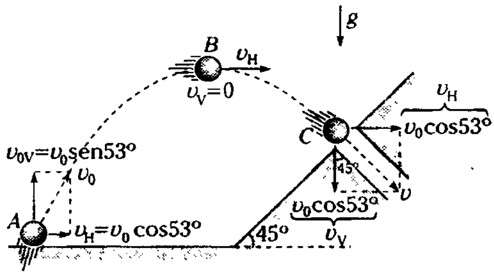
Problema 9

En la figura se muestra una pequeña esfera que es lanzada con cierta rapidez v_0 y luego de 7 s ingresa limpiamente al agujero. Determine v_0. ($g = 10\ m/s^2$)



Resolución

Según la dirección del lanzamiento ($\theta = 53°$) de la esfera, ella realizará un M.P.C.L. Como la esfera logra ingresar con precisión al agujero, entonces en dicho instante su velocidad $\vec{v}$ será perpendicular a la superficie inclinada, tal como se muestra en el siguiente diagrama.



En todo momento la componente horizontal no varía ($v_0\cos53°$ = cte.). En C dado que el ingreso es con 45°, la componente vertical $v_V = v_0\cos53°$. Como de A hacia C la esfera demora 7 s y así también presenta movimiento de ascenso y luego descenso, entonces es conveniente usar la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v}_V = \vec{v}_{0V} + \vec{g}t$$

Según la dirección de los vectores tenemos

$$-v_V = +v_{0V} + (-g)t$$

Reemplazando los valores correspondientes

$$-v_0\cos53° = +v_0 sen53° - 10(7)$$

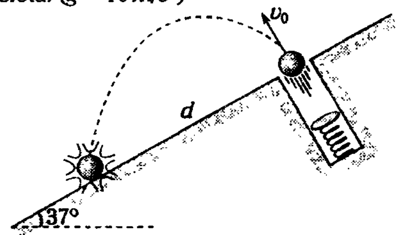
$$-v_0\left(\frac{3}{5}\right) = +v_0\left(\frac{4}{5}\right) - 10(7)$$

Resolviendo

$$v_0 = 50\ m/s$$

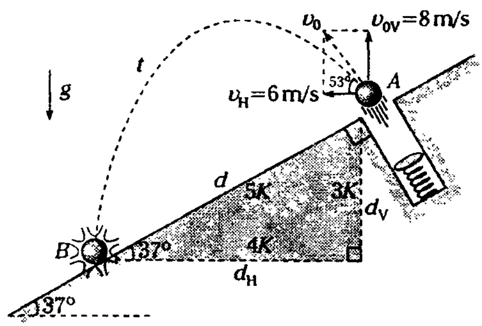
Problema 10

La figura muestra el lanzamiento de una pequeña pelota en dirección perpendicular al plano inclinado y con una rapidez $v_0 = 10 m/s$. Determine el alcance d a lo largo del plano en el cual impacta la pelota. ($g = 10 m/s^2$)



Resolución

Según el diagrama que acompaña al enunciado se puede deducir que la pelota realiza un M.P.C.L. Consideremos que luego de t segundos de salir la pelota del agujero, impacta en el plano inclinado; avanza horizontalmente d_H metros y desciende verticalmente d_V metros tal como se muestra en el diagrama.



Del diagrama debemos determinar d, donde del ⊾ sombreado, se tiene

$$d = 5K \qquad \text{(I)}$$

$$d_H = 4K \quad \text{y} \quad d_V = 3K$$

Examinemos el movimiento parabólico:

- En la dirección vertical (M.V.C.L.) empleamos la siguiente ecuación vectorial (pues hay movimiento de subida y luego bajada).

$$d_V = \vec{v}_{0V}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Reemplazando

$$d_V = +8t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

$$-3K = 8t - 5t^2 \qquad \text{(II)}$$

- En la dirección horizontal (M.R.U.)

$$d_H = v_H t \;\Rightarrow\; 4K = 6t \qquad \text{(III)}$$

Ahora hacemos (II) ÷ (III)

$$-\frac{3}{4} = \frac{8t - 5t^2}{6t} \;\Rightarrow\; t = 2{,}5 \text{ s}$$

En (III)

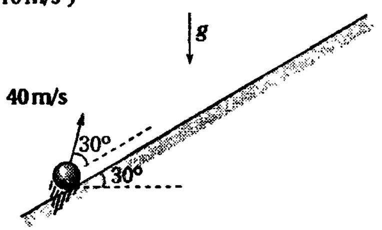
$$4K = 6(2{,}5) \;\Rightarrow\; K = \frac{15}{4} \text{ m}$$

En (I)

$$d = 5\left(\frac{15}{4}\right) = 18{,}75 \text{ m}$$

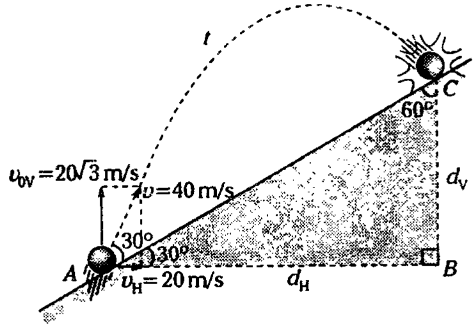
Problema 11

Un proyectil es lanzado tal como se muestra. Determine luego de cuántos segundos de haber sido lanzado impacta sobre el plano inclinado. ($g = 10\,\text{m/s}^2$)



Resolución

Luego de t segundos de haberse lanzado el proyectil, logra impactar en el plano inclinado, cuyo desplazamiento horizontal es d_H metros y verticalmente se eleva d_V metros; realizando un M.P.C.L. tal como se muestra en el siguiente diagrama.



- En la dirección vertical (M.V.C.L.) hacemos uso de la siguiente ecuación vectorial.

$$d_V = \vec{v}_{0V}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Reemplazando

$$+d_V = (+20\sqrt{3})t - 5t^2 \qquad \text{(I)}$$

- Horizontalmente (M.R.U.)

$$d_H = v_H t$$

Reemplazando

$$d_H = 20\,t \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$\frac{d_V}{d_H} = \sqrt{3} - \frac{t}{4} \qquad \text{(III)}$$

Del ⊾ ABC

$$\frac{d_V}{d_H} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

En (III)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{t}{4}$$

de donde

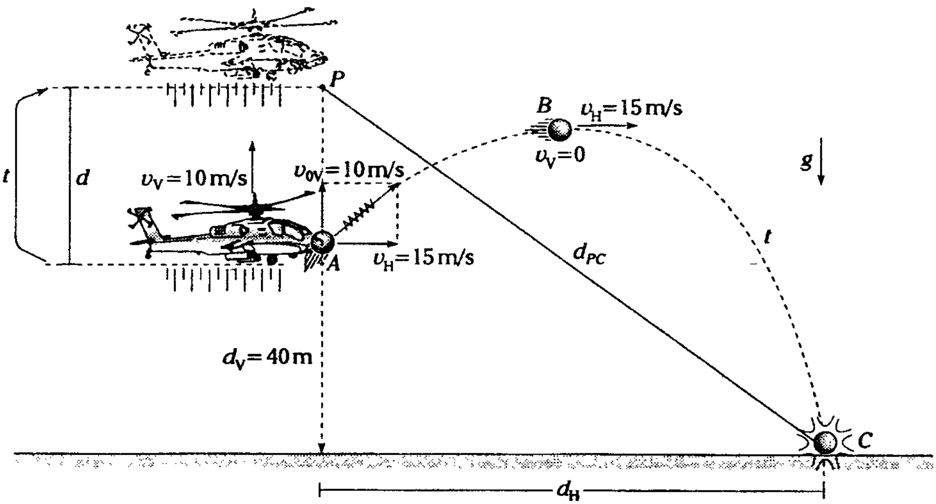
$$t = \frac{8}{3}\sqrt{3} \text{ s}$$

Problema 12

Un helicóptero asciende verticalmente con una rapidez constante de 10 m/s. Cuando se encuentra a 40 m del suelo, un tripulante lanza horizontalmente una piedra con una rapidez de 15 m/s (respecto al helicóptero). ¿Qué distancia separa al tripulante de la piedra en el instante que ésta impacta en el suelo? (g = 10 m/s^2)

Resolución

El helicóptero asciende verticalmente con rapidez constante: $v_V = 10$ m/s y cuando la piedra aún no es lanzada tiene la misma velocidad que el helicóptero $v_V = 10$ m/s (hacia arriba). Más cuando el tripulante lanza la piedra, ésta adquiere una velocidad adicional $v_H = 15$ m/s (hacia la derecha). Si componemos dichas velocidades, la piedra empieza a describir un M.P.C.L., tal como se muestra en el siguiente diagrama:



En la figura, luego de t segundos la piedra impacta en C y presenta un alcance horizontal d_H. Si el tripulante al cabo de t segundos está en P, entonces la distancia que lo separa de la piedra será

$$d_{PC} = \sqrt{(d+40)^2 + d_H^2} \qquad \text{(I)}$$

- Para la piedra, en la dirección vertical (M.V.C.L.) empleamos la siguiente ecuación vectorial:

$$d_V = \vec{v}_{0V}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\Rightarrow \quad -40 = (+10)t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

Resolviendo $t = 4$ s

En la dirección horizontal (M.R.U.) la piedra se desplaza

$$d_H = v_H t = 15(4)$$

$$\therefore \; d_H = 60 \text{ m} \qquad \text{(II)}$$

- Para el helicóptero (M.R.U.)

$$d = v_V t = 10(4)$$

$$d = 40 \text{ m} \qquad \text{(III)}$$

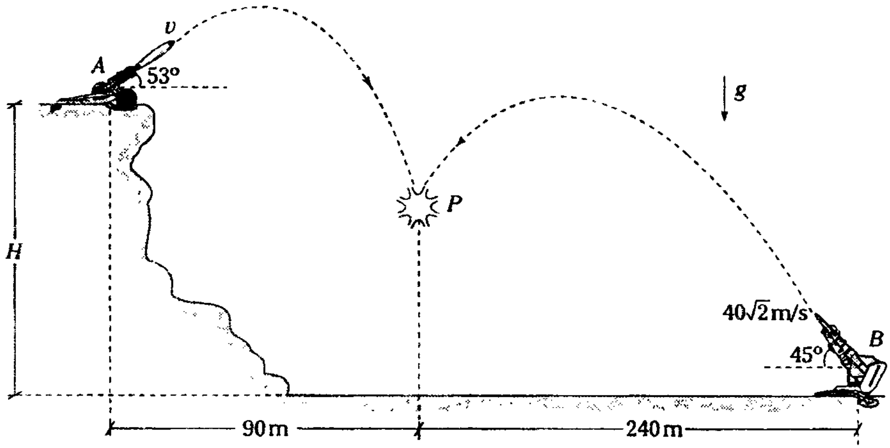
(II) y (III) en (I)

$$d = \sqrt{(40+40)^2 + 60^2} = 100$$

$$d_{PC} = 100 \text{ m}$$

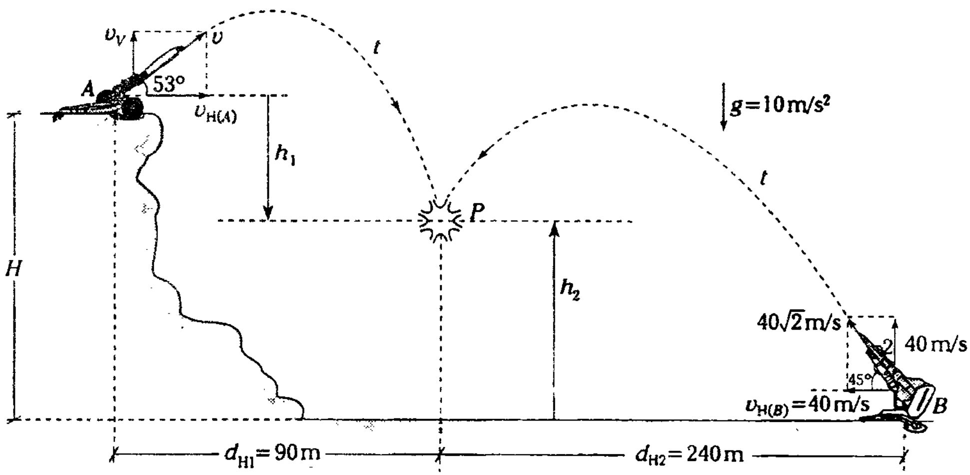
Problema 13

Dos proyectiles son lanzados simultáneamente de A y B. Se muestran sus trayectos y el lugar donde chocan. Determine H. ($g = 10\,m/s^2$)



Resolución

Los proyectiles realizan M.P.C.L., y desde el instante que son lanzados simultáneamente hasta que chocan transcurren t segundos.



Cálculo de H

De la figura se observa que

$$H = h_1 + h_2 \qquad \text{(I)}$$

Analizando verticalmente el movimiento de cada proyectil, planteamos la ecuación vectorial.

- Para el proyectil lanzado desde A

$$\vec{h}_1 = \vec{v}_{0V}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$-h_1 = +v_V t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \qquad \text{(II)}$$

- Para el proyectil lanzado desde B

$$\vec{h}_2 = \vec{v}_{0V}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$+h_2 = +40t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \qquad \text{(III)}$$

Restando (III) con (II)

$$h_1 + h_2 = (40 - v_V)t$$

$$H = (40 - v\,\text{sen}\,53°)t \qquad \text{(IV)}$$

Ahora, para determinar v y t analizamos el movimiento horizontal (M.R.U.) del proyectil lanzado desde B.

$$d_{H2} = v_{H(B)}t = 40t$$

$$\Rightarrow \; 240 = 40t$$

$$t = 6\text{ s} \qquad \text{(V)}$$

También para el proyectil lanzado desde A

$$d_{H1} = v_{H(B)} \times t$$

$$\Rightarrow \; 90 = (v\cos 53°)(6)$$

Resolviendo

$$v = 25\text{ m/s} \qquad \text{(VI)}$$

(V) y (VI) en (IV)

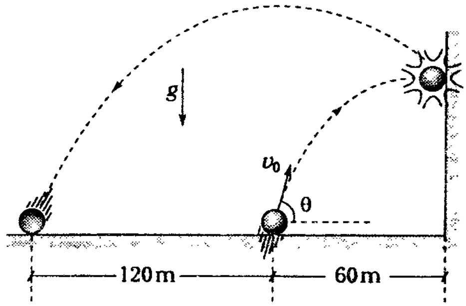
$$H = \left(40 - 25\left(\frac{4}{5}\right)\right)6$$

de donde

$$H = 120\text{ m}$$

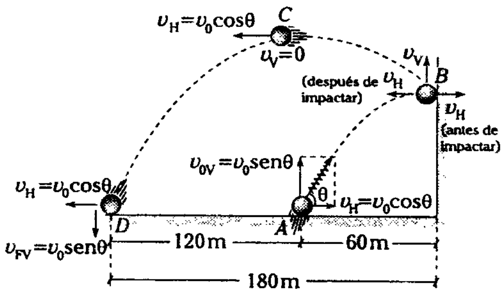
Problema 14

Una bolita se lanza con $v_0 = 50$ m/s y choca elásticamente con la pared realizando el movimiento parabólico antes y después del choque. Calcule el ángulo de tiro θ. (Desprecie la duración del choque).



Resolución

Según condición del problema antes y después del choque la bolita realiza un M.P.C.L.



Como el choque es elástico permite que la bolita llegue con $v_0\cos\theta\,(\rightarrow)$ y rebote con la misma rapidez $v_0\cos\theta\,(\leftarrow)$. La componente vertical de la velocidad $v_V > 0\,(\uparrow)$ al sumarse con $v_0\cos\theta\,(\leftarrow)$ hace que la bolita describa un M.P.C.L. de B hacia D. Si la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante y la duración del choque se desprecia, entonces de A hacia D se puede plantear

$$v_H = \frac{e_{AD}}{t_{AD}} \;\Rightarrow\; v_0\cos\theta = \frac{240}{t_{AD}} \qquad \text{(I)}$$

Verticalmente la bolita desarrolla un M.V.C.L.; y como de A hacia D la bolita está de subida y bajada, emplearemos la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v}_{FV}=\vec{v}_{0V}+\vec{g}t$$

Reemplazando

$$-v_{FV}=+v_{0V}+(-10)t_{AD}$$

$$-v_0\,\mathrm{sen}\,\theta=+v_0\,\mathrm{sen}\,\theta-10t_{AD}$$

$$v_0\,\mathrm{sen}\,\theta=5t_{AD}$$

$$t_{AD}=\frac{v_0\,\mathrm{sen}\,\theta}{5} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$v_0^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta=240(5)$$

$$(50)^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta=1200$$

$$2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta=\frac{24}{25}$$

$$\mathrm{sen}\,2\theta=\frac{24}{25}$$

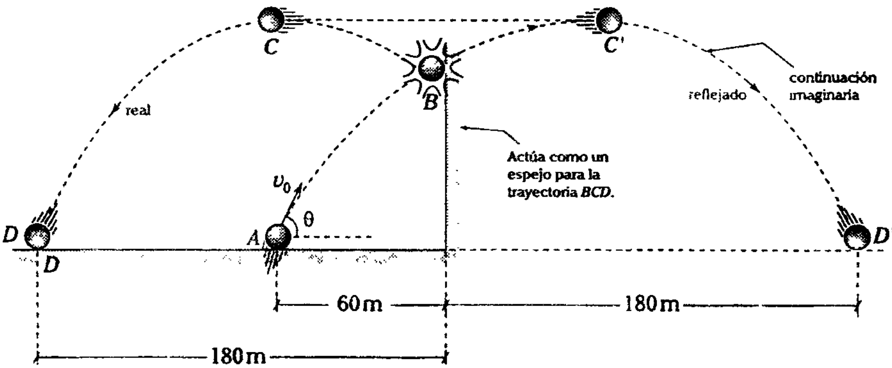
Según esta relación 2θ debe ser 74°, entonces

$$2\theta=74°$$

$$\Rightarrow\ \theta=37°$$

Otra método

Añadimos el trayecto de A hacia B, el tramo de B hacia D', la trayectoria de la bolita antes de impactar a la pared y la trayectoria reflejada de la bolita después del choque tal como se muestra a continuación.



En tal sentido, la trayectoria $ABC'D'$ sería una trayectoria parabólica completa. Considerando que la bolita realiza un M.P.C.L. por esta trayectoria, el alcance horizontal $d_{AD'}$ será expresado por

$$d_{AD}=\frac{v_0^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{g}\quad \text{(Ver ejemplo 8)}$$

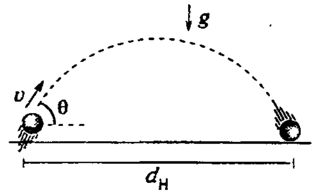
$$60+180=\frac{50^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{10}$$

Simplificando

$$\mathrm{sen}\,2\theta=\frac{24}{25}\ \Rightarrow\ 2\theta=74\ \Rightarrow\ \theta=37°$$

Nota

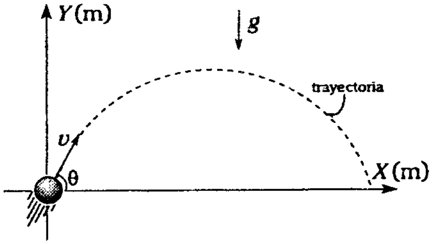
El lanzamiento oblicuo de un proyectil sobre un plano horizontal da un alcance horizontal dado por



$$d_H=\frac{v^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}{g}$$

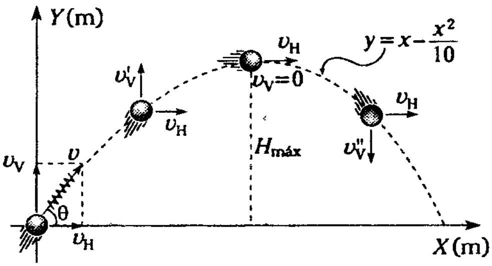
Problema 15

En el gráfico se muestra el lanzamiento de una partícula y al despreciar la resistencia del aire la ecuación de la trayectoria que describe viene dada por $y = x - \frac{x^2}{10}$. Determine la menor rapidez que adquiere la partícula. ($g = 10\,\text{m/s}^2$)



Resolución

Una vez que se da el lanzamiento de la partícula mientras esta asciende, su rapidez (v) disminuye y cuando alcanza su punto más alto ($H_{\text{máx}}$) la partícula presenta su menor rapidez, tal como se muestra en el gráfico.



En el punto más alto

$$v_{\text{mín}} = v_H = v\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

Se requiere v y θ.

Para el lanzamiento de una partícula desde el origen bajo cierto ángulo combinando $x = v\cos\theta t$ y $y = v\,\text{sen}\,\theta t - \frac{1}{2}gt^2$ se establece que la ecuación de su trayectoria viene dada por

$$y = \tan\theta x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad \text{(II)}$$

donde

v : rapidez de lanzamiento.

θ : ángulo de lanzamiento.

g : aceleración de la gravedad.

Comparando la ecuación de la trayectoria (dato)

$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

Con la relación (II), se deduce que

$$\tan\theta = 1 \;\Rightarrow\; \theta = 45°$$

y $\frac{g}{2v^2\cos^2\theta} = \frac{1}{10} \;\Rightarrow\; \frac{10}{2v^2\cos^2 45°} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow\; v = 10\,\text{m/s}^2$$

Reemplazando en (I) se obtiene

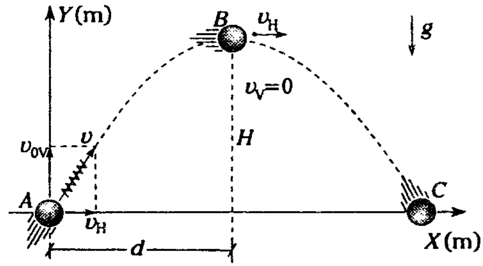
$$\Rightarrow\; v_{\text{mín}} = 5\sqrt{2}\,\text{m/s}$$

Otra forma

De la ecuación de la trayectoria de la partícula

$$y = x - \frac{x^2}{10}$$

deducimos que la trayectoria es una parábola, por consiguiente la partícula realizará un M.P.C.L.



Dándole la siguiente forma a la ecuación de la trayectoria

$$y = a(x-d)^2 + H \qquad \text{(I)}$$

donde (d ; H) es el punto del vértice de la parábola, siendo

y : la altura en que se encuentra la partícula respecto del eje X.

a : número (cte.).

x : el módulo del desplazamiento horizontal.

d : el módulo del desplazamiento horizontal hasta el momento que alcanza su altura máxima (H).

En tal sentido, dándole forma a la ecuación de la trayectoria se obtiene

$$y=-\frac{1}{10}(x-5)^2+0,5$$

entonces comparándola con (III), se verifica que

$$d=5\,\text{m} \;\wedge\; H=0,5\,\text{m}$$

Ahora, tenemos que calcular la rapidez mínima ($v_{mín}$) que adquiere la partícula ya que esta la tiene en su posición más alta. Si en tal posición la velocidad es horizontal $\left(\vec{v}_H\right)$, entonces

$$v_{mín}=v_H$$

Ya que horizontalmente la partícula realiza un M.R.U., entonces de A hacia B se tiene

$$v_H=\frac{d}{t_{sub}}=\frac{5}{t_{sub}} \qquad (*)$$

Además verticalmente la partícula realiza un M.V.C.L.; donde de A hacia B

$$t_{sub}=t_{baj}$$

luego de B hacia C

$$H=\cancel{v_{0V}t_{baj}}+\frac{1}{2}gt^2_{baj}$$

entonces

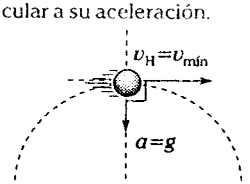
$$2,5=\frac{1}{2}(10)t^2_{baj} \;\Rightarrow\; t_{baj}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En (*)

$$v_H=5\sqrt{2}\,\text{m/s} \;\Rightarrow\; v_{mín}=5\sqrt{2}\,\text{m/s}$$

Nota

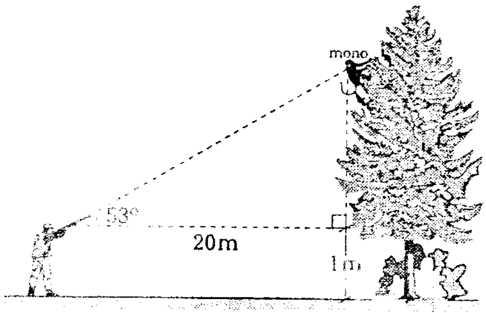
En un M.P.C.L. en la posición más alta el cuerpo presenta su menor velocidad y es perpendicular a su aceleración.



También en la parte más alta la aceleración tangencial es nula.

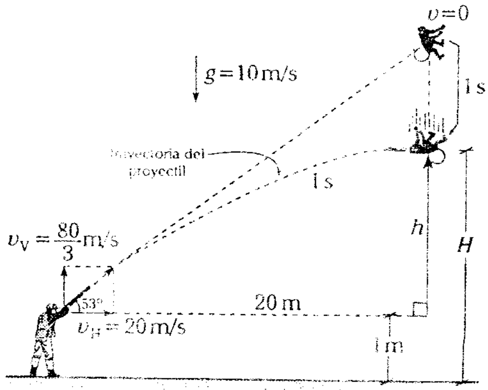
Problema 16

El cazador realiza un disparo al dirigir su rifle hacia el mono. Si en ese instante el mono se deja caer del árbol debido a que es impactado por el proyectil, luego de 1 s determine a qué altura respecto del piso el mono llega a ser herido. ($g=10\,\text{m/s}^2$)



Resolución

Una vez que el mono se suelta y el proyectil sale del rifle, estos describen M.V.C.L. y M.P.C.L., respectivamente. El enunciado asegura que el proyectil impacta en el mono, entonces el proyectil avanzó 20 m sobre la horizontal en 1 s. Esto permite señalar que la componente horizontal de la velocidad $\left(\vec{v}_H\right)$ del proyectil es 20 m/s y bajo el ángulo de disparo (53°) se deduce que la componente vertical $\left(\vec{v}_V\right)$ de la velocidad del proyectil, en el instante del disparo es 80/3 m/s. En el siguiente gráfico se muestra lo que acontece.



Piden la altura del mono respecto del piso en el instante en que es impactado por el proyectil. Del gráfico viene a ser

$$H = h + 1 \qquad \text{(I)}$$

Se requiere h.

Como h para el proyectil representa su desplazamiento vertical en 1 s, entonces podemos utilizar la ecuación vectorial.

$$\vec{h} = \vec{v}_V\, t + \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2$$

$$\Rightarrow \quad +h = \left(\frac{80}{3}\right)(1) + \frac{1}{2}(-10)(1)^2$$

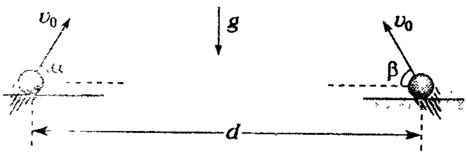
$$\Rightarrow \quad h = \frac{65}{3}\,\text{m}$$

En (I)

$$H = \frac{68}{3}\,\text{m}$$

Problema 17

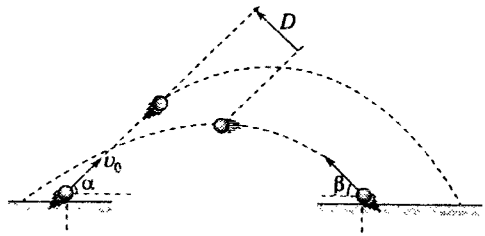
Dos proyectiles son lanzados simultáneamente y con igual rapidez, tal como se muestra. Determine la menor separación entre ellos.



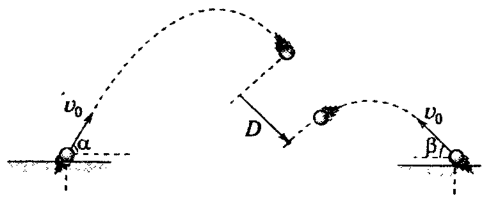
Resolución

Una vez que se lanzan los proyectiles, estos realizarán un M.P.C.L. Ahora, como deseamos determinar la menor distancia D de acercamiento entre ellos, esto puede ocurrir cuando los proyectiles están elevándose o descendiendo tal como se muestra a continuación en los siguientes casos:

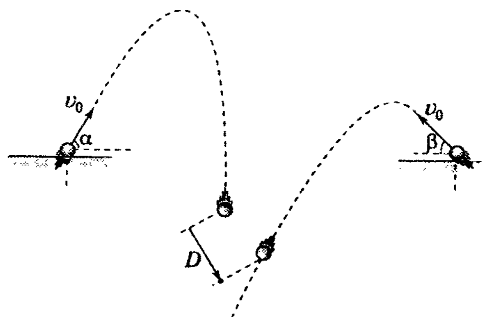
Caso I



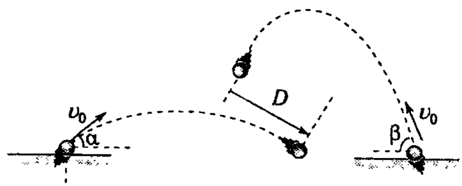
Caso II



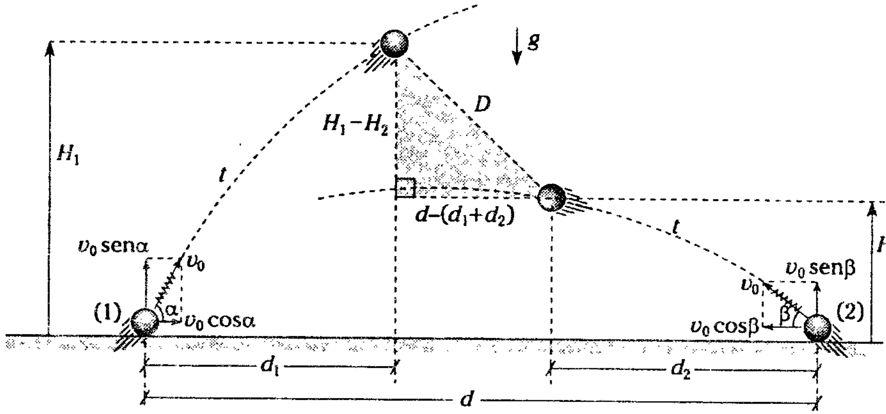
Caso III



Caso IV



Ahora, los casos I, II, III y IV pueden darse, pues esto dependerá de v_0 y α. Para determinar D podemos considerar cualquier caso. Consideremos el caso I.



Del triángulo rectángulo sombreado, planteamos que la separación entre los proyectiles es

$$D=\sqrt{(H_1-H_2)^2+(d-(d_1+d_2))^2} \qquad \text{(I)}$$

Como los proyectiles en la horizontal es como si experimentasen un M.R.U., se plantea directamente

$$\left.\begin{aligned} d_1&=(v_0\cos\alpha)t \\ d_2&=(v_0\cos\beta)t \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_1+d_2=v_0t(\cos\alpha+\cos\beta) \qquad \text{(II)}$$

además, en la dirección vertical los proyectiles como que realizan un M.V.C.L., entonces para sus desplazamientos verticales planteamos

$$\left.\begin{aligned} H_1&=v_0\operatorname{sen}\alpha t-\frac{1}{2}gt^2 \\ H_2&=v_0\operatorname{sen}\beta t-\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H_1-H_2=v_0t(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta) \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I) se tiene

$$D=\sqrt{(v_0t(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta))^2+(d-v_0t(\cos\alpha+\cos\beta))^2} \qquad \text{(IV)}$$

Desarrollando, reduciendo y ordenando se obtiene

$$D=\sqrt{d^2+v_0t\underbrace{(2v_0t+2v_0t\cos(\alpha+\beta))-d(\cos\alpha-\cos\beta)}_{(*)}}$$

Según esta expresión, el valor de D depende solo de t ya que v_0, α y β son valores fijos. En tal sentido encontraremos t para el caso que D sea mínimo; pues D será mínimo para el caso que (*) sea cero. Así

$$2v_0t+2v_0t\cos(\alpha+\beta)-d(\cos\alpha-\cos\beta)=0$$

$$\Rightarrow 2v_0t(1+\cos(\alpha+\beta))=d(\cos\alpha-\cos\beta)$$

Aquí, debe recordar o revisar algunas transformaciones trigonométricas, ángulo mitad y paso de diferencia a producto de cosenos, luego se tiene

$$\Rightarrow\ 2v_0t\left(\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)=d\left(\cancel{2}\cos\cancel{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)$$

de donde despejando el tiempo tendremos

$$t=\frac{d\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2v_0\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Reemplazando en (IV)

$$D=\sqrt{\left[v_0\left(\frac{d\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2v_0\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)\right]^2+\left[d-v_0\left(\frac{d\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2v_0\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right)(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)\right]^2}\qquad\text{(V)}$$

Por trigonometría sabemos que

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Al reemplazar en (V) y reducir se obtiene

$$D=\sqrt{\left[d\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]^2+\left[d-d\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]^2}$$

$$D=\sqrt{d^2\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+d^2\left[1-\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]^2}$$

$$D=\sqrt{d^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\underbrace{\left(\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right)}_{\text{Identidad vale 1}}}$$

$$\therefore\ D=d\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

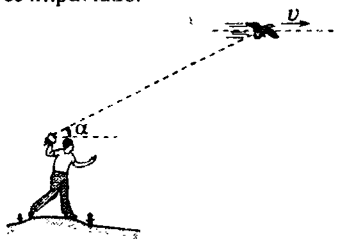
A partir de esta expresión podemos deducir que para que los proyectiles impacten se debe cumplir $D=0$; y para ello $\alpha=\beta$. Esto permite concluir que dos proyectiles lanzados simultáneamente de una superficie horizontal chocarán si sus componentes verticales de sus velocidades de lanzamiento son iguales.

Nota

Otra forma de resolver este problema es utilizando las nociones de movimiento relativo, se podrá rescatar de esto, comparando la resolución que haremos de este problema en el capítulo de movimiento relativo.

Problema 18

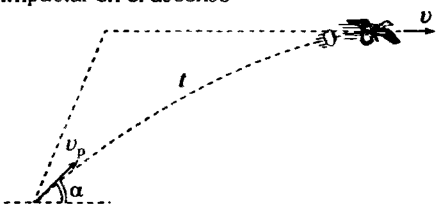
Un pato vuela horizontalmente con velocidad constante y un cazador inexperto le lanza una piedra. En el instante de lanzamiento, la dirección de la velocidad de la piedra está orientada hacia el pato, tal como se muestra. Determine luego de cuántos segundos de haberse lanzado la piedra, el pato es impactado.



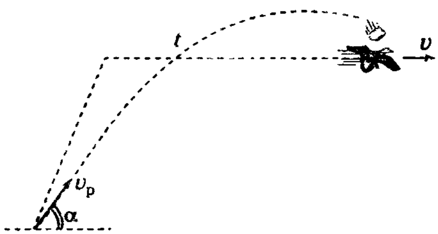
Resolución

Una vez que la piedra es lanzada, ésta realizará un M.P.C.L., mientras que el pato realiza un M.R.U.; Ahora, como la piedra logra impactar en el pato, la trayectoria descrita por la piedra puede ser

- Impactar en el ascenso

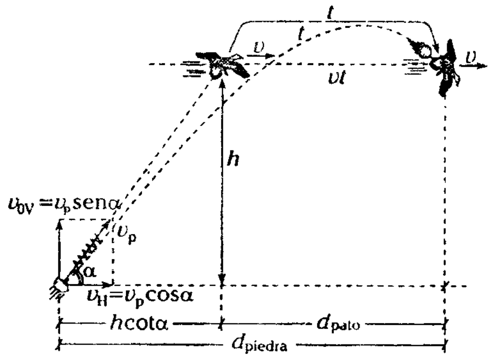


- Impactar cuando ya está descendiendo



Cabe señalar que cada uno de los casos *señalados se puede dar dependiendo de la* rapidez con que se lance la piedra v_p, v y α.

Como nuestro problema es calcular el tiempo t podemos considerar cualquiera de los casos. Consideremos el segundo caso.



De la figura podemos plantear para los desplazamientos horizontales

$$d_{piedra}-d_{pato}=h\cot\alpha$$

Como el pato y la piedra horizontalmente tienen velocidad constante se tendrá

$$v_H t - vt = h\cot\alpha$$

$$(v_p\cos\alpha)t - vt = h\cot\alpha \qquad \text{(I)}$$

Dado que α y v son datos literales t saldrá en función de estos datos, mas no en función de H y v_p, puesto que estas variables la hemos introducido para obtener la relación (I). En tal sentido encontremos v_p y h, para lo cual examinamos el M.P.C.L. de la piedra en la dirección vertical, empleando la siguiente ecuación vectorial:

$$\Rightarrow \quad \vec{h}=\vec{v}_{0V}t+\frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

se tiene $h=v_p\,\text{sen}\,\alpha t-\frac{g}{2}t^2$

Multiplicando miembro a miembro por $\cot\alpha$

$$h\cot\alpha=v_p\cos\alpha t-\frac{g}{2}t^2\cot\alpha \qquad \text{(II)}$$

Ahora, se nota que (I) = (II) entonces tenemos

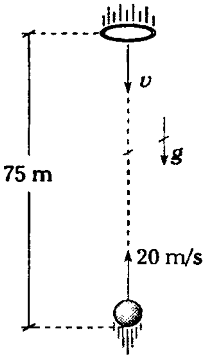
$$v_p\cos\alpha t-vt=v_p\cos\alpha t-\frac{g}{2}t^2\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \quad -vt=-\frac{gt^2}{2}\cot\alpha$$

Resolviendo $t=\dfrac{2v}{g}\tan\alpha$

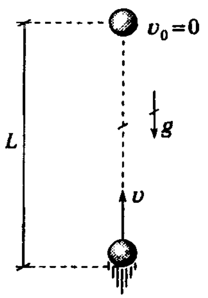
Problemas Propuestos

1. ¿Qué rapidez presenta el anillo en el instante mostrado, si luego de 3 s empieza a cruzar a la esfera lanzada? (Desprecie la resistencia del aire; $g = 10\ m/s^2$)



A) 8 m/s B) 5 m/s C) 2 m/s
D) 10 m/s E) 4 m/s

2. En el instante en que se abandona una canica se lanza otra, tal como se muestra en la gráfica. Si cuando están separadas $L/2$ verticalmente por segunda vez presentan la misma rapidez, determine el recorrido de la canica que se soltó hasta ese instante. (Desprecie la resistencia que ofrece el aire)



A) $3/8L$ B) $2/5L$ C) $3/4L$
D) $7/2L$ E) $1/2L$

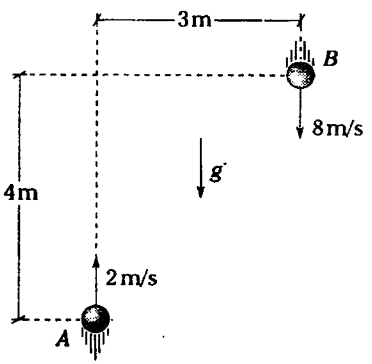
3. Un malabarista hace una demostración en un salón y lanza pelotitas a 1,4 m del piso, verticalmente hacia arriba con intervalos de 0,5 s. Si el máximo número de pelotitas que pueden estar en el aire es 3, determine la mínima altura del salón para dicha demostración. ($g = 10\ m/s^2$)

A) 2,1 m B) 2,05 m C) 2,35 m
D) 2,65 m E) 3,15 m

4. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el borde de un edificio de 240 m de altura. Si luego de 5 s su rapidez se cuadruplica, ¿con qué rapidez impacta en la base del edificio? ($g = 10\ m/s^2$)

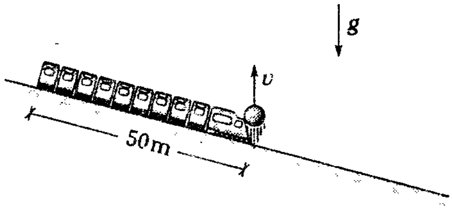
A) 30 m/s B) 40 m/s C) 50 m/s
D) 60 m/s E) 70 m/s

5. Se lanzan las esferas simultáneamente como muestra la figura, ¿luego de cuánto tiempo a partir del instante señalado las esferas estarán separadas 5 m por segunda vez? (Desprecie la resistencia del aire; considere $g = 10\ m/s^2$)



A) 0,2 s B) 0,4 s C) 0,6 s
D) 0,8 s E) 1 s

6. En la figura, el tren a partir del instante mostrado inicia su movimiento realizando un M.R.U.V. con $4 m/s^2$. Si desde la parte delantera lanzamos verticalmente hacia arriba una pelota, determine la rapidez máxima con que podría ser lanzada para que caiga sobre el tren. ($g = 10 m/s^2$)



A) 10 m/s B) 15 m/s C) 25 m/s
D) 40 m/s E) 45 m/s

7. Del borde de un pozo de 125 m de profundidad, un niño suelta piedras a razón de una piedra por segundo. En el instante en que suelta la primera piedra, una persona ubicada en el fondo del pozo, lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una rapidez de 50 m/s. Determine el número de piedras que soltó el niño hasta el instante que el objeto se cruza con la segunda piedra. ($g = 10 m/s^2$)

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

8. Una copa de vidrio es soltada desde cierta altura respecto del piso y luego de 4,25 s se escucha el sonido del impacto. ¿Con qué rapidez se debe lanzar verticalmente hacia abajo a la copa para que el tiempo en que se escucha el sonido sea 2 segundos menos? (Considere $g = 10 m/s^2$; $v_{sonido} = 320 m/s$)

A) 10 m/s B) 18 m/s C) 21 m/s
D) 24 m/s E) 30 m/s

9. Una esfera fue soltada desde cierta altura y en el 7^{mo} segundo de su caída recorre 1/13 de su recorrido total. ¿Qué rapidez presenta en el instante que golpea el piso? ($g = 10 m/s^2$)

A) 100 m/s B) 110 m/s C) 130 m/s
D) 150 m/s E) 160 m/s

10. Un cohete despega desde la superficie terrestre con una aceleración constante de $10 m/s^2$. Después de 10 s se agota el combustible y el cohete se sigue elevando en caída libre. Determine el tiempo que transcurre desde que se acaba el combustible hasta que impacta en la superficie. ($g = 10 m/s^2$)

A) 12,4 s B) 10 s C) 16,2 s
D) 20 s E) 24,1 s

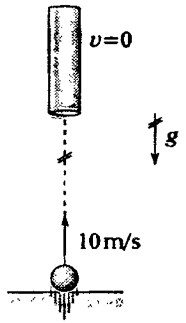
11. Una piedra fue lanzada verticalmente hacia arriba, luego de cierto tiempo pasa frente a una ventana de 2 m de altura que se encuentra a 4 m de la trayectoria de la piedra. Si una persona al otro lado en el centro de la ventana (a 1 m de distancia) ve a la piedra durante 1 s, ¿qué tiempo transcurre hasta que la persona vuelve a ver la piedra? ($g = 10 m/s^2$)

A) 0,5 s B) 1 s C) 1,5 s
D) 2 s E) 3 s

12. En un planeta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra, de tal manera que en el tercer y cuarto segundo, recorre 21 m y 15 m, respectivamente. ¿Con qué rapidez fue lanzado?

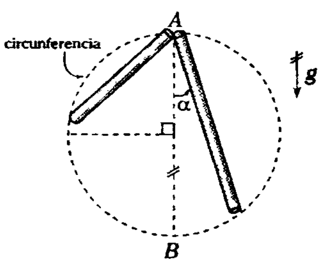
A) 12 m/s B) 18 m/s C) 20 m/s
D) 28 m/s E) 36 m/s

13. Se tiene un tubo en posición vertical, que va a ser soltado desde cierta altura y en ese mismo instante una pequeña esfera es lanzada tal como se muestra. Si luego de 0,6 s del lanzamiento, este logra atravesar completamente el tubo; determine la longitud del tubo. La esfera permanece dentro del tubo durante 0,1 s.
(g = 10 m/s²)



A) 1,6 m B) 0,4 m C) 0,5 m
D) 0,8 m E) 1 m

14. A dos canicas se les abandona simultáneamente sobre las boquillas de dos tubos lisos, tal como se muestra en el gráfico. ¿En qué relación están los tiempos que emplean las canicas en recorrer la longitud de los tubos? (AB: diámetro)



A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) falta α

15. Un globo aerostático asciende verticalmente con rapidez constante de 10 m/s. Si el tripulante del globo lanza verticalmente hacia arriba una piedra y luego de 2 s la ve pasar frente a él, ¿cuánto recorre la piedra hasta ese instante? (g = 10 m/s²)

A) 20 m B) 15 m C) 10 m
D) 5 m E) 25 m

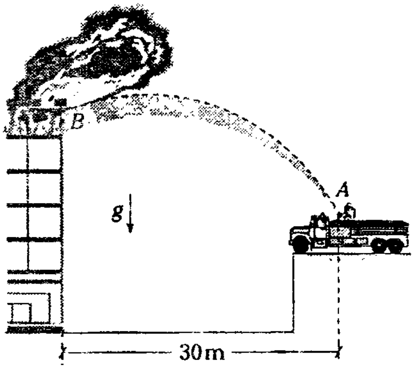
16. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez de 60 m/s desde la azotea de un edificio de 50 m. Si luego de 3 s desde la base del edificio y sobre la misma vertical de la primera se lanza verticalmente una segunda piedra con 30 m/s, ¿qué distancia separa a las esferas, cuando la primera piedra ha alcanzado su altura máxima? (g = 10 m/s²)

A) 120 m B) 135 m C) 132 m
D) 185 m E) 142 m

17. Un futbolista, luego de driblear al arquero, se encuentra a 6 m frente al arco de 2,5 m de altura. Si en ese instante lanza el balón con una rapidez de 10 m/s y bajo un ángulo de 53° respecto a la horizontal, ¿anotará el gol? (g = 10 m/s²)

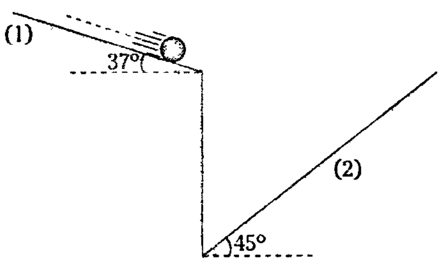
A) No, la pelota choca en el parante superior.
B) No, la pelota pasa por encima del parante superior.
C) Sí, la pelota cae dentro del arco.
D) Sí, la pelota impacta en el piso antes de ingresar al arco y luego de rebotar ingresa.
E) No se puede precisar.

18. Para apagar el fuego en el punto B, se lanza agua con una manguera inclinada 53° respecto de la horizontal. Si el chorro llega en 2 s a su objetivo, ¿cuál es la distancia entre A y B? ($g = 10\,m/s^2$)



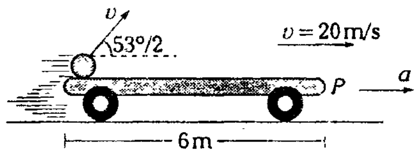
A) 40 m B) $10\sqrt{13}$ m C) 60 m
D) $30\sqrt{5}$ m E) $30\sqrt{2}$ m

19. La esfera desciende sobre el plano inclinado (1), luego impacta perpendicularmente en el plano inclinado (2) con una rapidez de $30\sqrt{2}$ m/s. Determine a qué distancia del lugar que abandona al plano (1) logra impactar en el plano inclinado (2). ($g = 10\,m/s^2$)



A) 14,2 m B) 29,9 m C) 36,75 m
D) 42,18 m E) 53,15 m

20. Se muestra una plataforma que experimenta M.R.U.V. con $a = 2\,m/s^2$ para el instante mostrado. Si de la plataforma sale un proyectil en la dirección que se indica y con una rapidez de $v = 5\sqrt{5}$ m/s (respecto de la plataforma), ¿a qué distancia de P impacta el proyectil? ($g = 10\,m/s^2$)

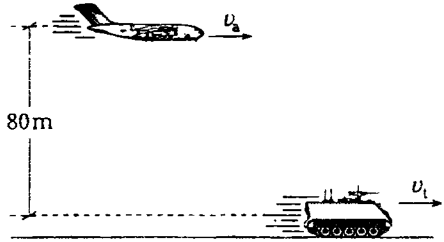


A) 0 B) 2 m C) 4 m
D) 1 m E) 3 m

21. Calcule la relación entre las máximas alturas alcanzadas por un proyectil que en un primer caso es lanzado bajo un ángulo α y en un segundo caso bajo un ángulo que es el complemento de α. En ambos casos se le lanza con la misma rapidez.

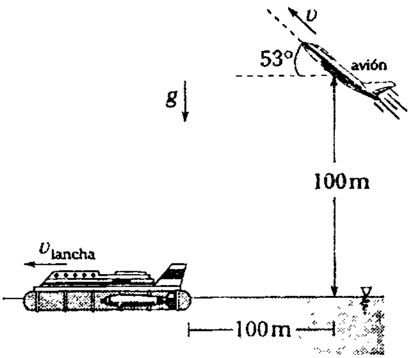
A) $\tan^2\alpha$ B) $\text{sen}^2\alpha$ C) $(1+\cos\alpha)^2$
D) $\cos^2\alpha$ E) $\text{sen}^2\alpha$

22. El gráfico muestra un avión y un tanque que desarrollan un M.R.U. con rapidez de 42 m/s y 27 m/s respectivamente. Determine a qué distancia del tanque, el avión debe soltar una bomba para poder destruir el tanque. ($g = 10\,m/s^2$)



A) 60 m B) 70 m C) 90 m
D) 100 m E) 120 m

23. Para el instante que se muestra, desde el avión se suelta un proyectil con la intención de hundir la lancha torpedera, que experimenta M.R.U. con una rapidez de 72 km/h; determine v, si el avión logra su objetivo.
$(g = 10\ m/s^2)$



A) 40 m/s B) 50 m/s C) 60 m/s
D) 70 m/s E) 80 m/s

24. Desde una misma posición en un plano inclinado α° respecto de la horizontal, se lanza una partícula en forma perpendicular al plano inclinado y otra partícula se suelta en forma simultánea. Si las partículas logran impactar determine la mayor separación entre ellas durante su movimiento. (Considere g: aceleración de la gravedad)

A) $\dfrac{v^2}{2g}$ B) $\dfrac{v^2}{2g\ \text{sen}\alpha}$

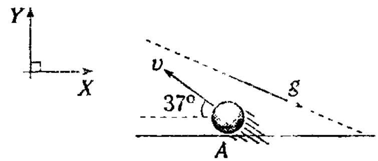
C) $\dfrac{v^2}{g\ \text{tg}\alpha}$

D) $\dfrac{v^2}{2g\cos\alpha}$ E) $\dfrac{v^2}{g(\text{sen}\alpha+\cos\alpha)}$

25. Desde el origen de un sistema de coordenadas $X-Y$ se lanza un proyectil con cierto angulo de elevación para dar en un blanco ubicado en la posición (3; 4) m. Determine la rapidez mínima con la cual se debe lanzar el proyectil para lograr su objetivo.
$(g = 10\ m/s^2)$

A) $4\sqrt{5}$ m/s B) $2\sqrt{3}$ m/s C) $3\sqrt{10}$ m/s
D) $2\sqrt{5}$ m/s E) $\sqrt{10}$ m/s

26. En la superficie de cierto planeta, la aceleracion de la gravedad es $\vec{g}=[4\hat{i}-2\hat{j}]\,m/s^2$. Determine la velocidad de la pequeña esfera lanzada en A luego de 5 s de su lanzamiento.
$(v = 25\ m/s)$



A) $+2\hat{j}$ m/s B) $+5\hat{j}$ m/s

C) $[+2\hat{i}+5\hat{j}]$ m/s

D) $[-2\hat{i}-5\hat{j}]$ m/s E) $-4\hat{i}$ m/s

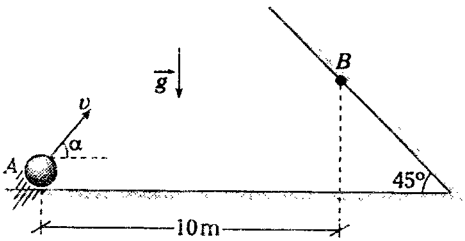
27. Un proyectil se lanza desde el origen de un sistema de coordenadas $X-Y$ con una velocidad $[a;a]$ m/s. Determine la ecuación de la recta de mayor pendiente positiva que corte la trayectoria del proyectil en dos puntos, si uno de ellos es la posición de altura máxima.

A) $y=4x+1$ B) $y=2x+1$

C) $y=\dfrac{1}{2}x$

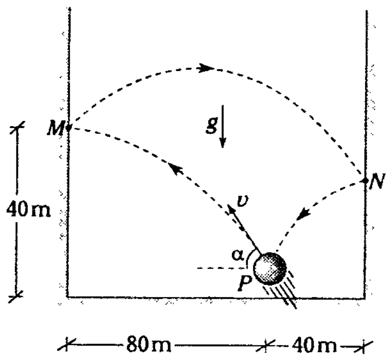
D) $y=\dfrac{x}{2}+1$ E) $y=x$

28. Se muestra el instante en que un proyectil es lanzado desde la posición A. Si se desea que pase rozando por la pared inclinada en el punto B, ¿cuál debe ser la rapidez necesaria? $(g=10\text{m/s}^2)$



A) 7,27 m/s B) 8,62 m/s C) 8,93 m/s
D) 9,54 m/s E) 9,10 m/s

29. Se muestra en el gráfico la trayectoria descrita por un objeto lanzado en la posición P. Si los impactos con las paredes en M y N son elásticos; determine la medida del ángulo α. (No tome en cuenta el tiempo durante las colisiones y considere $g=10$ m/s^2).



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

30. Dos proyectiles son lanzados con la misma rapidez de 110 m/s pero con un cierto intervalo de tiempo Δt; el primero se lanzó bajo un ángulo de 60° y el segundo bajo un ángulo de 53°. Halle Δt aproximadamente con la condición de que los proyectiles choquen durante el vuelo.

A) 1,4 s B) 3,2 s C) 6,1 s
D) 2,4 s E) 4,8 s

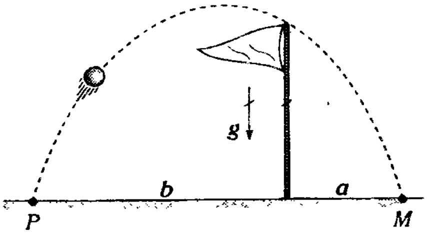
31. Una granada lanzada verticalmente con gran rapidez, al llegar al punto más alto de su trayectoria explota en 4 fragmentos, los cuales se dispersan sobre el mismo plano vertical con igual rapidez pero en direcciones opuestas y mutuamente perpendiculares por pareja de fragmentos. ¿Qué figura se formará en cualquier instante posterior al estallido al unir todos los fragmentos?

A) Un cuadrilátero cualquiera.
B) Un paralelogramo.
C) Un trapecio.
D) Un cuadrado.
E) Un rombo.

32. Un niño de 1,5 m de estatura está parado a 15 m frente a una cerca de 5 m de altura. Si lanza una canica bajo un ángulo de 45° con la horizontal, ¿con qué mínima rapidez debe lanzar la canica para que esta pase por encima de la cerca?

A) 17,5 m/s B) 14,5 m/s C) 13,8 m/s
D) 11,4 m/s E) 9,6 m/s

33. En la figura se muestra el trayecto que sigue una pelota de golf que ha sido lanzada desde P. Si dicha pelota pasa rozando la parte más alta del banderín de altura h para luego impactar en M, determine la altura máxima que alcanza la pelota (desprecie resistencia del aire sobre la pelota).

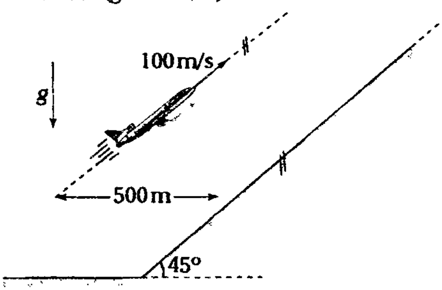


A) $\frac{(b+2a)^2}{2ab}h$ B) $\frac{(b+a)^2}{4ab}h$

C) $\frac{(2b+a)^2}{4ab}h$

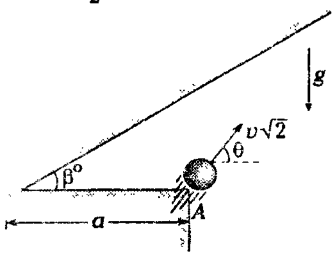
D) $\frac{(b-a)^2}{2ab}h$ E) $\frac{(2b-a)^2}{2ab}h$

34. En el instante mostrado, desde el avión se suelta un objeto con el propósito de impactar en un blanco sobre el plano inclinado. Si se logra dicho objetivo, ¿a qué distancia del lugar que se suelta la bomba se encontraba el blanco? ($g=10$ m/s^2)



A) 800 m B) 847,93 m C) 707,10 m
D) 736,81 m E) 593,74 m

35. Determine el máximo valor de a, de tal forma que la esfera lanzada de A, logre experimentar su máximo alcance horizontal; considere que la componente vertical de la velocidad cuando la esfera se encuentra lo más cerca posible de la pared inclinada es de módulo $\frac{v}{2}$. (g = 10 m/s^2)



A) $\frac{v^2}{g}$ B) $\frac{v^2}{2g}$ C) $\frac{v^2}{4g}$

D) $\frac{v^2}{5g}$ E) $\frac{v^2}{8g}$

36. La prueba de la espoleta de una granada de fragmentación se realiza en el centro del fondo de un pozo cilíndrico de profundidad h. Si los fragmentos que se forman durante la explosión y cuyas velocidades no sobrepasan v_0 no deben caer en la superficie de la tierra, ¿cuál debe ser el mínimo radio del pozo?

A) $\frac{v_0^2}{g}\sqrt{v_0^2-2gh}$

B) $\frac{v_0^2}{2g}\sqrt{v_0^2-2gh}$

C) $\frac{v_0^2}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}$

D) $\frac{2v_0^2}{g}\sqrt{v_0^2-2gh}$

E) $\frac{v_0^2}{2g}\sqrt{v_0^2+2gh}$

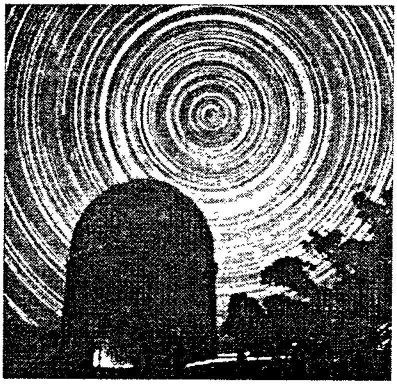
CLAVES

1	B	13	E	25	D
2	A	14	B	26	B
3	D	15	A	27	C
4	E	16	D	28	E
5	D	17	B	29	C
6	C	18	B	30	D
7	C	19	B	31	D
8	E	20	C	32	C
9	C	21	A	33	B
10	E	22	A	34	D
11	B	23	B	35	C
12	E	24	D	36	A

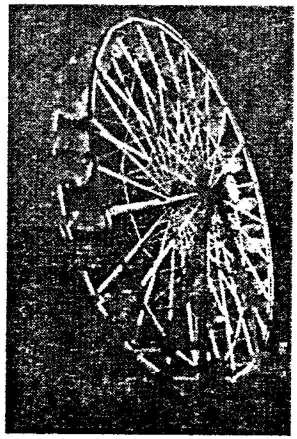
CAPÍTULO

V

Movimiento circunferencial



(a)



(b)

El movimiento circunferencial es un movimiento que se presenta con bastante regularidad ante nosotros, las fotografías reflejan ello. **Fig. (a)** Es una exposición de 5 horas tomadas con una cámara que apuntaba a la estrella polar, los círculos muestran el movimiento aparente de las estrellas. Este movimiento circunferencial es el que indujo a los griegos a pensar que las estrellas están fijas sobre unas esferas que rotan alrededor de la Tierra. **Fig. (b)** Nos muestra el movimiento rotacional que se puede observar en un centro de recreación.

LECTURA

EL ENIGMA DE LA RUEDA DEL CARRO

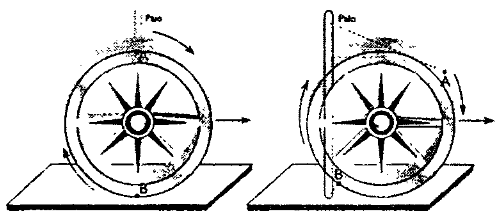
Peguemos a la llanta de la rueda de un carro (o de una bicicleta) un papel de color y fijémonos en él cuando se mueva el carro (o la bicicleta). Notaremos un fenómeno extraño: al girar la rueda, el papel se ve bastante bien mientras se encuentra en la parte inferior de la misma, pero su paso por la parte superior es tan fugaz, que no da tiempo a distinguirlo.

Da la sensación de que la parte superior de la rueda se mueve más de prisa que la inferior. Este mismo fenómeno se puede observar comparando entre sí los radios superiores e inferiores de las ruedas de cualquier carruaje. Se notará que los radios superiores se corren y confunden, como si formaran uno solo y continuo, mientras que los inferiores se distinguen aisladamente. En este caso también parece que la parte superior de la rueda se mueve más de prisa que la inferior.

¿En qué consiste el secreto de este fenómeno tan extraño? Muy sencillo; en que la parte superior de la rueda se mueve efectivamente más de prisa que la inferior. Este hecho parece inverosímil a primera vista, pero bastará un simple razonamiento para convencernos de su realidad. Es el caso, que cada punto de la rueda realiza simultáneamente dos movimientos: uno de rotación, alrededor de su eje, y otro de avance, junto con este mismo eje. Tiene lugar, pues, lo mismo que en el caso de la esfera terrestre, una combinación de dos movimientos, pero el resultado de esta combinación es diferente para las partes inferior y superior de la rueda. En la parte superior, el movimiento de rotación de la rueda se suma al de avance, ya que estos dos movimientos van en el mismo sentido. En la parte inferior, al revés, el movimiento de rotación tiene dirección contraria al de avance y, por consiguiente, se resta de este último.

He aquí por qué la parte superior de la rueda se mueve más de prisa, con relación a un observador fijo, que la parte inferior de la misma.

Para demostrar que esto efectivamente es así, puede hacerse un sencillo experimento. Hinquemos un palo junto a la rueda de un carro parado, de manera, que quede frente al eje de aquélla. En la parte más alta y más baja de la rueda, hagamos con tiza unas señales de referencia. Estas señales se encontrarán también enfrente del palo. Hecho esto, desplacemos el carro hacia la derecha, hasta que el eje de la rueda se aleje del palo unos 20 ó 30 centímetros, y observemos cómo se han desplazado las señales de referencia. Está claro, que la señal superior A ha experimentado un avance mucho mayor que el de la señal inferior B, la cual apenas si se ha separado del palo.



Demostración de que la parte superior de la rueda se mueve más de prisa que la inferior. Compárese la distancia entre los puntos A y B de la rueda móvil (dibujo de la derecha) con respecto al palo fijo.

FUENTE: Física Recreativa. Tomo I. AUTOR: Y. Perelman. Pág.: 22 Tomo I

Movimiento circunferencial

OBJETIVOS

- Describir el movimiento circunferencial.
- Establecer los conceptos de velocidad angular y aceleración angular.
- Conocer las características de un M.C.U. y un M.C.U.V.
- Establecer los conceptos de aceleración tangencial, aceleración centrípeta y aceleración total.
  Describir un movimiento curvilíneo en un plano.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza, se observan movimientos cuyas trayectorias no son líneas rectas, sino curvas; semejantes movimientos reciben el nombre de **movimientos curvilíneos**. Los planetas y los satélites se mueven en el espacio describiendo trayectorias curvilíneas mientras que toda clase de medios de transporte, elementos de las máquinas y mecanismos en general describen también trayectorias curvas.

Nuestro satelite natural sigue aproximadamente una circunferencia alrededor de la Tierra.

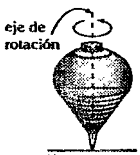
La solución de los problemas para el movimiento curvilíneo presenta mayores dificultades en comparación con los movimientos rectilíneos debido a que el análisis del movimiento ya no se hace en una línea recta, sino en un plano (como ocurrio con el movimiento parabólico de caída libre, que ya hemos estudiado) y en general el análisis se hace en el espacio donde varían la posición, la velocidad (en módulo y dirección) y la aceleración (también en módulo y dirección), quedará claro hasta qué grado el movimiento curvilíneo es más complicado que el movimiento rectilíneo.

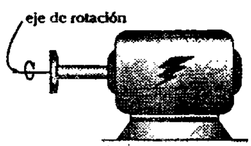
El caso más simple de un movimiento curvilíneo es el **movimiento circunferencial**, el cual se conoce y utiliza desde la antigüedad. Por ejemplo, Aristóteles afirmaba que el Sol, la Luna y los planetas giraban en torno a la Tierra con movimiento circunferencial uniforme y que este era eterno, perfecto e inmutable. Posteriormente Ptolomeo planteó que los planetas, el Sol y la Luna giraban en pequeñas circunferencias cuyos centros giraban a su vez alrededor de circunferencias mucho más grandes que tenían su centro en la Tierra. De esta manera vemos cómo el movimiento circunferencial fue de gran utilidad cuando el hombre intentaba dar una explicación al funcionamiento del Universo.

El movimiento circunferencial forma parte del movimiento más amplio: el movimiento rotacional, que es, por naturaleza, el movimiento más adecuado para diversos mecanismos que el hombre construye como los engranajes para los relojes, motores y diversas máquinas. Empezaremos el capítulo haciendo una distinción entre el movimiento circunferencial y el movimiento rotacional, para luego pasar al estudio de dos tipos simples de movimiento circunferencial: el movimiento circunferencial uniforme y el movimiento circunferencial uniformemente variado, con esto se tendrán elementos básicos para poder luego analizar, con mayor facilidad, el movimiento curvilíneo en un plano, cualquiera sea su trayectoria.

MOVIMIENTO ROTACIONAL Y MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

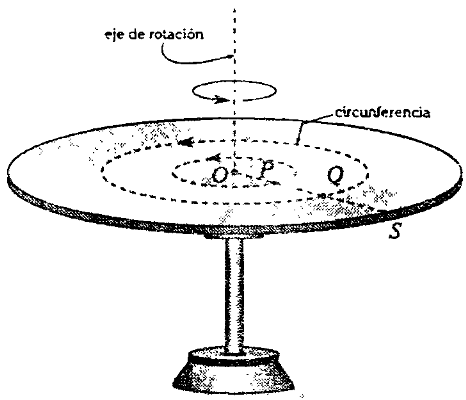
En nuestra vida cotidiana podemos observar movimientos que tienen características en común, tales como el movimiento de los álabes de un ventilador o el movimiento de las plataformas en los juegos mecánicos, también el movimiento de un trompo o el movimiento que adquiere una polea acoplada al eje de un motor.



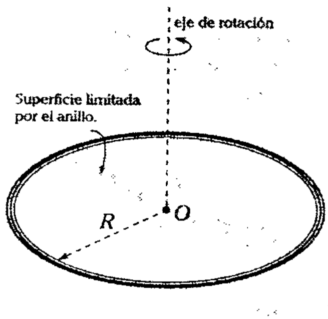


El movimiento de los cuerpos ya indicados se realiza en torno a un eje; cuando ocurre esto, se dice que cada uno de ellos experimenta un **movimiento rotacional.** En este movimiento, las partículas de cada cuerpo realizan trayectorias circunferenciales cuyos centros están ubicados a lo largo del eje de rotación. Tener presente que las únicas partículas que permanecen en dicho eje no describen trayectorias circunferenciales.

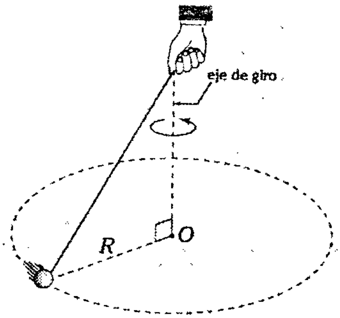
Por ejemplo, a continuación se muestra a un disco que experimenta movimiento rotacional respecto del eje indicado, de tal manera que las partículas P, Q y S pertenecientes al disco describen circunferencias respecto del eje, el cual permanece fijo. Entonces, decimos que las partículas P, Q y S experimentan, cada una, un **movimiento circunferencial.**



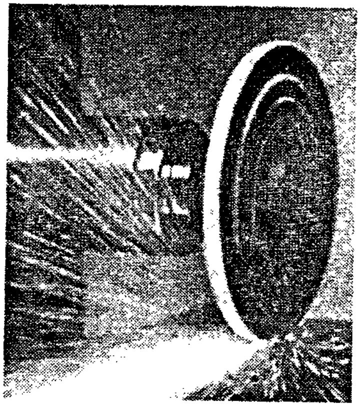
Se habla de movimiento rotacional para el movimiento de todo el cuerpo en torno a un eje y de movimiento circunferencial para cada partícula del cuerpo cuyo centro es un punto de dicho eje[1]. En adelante se analizará solo el movimiento circunferencial, pero los conceptos y conclusiones que se obtengan también se pueden aplicar al movimiento rotacional, ya que, como se ha visto, están muy relacionados.



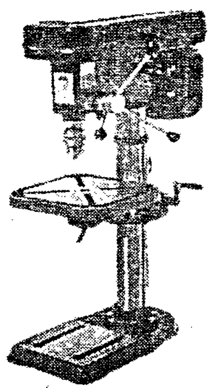
Se dice que un cuerpo rota cuando su eje de rotación pasa por el cuerpo o por la superficie limitada por él, como en el caso del anillo



Se dice que un cuerpo gira cuando su eje de giro no pasa por el cuerpo, tal como el movimiento de la esfera.



El disco experimenta movimiento de rotación (pura), mientras que sus puntos periféricos un movimiento cirunferencial. Éste esmeril de banco realiza aproximadamente 3450 R.P.M.

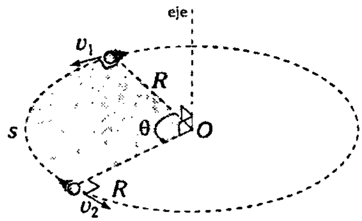


En este taladro de banco se muestran las múltiples rotaciones que se pueden aprovechar. La broca realiza aproximadamente 3000 R.P.M.

(1) Esto es correcto siempre que el cuerpo sea rígido. Un **cuerpo rígido** es aquel que no experimenta deformación alguna durante un determinado fenómeno, por ejemplo, el movimiento de rotación. Para esto la distancia entre las partículas que lo forman debe ser siempre constante.

ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

Consideremos el análisis del movimiento circunferencial de una partícula del disco de nuestro ejemplo anterior.



Algunos de los elementos geométricos asociados con el movimiento de esta partícula son

RADIO DE GIRO (R)

Es el segmento de recta trazado desde el centro de la circunferencia hasta la partícula; su medida es igual al radio de la trayectoria circunferencial con la diferencia que este segmento es móvil, ya que gira a medida que la partícula se mueve. Por ello recibe el nombre de **radio de giro** y su unidad es el metro (m).

ÁNGULO DE GIRO (θ)

Es el angulo que barre el radio de giro de la partícula, por ello se le denomina **ángulo de giro**. Nótese que también es el ángulo central de la circunferencia, siendo su unidad el radián (rad).

LONGITUD DE ARCO (s)

Es la longitud del arco de la circunferencia, el cual coincide con el recorrido de la partícula. Su unidad es el metro (m).

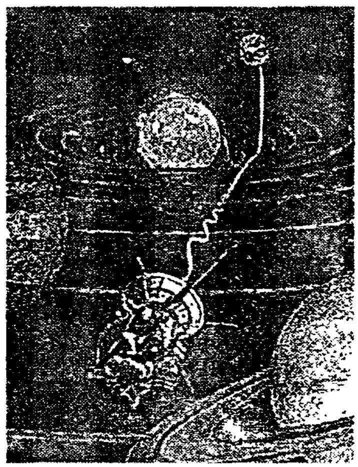
En matemática, existe una relación entre θ, R y s, la cual también se utiliza en cinemática.

$$\boxed{s = \theta R}$$

Unidad: Si θ en rad y R en m

$\Rightarrow$ s en m

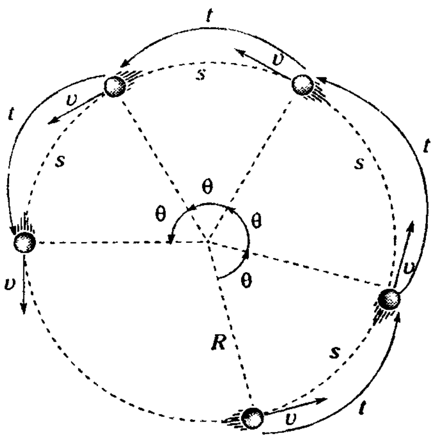
Aparte de los elementos geométricos propios del movimiento circunferencial es necesario recordar otros elementos que sirven para caracterizar cualquier tipo de movimiento mecánico tal como la velocidad $(\vec{v})$, la cual se representa con un vector tangente a la trayectoria; en el caso del movimiento circunferencial será tangente a la circunferencia descrita por la partícula, así como se ha indicado en el gráfico anterior. De acuerdo con la variación que experimenta la velocidad clasificamos a los diversos movimientos, el movimiento circunferencial no es la excepción. Sin embargo, dado que en este movimiento es implícito que los cambios de velocidad siempre se efectúen a lo largo de una circunferencia, la clasificación se basa en la variación del módulo de la velocidad, es decir, en la variación de la rapidez (v).



No sólo los planetas, satélites, cualquier mecanismo o medio de transporte siguen trayectorias curvilíneas, sino, también la luz en su propagación sigue los caminos más cortos a los cuales se les denomina Geodesicas, como se muestra en la figura. Este es un resultado de la teoría general de la relatividad establecida por A. Einstein en 1916.

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME (M.C.U.)

El movimiento circunferencial más simple es el movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.), al igual que en el movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) donde una partícula realiza recorridos iguales en intervalos de tiempos iguales. En el M.C.U. una partícula realiza recorridos iguales (s) en intervalos de tiempo iguales (t), pero ahora, a lo largo de una circunferencia, tal como se muestra.



Debemos tener presente que, al igual que en el M.R.U, en el M.C.U. la rapidez (v) es constante, tal que:

$$\boxed{v=\frac{s}{t}}$$

Unidad: m/s

En este caso en vez de la distancia (d), se considera la longitud de arco (s) que recorre la partícula. Por ejemplo, si la rapidez es v=0,5 m/s, significa que la partícula recorre por la circunferencia un arco de 0,5 m de longitud en cada segundo.

En el M.C.U., la rapidez (v) indica la longitud de arco que la partícula recorre por cada unidad de tiempo.

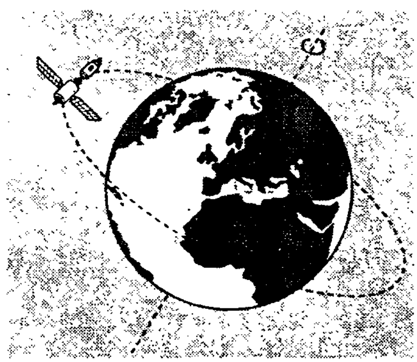
Si la partícula recorre iguales longitudes de arco en iguales intervalos de tiempo, simultáneamente el radio de giro barre ángulos iguales en intervalos de tiempo iguales, como se muestra en la figura anterior. Entonces, hay una rapidez constante con la cual el radio de giro barre ángulos. Esta se denomina **rapidez angular** (ω) y se determina así:

$$\boxed{\omega=\frac{\theta}{t}}$$

Unidad: rad/s

Por ejemplo, si en un M.C.U. la rapidez angular es $\omega = 2$ rad/s ; significa que el radio de giro barre un ángulo de 2 rad en cada segundo.

En el M.C.U., la rapidez angular (ω) indica el ángulo que el radio de giro barre por cada unidad de tiempo.

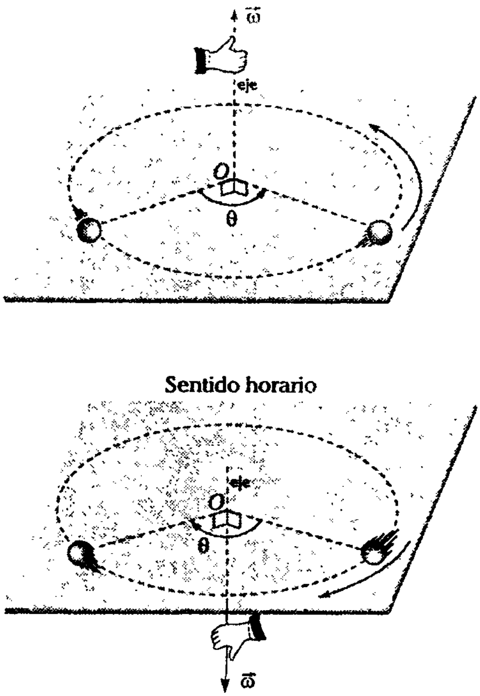


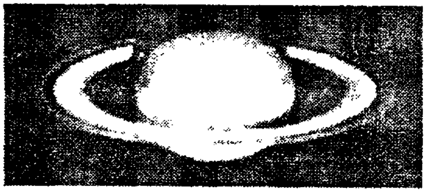
Los satelites artificiales que orbitan alrededor de la Tierra realizan movimientos circunferenciales uniformes (aproximadamente).

Así como la rapidez (v) es el módulo de la velocidad $(\vec{v})$, que es una magnitud vectorial, también la rapidez angular es el módulo de otra magnitud vectorial denominada **velocidad angular** $(\vec{\omega})$: la dirección de esta velocidad se determina de un modo especial. En una línea recta, una partícula solamente puede moverse en dos direcciones, de modo que su velocidad solo puede tener dos posibles direcciones. En un plano, la partícula, si bien puede moverse en varias direcciones solo puede girar en dos posibles sentidos: horario o antihorario. En consecuencia, la velocidad angular solo puede tener dos posibles direcciones que corresponden a los dos sentidos de giro posibles de la partícula; esta dirección se determina con la **regla de la mano derecha**, tal como se indica en el gráfico.

Sentido antihorario

Sentido horario





Los espectaculares anillos de Saturno están conformados por rocas congeladas que aproximadamente siguen un M.C.U. respecto de dicho planeta.

La regla de la mano derecha consiste en *coger* el eje de giro de tal manera que al girar los dedos de la mano derecha en el sentido del movimiento de la partícula, el dedo pulgar indica la dirección de la velocidad angular. Esta dirección es perpendicular al plano de la circunferencia descrita por la partícula.

VELOCIDAD ANGULAR $(\vec{\omega})$

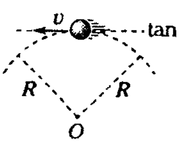
Es una magnitud física vectorial que indica la rapidez y el sentido de giro con la cual el radio barre ángulos centrales.

Para diferenciar la velocidad angular $(\vec{\omega})$ de la velocidad $(\vec{v})$, a esta última se denomina velocidad lineal y a su módulo (v), rapidez lineal. Finalmente, diferenciando estos conceptos, se llega a la siguiente conclusión:

Un movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.), es aquel movimiento donde la velocidad angular y la rapidez lineal son constantes.

Nota

A la velocidad $(\vec{v})$ también se le suele denominar velocidad tangencial $(\vec{v}_T)$ por ser tangente a la trayectoria en cualquier instante.



RELACIÓN ENTRE LA RAPIDEZ LINEAL Y LA RAPIDEZ ANGULAR

La rapidez lineal (v) en el movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.) se determina mediante la relación

$$v=\frac{s}{t}$$

Además se sabe que la longitud de arco (s) recorrida por la partícula está definida por

$$s=\theta R$$

Reemplazando en la expresión anterior se tiene

$$v=\frac{\theta R}{t}$$

donde el cociente θ/t es la rapidez angular (ω), entonces concluimos que

$$\boxed{v=\omega R}$$

Unidades

ω : en radianes (rad)

R : en metros (m)

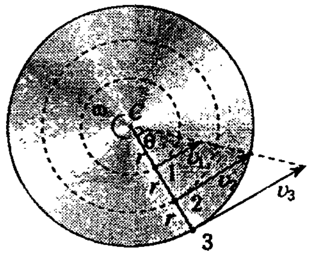
v : en m/s

Lo importante de esta relación es que no solo es válida en el M.C.U. sino que se cumple en todo movimiento circunferencial para cualquier instante de tiempo. Si ω no es constante, tampoco lo será v (R, es constante por tratarse de una circunferencia) y esta relación también la podemos aplicar al movimiento rotacional para cada instante.

A partir de esta importante relación podemos afirmar que a mayor radio de giro (R), mayor será la rapidez lineal (v) ya que en el M.C.U. ω constante se tiene entonces que la rapidez lineal es directamente proporcional al radio de giro.

$$\boxed{v \text{ D.P. } R}$$

Por ejemplo, si consideramos un disco en rotación, sabemos que las partículas del disco desarrollan un movimiento circunferencial.



Durante el mismo intervalo de tiempo, los radios de giro de todas las partículas del disco barren ángulos iguales, por ello experimentan igual rapidez angular, pero aquellas más alejadas del centro de giro por corresponderles mayor radio experimentan mayor rapidez lineal. Considerando las partículas 1, 2 y 3 se tiene

$$\boxed{v_1<v_2<v_3}$$

donde

$$v_1=\omega r\ ;\ \ v_2=\omega(2r)\ \text{ y }\ v_3=\omega(3r)$$

Ejemplo 1

Determine la rapidez angular y lineal de un satélite artificial geoestacionario que órbita alrededor de la Tierra a una altura de 3 600 km respecto de la superficie terrestre, siendo el radio de la Tierra: 6 400 km.

Resolución

El término geoestacionario significa que respecto de la Tierra, el satélite se encuentra en reposo y siempre ubica en un mismo lugar.

Además un satélite geoestacionario gira en el plano ecuatorial de un planeta, tal que el tiempo que demora en dar una vuelta es igual a un día en la tierra.

Dado que por lo general ese tiempo es constante, entonces, la rapidez lineal y angular también son constantes, es decir, el satélite experimenta aproximadamente un M.C.U.; en consecuencia, la rapidez angular se determina según la relación

$$\omega=\frac{\theta}{t} \qquad \text{(I)}$$

En una vuelta $\theta=2\pi$ rad y t = 24 horas el cual puede convertirse en segundos, recordando que 1 hora = 3 600 s.

$$\Rightarrow\ t = 24 \text{ horas} = 24(3\,600 \text{ s}) = 86\,400 \text{ s}$$

Luego, reemplazando en (I)

$$\omega=\frac{2\pi}{86\,400}$$

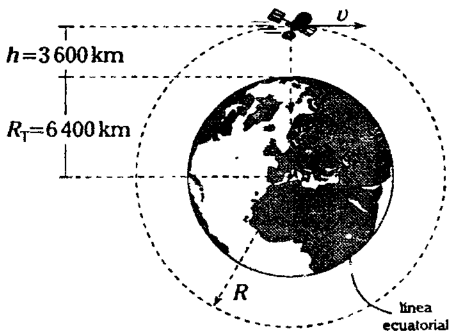
$$\omega=73\times10^{-6}\ \text{rad/s}$$

La rapidez lineal del satélite se relaciona con la rapidez angular según la expresión

$$\upsilon=\omega R$$

$$\Rightarrow\ \upsilon=73\times10^{-6}R \qquad \text{(II)}$$

El radio de giro del satélite (R) se mide desde el centro de la Tierra, considerándola a esta como una esfera.



$$R=R_T+h$$

$$\Rightarrow\ R=6400\text{ km}+3600\text{ km}$$

$$\Rightarrow\ R=10^7\text{ m}$$

Reemplazando en (II)

$$\upsilon=(73\times10^{-6})\,(10^7)$$

$$\therefore\ \upsilon = 730 \text{ m/s}$$

CARACTERÍSTICAS ADICIONALES DEL M.C.U.

Otras dos magnitudes importantes que se usan frecuentemente para describir el movimiento circunferencial son el **periodo y la frecuencia**.

Periodo (T)

En el M.C.U., se denomina periodo al intervalo de tiempo que emplea una partícula en realizar una vuelta, una revolución o un ciclo. Si conocemos el número de vueltas (n) y el tiempo empleado, el periodo se determina así

$$\boxed{T=\frac{\text{tiempo empleado en desarrollar } n \text{ vueltas}}{\text{número de vueltas}}}$$

El periodo siempre será expresado en segundos. Con fines descriptivos, algunas veces el periodo también se da en segundos por revolución (s/rev) o en segundos por ciclos (s/ciclo).

Ejemplo 2

Si una partícula periférica de una polea, que rota con velocidad angular constante, realiza 10 vueltas en un minuto; determine su periodo.

Resolución

Se sabe que un minuto equivale a 60 segundos, y en ese tiempo la partícula ha realizado 10 vueltas. Esto implica que en 6 segundos la partícula habrá realizado una vuelta. Luego su periodo de rotación será T=6 s.

Otra forma, es haciendo uso de la fórmula indicada para el periodo.

$$T=\frac{\text{tiempo empleado en } n \text{ vueltas}}{\text{número de vueltas}}=\frac{1\text{ min}}{10}=\frac{60\text{ s}}{10}$$

$$\therefore\ T=6\text{ s}$$

Frecuencia (f)

Es una magnitud física escalar que nos expresa el número de vueltas, revoluciones o ciclos que realiza una partícula, por cada unidad de tiempo al desarrollar un M.C.U.

En consecuencia

$$\boxed{f=\frac{\text{número de vueltas }(n)}{\text{tiempo empleado en dar }n\text{ vueltas}}}$$

Es común dar la frecuencia en ciclos por segundo (cps) o revoluciones por segundo (R.P.S.) y en otros casos en revoluciones por minuto (R.P.M.). El número de vueltas, revoluciones y los ciclos son términos descriptivos que en consecuencia no tienen unidad, por ello la unidad de frecuencia, es 1/s o s^{-1} y se le denomina **Hertz (Hz)**.

La frecuencia y el periodo están relacionados. Dadas las relaciones para determinarlas y las unidades que se maneja para cada una, se deduce que son magnitudes inversas, tal que

$$\boxed{f=\frac{1}{T}}$$

La frecuencia es la inversa del periodo y viceversa.

El periodo y la frecuencia también se pueden relacionar con la rapidez angular. En una vuelta el radio de giro barre un ángulo $\theta=2\pi$ rad y el tiempo que emplea en una vuelta es justamente el periodo, entonces

$$\boxed{\omega=\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{T}=2\pi f}$$

Ejemplo 3

Si las llantas de un automóvil tienen una frecuencia de 120 R.P.M., determine la rapidez angular de dichas llantas.

Resolución

La frecuencia es 120 R.P.M. esto es equivalente a decir que las llantas dan 120 revoluciones (vueltas) en un minuto y que este es igual a 60 segundos. Luego se usa la fórmula indicada para la frecuencia.

$$f=\frac{\text{número de vueltas}}{\text{tiempo empleado en }n\text{ vueltas}}$$

$$f=\frac{120\text{ vueltas}}{60\text{ s}}=2\text{ Hz}$$

Esto significa 2 vueltas por cada segundo, además $\omega=2\pi f$

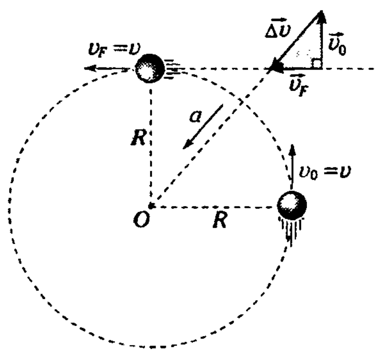
Por consiguiente, obtenemos $\omega=2\pi(2)$

$\therefore\ \omega=4\pi\text{ rad/s}$

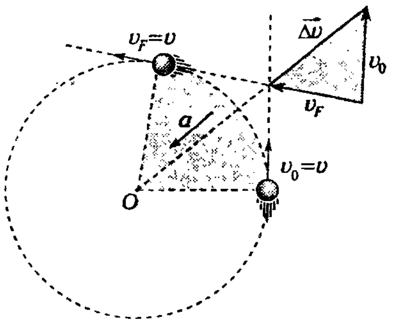
ACELERACIÓN CENTRÍPETA

En un M.C.U. la velocidad en módulo se mantiene constante, sin embargo, continuamente cambia de dirección, por ello decimos que la velocidad es variable y debido a esta variación concluimos que el móvil experimenta aceleración.

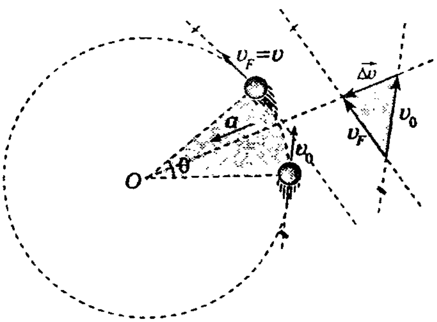
¿Cómo se determina la aceleración durante un M.C.U.? Sabemos que la aceleración se debe al cambio que experimenta la dirección de la velocidad. Consideremos el análisis del siguiente caso:



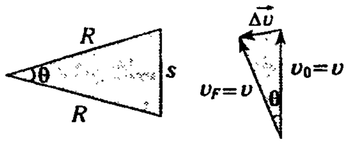
Usando el cálculo vectorial, se observa que existe un cambio en la velocidad $(\Delta\vec{v})$ entonces, hay una aceleración $(\vec{a})$, que como sabemos tiene igual dirección que dicho cambio de velocidad. Ahora consideramos estos cambios en un intervalo de tiempo menor, tal como se muestra



Que la aceleración sigue apuntando al centro de giro (O), para un intervalo de tiempo muy pequeño, cercano a cero, es decir, para un instante de tiempo, la aceleración también está dirigida hacia el centro de giro, tal como se indica



Esta aceleración viene a ser la aceleración instantánea para el M C.U. y como está dirigida hacia el centro se denomina **aceleración centrípeta**[2] $(\vec{a}_{cp})$.



El módulo de la aceleración centrípeta se puede deducir de los pequeños triángulos sombreados de la figura anterior (para $\Delta t \to 0$ la longitud de arco (s) que se aproxima a un segmento recto). Estos dos triángulos son semejantes, pues cada uno tiene dos lados iguales que definen el ángulo θ, entonces se establece la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{s}{R}}$$

Si a lo largo de la circunferencia la rapidez (v) es constante, entonces

$$s=v\Delta t$$

Reemplazando en la primera relación

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v}=\frac{v\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}=\frac{v^2}{R}$$

Pero el cociente $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$ viene a ser el módulo de la aceleración centrípeta, por lo tanto

$$\boxed{a_{cp}=\frac{v^2}{R}}$$

Unidades

v : en m/s

R : en m

a_{cp} : en m/s^2

Si $v=\omega R$, entonces también tendremos

$$\boxed{a_{cp}=\omega^2 R}$$

Unidades

ω : en rad/s

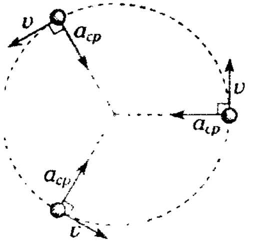
R : en m

a_{cp} : en m/s^2

(2) Palabra compuesta por las palabras CENTRI, que significa centro y la palabra latina PETRE, que significa ir o dirigir; entonces, CENTRÍPETA se refiere a algo que atrae, dirige o impele hacia el centro.

¿Qué es la aceleración centrípeta?

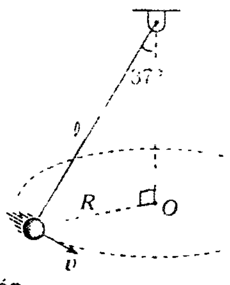
Es aquella aceleración que experimenta un cuerpo en movimiento circunferencial y está dirigida hacia el centro de la circunferencia; nos expresa la rapidez con que tienden a producirse los cambios de velocidad los cuales están orientados hacia el centro de la circunferencia.



En el M.C.U. el módulo de la aceleración centrípeta es constante, pero su dirección varía continuamente. También se suele decir que la $\vec{a}_{cp}$ determina la rapidez con la cual cambia la dirección de la velocidad

Ejemplo 4

La esfera pequeña atada a un hilo de 0,5 m describe un movimiento circunferencial en un plano horizontal. Determine el periodo de su movimiento, si su aceleración centrípeta tiene un módulo constante de 30 m/s



Resolución

Una aceleración centrípeta de módulo constante en un movimiento circunferencial implica que la rapidez angular (ω) también es constante, de acuerdo con la relación

$$a_{cp} = \omega^2 R \qquad \text{(I)}$$

Entonces la esfera describe un M.C.U. do el tiempo que emplea en dar una vuelta es conte es el periodo (T).

En un M.C.U. como ya se demostró

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(}$$

La rapidez angular se puede determinar la relación (I) ya que son datos a_{cp} = 30 m/s el radio se puede obtener del gráfico

$$R = \ell \operatorname{sen} 37° = 0{,}5\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \quad R = 0{,}3 \text{ m}$$

Reemplazando en (I)

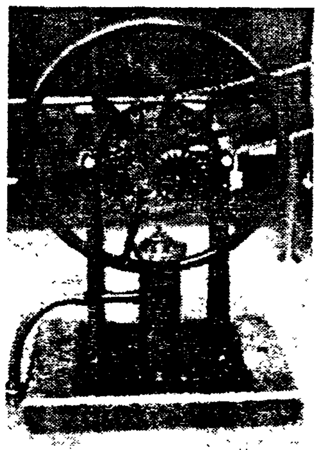
$$30 = \omega^2(0{,}3)$$

$$\therefore \quad \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Reemplazando en (II)

$$T = \frac{2\pi}{10}$$

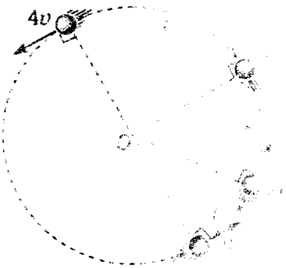
$$\therefore \quad T = 0{,}2\pi \text{ s}$$



El desarrollo de la técnica y la producción hicieron que se aplicara el movimiento rotacional, mediante engranajes, a la fabricación de diferentes mecanismos, como el de la fotografía, que es un sistema de engranajes acoplado a una bomba de agua

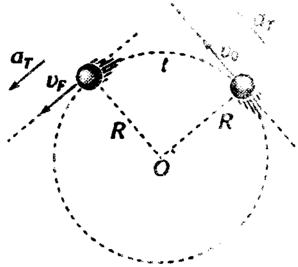
MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO (M.C.U.V.)

En forma análoga al M.R.U.V. donde una partícula efectúa iguales cambios de rapidez en iguales intervalos de tiempo a lo largo de una recta, también en el M.C.U.V. una partícula realiza iguales cambios de rapidez tangencial en iguales intervalos de tiempo (t). Es decir, la rapidez tangencial varía uniformemente, pero en este caso, a lo largo de una circunferencia tal como se indica a continuación



La partícula cambia su rapidez en un valor υ cada vez que transcurre un tiempo t.

Tenga presente que la partícula experimenta **una aceleración debido** a estos **cambios en la rapidez tangencial.** Análogamente **que en el** M.R.U.V., **esta aceleración** es paralela **con la** velocidad $(\vec{\upsilon})$ **en todo** instante; en el **caso del** movimiento circunferencial es **tangente a la** trayectoria, **por ello se le** denomina **aceleración tangencial** $(\vec{a}_T)$. **La dirección** de esta **aceleración** cambia **continuamente, tal** como se muestra.



Sin embargo, el módulo de esta aceleración es constante puesto que en el M.C.U.V. la rapidez tangencial varía uniformemente, por lo tanto podemos plantear.

$$\boxed{a_T = \frac{|\upsilon_F - \upsilon_0|}{t}}$$

Unidad: [illegible]

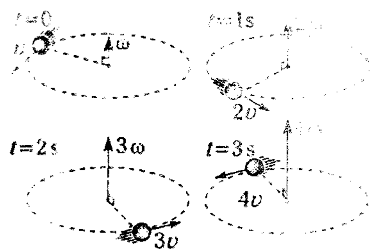
Por ejemplo, si el módulo de [illegible] tangencial es de 2 m/s² significa [illegible] tangencial varía en 2 m/s cada [illegible] tr[illegible]

Aceleración tangencial

[illegible] magnitud vectorial [illegible] variación de la rapidez lineal o t[illegible] partícula experimenta por cada [illegible] por [illegible] es por cada segundo [illegible] la [illegible] dirección que la $\vec{\upsilon}$ [illegible] módulo y en caso contrario lo d[illegible]

Aceleración angular $(\vec{\alpha})$

Si la rapidez lineal (υ) varía uniformemente, entonces la rapidez angular (ω) también varía uniformemente, ya que están relacionadas según la expresión $\upsilon = \omega R$, donde el radio de giro (R) es constante. Si la rapidez angular varía, entonces también varía la velocidad angular. En los siguientes gráficos se muestra la variación uniforme de la rapidez y la velocidad angular para intervalos de tiempos iguales.



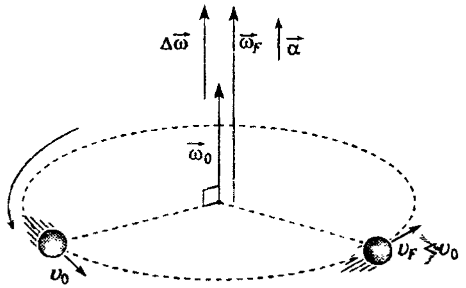
En consecuencia, debido a la variación uniforme de la velocidad angular en el M.C.U.V. hay una aceleración que nos permitirá predecir como son dichos cambios. Dicha aceleración la denominamos aceleración angular $(\vec{\alpha})$, definida por

$$\boxed{\vec{\alpha}=\frac{\Delta\vec{\omega}}{t}=\frac{\vec{\omega}_F-\vec{\omega}_0}{t}}$$

Unidad : rad/s^2

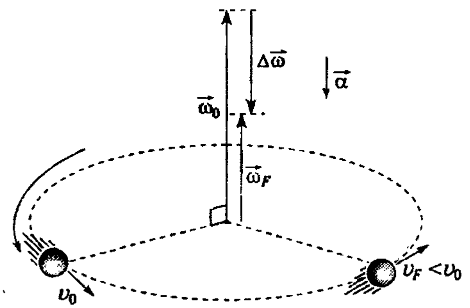
La aceleración angular $(\vec{\alpha})$ tiene igual dirección que la variación de la velocidad angular $(\Delta\vec{\omega})$, es decir $\vec{\alpha}/\!/\Delta\vec{\omega}$. Ahora, según aumente o disminuye la rapidez angular, podemos tener

Movimiento circunferencial acelerado



La dirección de $\vec{\alpha}$ es igual a la dirección de $\vec{\omega}$.

Movimiento circunferencial desacelerado



Note que la dirección de $\vec{\alpha}$ es opuesta a la dirección de $\vec{\omega}$.

La aceleración angular es una magnitud vectorial que expresa la rapidez con que varía la velocidad angular.

Como en un M.C.U.V. la velocidad angular varía uniformemente, entonces la aceleración angular es constante, tanto en módulo como en dirección.

Por ejemplo, si en un M.C.U.V., el módulo de la aceleración angular es $\alpha=2\,\text{rad/s}^2$, significa que la rapidez angular varía en 2 rad/s por cada segundo y durante cualquier segundo del movimiento. En conclusión:

RELACION ENTRE LA ACELERACIÓN TANGENCIAL Y LA ACELERACIÓN ANGULAR

Se sabe que

$$a_T=\frac{|v_F-v_0|}{t}$$

además la rapidez tangencial es

$$v_F=\omega_F R\ ,\ v_0=\omega_0 R$$

Reemplazando en la relación inicial tendremos

$$a_T=\frac{|\omega_F R-\omega_0 R|}{t}=\frac{|\omega_F-\omega_0|}{t}R$$

donde el cociente $\frac{|\omega_F-\omega_0|}{t}$ es el módulo de la aceleración angular (α), en consecuencia

$$\boxed{a_T=\alpha R}$$

Unidades

α : en rad/s^2

R : en m

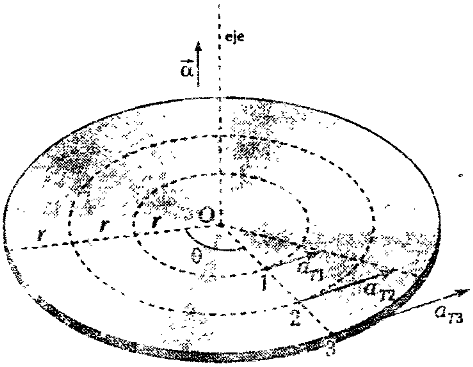
a_T : en m/s^2

De esta última relación, si la aceleración angular es constante, se puede afirmar que

A mayor radio de giro, las partículas experimentan mayor aceleración tangencial. Es decir

$$\boxed{a_T \text{ D.P. } R}$$

Por ejemplo, en el movimiento rotacional de un cuerpo, tal como un disco



Durante el mismo intervalo de tiempo los radios de giro de todas las partículas del disco barren igual ángulo central, por ello experimentan igual aceleración angular, pero aquellas más alejadas del centro de giro experimentan mayor aceleración tangencial.

Considerando las partículas 1, 2 y 3 se tiene

$a_{T1} < a_{T2} < a_{T3}$

donde

$a_{T1} = \alpha r$; $a_{T2} = \alpha(2r)$ y $a_{T3} = \alpha(3r)$.

ECUACIONES CINEMÁTICAS DEL M.C.U.V.

Las ecuaciones del M.C.U.V. se pueden dividir en dos grupos: las ecuaciones lineales, expresadas en función de la rapidez tangencial y las ecuaciones angulares, expresadas en función de la rapidez angular.

Como se puede examinar en el cuadro siguiente, estas ecuaciones son análogas a las ecuaciones del M.R.U.V.

M.R.U.V.	M.C.U.V.	
	ECUACIONES LINEALES	ECUACIONES ANGULARES
$v_F = v \pm at$	$v_F = v_0 \pm a_T t$	$\omega_F = \omega_0 \pm \alpha t$
$v_F^2 = v_0^2 \pm 2ad$	$v_F^2 = v_0^2 \pm 2a_T s$	$\omega_F^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta$
$d = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$	$s = v_0 t \pm \frac{1}{2}a_T t^2$	$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$
$d = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t$	$s = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2}\right)t$

En las ecuaciones que llevan los signos ± se usará el signo (+) si la rapidez tangencial (v) o la rapidez angular (ω) aumentan y el signo (−) si la rapidez tangencial (v) o la rapidez angular (ω) disminuyen.

Nota

Las ecuaciones lineales del M.C.U.V. se usan a lo largo de la trayectoria, es decir sobre la circunferencia.

Ejemplo 5

Una polea que rota alrededor de un eje que pasa en forma perpendicular por su centro, aumenta su rapidez angular de π rad/s a 3π rad/s en 1 s. Si su aceleración angular es constante, determine el intervalo de tiempo durante el cual la polea da una vuelta, desde el instante en que su rapidez es π rad/s.

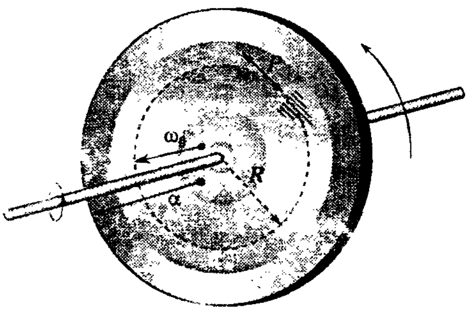
Resolución

En el problema debemos determinar el tiempo t que tarda la polea en dar una vuelta desde el instante en que la rapidez angular es $\omega_0 = \pi$ rad/s. La polea rota con aceleración angular constante un punto de ella (el punto P) desarrolla un M.C.U.V.

La aceleración angular de dicho punto se puede calcular considerando que en 1 s su rapidez angular (ω) aumenta su módulo de π rad/s a 3π rad/s:

$$\alpha = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \frac{(3\pi - \pi)}{1}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\pi \frac{\text{rad}}{s^2}$$



Cuando la polea da una vuelta el punto P presenta un desplazamiento angular de $\theta = 2\pi$ rad, luego consideramos

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Reemplazando datos

$$2\pi = \pi t + \frac{1}{2}(2\pi)t^2$$

Resolviendo se tiene que

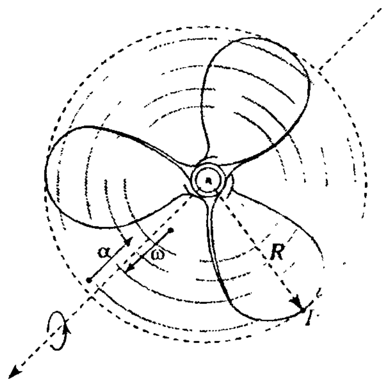
$$t = 1 \text{ s}$$

Ejemplo 6

La hélice de un ventilador rota a razón de 4 revoluciones por segundo. Si al desconectarla se detiene luego de 12 s; determine el número de vueltas que han dado las paletas hasta detenerse. Considere que las hélices experimentan una aceleración angular constante.

Resolución

El número de vueltas (n) que dan las hélices del ventilador depende del ángulo (θ) que barre el radio de giro de uno de sus puntos, por ejemplo, el punto P que se muestra en el gráfico.



Si en cada vuelta el ángulo barrido es rad, se cumple que

$$n = \frac{\theta}{2\pi} \qquad \text{(I)}$$

En este caso el ángulo barrido (θ) corresponde desde el instante en que su frecuencia es $f_0 = 4$ rev/s hasta que se detiene ($\omega_F = 0$), lo cual ocurre según dato luego de 12 s.

Como las hélices rotan con aceleración angular ($\vec{\alpha}$) constante, el punto P experimenta un M.C.U.V. Con los datos que se conocen el ángulo barrido se determina con la relación

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2}\right)t \qquad \text{(II)}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi(4) = 8\pi$ rad/s

Reemplazando los datos en (II)

$$\theta = \left(\frac{8\pi + 0}{2}\right)\times 12$$

$$\Rightarrow \theta = 48\pi \text{ rad}$$

Reemplazando en (I)

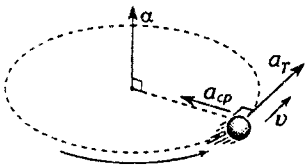
$$n = \frac{48\pi}{2\pi}$$

$\therefore$ $n = 24$ vueltas

Aquí la acción del aire (viento) sobre las paletas de la veleta hace que los extremos de ellas sigan un movimiento circunferencial

ACELERACIONES EN EL MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

En general, cuando una partícula desarrolla un movimiento circunferencial, la velocidad de la partícula puede variar en módulo y definitivamente siempre varía en dirección, a la vez que también varía la velocidad angular. Por ello en tal movimiento se tienen las siguientes aceleraciones.



$\vec{\alpha}$: aceleración angular. Su valor expresa la rapidez con la cual cambia la velocidad angular, su módulo en el M.C.U.V. se determina así:

$$\boxed{\alpha = \frac{|\omega_f - \omega_0|}{t}}$$

Unidad: rad/s^2

$\vec{a}_T$: aceleración tangencial. Su medida expresa la rapidez con la que varía el módulo de la velocidad tangencial o lineal. El módulo de esta aceleración en el M.C.U.V. se determina de la siguiente forma:

$$\boxed{a_T = \frac{|v_f - v_0|}{t} = \alpha R}$$

Unidad: m/s^2

$\vec{a}_{cp}$: aceleración centrípeta. Su medida expresa la rapidez con la que varía la dirección de la velocidad. El módulo de esta aceleración para el M.C.U. y el M.C.U.V. se determina de la siguiente forma:

$$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

Unidad: m/s^2

Nota

Si $\vec{v} \nearrow\nearrow \vec{a}_T$, el módulo de la velocidad aumenta.

Si $\vec{v} \nearrow\swarrow \vec{a}_T$, el módulo de la velocidad disminuye.

En esta última ecuación v es el módulo de la velocidad para un determinado instante del movimiento (rapidez instantánea). Análogamente ω es el módulo de la velocidad angular para cierto instante del movimiento.

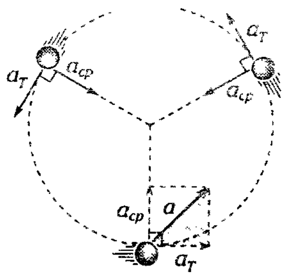
Si en el movimiento hay una aceleración tangencial y, por consiguiente, una aceleración angular, entonces, la rapidez lineal y angular no son constantes, estarían cambiando continuamente.

Esto implica que el módulo de la aceleración centrípeta también estaría cambiando continuamente.

En el caso contrario, si la partícula no experimenta aceleración tangencial y consecuentemente tampoco aceleración angular, el módulo de la aceleración centrípeta se mantiene constante.

ACELERACIÓN TOTAL O INSTANTÁNEA

Las aceleraciones tangencial y centrípeta, son siempre perpendiculares entre sí y se encuentran en el plano que contiene a la trayectoria circunferencial.



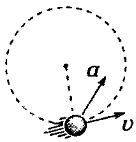
Note que estas aceleraciones tienen como resultante a la aceleración $\vec{a}$, que viene a ser la **aceleración total para un instante (aceleración instantánea)**. Por consiguiente, tanto la $\vec{a}_{cp}$ como la $\vec{a}_T$ son componentes rectangulares de dicha aceleración $(\vec{a})$.

El módulo de esta aceleración se determina mediante el Teorema de Pitágoras así:

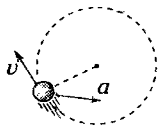
$$\boxed{a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_T^2}}$$

Nota

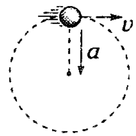
La aceleración instantánea $(\vec{a})$ y la velocidad $(\vec{v})$ de una partícula en movimiento circunferencial puede formar un ángulo agudo, recto y obtuso.



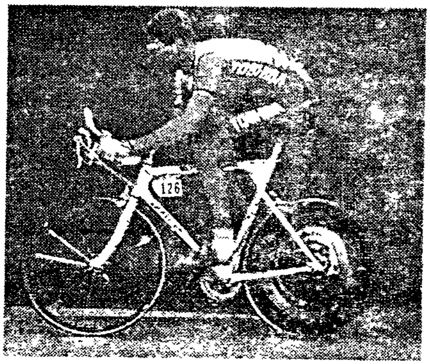
Aquí el valor de la velocidad aumenta.



Aquí el valor de la velocidad disminuye.



Aquí el valor de la velocidad no cambia.

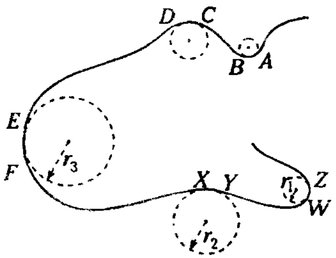


Mientras el ciclista aumenta su rapidez de traslación, los puntos periféricos de las llantas, respecto del piñón, presentan aceleración tangencial.

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO CURVILÍNEO EN UN PLANO

Podemos representar cualquier movimiento a lo largo de una trayectoria curvilínea, como un movimiento compuesto por arcos de circunferencia con distintos radios.

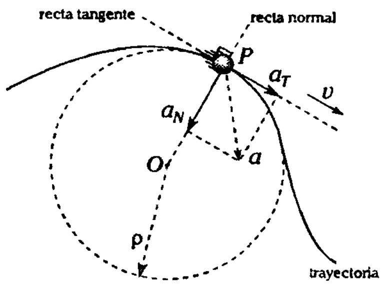
En la figura que se da a continuación se muestra una complicada trayectoria curvilínea descrita por un cuerpo en movimiento sobre un plano.



Vemos que los sectores aislados de la trayectoria curvilínea son, aproximadamente, arcos de las circunferencias representadas con líneas punteadas. Por ejemplo, los sectores *AB* y *ZW* son arcos de circunferencias de pequeños radios, el sector *EF* es el arco de una circunferencia de mayor radio.

De manera que el movimiento por cualquier trayectoria curvilínea puede ser representado, con aproximación, como el movimiento por arcos de diversas circunferencias y así el problema relacionado con la determinación de la aceleración, en el caso del movimiento curvilíneo, se reduce a la determinación de esta magnitud para el movimiento por una circunferencia.

En ese caso, para determinar la aceleración en un determinado punto de una trayectoria curvilínea se le asocia una circunferencia imaginaria tangente a la trayectoria en dicho punto, siendo está la circunferencia de mayor radio de todas las circunferencias tangentes que se puede trazar.



Entonces, cuando el cuerpo se encuentre pasando por *P*, su aceleración $\vec{a}$ presentará componentes rectangulares: la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$, dirigida hacia el centro de la circunferencia, la cual determina el cambio en la dirección de la velocidad y una aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$, que cambia el módulo de la velocidad, tal como ocurre en un movimiento circunferencial.

En este caso, el radio de la circunferencia (ρ) se denomina radio de curvatura, el cual es distinto en cada instante y la aceleración centrípeta se denomina también aceleración normal $(\vec{a}_N)$ por encontrarse sobre la recta normal; su módulo se determina así

$$\boxed{a_N=\frac{v}{\rho}}$$

donde

v : es el módulo de la velocidad instantánea (en m/s).

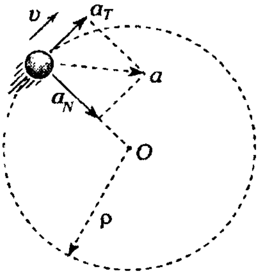
ρ : radio de curvatura (en m).

Al ser la aceleración del móvil $\vec{a}$ la resultante de la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ y la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$, y éstas perpendiculares entre sí, entonces su módulo se obtiene:

$$\boxed{a=\sqrt{a_N^2+a_T^2}}$$

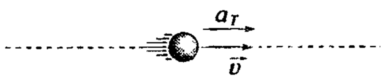
Respecto al radio de curvatura (ρ), se tienen los siguientes casos:

1. Si ρ es constante, entonces el movimiento es circunferencial.



Si $a_T = 0$, entonces el movimiento es circunferencial uniforme (M.C.U.).
Si $a_T =$ constante, entonces el movimiento es circunferencial uniformemente variado (M.C.U.V.).

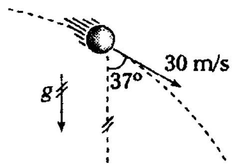
2. Si ρ tiende a ser infinito, de acuerdo con la relación $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$, se tendrá que $a_N = 0$.
Esto significa que la trayectoria es rectilínea.



Si $a_T = 0$, entonces el movimiento es rectilíneo uniforme (M.R.U.).
Si $a_T =$ constante, el movimiento es rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.).
El análisis de un movimiento curvilíneo, cualquiera que se desarrolle en un plano, nos permite establecer los movimientos anteriormente estudiados simplemente como casos particulares de este análisis general.

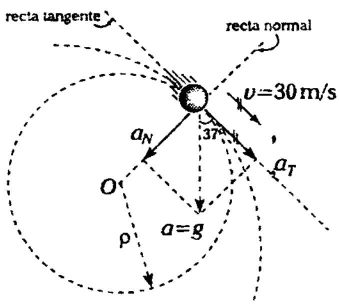
Ejemplo 7

En la figura se muestra el movimiento de caída libre que experimenta un proyectil.
Determine el radio de la curvatura para dicho instante. $(g = 10\,\text{m/s}^2)$



Resolución

Como sabemos para analizar el movimiento en dicho instante se asocia una circunferencia imaginaria tangente a la trayectoria.



En el movimiento de caída libre la aceleración instantánea viene a ser la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$. Descomponiendo esta aceleración en una componente normal y otra tangencial, tendremos

$$a_N = g\,\text{sen}37° = (10)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \; a_N = 6\,\text{m/s}^2$$

El radio de curvatura está relacionado con la aceleración, según la expresión

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

Reemplazando valores

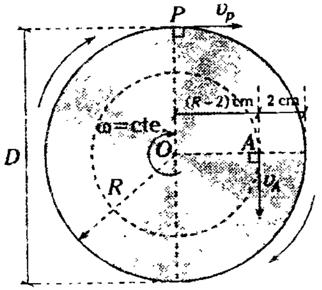
$$6 = \frac{(30)^2}{\rho} \;\Rightarrow\; \rho = \frac{900}{6} = 150\,\text{m}$$

Problema 1

Los puntos periféricos de un disco que rota uniformemente, se mueven a 40 cm/s. Si los puntos que se encuentran a 2 cm de la periferia giran a 30 cm/s, ¿qué diámetro tiene el disco?

Resolución

Para determinar el diámetro *(D)* del disco, es necesario determinar su radio R, ya que $D=2R$, de acuerdo con los datos $\upsilon_P = 40$ cm/s y $\upsilon_A = 30$ cm/s.



Recordemos que en el movimiento de rotación de un cuerpo rígido, tal como el disco, los radios de giro de cualquiera de sus partículas presentan igual rapidez angular (ω). Además como la rotación es uniforme, esta rapidez se mantiene constante.

Si la rapidez tangencial (υ) y la rapidez angular (ω) se relacionan según $\upsilon = \omega R$, entonces para la partícula A

$$\upsilon_A = \omega(R-2) \qquad \text{(I)}$$

para la partícula P

$$\upsilon_P = \omega R \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) y (II), se tiene

$$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_P} = \frac{R-2}{R}$$

$$\frac{30}{40} = \frac{R-2}{R}$$

Despejando a R, se tiene

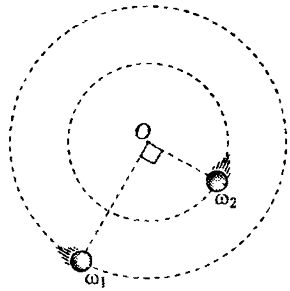
$$R = 8 \text{ cm}$$

$$\therefore\ D = 16 \text{ cm}$$

Problema 2

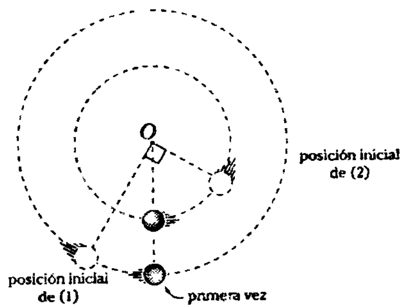
Cada una de las partículas que se muestran presentan M.C.U. A partir del instante mostrado, ¿qué tiempo debe transcurrir para que se encuentren en una misma línea radial pero por segunda vez?

$$\left(\omega_1 = \frac{\pi}{6}\text{ rad/s}\ ;\ \omega_2 = \frac{\pi}{3}\text{ rad/s}\right)$$

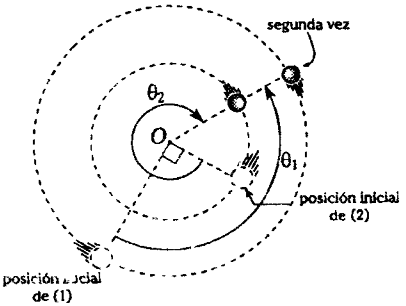


Resolución

Las partículas giran en sentidos opuestos, y se encontrarán en una misma línea varias veces. La primera vez ocurre de la siguiente forma:



La segunda vez ocurre tal como se muestra



De este gráfico, se observa que la medida de los ángulos barridos por los radios de giro de las partículas, a partir del instante inicial, se relacionan de la siguiente manera:

$$\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \theta_1 = 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 + \theta_1 = \frac{5\pi}{2} \qquad \text{(I)}$$

Dado que las partículas experimentan M.C.U., la rapidez angular de cada una es constante y se relaciona con los ángulos barridos según la expresión $\theta = \omega t$.

Entonces

$$\theta_1 = \omega_1 t = \frac{\pi}{6} t$$

$$\theta_2 = \omega_2 t = \frac{\pi}{3} t$$

donde t es el intervalo de tiempo que transcurre desde el instante inicial hasta la segunda vez que se encuentra en una misma línea radial; t es el mismo para los dos movimientos, ya que estos son simultáneos.

Reemplazando en (I)

$$\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{6} t = \frac{5\pi}{2}$$

despejando t, se tiene

$$t = 5 \text{ s}$$

Otra forma

De acuerdo con los datos se deduce que $\omega_2 = 2\omega_1$.

Esto significa que en el mismo intervalo de tiempo, el ángulo barrido por el radio de giro de la partícula 2 es el doble del que barre la partícula 1.

Al inicio las partículas estaban separadas un ángulo de 90° y se mueven al encuentro entonces, para que se encuentren por primera vez en una línea radial, el radio de giro de la esfera 2 debe barrer 60° y el de la esfera 1 debe barrer 30°. A partir de este instante hasta la segunda vez, los radios deben barrer ángulos que sumados deben ser igual a 360°; por tanto, el radio de la esfera 2 barre 240° y el de la esfera 1 será 120°, ya que los ángulos barridos están en la relación de 2 a 1.

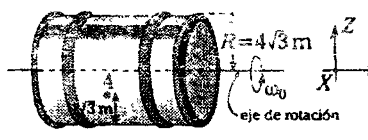
En consecuencia, desde el instante inicial hasta la segunda vez, el radio de giro de la esfera 2 barre un ángulo de 60° + 240° = 300°. Como esta esfera realiza M.C.U. su rapidez angular es constante e igual a $\pi/3$ rad/s, lo que significa que en 1 s, su radio de giro barre $\pi/3$ rad, es decir 60°. Por tanto, para que barra 300° transcurrirá un intervalo de tiempo $t = 5$ s.

Para reflexionar

¿El intervalo de tiempo que transcurre desde un encuentro a otro es constante?, ¿cuál es su valor? ¿Las posiciones en las que se encuentran en una misma línea radial, son siempre las mismas? Invitamos al lector, en función a un análisis más detallado, dar respuesta a estas interrogantes.

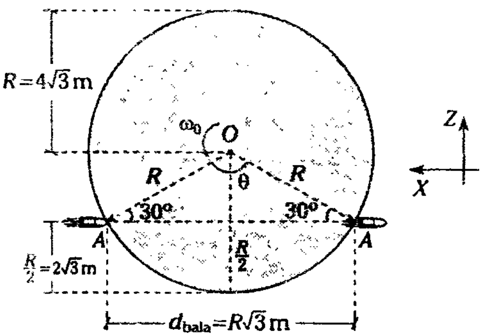
Problema 3

El cilindro hueco que se muestra está rotando con rapidez angular uniforme igual a ω_0. Si por el agujero A ingresa una bala con una velocidad que es constante e igual a $-360\,\hat{i}$ m/s y sale por el mismo agujero, determine la mínima rapidez angular ω_0 para esta condición.



Resolución

Observemos al cilindro con una vista de su sección recta, donde se podrá observar su base circular.



Según el enunciado, la velocidad de la bala es $\vec{v}_B=-360\hat{i}$ m/s y es constante, lo cual significa que se mueve rectilíneamente en la dirección negativa del eje X, como se observa en el gráfico.

Durante el mismo intervalo de tiempo (t) que la bala atraviesa al cilindro, el agujero A debe girar y ubicarse en el extremo opuesto, para que así la bala pueda salir por el mismo agujero.

El ángulo que debe barrer el radio de giro del agujero A, para la condición planteada, es θ, tal como se muestra en el gráfico. Sin embargo, si el cilindro rota con una gran rapidez angular el agujero A podría girar más de una vuelta antes de que la bala salga por él, en este caso el ángulo barrido puede tomar los valores $2\pi+\theta\,;4\pi+\theta\,;$ ....

Es evidente que a mayor rapidez angular, mayor será el ángulo barrido. Por consiguiente, para la mínima rapidez angular debe corresponder el menor ángulo que se pueda barrer y en este caso es θ.

Como el cilindro rota uniformemente, entonces, el agujero A experimenta M.C.U.. Luego, para la rapidez angular mínima (ω_0) se tiene

$$\omega_0=\frac{\theta}{t} \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico se deduce que $\theta=120°=2\pi/3$ rad

Durante el intervalo de tiempo t, la bala avanza la distancia $d_{bala}=R\sqrt{3}$ y como tiene velocidad constante, entonces

$$t=\frac{d_{bala}}{v_B}=\frac{R\sqrt{3}}{360}=\frac{(4\sqrt{3})\sqrt{3}}{360}=\frac{1}{30}\text{ s}$$

Reemplazando θ y t en (I)

$$\omega_0=\frac{\left(2\frac{\pi}{3}\right)\text{rad}}{\frac{1}{30}\text{ s}}$$

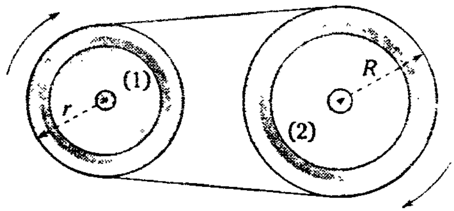
$$\therefore\quad \omega_0=20\pi\text{ rad/s}$$

Si esta resulta ser la menor rapidez angular para la cual se cumple la condición planteada, entonces:

Para el lector, ¿para qué otros valores de la rapidez angular (ω_0), la bala puede salir por el mismo agujero? Se entiende que deben ser otros valores mayores a $20\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

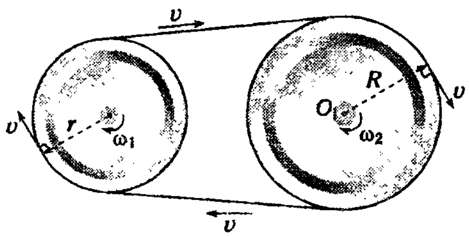
Problema 4

Se tienen dos poleas y una faja que las une. Si una partícula cualquiera de la faja presenta una rapidez de 1,2 m/s; determine el módulo de la velocidad angular con que rotan cada una de las poleas. (R= 30 cm ; r = 20 cm.)



Resolución

Considerando que la faja no resbala, entonces las partículas de la faja en contacto con las partículas periféricas de las poleas se mueven de igual forma, es decir, recorren igual longitud de arco con el mismo intervalo de tiempo, por lo cual presentan igual rapidez tangencial (v).



De acuerdo con el enunciado $v = 1{,}2$ m/s.

En la polea pequeña $v = \omega_1 r$ (I)

como $r = 20$ cm $= 0{,}2$ m

Reemplazando en (I)

$1{,}2 = \omega_1(0{,}2)$

$\therefore\ \omega_1 = 6$ rad/s

En la polea grande $v = \omega_2 R$ (II)

en este caso $R = 30$ cm $= 0{,}3$ cm

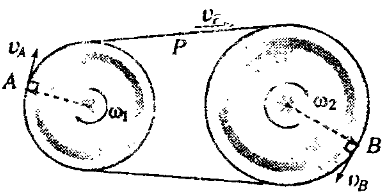
Reemplazando en (II)

$1{,}2 = \omega_2(0{,}3)$

$\therefore\ \omega_2 = 4$ rad/s

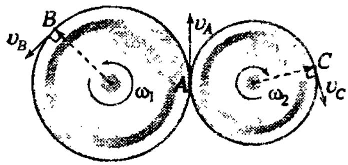
Propiedades

1. A partir del problema anterior se tiene



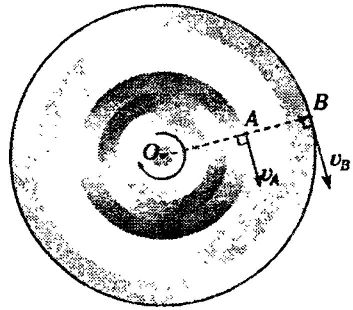
$\boxed{v_A = v_P = v_B}$ y $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$

2. Para poleas en contacto (tangenciales)



$\boxed{v_A = v_B = v_C}$ y $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$

3. Para poleas concéntricas soldadas



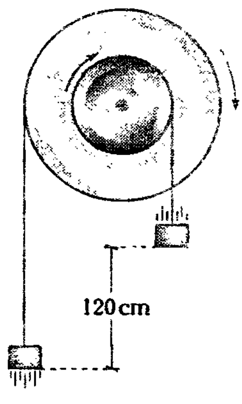
$\boxed{v_B > v_A}$ y $\boxed{\omega_A = \omega_B}$

Aquí al rotar las poleas soldadas, los puntos A y B presentan desplazamientos angulares iguales en tiempos iguales, por ello se establece que $\omega_A = \omega_B$.

Problema 5

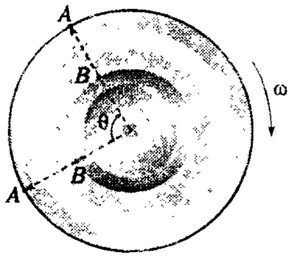
Dos poleas concéntricas de 10 cm y 20 cm de radio, rotan con rapidez angular constante

Si a partir del instante mostrado los pequeños bloques tardan 4 s en ubicarse a lo largo de una misma línea horizontal ¿con qué rapidez angular rotan las poleas?



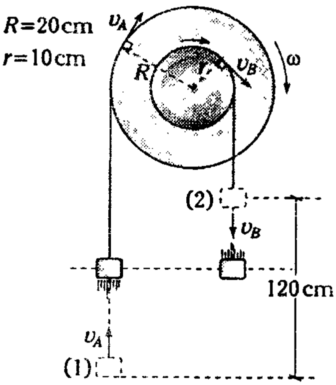
Resolución

Dos o más poleas concéntricas (también llamadas poleas solidarias) están soldadas unas con otras, tal que los radios de giro de cualquier partícula de las poleas barren igual ángulo (θ) en el mismo intervalo de tiempo (t).



Esto significa que las poleas concéntricas tienen igual rapidez angular. Sin embargo la rapidez tangencial (v) de las partículas depende de su radio de giro.

De acuerdo con esta observación grafiquemos el movimiento de las poleas y los bloques.



Como las cuerdas están enrolladas a las poleas, las partículas de cada cuerda que están en contacto con las partículas periféricas de su respectiva polea en consecuencia tienen igual rapidez tangencial. Por ejemplo, todas las partículas de la cuerda unida al bloque (1) se mueven con la rapidez v_A, incluido el bloque (1) situación similar ocurre para la cuerda unida al bloque (2), tal que para el bloque (1) tenemos

$$v_A = \omega R \qquad \text{(I)}$$

para el bloque (2)

$$v_B = \omega r \qquad \text{(II)}$$

Como el enunciado plantea que la rapidez angular es constante, entonces la rapidez de los bloques también es constante, por lo que cada uno desarrolla M.R.U.

Los 4 s que tardan los bloques para ubicarse en una misma línea horizontal es el tiempo de encuentro (t_e), que para el M.R.U. se determina así

$$t_e = \frac{d_0}{v_A + v_B} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III)

$$t_e = \frac{d_0}{\omega R + \omega r}$$

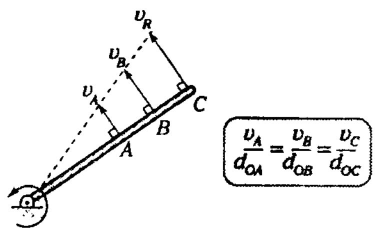
Reemplazando datos y teniendo en cuenta que la distancia de separación inicial de los bloques es $d = 120$ cm

$$4 = \frac{120}{\omega(20) + \omega(10)}$$

$$\therefore \quad \omega = 1 \text{ rad/s}$$

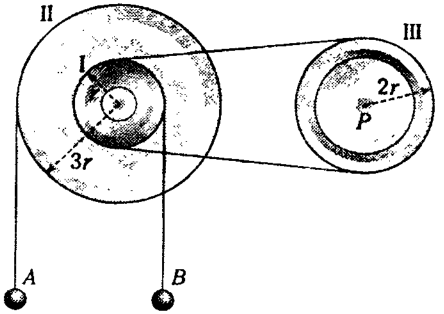
Nota

Para una rotación pura de un cuerpo rígido, sus puntos tienen una rapidez que es proporcional a la distancia al centro de rotación.



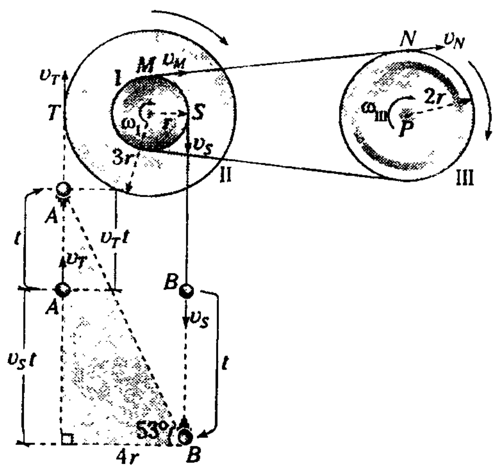
Problema 6

El sistema de poleas está en reposo y las pequeñas esferas A y B están sobre la misma horizontal. Si la polea III empieza a rotar con una rapidez angular constante de 0,5 rad/s en sentido horario; ¿al cabo de qué tiempo A y B se sitúan en una línea que forma 53° con la horizontal?



Resolución

A partir de la condición de que la polea III rota con rapidez angular constante, se concluye que las pequeñas esferas desarrollan M.R.U.



Del gráfico podemos notar que las poleas I y III están unidas por una faja de modo que las partículas M y N de la faja tienen la misma rapidez tangencial, por consiguiente

$$v_M = v_S = v_N$$
$$v_M = v_S = \omega_{III}(2r) = (0,5)(2r)$$
$$\therefore\ v_M = v_S = r \qquad \text{(I)}$$

Luego, para el triángulo rectángulo sombreado

$$\tan 53° = \frac{v_T t + v_S t}{4r} = \frac{(v_T + v_S)}{4r} t \qquad \text{(II)}$$

También para las poleas I y II que están soldadas, la rapidez angular es la misma

$$\omega_I = \frac{v_M}{r} = \frac{v_T}{3r}$$

$$\Rightarrow\ v_T = 3v_M = 3(r) = 3r \qquad \text{(III)}$$

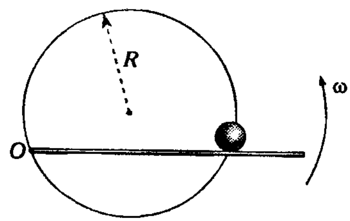
Reemplazando (I) y (III) en (II), tenemos

$$\frac{4}{3} = \frac{(3r + r)}{4r} t$$

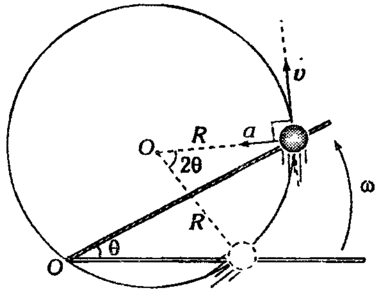
$$\therefore\ t = 1,33\ \text{s}$$

Problema 7

Una pequeña esfera puede moverse por cierta circunferencia de radio R empujada por una aguja que rota de manera uniforme con rapidez angular $\vec{\omega}$. Si el eje de rotación de la aguja pasa por el punto O de la circunferencia, ¿cuál es el módulo de la aceleración de esta esfera?



Resolución



De acuerdo con la geometría de la circunferencia, cuando la aguja rota un ángulo θ, el radio de giro (R) de la esfera barre un ángulo 2θ.

Si la aguja rota con rapidez angular constante (ω), entonces la esfera también gira con rapidez angular constante pero de doble módulo (2ω) ya que en el mismo intervalo de tiempo su radio barre el doble del ángulo que la aguja. Esto significa que la rapidez de la esfera (v) es constante; por lo tanto, la esfera experimenta M.C.U. Recordemos que en este movimiento la aceleración está dirigida hacia el centro de giro y se denomina aceleración centrípeta $\left(\vec{a}_{cp}\right)$.

Luego el módulo de la aceleración de la esfera será

$$a_{cp}=\omega_{\text{esfera}}^{2}R$$

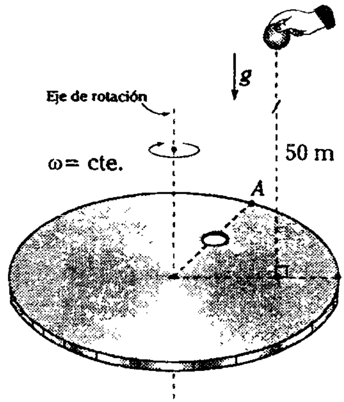
donde ya se ha determinado que

$$\omega_{\text{esfera}}=2\,\omega$$

$$\therefore\ a_{cp}=4\,\omega^{2}R$$

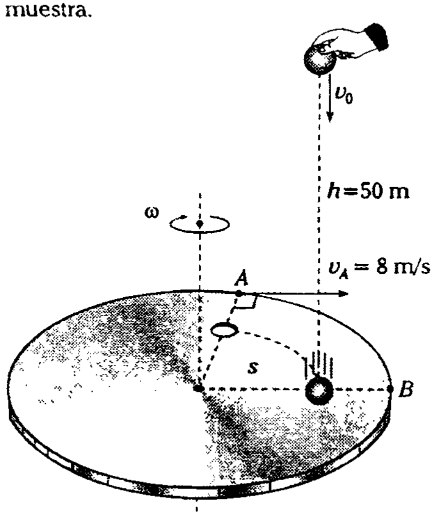
Problema 8

El disco rota uniformemente y la rapidez del punto A es de 8 m/s. Determine la rapidez máxima con la que se debe lanzar, verticalmente hacia abajo, a la esfera para que pase por el agujero. (s_{AB}= 16 m; g = 10 m/s^2).



Resolución

Si lanzamos la esfera, verticalmente hacia abajo, cada vez con mayor rapidez, entonces empleará menos tiempo en llegar al disco por consiguiente, la rapidez máxima se da para el menor intervalo de tiempo posible. En dicho intervalo de tiempo el agujero debe recorrer el arco s antes de completar una vuelta o dando más de una vuelta hasta que la esfera pase por él. Es evidente que el menor intervalo de tiempo será cuando recorra el arco s, antes de completar una vuelta tal como se muestra.



Sea t el intervalo de tiempo mínimo, entonces, de acuerdo con los datos para el M.V.C.L. de la esfera, se puede usar

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(I)}$$

donde $h=50$ m, $g=10$ m/s^2 y v_0 es la rapidez máxima de lanzamiento.

El intervalo de tiempo t se puede determinar en el movimiento de rotación del disco; se observa que el punto A del disco recorre el arco AB en el mismo intervalo de tiempo (t) que el agujero recorre el arco s.

Como el enunciado indica que el disco rota uniformemente, el punto A experimenta un M.C.U. y de acuerdo con los datos para el movimiento de este punto, se tiene

$$t = \frac{s_{AB}}{v_A}$$

donde s_{AB}= 16 m ; v_A= 8 m/s; reemplazando

$$t = 2 \text{ s}$$

Reemplazando en (I)

$$50 = v_0(2) + \frac{1}{2}(10)(2)^2$$

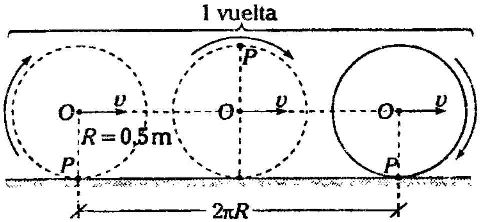
$$\therefore\ v_{0(\text{máx})} = 15 \text{ m/s}$$

Problema 9

Un camión se mueve sobre una pista rectilínea con velocidad constante, si por cada 32π metros de recorrido transcurren 4 s; determine la rapidez angular con la cual rotan las llantas, dado que tienen un radio de 0,5 m y no resbalan.

Resolución

Si una rueda rota por una superficie sin resbalar, tal como las llantas del camión, entonces un punto P de la circunferencia, que limita a una de las llantas, da una vuelta cuando el centro de la llanta recorre una longitud igual al perímetro de la circunferencia $(2\pi R)$, tal como se muestra



Esta condición se cumple independientemente del movimiento que experimenta la llanta.

Según el enunciado del problema, el camión se mueve con una velocidad constante, por ello, las llantas también se trasladan con velocidad constante y en consecuencia, el intervalo de tiempo que emplea una llanta en dar una vuelta es constante para una vuelta

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{t} \qquad \text{(I)}$$

Si las llantas se mueven con velocidad constante $(\vec{v})$, entonces para una vuelta

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi R}{v} \qquad \text{(II)}$$

El enunciado indica que por cada 32πm de recorrido que realiza el camión transcurre 4 s, por lo tanto

$$v = \frac{32\pi}{4} = 8\pi \text{ m/s}$$

Reemplazando en (II)

$$t = \frac{2\pi(0,5)}{8\pi} = \frac{1}{8} \text{ s}$$

Reemplazando en (I)

$$\omega = \frac{2\pi}{\left(\frac{1}{8}\right)}$$

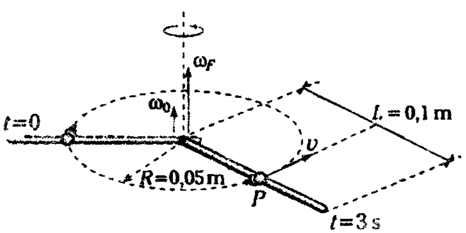
$$\therefore\ \omega = 16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Problema 10

Una varilla de 10 cm de longitud rota en un plano horizontal alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos, acelerando uniformemente de 20 rev/s (en $t=0$) a 30 rev/s (en $t=5$ s). Determine la rapidez tangencial de su punto medio para el instante $t=3$ s.

Resolución

La varilla rota, respecto de uno de sus extremos con una aceleración uniforme; es decir, un punto P de la varilla, realizará un M.C.U.V. tal como se muestra a continuación



Como nos piden determinar la rapidez v del punto medio de la varilla en $t=3$ s, consideraremos que el punto P es el punto medio de la varilla; por lo que

$$v=\omega_F R$$

donde R es el radio de giro de P y ω_F la rapidez angular en $t=3$ s

Del diagrama $R=0,05$ m; en tal sentido

$$v=\omega_F\,(0,05) \qquad \text{(I)}$$

De esta relación si queremos v necesitamos ω_F para lo cual aprovechamos la condición que en $t=0$ la frecuencia es $f_0=20$ rev/s; así la rapidez angular en $t=0$ será

$$\omega_0=2\pi f_0=2\pi(20)=40\pi \text{ rad/s}$$

Asimismo en $t=5$ s la frecuencia es $f=30$ rev/s; cuya rapidez angular en dicho instante será

$$\omega=2\pi f=2\pi(30)=60\pi \text{ rad/s}$$

De $t=0$ a $t=5$ s la rapidez angular aumenta en 20π rad/s Esto significa que en 1 s la rapidez angular aumenta en 4 rad/s, por lo tanto la aceleración angular con la cual gira P será

$$\alpha_P=4\pi \text{ rad/s}^2\cdot$$

Ahora encontremos ω_F; al emplear la siguiente ecuación

$$\omega_F=\omega_0+\alpha$$

Reemplazando: $\omega_F=40\pi+4\pi(3)$

$$\omega_F=52\pi \text{ rad/s} \qquad \text{(II)}$$

(II) en (I)

$$v=(52\pi)(0,05)$$

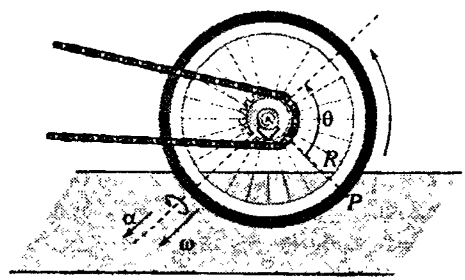
$$\therefore\ v=2,6\,\pi \text{ m/s}$$

Problema 11

La rueda de una bicicleta cuadruplica su rapidez angular después de haber dado 250 vueltas respecto a su eje durante 10 s, ¿Cuántas vueltas más dará en los siguientes 4 s? (La rueda rota con una aceleración angular constante).

Resolución

En el problema debemos determinar el número (n) de vueltas que da adicionalmente la rueda transcurrido $t=4$ s, desde el momento que la rueda logra cuadruplicar su rapidez angular ($\omega_f=4\omega$). Como la rueda rota con una aceleración angular α constante, entonces un punto P periférico de la rueda realizará un M.C.U.V.



Si en t segundos el radio de giro de P barre un ángulo θ; se tendrá que

$$n=\frac{\theta}{2\pi} \qquad \text{(I)}$$

Pero podemos usar

$$\theta=\omega_i+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Rightarrow \theta=(4\omega)(4)+\frac{1}{2}\alpha(4)^2$$

$$\Rightarrow \theta=16\omega+8\alpha \qquad \text{(II)}$$

A continuación encontremos ω y α. Por condición del problema en 10 s la rapidez angular se cuadruplica (aumenta de ω a 4ω), dando 250 vueltas la rueda. Si en este intervalo de tiempo consideramos que el radio de giro de P barre un ángulo θ_1; entonces

$$\theta_1=\left(\frac{\omega_0+\omega_F}{2}\right)t_1$$

$$n_1(2\pi)=\left(\frac{\omega+4\omega}{2}\right)10$$

$$250(2\pi)=\left(\frac{5\omega}{2}\right)10$$

$$\Rightarrow \omega=20\pi \text{ rad/s} \qquad \text{(III)}$$

Así mismo para calcular la aceleración angular (α) planteamos

$$\alpha=\frac{\omega_F-\omega_0}{t}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{4\omega-\omega}{t} \quad \Rightarrow \alpha=\frac{3\omega}{t}$$

Reemplazando los valores de ω y t

$$\alpha=\frac{3(20\pi)}{10}$$

$$\alpha=6\pi \text{ rad/s}^2 \qquad \text{(IV)}$$

Luego (III) y (IV) en (II)

$$\theta=16(20\pi)+8(6\pi)$$

$$\theta=368\pi \text{ rad} \qquad \text{(V)}$$

Finalmente (V) en (I)

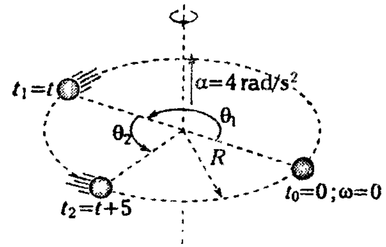
n = 184 vueltas

Problema 12

Una partícula inicia su movimiento circunferencial con aceleración angular constante. Después de un tiempo t se observa que su radio barrió un ángulo de θ_1 rad y luego de 5 s barre un ángulo de θ_2 rad. Si $7\theta_1=9\theta_2$ y su aceleración angular tiene un módulo de 4 rad/s^2, determine $\theta_1+\theta_2$.

Resolución

Según el enunciado la partícula inicia su movimiento circunferencial $(\omega_0=0)$ con una aceleración angular constante $(\alpha=4\text{rad/s}^2)$ y en tal sentido la partícula realizará un M.C.U.V.; tal como se muestra a continuación



Debemos determinar

$$E=\theta_1+\theta_2$$

Como por condición del problema $7\theta_1=9\theta_2$

$$\Rightarrow \theta_2=\frac{7}{9}\theta_1$$

Con esto se tendrá que

$$E=\frac{16}{9}\theta_1 \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación debemos determinar θ_1 para encontrar E; donde θ_1 es el ángulo barrido por el radio de giro de la partícula de t_0 a t_1, por lo tanto

$$\theta_1=\cancel{\omega_0}+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Rightarrow \theta_1=\frac{1}{2}(4)t^2$$

$$\Rightarrow \theta_1=2t^2 \qquad \text{(II)}$$

Si $\theta_1+\theta_2$ es el ángulo barrido por el radio de giro de t_0 a t_2; entonces

$$\theta_1+\theta_2=\cancel{\omega_0 t_2}+\frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

$$\Rightarrow\ \theta_1+\frac{7}{9}\theta_1=\frac{1}{2}(4)(t+5)^2$$

$$\Rightarrow\ \frac{16\theta_1}{9}=2(t+5)^2 \qquad \text{(III)}$$

De (III) y (II) se obtiene

$$\frac{16}{9}=\left(\frac{t+5}{t}\right)^2$$

Resolviendo

$t=15$ s

En (II)

$\theta_1=2(15)^2$

$\Rightarrow\ \theta_1=450$ rad

En (I)

$$E=\frac{16}{9}(450)$$

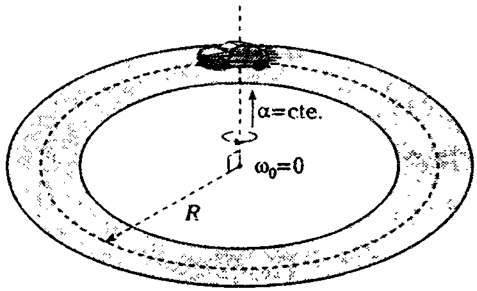
$\therefore\ E=800$ rad

Problema 13

Un piloto sale a probar su automóvil en una pista circunferencial y se observa que la primera vuelta la realiza en 10 min. Si continúa con aceleración angular constante, determine el tiempo que tarda en recorrer la tercera vuelta.

Resolución

Según el enunciado el automóvil parte del reposo $(\omega_0=0)$ trasladándose sobre una pista circunferencial con una aceleración angular constante $(\vec{\alpha})$ esto significa que el automóvil realiza un M.C.U.V., tal como se muestra a continuación



Por condición del problema se sabe que cuando el automóvil da una vuelta transcurren

$t=10\text{ min}=600\text{ s}$

donde el radio de giro R barre un ángulo $\theta=2\pi$ rad ; entonces el módulo de la aceleración angular α se puede calcular con

$$\theta_1=\cancel{\omega_0}+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Rightarrow\ 2\pi=\frac{1}{2}\alpha(600)^2$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\frac{4\pi}{(600)^2}\text{rad/s}^2$$

Ahora nuestro propósito en el problema es determinar el tiempo (t_x) que tarda el automóvil en dar la tercera vuelta, sean t_2 y t_3 el tiempo que transcurre desde el instante que el automóvil inicia su movimiento hasta que termina la segunda y tercera vuelta respectivamente; se deduce que

$$t_x=t_3-t_2 \qquad \text{(I)}$$

Como cuando transcurre t_2 el radio de giro R barre un ángulo $\theta_2=2(2\pi)=4\pi\text{rad}$, entonces

$$\theta_2=\cancel{\omega_0 t}+\frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

$$\Rightarrow\ 4\pi=\frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

Despejando t_2

$$t_2=\sqrt{\frac{8\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{8\pi}{\frac{4\pi}{600^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = 600\sqrt{2}\,\text{s} \qquad \text{(II)}$$

Asimismo cuando ha transcurrido t_3 el radio de giro barre un ángulo de $\theta_3 = 3(2\pi) = 6\pi\text{rad}$, de esta manera

$$\theta_3 = \cancel{\omega_0 t_3} + \frac{1}{2}\alpha t_3^2$$

$$\Rightarrow \quad 6\pi = \frac{1}{2}\alpha t_3^2$$

Despejando t_3

$$t_3 = \sqrt{\frac{12\pi}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \quad t_3 = \sqrt{\frac{12\pi}{\frac{4\pi}{600^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad t_3 = 600\sqrt{3}\,\text{s} \qquad \text{(III)}$$

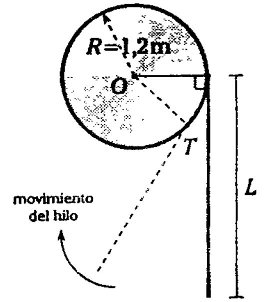
Finalmente reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$t_x = 600(\sqrt{3} - \sqrt{2})\text{s}$$

$$t_x = 10(\sqrt{3} - \sqrt{2})\text{min} \approx 3{,}2\,\text{min}$$

Problema 14

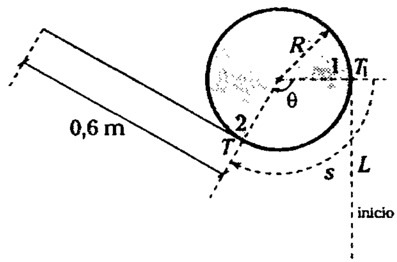
El hilo de longitud $L = 3$ m se comienza a enrollar en el cilindro de tal manera que el punto de tangencia T presenta un M.C.U.V. con una aceleración angular constante de módulo $1\ \text{rad/s}^2$. Determine la rapidez angular del punto de tangencia cuando queden 60 cm de hilo por enrollar. En la gráfica se muestra la sección transversal del cilindro.



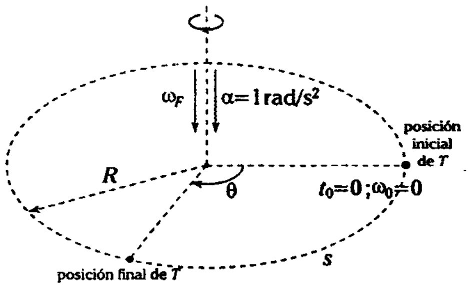
Resolución

Según el enunciado, el punto de tangencia T entre el hilo y el cilindro presenta un M.C.U.V.($\alpha = 1\ \text{rad/s}^2$); esto equivaldría a una partícula que partiendo del reposo ($\omega_0 = 0$) inicia un M.C.U.V. con un radio de giro R igual al radio del cilindro, tal como se muestra.

Cuando quedan 0,6 m por enrollar tenemos



Haciendo una vista superior



Ahora en el problema nos piden determinar la rapidez angular ω_F del punto de tangencia T; cuando quedan 60 cm de hilo por enrollar. Examinando el M.C.U.V. de la partícula se tiene que

$$\omega_F^2=\cancel{\omega_0^2}+2\alpha\theta$$

$$\Rightarrow\ \omega_F^2=2(1)\theta$$

$$\Rightarrow\ \omega_F^2=\sqrt{2\theta} \qquad \text{(I)}$$

si θ es el ángulo barrido por el radio de giro R; entonces

$$\theta=\frac{s}{R}=\frac{L-0,6}{R}=\frac{3-0,6}{1,2}=2\,\text{rad}$$

Reemplazando en (I)

$$\omega_F=2\,\text{rad/s}$$

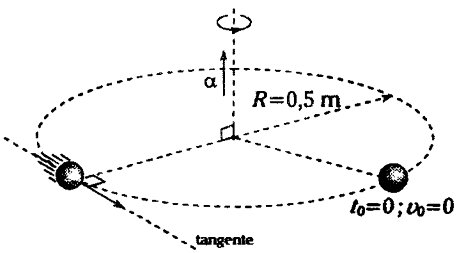
Problema 15

Una partícula inicia su movimiento por una circunferencia de radio 50 cm con una aceleración tangencial de módulo constante e igual a $2,5\,\pi$ m/s^2. Determine su rapidez tangencial y angular al finalizar la quinta vuelta.

Resolución

Según condición del problema, la partícula realiza un movimiento circunferencial partiendo del reposo $(\omega_F=0;v_0=0)$ con una aceleración tangencial de módulo $a_T=2,5\pi\dfrac{m}{s^2}$

Según las características del movimiento, la partícula debe realizar un M.C.U.V., como se muestra a continuación

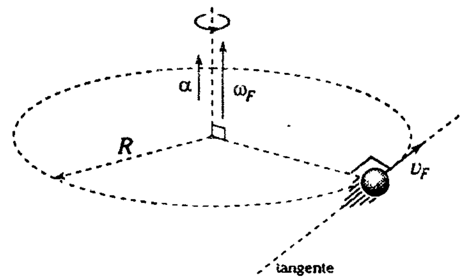


Como $a_T=\alpha R$ entonces

$$2,5\pi=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \alpha=5\pi\,\text{rad/s}^2$$

Esto significa que la partícula gira con una aceleración angular constante de módulo $\alpha=5\pi\,\text{rad/s}^2$. Ahora como nuestro propósito es determinar la rapidez angular ω_F y la rapidez tangencial v_F al finalizar la quinta vuelta, tendremos



Es conveniente usar

$$\omega_F^2=\cancel{\omega_0^2}+2\alpha\theta \qquad \text{(I)}$$

Sea θ el ángulo barrido por el radio de giro desde que inició la partícula su movimiento hasta que termina de dar la quinta vuelta

$$\Rightarrow\ \theta=5(2\pi)=10\pi\,\text{rad}$$

En (I)

$$\omega_F^2=2(5\pi)(10\pi)$$

resolviendo

$$\omega_F=10\,\pi\text{rad/s}$$

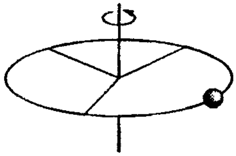
luego $v_F=\omega_F R$

$$v_F=10\pi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ v_F=5\pi\ \text{m/s}$$

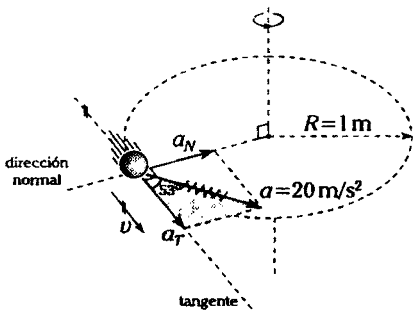
Problema 16

Se muestra una pequeña esfera que está adherida a un aro metálico $R = 1$ m. Si en cierto instante la esfera presenta una aceleración de 20 m/s^2 y forma un ángulo de 53° con su velocidad, ¿qué rapidez presentará la esfera en dicho instante?



Resolución

Estando la esfera adherida al aro, ella realiza un movimiento circunferencial, tal como se muestra



Según el enunciado debemos determinar el módulo de la velocidad $\vec{\upsilon}$ que experimenta la esfera en el instante que $\vec{\upsilon}$ forma un ángulo de 53° con su aceleración $\vec{a}$; donde el módulo de la componente en dirección normal $(\vec{a}_N)$ de $\vec{a}$, es igual a

$$a_N = \frac{\upsilon^2}{R} \qquad \text{(I)}$$

Ahora sabemos que

$R = 1$ m y $a_N = a\,\text{sen}53°$

Al reemplazar $a_N = 20\left(\dfrac{4}{5}\right)$

$$\Rightarrow a_N = 16 \text{ m/s}^2$$

Reemplazando en (I)

$$16 = \frac{\upsilon^2}{(1)}$$

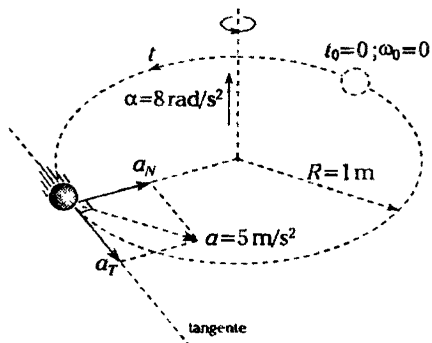
$$\therefore \quad \upsilon = 4 \text{ m/s}$$

Problema 17

Una partícula inicia su movimiento con una aceleración angular constante de 3 rad/s^2 a través de una trayectoria circunferencial de 1 m de radio. Indique transcurrido qué tiempo presentará una aceleración instantánea de módulo 5 m/s^2.

Resolución

Si la partícula inicia su movimiento circunferencial ($\omega_0 = 0$) con una aceleración angular constante $\alpha = 3$ rad/s, por lo tanto se concluye que la partícula realizará un M.C.U.V. tal como se muestra.



Ahora consideremos que luego de t segundos de iniciado su movimiento la partícula adquiere una aceleración $\vec{a}$ de módulo $a = 5$ m/s^2, en tal sentido

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

$$\Rightarrow \quad 5 = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} \qquad \text{(I)}$$

a_N para el instante señalado se determina como

$$a_N = \omega_F^2 R = \omega_F^2 \qquad \text{(II)}$$

pero $\omega_F = \cancel{\omega_0} + \alpha t$

$$\Rightarrow \ \omega_F = 3t \qquad \text{(III)}$$

(III) en (II)

$$a_N = 9t^2 \qquad \text{(IV)}$$

además sabemos que

$$a_T = \alpha R$$

$$\Rightarrow \ a_T = 3(1)$$

Reemplazando

$$\left(\Rightarrow \ a_T = 3m/s^2\right) \qquad \text{(V)}$$

(IV) y (V) en (I)

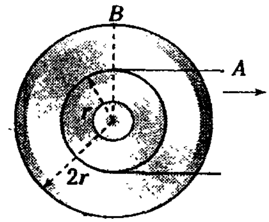
$$5 = \sqrt{(9t)^2 + 3^2}$$

Resolviendo se obtiene

$t = 2/3$ s

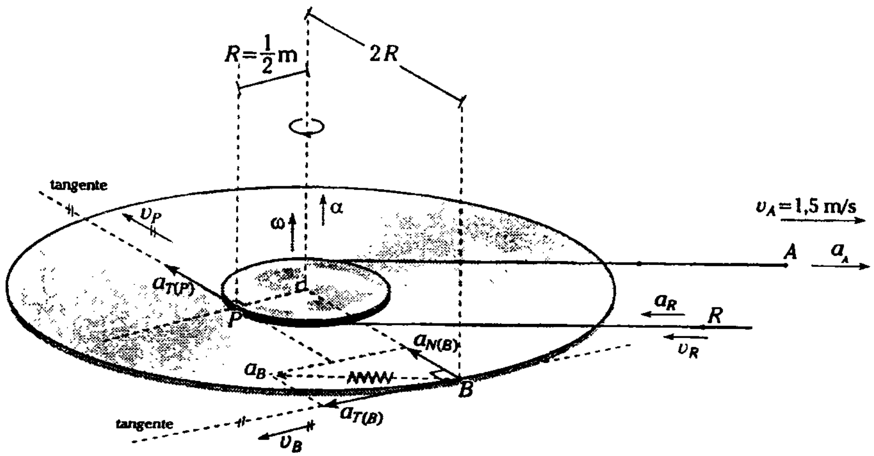
Problema 18

Las poleas que se muestran son concéntricas y solidarias, en cierto instante el punto A de la faja tiene una rapidez de 1,5 m/s y una aceleración constante de módulo 6 m/s². En ese instante determine el valor de la aceleración en el punto B (r=0,5 m).



Resolución

Como los puntos de la faja se desplazan con una aceleración constante, los puntos de la periferia del disco de menor tamaño tendrán una aceleración tangencial de módulo constante $\left(a_{T_{(A)}} = 6\text{m/s}^2\right)$ por lo tanto las poleas concéntricas rotan con una aceleración angular $\vec{\alpha}$ constante, tal como se muestra.



Ahora según el enunciado, debemos determinar el módulo de la aceleración $\vec{a}_B$ del punto B, en el instante que el punto A presenta una rapidez $v_A = 1{,}5$ m/s, donde

$$a_B = \sqrt{a_{N(B)}^2 + a_{T(B)}^2} \qquad \text{(I)}$$

pero $\quad a_{T(B)} = \alpha\,(2R) \qquad$ (II)

además $\quad a_{N(B)} = \omega^2(2R) \qquad$ (III)

(II) y (III) en (I)

$$a_B = \sqrt{(\omega^2(2R))^2 + (\alpha(2R))^2}$$

$$\Rightarrow \; a_B = 2R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

$$\Rightarrow \; a_B = 2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

$$\Rightarrow \; a_B = \sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \qquad \text{(IV)}$$

Según esta relación debemos encontrar la rapidez angular ω y el módulo de la aceleración angular $\vec{\alpha}$ con la que rotan las poleas concéntricas para poder determinar a_B; lo cual examinando el M.C.U.V. del punto P, el cual presentará la misma rapidez de todo los puntos de la faja, entonces

$$v_A = v_P = v_R = 1{,}5 \text{ m/s}$$

Asimismo $a_A = a_{T_P} = a_R = 6\text{m/s}^2$,

luego

$$\omega = \frac{v_P}{R} \;\Rightarrow\; \omega = \frac{1{,}5}{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \omega = 3\text{ rad/s}^2$$

además

$$a_{T(P)} = \alpha R$$

$$\Rightarrow \; 6 = \alpha\left(\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = 12\text{ rad/s}^2$$

Reemplazando estos resultados en (IV) obtenemos

$$a_B = \sqrt{3^4 + 12^2}$$

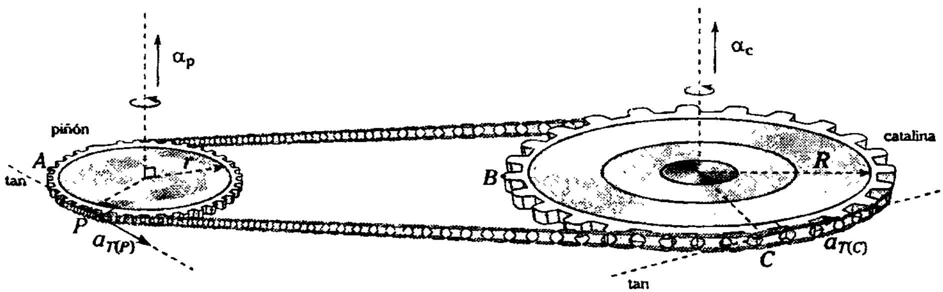
$$a_B = 15\text{ m/s}^2$$

Problema 19

Un ciclista inicia un M.R.U.V. y para ello pedalea. Si luego de 3 s de iniciado el movimiento el eje de catalina adquiere una frecuencia angular de 50 R.P.M., determine la aceleración angular que presenta el eje del piñón. (Considere $R_{\text{catalina}} = 10\text{ cm}$; $r_{\text{piñón}} = 8\text{ cm}$).

Resolución

Una vez que la catalina y el piñón inician su movimiento ($\omega_0 = 0$) los puntos A y B periféricos realizarán un M.C.U.V., tal como se muestra.



En el problema debemos determinar α_p por propiedad sabemos que como

$$a_p = a_c$$

$$\Rightarrow \alpha_p r = \alpha_c R$$

$$\Rightarrow \alpha_p = \alpha_c\left(\frac{R}{r}\right)$$

Reemplazando los radios de la catalina y el piñon

$$\Rightarrow \alpha_p = \alpha_c\left(\frac{10}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_p = \alpha_c\left(\frac{5}{4}\right) \qquad \text{(I)}$$

Según esta relación debemos encontrar α_c y así determinar α_p; para ello examinaremos el movimiento del punto B periférico de la catalina, donde luego de 3 s adquiere una frecuencia angular final (ω_F)

$$\omega_F = 50\,\text{rpm} = 50\frac{\text{vueltas}}{1\ \text{min}}$$

con lo cual tendremos

$$\omega_F = 50\left(\frac{2\pi\text{rad}}{60\ \text{s}}\right) = 2\pi\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_F = \frac{5\pi}{3}\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

Luego es conveniente usar

$$\omega_F = \cancel{\omega_0} + \alpha_c t$$

Reemplazando datos se tiene

$$\frac{5\pi}{3} = \alpha_c(3)$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \left(\frac{5\pi}{9}\right)\text{rad/s}^2$$

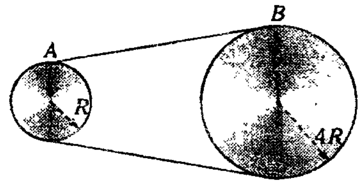
Reemplazando en (I)

$$\alpha_p = \left(\frac{5\pi}{9}\right)\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\therefore\ \alpha_p = \left(\frac{25}{36}\pi\right)\text{rad/s}^2$$

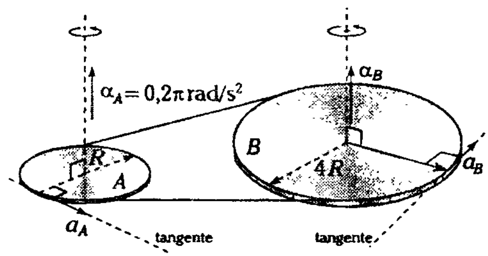
Problema 20

El rodillo A inicia su movimiento con una aceleración angular de módulo $0{,}2\pi$ rad/s^2. Este rodillo transmite su movimiento al rodillo B mediante una correa como se muestra en la figura. Determine transcurrido qué tiempo de iniciado el movimiento, el rodillo B presentará una frecuencia angular de 120 R.P.M..



Resolución

Según el enunciado, el rodillo A inicia su movimiento ($\omega_0 = 0$) con una aceleración angular constante de módulo $\alpha_A = 0{,}2\pi$ rad/s^2. Como el rodillo B está unido al rodillo A mediante una faja, necesariamente el rodillo B inicia su movimiento ($\omega_0 = 0$) en ese mismo instante con una aceleracion angular constante $\overrightarrow{\alpha_B}$; tal como se muestra.



Los rodillos al estar unidos por una correa, se verifica que

$$a_A = a_B$$

$$\Rightarrow \alpha_A \cancel{R} = \alpha_B(4\cancel{R})$$

$$0{,}2\pi = 4\alpha_B$$

$$\therefore\ \alpha_B = \frac{\pi}{20}\ \text{rad/s}^2$$

Según esto el rodillo B rota con una aceleración angular constante de módulo $\alpha_B = \frac{\pi}{20}$ rad/s^2.
Ahora determinemos el tiempo t que transcurre desde que los radios empiezan a moverse hasta que el rodillo B adquiere una frecuencia angular de 120 R.P.M. que equivale a una rapidez angular de

$$\omega_F = 120\frac{\text{vueltas}}{\text{minuto}} = 120\frac{(2\pi\text{rad})}{60\,\text{s}} = 4\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ahora empleamos la siguiente fórmula

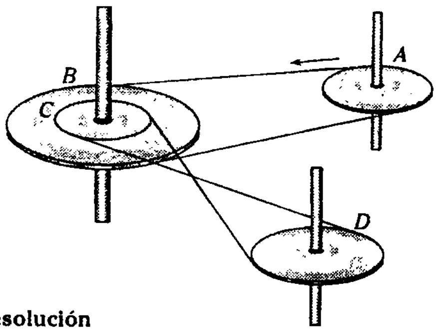
$$\omega_F = \cancel{\omega_0} + \alpha_B t$$

$$4\pi = \frac{\pi}{20}t$$

$$\therefore\ t = 80\,\text{s}$$

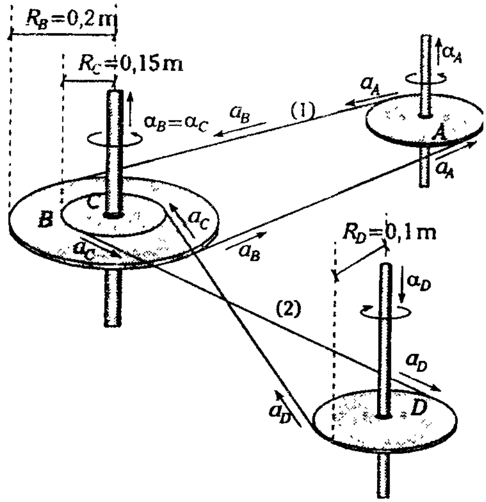
Problema 21

Un sistema de poleas está conectado mediante fajas, tal como se muestra en la figura; las poleas B y C son concéntricas y solidarias. Determine el módulo de la aceleración angular de la polea D sabiendo que la polea A tiene una aceleración tangencial de módulo constante e igual a 4 m/s^2. (Considere $r_B = 20$ cm ; $r_C = 15$ cm; $r_D = 10$ cm).



Resolución

Según el enunciado, la polea A rota con una aceleración tangencial constante de módulo a_A = 4 m/s^2; entonces las poleas B, C y D rotan necesariamente con una aceleración angular constante tal como se muestra.



Debemos determinar el módulo de la aceleración angular $\overrightarrow{\alpha_D}$. Como el módulo de la aceleración tangencial de todos los puntos de la faja (2) son iguales, entonces el módulo de la aceleración tangencial de la polea D y C serán iguales.

$$a_D = a_C$$

entonces

$$\alpha_D R_D = \alpha_C R_C$$

$$\alpha_D (0,1) = \alpha_C (0,15) \qquad \text{(I)}$$

siendo las poleas C y B concéntricas; las poleas rotan con igual aceleración angular

$$\alpha_C = \alpha_B \qquad \text{(II)}$$

Como

$$a_B = \alpha_B R_B$$

$$\Rightarrow\ a_B = \alpha_B (0,2) \qquad \text{(III)}$$

además el módulo de la aceleración tangencial de todo los puntos de la faja (1) es igual, en tal sentido el módulo de la aceleración tangencial de las poleas B y A es igual

$$a_B = a_A\text{; y como por dato } a_A = 4\text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow\ a_B = 4\,\text{m/s}^2$$

Reemplazando en (III) tendremos

$$\alpha_B = 20\,\text{rad/s}^2$$

Luego reemplazando en (II)

$\alpha_C = 20\ \text{rad/s}^2$

Finalmente en (I)

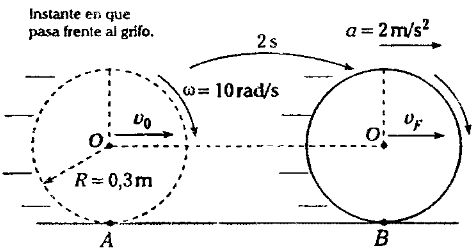
$\alpha_D = 30\ \text{rad/s}^2$

Problema 22

Un automóvil que va a desarrollar un M.R.U.V., inicia su movimiento con una aceleración cuyo módulo es $2\ \text{m/s}^2$. En el instante que pasa frente a un grifo una de sus ruedas, cuyos radios son 30 cm. tiene una rapidez angular de 10 rad/s. Determine la rapidez del automóvil, luego de 2 s de pasar por el grifo.

Resolución

Como el automóvil se traslada realizando un M.R.U.V., el centro de rueda (O) se traslada realizando un M.R.U.V.; y presenta igual velocidad de traslación que el automóvil en todo instante, tal como se muestra.

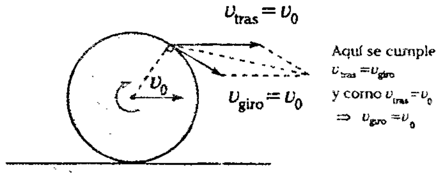


En el problema nos piden v_F; que es la rapidez del automóvil luego de 2 s de haber pasado frente al grifo. Examinando el M.R.U.V. del centro de la rueda se tiene

$v_F = v_0 + a_T t$

$\Rightarrow\ v_F = v_0 + 2(2)$ (I)

Recuerde que si la rueda se traslada sin deslizar, todos los puntos de la periferia se trasladan y también giran y la velocidad que presentan para ambos movimientos tiene igual módulo.



Ahora, con respecto del centro de la rueda v_0 es la rapidez tangencial de giro de todos los puntos de la periferia en ese instante, por lo tanto

$v_0 = \omega R$

$\Rightarrow\ v_0 = 10(0{,}3)$

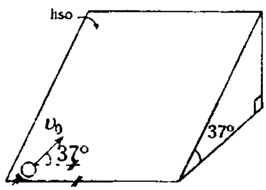
$\Rightarrow\ v_0 = 3\ \text{m/s}$

Finalmente reemplazamos en (I)

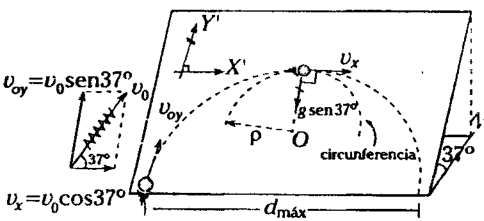
$v_F = 7\ \text{m/s}$

Problema 23

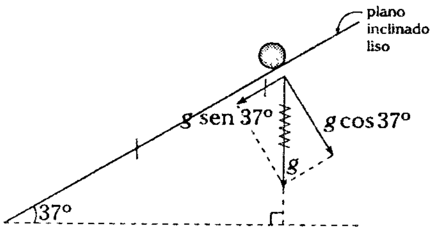
Sobre un plano inclinado se lanza una pequeña esfera con una rapidez v_0. Determine el radio de curvatura al pasar por su posición más alta. El plano inclinado forma un ángulo de 37° con la horizontal. ($g = 10\ \text{m/s}^2$ y $v_0 = 10\ \text{m/s}$)



Resolución



Se ha indicado que la aceleración de un cuerpo lanzado sobre un plano inclinado liso es igual a la componente de la aceleración de la gravedad paralela al plano, en este caso sería a=gsen37° tal como se muestra.



Si definimos un sistema de coordenadas X' e Y' tal como se muestra, entonces la aceleración g sen37° es paralela al eje Y'. Además es constante, por lo cual la trayectoria será parabólica en el plano.

El problema nos pide el radio de curvatura en la posición más alta del movimiento. Asociamos en ese instante una circunferencia imaginaria tangente a dicho punto de la trayectoria, tal como se muestra en el primer gráfico del problema. Observe que en este punto la aceleración de la esfera es g=sen37° es perpendicular a la velocidad por la cual viene a ser la aceleración normal $(\vec{a}_N)$ en este instante. Con ello tendremos

$$a_N=\frac{v^2}{\rho}$$

entonces

$$\rho=\frac{v^2}{a_N}$$

Como $a_N=g$ sen37° y $v=v_x=v_0\cos 37°$.

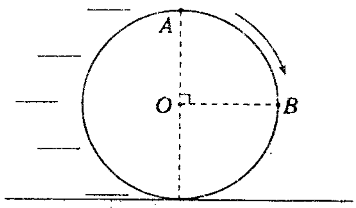
Reemplazando

$$\rho=\frac{(v_0\cos37°)^2}{g\,\mathrm{sen}37°}=\frac{\left[(10)\left(\frac{4}{5}\right)\right]^2}{10\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$\therefore\ \rho=\frac{32}{3}\,\mathrm{m}$$

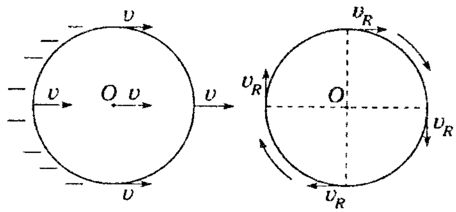
Problema 24

Si se muestra un disco que rueda sin deslizar. Determine la rapidez del punto A y B, si la rapidez de traslación del disco es u.

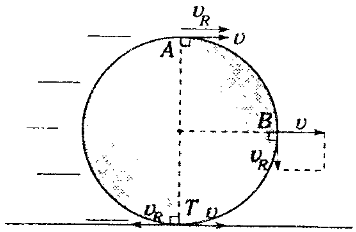


Resolución

El movimiento del disco resulta de combinar una traslación y rotación respecto de O.



Al componer los dos movimientos, los puntos periféricos del disco tienen dos velocidades



Como el disco no desliza, entonces el punto periférico T, respecto del piso está en reposo, es decir tiene velocidad nula. Se cumple por consiguiente que

$$v_R=v$$

Con esto concluimos que la rapidez de los puntos A y B sería:

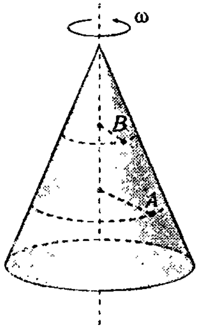
$$v_A=v+v_R \quad \text{y} \quad v_B=\sqrt{v^2+v_R{}^2}$$

$$\therefore\ v_A=2v \quad \text{y} \quad v_R=v\sqrt{2}$$

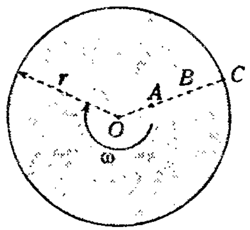
Problemas Propuestos

1. ¿Qué se puede afirmar de los puntos A y B del cono, si son puntos superficiales?

A) $\omega_A > \omega_B$
B) $v_A < v_B$
C) $v_A = v_B$
D) $\omega_A = \omega_B$
E) $\omega_A < \omega_B$



2. El disco de la figura rota con rapidez angular constante, con respecto a su centro. Si el módulo de las velocidades lineales de los puntos A y B son 20 cm/s y 40 cm/s respectivamente, determine el radio de dicho disco. ($OA = BC = 10$ cm)



A) 30 cm B) 35 cm C) 40 cm
D) 45 cm E) 50 cm

3. En un hipotético planeta de 28 800 km de radio, el día dura 32 h. Determine la rapidez tangencial de un punto ubicado sobre el paralelo de latitud 60° al norte del Ecuador.

A) 250π m/s B) 500π m/s C) $250\sqrt{3}\pi$ m/s
D) $125\sqrt{3}\pi$ m/s E) $500\sqrt{3}\pi$ m/s

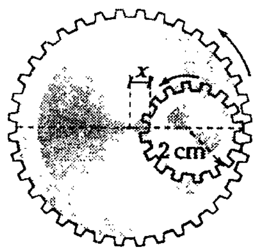
4. Dos móviles A y B describen un M.C.U. al seguir la misma trayectoria circunferencial y girando en el mismo sentido. Determine el tiempo que tarda el móvil más veloz en dar alcance al otro a partir del instante en que B se encuentra adelantado en un arco de 2π m. Considere $v_A = 8\pi$ m/s ; $v_B = 6\pi$ m/s

A) 0,5 s B) 1 s C) 1,5 s
D) 2 s E) 2,5 s

5. Un cilindro hueco de 3 m de largo gira alrededor de su eje con rapidez angular constante a razón de 100 R.P.M. y una bala disparada paralelamente al eje de rotación perfora las bases en dos puntos cuyos radios forman un ángulo de 8°. Determine la rapidez de la bala.

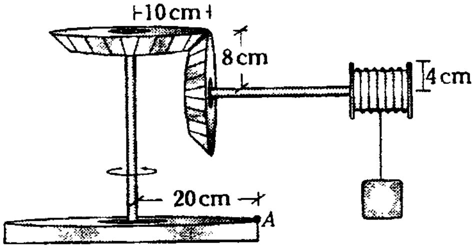
A) 205 m/s B) 400 m/s C) 225 m/s
D) 390 m/s E) 405 m/s

6. En el gráfico mostrado, las ruedas dentadas desarrollan un M.C.U. Determine x, si la relación del número de vueltas por segundo que da cada disco es $\frac{1}{3}$.



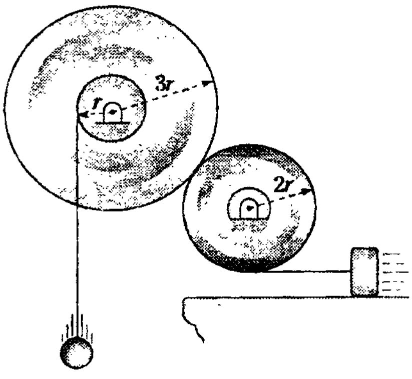
A) 0,2 cm B) 0,8 cm C) 1 cm
D) 1,6 cm E) 2 cm

7. El punto A de la polea presenta una rapidez lineal de 2 m/s. ¿Con qué rapidez se mueve el bloque?



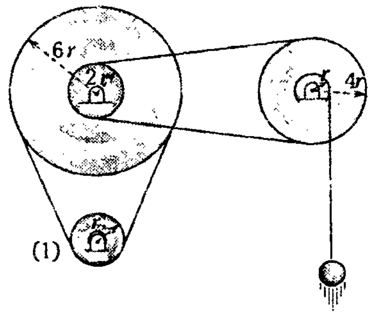
A) 2 m/s B) 1 m/s C) 1,5 m/s
D) 0,5 m/s E) 0,25 m/s

8. Del sistema de poleas que se indica, ¿con qué rapidez se mueve el bloque, si la esfera baja con una rapidez constante de 0,2 m/s?



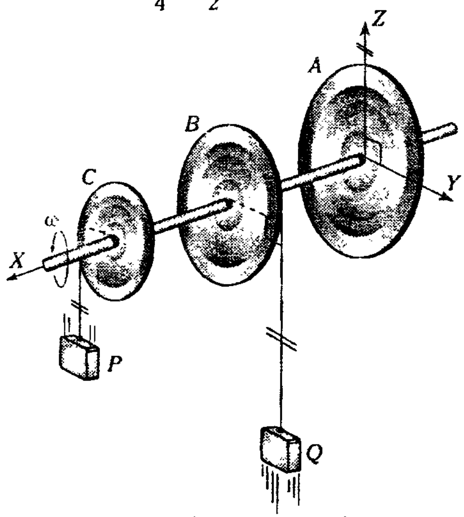
A) 0,1 m/s B) 0,2 m/s C) 0,3 m/s
D) 0,5 m/s E) 0,6 m/s

9. Del sistema de poleas se sabe que la polea 1 presenta una rapidez angular de 3 rad/s. En 5 s, ¿cuánto recorre la esfera? (r=24 cm)



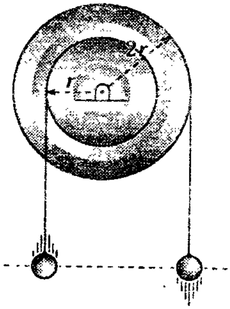
A) 10 cm B) 15 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 30 cm

10. En la figura mostrada la polea A tiene una rapidez angular constante y un punto de su periferia se mueve con 1/3 m/s; además la diferencia de coordenadas en el eje Z de los bloques pequeños P y Q es de 1 m. Determine el intervalo de tiempo que transcurre hasta que el bloque P y Q tengan la misma coordenada z. (Considere $\frac{R_A}{4}=\frac{R_B}{2}=R_C$)



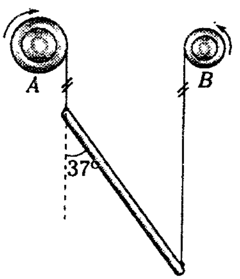
A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 5 s E) 6 s

11. Las esferas que se indican se mueven con rapidez constante. Si a partir de dicha posición transcurren 2 s para que se encuentren separados una distancia de 50 cm, ¿con qué rapidez angular se mueve la polea? (r = 10 cm)



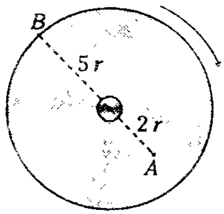
A) 1/3 rad/s B) 2/3 rad/s C) 3/4 rad/s
D) 5/4 rad/s E) 7/8 rad/s

12. Se muestra una barra de 0,75 m de longitud unido a cuerdas que están enrolladas a las poleas A y B de radios 6 cm y 4 cm respectivamente. Si las poleas rotan con una rapidez angular constante de 0,2 rad/s a partir del instante mostrado, ¿cuál es el intervalo de tiempo que transcurre hasta que la barra se coloca en posición horizontal?



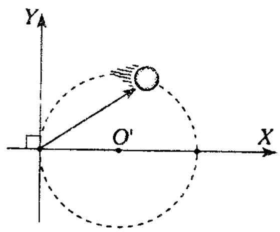
A) 100 s B) 150 s C) 200 s
D) 300 s E) 250 s

13. Se muestra un disco en posición vertical que desarrolla un M.C.U. En el instante mostrado, la partícula A presenta una aceleración $\vec{a}=(-3;4)\text{m/s}^2$ y la partícula B se desprende con una rapidez v. Determine v sabiendo que dicha partícula se desplaza 1,2 m para lograr rozar el disco.



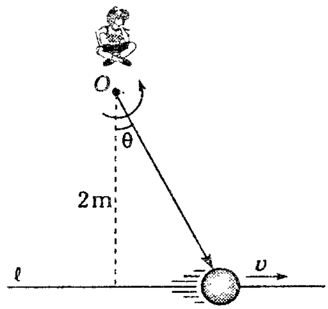
A) $\sqrt{2}$ m/s B) $2\sqrt{2}$ m/s C) $2{,}5\sqrt{2}$ m/s
D) $3\sqrt{2}$ m/s E) $4\sqrt{2}$ m/s

14. Se muestra una partícula que se mueve sobre una circunferencia de radio R. Si su vector posición rota uniformemente con una rapidez angular ω_0, determine el módulo de la aceleración centrípeta de dicha partícula.



A) $\frac{\omega_0^2 R}{2}$ B) $\omega_0^2 R$ C) $\frac{\omega_0^2 R}{4}$
D) $4\omega_0^2 R$ E) $2\omega_0^2 R$

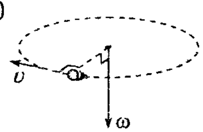
15. Una partícula se desplaza a lo largo de la recta ℓ. Un observador ubicado en O determina que su rapidez angular constante es igual a $\omega = 1$ rad/s. Determine la rapidez (v) de la partícula en el instante en que $\theta = 45°$.



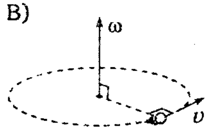
A) $\sqrt{2}$ m/s B) 2 m/s C) $2\sqrt{2}$ m/s
D) 4 m/s E) $4\sqrt{2}$ m/s

16. Una partícula efectúa un movimiento circunferencial, señale en qué caso están mal representadas las siguientes magnitudes. $\vec{a}_T$: aceleración tangencial ; $\vec{a}_{cp}$: aceleración centrípeta ; $\vec{\alpha}$: aceleración angular.

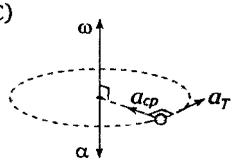
A)



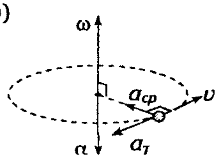
B)



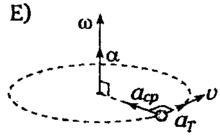
C)



D)



E)

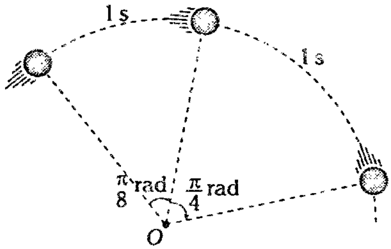


17. Indique cuál o cuáles de los enunciados son correctos.

I. En un M.C.U. la rapidez es constante y su velocidad es variable.

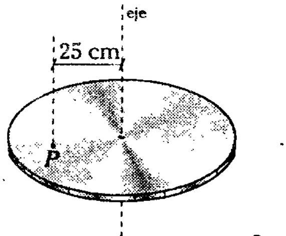
II. En un M.C.U.V. la velocidad del móvil y su aceleración son mutuamente perpendiculares.

III. Si el gráfico nos muestra un móvil que describe un M.C.U.V. entonces el módulo de su aceleración angular es $\alpha = \frac{\pi}{8}$ rad/s^2.



A) solo I B) I y II C) solo III
D) todos E) I y III

18. Si el disco mostrado a continuación empieza a rotar con una aceleración angular constante, en donde el radio de giro del punto P barre en dos segundos consecutivos $\frac{3}{4}\pi$rad y $\frac{5}{4}\pi$rad, determine la rapidez que presentará este punto cuando ha transcurrido 6 s de iniciado su movimiento.

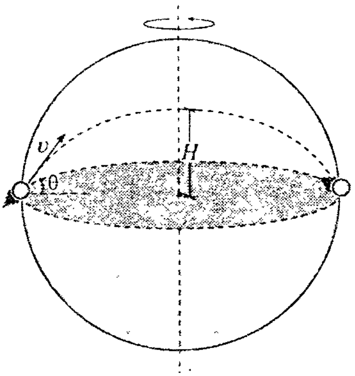


A) $\frac{\pi}{2}$ m/s B) π m/s C) $\frac{3}{4}\pi$ m/s
D) 2π m/s E) $\frac{5}{3}\pi$ m/s

19. Una partícula realiza un movimiento circunferencial. Si su rapidez lineal depende del tiempo según la expresión $v=0,5t$, donde v se expresa en m/s y t en segundos; determine la aceleración tangencial de la partícula cuando ha logrado dar una vuelta.

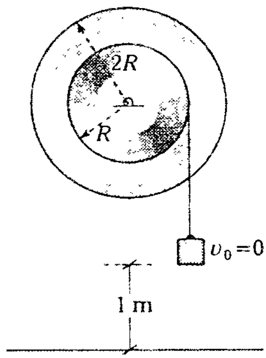
A) 0,2 m/s^2 B) 0,3 m/s^2 C) 0,4 m/s^2
D) 0,5 m/s^2 E) 0,6 m/s^2

20. En el instante mostrado la partícula es lanzada con una velocidad $\vec{v}$ y la esfera hueca inicia su movimiento de rotación con una aceleración angular constante de módulo 10π rad/s^2. Determine la máxima altura H que puede alcanzar la partícula, si esta logra impactar en el menor tiempo y en el mismo punto del cual fue lanzada. ($g=10$ m/s^2)



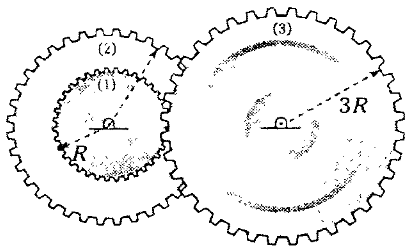
A) 0,25 m B) 0,5 m C) 0,75 m
D) 1 m E) 1,25 m

21. Luego de abandonar al bloque, las poleas concéntricas empiezan a rotar con una aceleración constante. Determine la aceleración tangencial que experimentaría un punto periférico de la polea de mayor dimensión en el instante que el bloque impacta en el piso con una rapidez de 1 m/s.



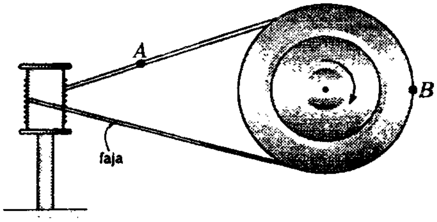
A) 0,3 m/s^2 B) 0,5 m/s^2 C) 0,8 m/s^2
D) 1 m/s^2 E) 1,2 m/s^2

22. Las ruedas (1) y (2) son concéntricas mientras que las ruedas (1) y (3) están engranadas. Si el eje de las ruedas concéntricas empieza a rotar con una aceleración angular constante; determine en qué relación se encontrará la aceleración lineal de un punto periférico de la rueda (2) y (3).



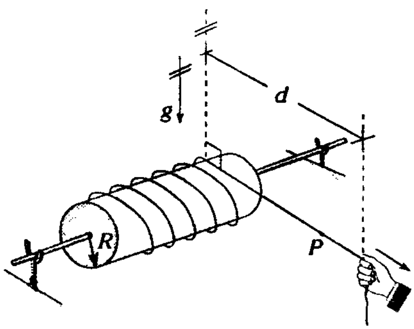
A) 1/2 B) 2/3 C) 3/2
D) 2 E) 8/4

23. Se presenta un sistema de poleas que empieza a rotar. Si en cada segundo, el punto A recorre π metros más; determine el módulo de la aceleración centrípeta del punto B de la polea al culminar la primera vuelta.



A) $4\pi^2$ B) $2\pi^2$ C) π^2
D) $1/2\pi^2$ E) $\pi^2/4$

24. En la figura, el hilo que se encuentra enrollado en el cilindro de madera es jalado tal como se muestra, de tal forma que el desplazamiento del punto P depende del tiempo. Si $d = t^2$; donde d se expresa en metros y t en segundos, determine la aceleración de un punto de la periferia del cilindro cuando $t = 1\,s$ ($R = 20\,cm$).



A) $\sqrt{\frac{101}{2}}\ m/s^2$ B) $\frac{\sqrt{101}}{4}\ m/s^2$ C) $\frac{2}{5}\sqrt{101}\ m/s^2$
D) $3\sqrt{101}\ m/s^2$ E) $2\sqrt{101}\ m/s^2$

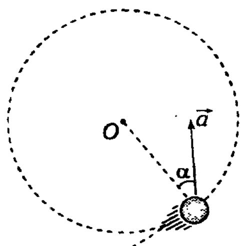
25. Una rueda rota con una aceleración angular constante de 4 rad/s^2. Si luego de 1 s de iniciado su movimiento un punto que equidista del eje de rotación y la periferia de la rueda presenta una aceleración de $\sqrt{17}\ m/s^2$, determine el diámetro de la rueda.

A) $\frac{\sqrt{19}}{4}m$ B) 2 m C) $\frac{\sqrt{3}}{2}m$
D) 1 m E) $\frac{1}{2}m$

26. Una partícula desarrolla un M.C.U.V. con un radio de giro de 4 m, donde la rapidez de la partícula varía con el tiempo según $v = (3 + 2t)$m/s donde t se expresa en segundos. Determine el módulo de la aceleración de la partícula en el instante $t = 0{,}5$ s.

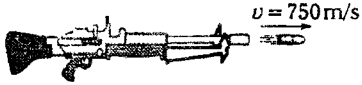
A) 2 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) $2\sqrt{5}\ m/s^2$
D) $2\sqrt{2}\ m/s^2$ E) $4\sqrt{3}\ m/s^2$

27. Se muestra una pequeña esfera que describe un M.C.U.V. sobre una circunferencia de radio 2 m. Si para el instante mostrado tiene una aceleración $\vec{a}$ de módulo 2,5 m/s^2; determine el módulo de su aceleración normal luego de 2 s. ($\alpha = 37°$)



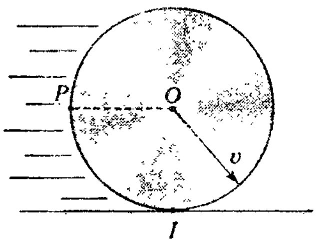
A) 7,5 m/s^2 B) 8,5 m/s^2 C) 6,25 m/s^2
D) 11,5 m/s^2 E) 12,5 m/s^2

28. Una bala de un rifle calibre 40 tiene una velocidad horizontal de salida de 750 m/s, ¿cuál es el radio de curvatura de la bala, un instante después que abandona el rifle? ($g=9{,}8$ m/s^2)?



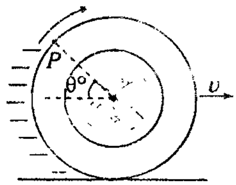
A) $5{,}73\times10^4$ m B) $6{,}4\times10^4$ m C) $4{,}5\times10^4$ m
D) $5{,}625\times10^4$ m E) $1{,}125\times10^4$m

29. El disco que se muestra rueda sin deslizarse, indique la proposición incorrecta.



A) El punto O solo experimenta traslación.
B) El punto I del disco, respecto de la superficie tiene velocidad nula.
C) Todos los puntos periféricos del disco respecto de O tienen igual rapidez.
D) Todos los puntos del disco experimentan un movimiento compuesto respecto de la superficie.
E) La velocidad del punto P respecto de la superficie forma 45° con la horizontal.

30. En el diagrama se muestra una rueda trasera de un camión que rueda sin deslizar. Si en el instante mostrado se desprende una partícula ubicada en P, determine el tiempo que tarda para encontrarse en el mismo nivel. ($\theta = 30°$ y $g = 10$m/s^2)

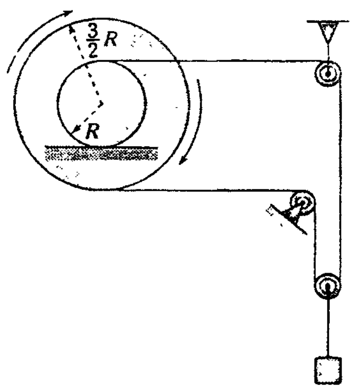


A) $v\sqrt{3}$ s
B) $\frac{v}{10}\sqrt{3}$ s
C) $\frac{v}{5}\sqrt{3}$ s
D) $\frac{v}{2}\sqrt{2}$ s
E) $\frac{v}{10}$ s

31. En una bicicleta estacionaria, ¿con qué rapidez angular se mueve la catalina? La rueda posterior se mueve con $\omega = \pi\frac{\text{rad}}{s}$ y la relación de radios entre la catalina y el piñón es 4?

A) π rad/s B) $\frac{\pi}{2}$ rad/s C) $\frac{\pi}{4}$ rad/s
D) $\frac{\pi}{6}$ rad/s E) $\frac{\pi}{8}$ rad/s

32. Determine la rapidez del bloque, si la rueda de radio 3/2 R da vueltas con una rapidez angular ω. Las ruedas son concéntricas y considere que no hay deslizamiento.

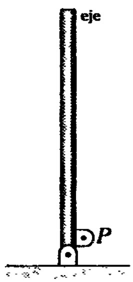


A) $\frac{3\omega}{4}R$
B) $\frac{\omega R}{2}$
C) $\frac{\omega R}{4}$
D) $\frac{2}{3}\omega R$
E) $\frac{4}{3}\omega R$

33. Una plataforma circular se encuentra inicialmente en reposo, cuyo radio es de 10 m, y la plataforma empieza a rotar con una aceleración angular $\alpha = 2\,\text{rad/s}^2$. Transcurridos 2 s un pequeño objeto que se encuentra a 6 m del eje de rotación se desprende de la plataforma y comienza a deslizar sobre ella. Determine la rapidez angular de la plataforma cuando el objeto la abandona. (Desprecie todo rozamiento)

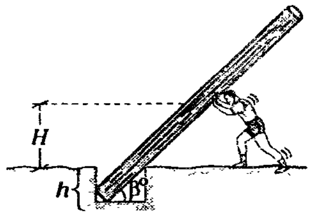
A) 14/3 rad/s B) 14/5 rad/s
C) 7/3 rad/s
D) 2/3 rad/s E) 7/4 rad/s

34. En el instante que el eje empieza a rotar con una aceleración angular constante α el dispositivo P empieza a moverse hacia el extremo del tubo con una rapidez constante v, respecto del eje. Determine la rapidez del dispositivo transcurrido t segundos de iniciada la rotación del eje.



A) $v\sqrt{1+\alpha^2 t^2}$ B) $2v\sqrt{\alpha+t}$
C) $v\sqrt{1+\alpha^2 t^4}$
D) $v\sqrt{1+\alpha t}$ E) $\sqrt{v+\alpha^2 t^4}$

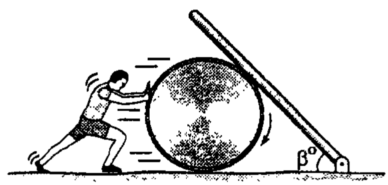
35. En el instante mostrado, el joven se encuentra empujando horizontalmente con una rapidez v al palo encebado. Determine la rapidez angular que experimenta el palo en dicho instante. (Considere $h << H$)



A) $vH\cos\beta$ B) $\dfrac{v}{H}\tan\beta$ C) $\dfrac{H}{v}\csc\beta$

D) $\dfrac{v}{H}\text{sen}^2\beta$ E) $\dfrac{H}{v}\cos^2\beta$

36. En el siguiente diagrama, se muestra a una persona empujando un cilindro, de tal manera que la barra lisa articulada se eleva con una rapidez angular ω. Para el instante mostrado, determine la rapidez angular con la que rota el cilindro (El cilindro no desliza por la superficie horizontal)



A) $\omega\tan\beta$ B) $\omega\sec^2\dfrac{\beta}{2}$ C) $\dfrac{\omega}{2\text{sen}^2\dfrac{\beta}{2}}$

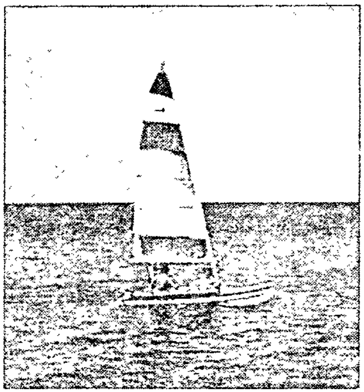
D) $\omega\text{sen}^2\beta$ E) $\omega\cos\beta$

CLAVES

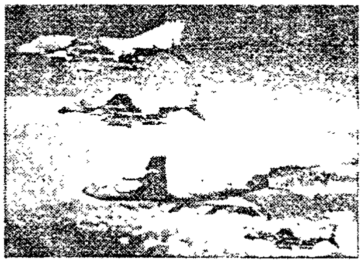
1	D	13	C	25	B
2	A	14	D	26	C
3	A	15	D	27	D
4	B	16	C	28	A
5	C	17	D	29	D
6	D	18	C	30	B
7	D	19	D	31	C
8	D	20	D	32	C
9	D	21	D	33	A
10	C	22	D	34	C
11	B	23	B	35	D
12	B	24	D	36	C

CAPÍTULO VI

Movimiento relativo



(a)



(b)

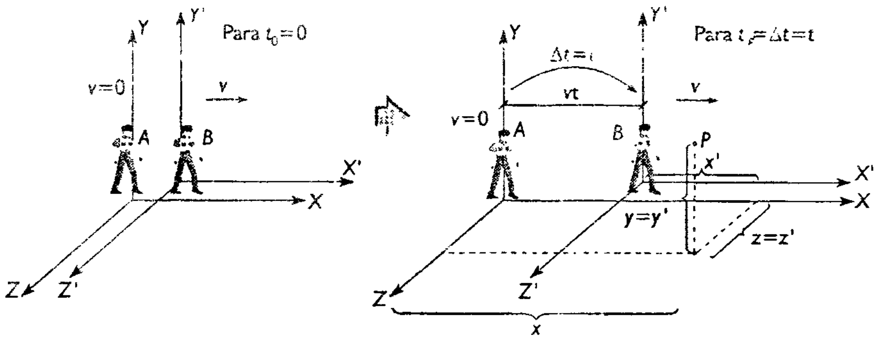
El movimiento mecánico de cualquier cuerpo o partícula tiene carácter relativo, ello lo vemos reflejado en un sin número de casos que se presentan ante nosotros. **Fig. (a)** Un bote con vela adquiere cierta velocidad respecto al agua debido al viento, pero la corriente de agua hará que para un observador en reposo ubicado en la tierra, el bote presente otra velocidad. **Fig. (b)** En la actualidad los aviones de caza se abastecen de combustible sin necesidad de aterrizar, para una vista desde la tierra los aviones se trasladan con igual velocidad, pero para el piloto del avión de caza, el avión que lo abastece de combustible no se mueve.

LECTURA

TRANSFORMADAS DE GALILEI

El análisis de un cuerpo desde un sistema en reposo y desde otro que se traslada uniformemente respecto del primero trae como consecuencia una relación entre las coordenadas (posición) del cuerpo medido desde cada sistema, dicha relación se denomina Transformadas de Galilei, en honor a Galileo Galilei quien estableció la relatividad del movimiento mecánico. Ahora hagamos la deducción de dichas transformadas.

Para ello consideremos dos observadores A y B (ubicados inicialmente en una misma posición) ligados a sistemas de coordenadas XYZ y $X'Y'Z'$ respectivamente, el observador A en reposo y B se traslada con velocidad constante respecto del primero a lo largo del eje x tal como se indica.



Si se empieza a analizar al punto P desde el sistema XYZ dicho punto está en reposo, mientras que respecto del sistema $X'YZ'$ estará en movimiento y por tanto sus coordenadas varían a medida que transcurre el tiempo. Del gráfico notamos que las coordenadas del punto P respecto del sistema XYZ y $X'YZ'$ son $(x, y; z)$ y $(x'; y'; z')$ respectivamente, las cuales guardarían la siguiente relación:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

Expresan las transformadas directas de Galilei

El principio de relatividad de Galileo, que es válido para los fenómenos mecánicos, afirma, que las mismas leyes de la mecánica son válidas en todos los sistemas en reposo o que se trasladan con velocidad constante. Ahora bien, ¿valdrá este principio para fenómenos no mecánicos, especialmente para aquellos en los cuales se tratan procesos eléctricos, magnéticos u ópticos?

Todos los problemas relativos a esta cuestión nos llevan de inmediato al punto inicial que motivó y permitió el desarrollo de la teoría de la relatividad especial o restringida, establecida por A. Einstein en 1905.

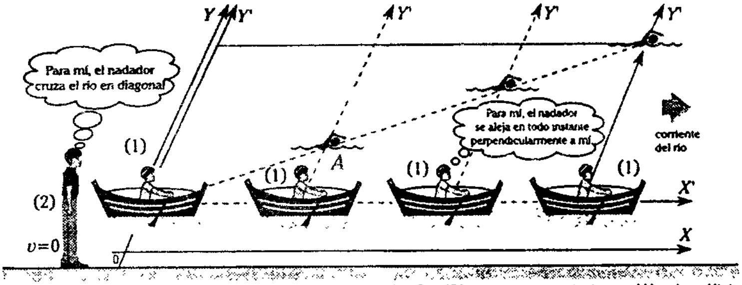
Movimiento relativo

OBJETIVOS

- Aprender a analizar el movimiento mecánico de un objeto respecto de otro en movimiento, es decir desde un sistema de referencia móvil.
- Aprender a determinar e interpretar la posición, velocidad y aceleración de un móvil relativo a otro, para luego hacer una descripción adecuada del movimiento del primero respecto del segundo.
- Conocer una nueva forma de enfocar el análisis de un movimiento, que permite simplificarla si lo comparamos con el análisis convencional que se hace, cuando ubicamos al observador en Tierra.
- Aprender a ver de qué manera están relacionadas las observaciones por diferentes observadores.

INTRODUCCIÓN

En nuestro estudio del movimiento mecánico hemos considerado el movimiento de una partícula, o de un cuerpo, con respecto a otro cuerpo, considerado fijo y por lo general ubicado en la Tierra; pero por experiencia propia sabemos que todo movimiento no necesariamente es analizado desde la Tierra. Por ejemplo, cuando observamos desde un automóvil en marcha el movimiento de una persona que corre sobre la pista. Asimismo, cuando observamos el movimiento de las gotas de lluvia desde la ventana de un ómnibus en movimiento.



El gráfico muestra los puntos de vista de un observador fijo (2) y otro en movimiento (1), el análisis del nadador respecto del observador (1) y (2) refleja la relatividad del movimiento mecánico.

El movimiento de un cuerpo analizado desde un sistema de referencia móvil se denomina movimiento relativo o también, movimiento de un cuerpo A con respecto a otro B, también en movimiento.

En el pasado, el hombre buscó la manera de definir el movimiento mecánico absoluto, es decir, respecto de un sistema único en reposo (fijo), se escogió primero a las estrellas que en esos tiempos se consideraban inmóviles, luego se planteó que el espacio estaba lleno de una sustancia especial llamada éter con propiedades muy contradictorias y se definió al movimiento absoluto como el movimiento de un cuerpo respecto del éter. Posteriormente se hicieron experimentos para probar la existencia de tal sistema absoluto, lo cual siempre resultó negativo, de ahí que se desechó esta idea y se concluyó que no existe el movimiento mecánico absoluto, el movimiento mecánico es relativo, lo absoluto es la materia y su constante movimiento y transformación.

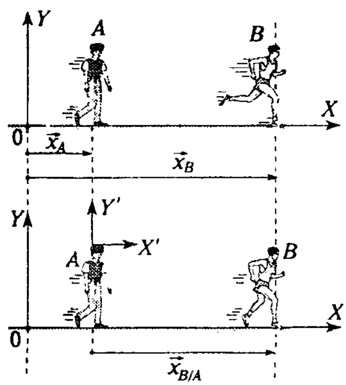
MOVIMIENTO MECÁNICO RELATIVO

La relatividad del movimiento mecánico se ha planteado anteriormente y su análisis se realizó respecto de la Tierra (sistema fijo, en reposo). En esta ocasión el movimiento mecánico de los cuerpos o partículas será analizado desde sistemas de referencia móviles.

Veamos las magnitudes cinemáticas que nos permitirán estudiar y describir el movimiento mecánico relativo, según sus características

POSICIÓN RELATIVA $\left(\vec{x}_{B/A}\right)$

Consideremos dos personas A y B que corren a lo largo del eje X. Sus posiciones estarán denotadas por $\vec{x}$.



A partir de estos gráficos tenemos que:

$\vec{x}_A$: posición de A respecto del sistema de coordenadas $X-Y$.

$\vec{x}_B$: posición de B respecto del sistema de coordenadas $X-Y$.

$\vec{x}_{B/A}$: posicion de B respecto de A (respecto del nuevo sistema de coordenadas $(X'-Y')$.

De acuerdo a la gráfica mostrada

$$\vec{x}_B = \vec{x}_A + \vec{x}_{B/A}$$

$$\boxed{\vec{x}_{B/A} = \vec{x}_B - \vec{x}_A} \qquad (1)$$

Ejemplo 1

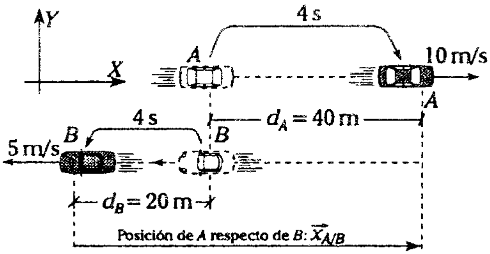
Dos automóviles A y B viajan en vías paralelas horizontales con velocidades constantes de $+10$ m/s y -5 m/s respectivamente. Determine la posición del automóvil A respecto de B luego de 4 segundos contados desde el instante del cruce de automóviles.

Resolución

Según los valores y signos de las velocidades planteamos que

- El automóvil A viaja a razón de 10 m/s hacia la derecha, entonces durante 4 s habrá recorrido 40 m también hacia la derecha.
- El automóvil B viaja a razón de 5 m/s hacia la izquierda, entonces durante 4 s habrá recorrido 20 m hacia la izquierda.

Entonces con este razonamiento podemos representar gráficamente lo que sucedió.



de donde, observamos y deducimos que

$\vec{x}_{A/B} = +60$ m

De la figura, ¿cuál sería la posición de B respecto de A? En este caso la referencia es A, desde allí hacia B tenemos que

$\vec{x}_{B/A} = -60$ m

Observación

Después de ver este primer ejemplo, vemos que la posición de un primer cuerpo (A) respecto de un segundo (B) no es igual a la posición del segundo (B) respecto del primero (A); es decir $\vec{x}_{A/B} \neq \vec{x}_{B/A}$ pero si verifican que

$$\vec{x}_{A/B} = -\vec{x}_{B/A}.$$

Ejemplo 2

Dos atletas, A y B, están separados 10 m inicialmente, de modo que B está delante de A desplazándose horizontalmente con $\vec{v}_B = +3$ m/s y $\vec{v}_A = +2$m/s . Determine la posición del atleta A respecto de B luego de 6 s.

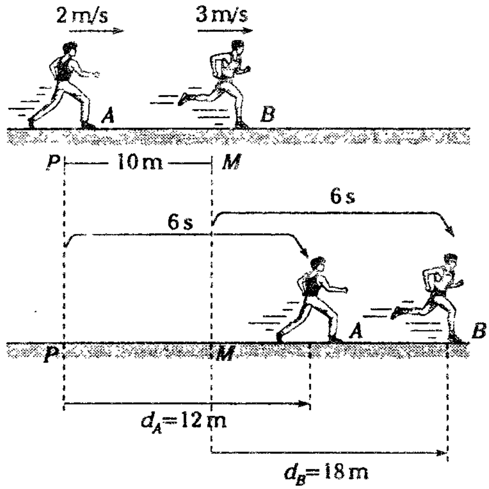
Resolución

De acuerdo al valor y signo de las velocidades

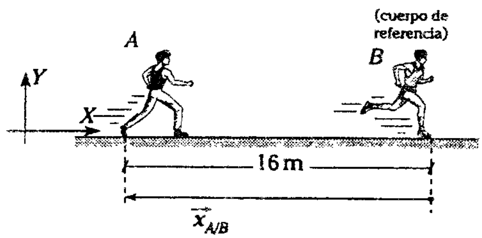
- el atleta A avanza con 2 m/s hacia la derecha, entonces durante 6 s recorrerá 12 m hacia la derecha.
- el atleta B avanza con 3 m/s hacia la derecha, luego en 6 s recorrerá 18 m también hacia la derecha.

Considerando estas interpretaciones, la condición inicial de sus ubicaciones planteamos en un gráfico lo que ocurre.

Al inicio:



Por lo tanto luego de 6 s, los atletas A y B quedan separados; según la figura es $(10 + 18) - 12 = 16$m. Entonces podemos graficar; si tomamos referencia en B y trazamos el vector hacia A. Así tenemos

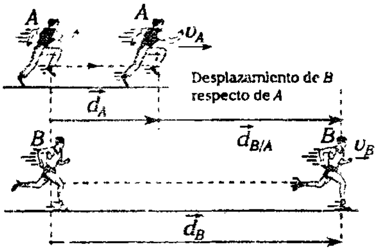


$\Rightarrow \vec{x}_{A/B} = (-)16$ m

VELOCIDAD RELATIVA $(\vec{v}_{B/A})$

Al igual que la posición relativa, es posible obtener la velocidad de un cuerpo con respecto a un sistema de referencia en movimiento. Esta velocidad es llamada velocidad relativa del cuerpo respecto al sistema en movimiento o simplemente velocidad relativa.

En el siguiente gráfico se ha considerado el movimiento rectilíneo uniforme de los atletas A y B.



Si tomamos como referencia al atleta A, el desplazamiento de B respecto de A será $\vec{d}_{B/A}=\vec{d}_B-\vec{d}_A$. Si dividimos la relación anterior entre el tiempo transcurrido (t) que para ambos es el mismo, tendremos

$$\frac{\vec{d}_{B/A}}{t}=\frac{\vec{d}_B}{t}-\frac{\vec{d}_A}{t}$$

$$\boxed{\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A} \qquad \text{(II)}$$

Ecuación de la velocidad relativa de B respecto de A.

donde

$\vec{v}_{B/A}$: es la velocidad relativa del atleta B respecto del atleta A;

$\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$: son las velocidades de los atletas A y B respecto de tierra (o sea respecto de un observador fijo en tierra).

Observación

La obtención de la fórmula (II) también se pudo haber hecho a partir de la ecuación (I):

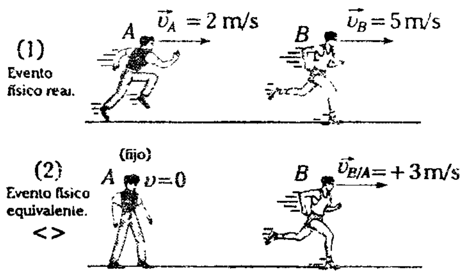
$$\vec{x}_{B/A}=\vec{x}_B-\vec{x}_A$$

Para ello se tendría que derivar cada término respecto del tiempo, es decir

$$\frac{d\,\vec{x}_{B/A}}{dt}=\frac{d\,\vec{x}_B}{dt}-\frac{d\,\vec{x}_A}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A}$$

¿Como interpretar físicamente $\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$? La ecuación de la velocidad relativa de B respecto de A implica que es la velocidad medida de B desde el punto de vista de A. ¿Cómo se considera a A? Cuando se analiza el movimiento de un cuerpo respecto de otro en movimiento, al cuerpo de referencia durante el análisis se le considera fijo (en reposo), entonces podemos establecer la siguiente equivalencia física.



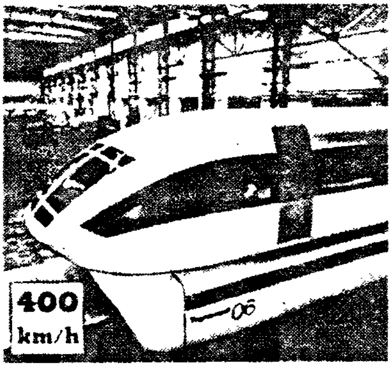
¿Por qué son equivalentes las situaciones físicas? Porque desde tierra notamos que simultáneamente

- B se aleja de A 5 m en 1 s.
- A se acerca a B 2 m en 1 s.

Por lo tanto descubrimos que predomina el alejamiento de B respecto de A en $5-2=3$ m en 1 s. Entonces afirmaremos que B se aleja de A con 3 m/s, lo que es equivalente a graficar el esquema anterior donde consideramos a A fijo y B se aleja con la velocidad relativa $\vec{v}_{B/A}=+3$ m/s.

Conclusión

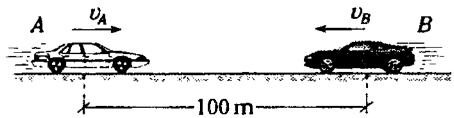
Cuando se defina y conozca la velocidad relativa de un cuerpo P respecto de otro cuerpo Q podemos considerar fijo a Q (en reposo) y que P avanza respecto de Q con la velocidad $\vec{v}_{P/Q}$.



En los países europeos hay trenes que se desplazan sobre un ***colchón*** *magnético que les permite alcanzar hasta 400 km/h. Un pasajero que va sentado en dicho tren al observar a una persona delante, en la estación, señalaría que dicha persona se le aproxima con 400 km/h.*

Ejemplo 3

En la figura mostrada, los automóviles A y B se desplazan horizontalmente con velocidades constantes de +5 m/s y −3 m/s respectivamente. Determine la velocidad relativa de un automóvil respecto del otro y la distancia que avanza un automóvil respecto al otro en un intervalo de 4 segundos.

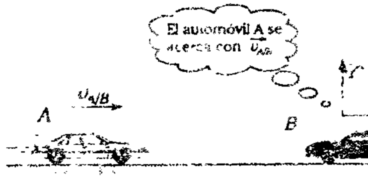


Resolución

En este caso cualquiera de los conductores podrá ser considerado el cuerpo móvil de referencia.

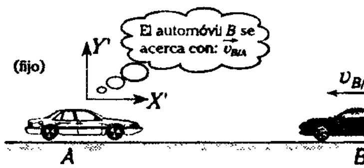
- ¿Como hallamos la velocidad relativa?
  Podemos considerar la velocidad de B respecto de A, es decir el automóvil A es el cuerpo de referencia. Entonces se tiene que:
  $$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$
  luego reemplazamos
  $$\vec{v}_{B/A} = (-3) - (+5)$$
  $$\Rightarrow \quad \vec{v}_{B/A} = -8 \text{ m/s}$$

Sistema físico equivalente



Esto significa que para el conduc... automóvil A, el automóvil B se desp... izquierda (por el signo negativo) c... rapidez constante de 8 m/s.

- Si ahora analiza el conductor del au... B, al automóvil A, el cuerpo de refer... ahora el automóvil B.
  En este caso
  $$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$
  $$\vec{v}_{A/B} = (+5) - (-3)$$
  $$\Rightarrow \quad \vec{v}_{A/B} = +8 \text{ m/s}$$



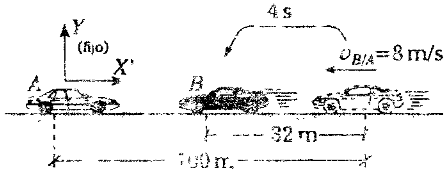
Esto significa que para el conduc... automóvil B, el automóvil A se desp... derecha (por el signo positivo) c... rapidez constante de 8 m/s.

Nótese en estos dos casos que las velo... relativas de A respecto de B y de B r... de A son de igual módulo y de dire... contrarias.

$$\boxed{v_{A/B} = v_{B/A}} \quad \wedge \quad \boxed{\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A}}$$

El signo (–) nos indica que son de dire... contrarias.

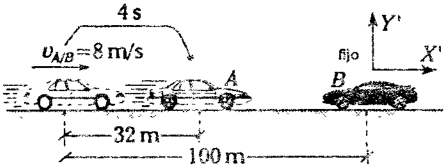
- ¿Cómo hallamos la distancia relativa?



Para el conductor del automóvil A, el automóvil B se le acerca con una rapidez constante de 8 m/s por consiguiente, en 4 s se acercará

$$d_{B/A} = v_{B/A}t$$

$$d_{B/A} = (8)(4) = 32 \text{ m}$$

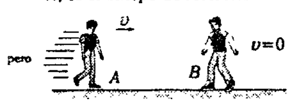


Por otro lado, debido a que el automóvil A se desplaza con 8 m/s respecto de B durante los 4 s también habrá recorrido 32 m acercándose a B supuestamente fijo.

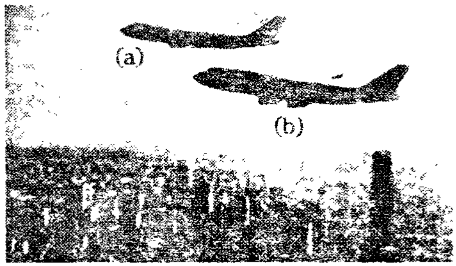
Observación

Normalmente hemos analizado el movimiento de un cuerpo respecto de otro en reposo, pero si se analiza al cuerpo en reposo respecto del que se mueve, este último notará que no hay cuerpo en reposo, es decir el cuerpo que respecto de Tierra está en reposo, para él presenta movimiento mecánico.

A, es el cuerpo de referencia



Si B, es el cuerpo de referencia A se mueve con v.



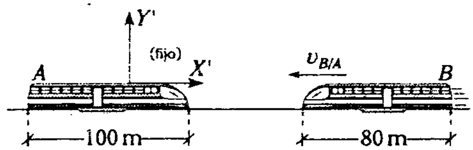
Al tomarse la fotografía el avión (b) era más rápido que el avión (a). El piloto del avión (b) tendrá la impresión que el avión (a) se le acerca (movimiento hacia la derecha según la foto)

Ejemplo 4

Dos trenes de 100 m y 80 m de longitud se desplazan en vías paralelas con rapidez constante de 15 m/s y 10 m/s, respectivamente, y en direcciones opuestas. Determine el intervalo de tiempo que controla cada conductor cuando el otro tren pasa delante de él.

Resolución

Como primer caso consideremos que el conductor del tren más largo (A) analiza al otro tren (B), es decir que A es la referencia y en tal sentido lo consideramos fijo; por lo tanto podemos plantear el siguiente sistema físico equivalente.

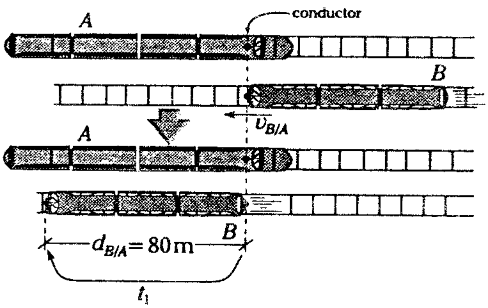


Ahora debemos determinar la velocidad de B respecto de A, por lo que planteamos

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (-10) - (+15)$$

$$\vec{v}_{B/A} = -25 \text{ m/s}$$

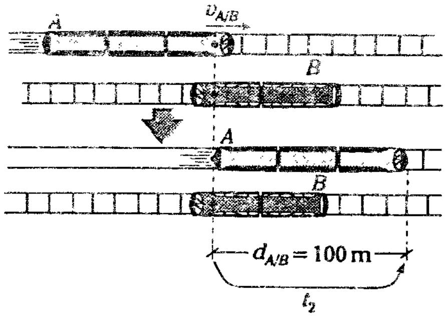
El conductor en el tren A controla el tiempo que emplea el tren B en pasarlo, este tiempo se mide desde que la parte delantera de B pasa delante de él hasta que lo hace la parte posterior. Analicemos gráficamente el movimiento del tren B respecto de A visto desde arriba.



Del gráfico podemos notar que el tren B debe recorrer una distancia de 80 m (igual a su longitud) respecto del tren A, para lograr pasar totalmente delante del conductor ubicado en A. Como la velocidad de ambos trenes respecto de tierra es constante, entonces la velocidad relativa de B respecto de A también lo será. Por lo tanto B respecto de A desarrolla un M.R.U., así para determinar t_1 podemos plantear

$$t_1 = \frac{d_{B/A}}{v_{B/A}} = \frac{80\,\text{m}}{25\,\text{m/s}} = 3{,}2\ \text{s}$$

Análogamente a lo anterior, podemos determinar el tiempo que controla el conductor B cuando A pasa delante de él. Tener en cuenta que el movimiento de A respecto de B también es un M.R.U. Calculemos la $\vec{v}_{A/B}$.

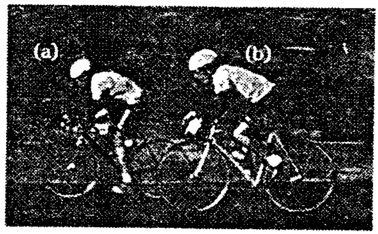


La velocidad de A respecto de B viene dada

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} = -(-25) = +25\ \text{m/s}$$

Del gráfico, podemos notar que A debe recorrer 100 m respecto de B para pasar completamente delante de él. Por consiguiente

$$t_2 = \frac{d_{A/B}}{v_{A/B}} = \frac{100\,\text{m}}{25\,\text{m/s}} = 4\ \text{s}$$



Los ciclistas se trasladan con igual velocidad. Debido a ello el ciclista (b) al observar la llanta posterior del otro ciclista solo la notaría rotar, ya que para él, (a) no se traslada.

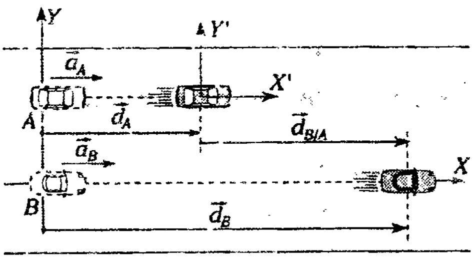
ACELERACIÓN RELATIVA $(\vec{a}_{B/A})$

Por lo planteado en los capítulos anteriores, para una descripción cinemática adecuada del movimiento mecánico de un cuerpo se necesita además de la posición y la velocidad la aceleración.

Por ello en estas condiciones para el movimiento relativo también es necesario definir la aceleración relativa.

La aceleración de un cuerpo en movimiento medido desde un observador también en movimiento se le denomina aceleración relativa del cuerpo. Ahora para determinar la ecuación para su cálculo podemos considerar el siguiente caso:

En el gráfico adjunto, tenemos que los automóviles A y B inician su movimiento con una aceleración constante, respecto de tierra y en forma simultánea. ¿Qué podemos notar?



Al transcurrir un intervalo de tiempo t, los automóviles han experimentado, respecto de tierra los desplazamientos $\vec{d}_A$ y $\vec{d}_B$. Si ubicamos un sistema de referencia en el automóvil A, determinaremos que el desplazamiento de B respecto de A es

$$\vec{d}_{B/A}=\vec{d}_B-\vec{d}_A$$

Como los automóviles se trasladan en línea recta y con aceleración constante, desarrollan M.R.U.V. Entonces planteamos

$$\vec{d}_{B/A}=\frac{1}{2}\vec{a}_B\,t^2-\frac{1}{2}\vec{a}_A\,t^2$$

Multiplicando ambos miembros por el factor $2/t^2$ tendremos

$$\left(\frac{2}{t^2}\right)\vec{d}_{B/A}=\left(\frac{2}{t^2}\right)\times\frac{1}{2}\vec{a}_B\,t^2-\left(\frac{2}{t^2}\right)\times\frac{1}{2}\vec{a}_A\,t^2$$
$$=\vec{a}_B-\vec{a}_A \qquad \text{(I)}$$

Del M.R.U.V. se sabe que cuando un cuerpo inicia su movimiento el desplazamiento que experimenta es

$$\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \Rightarrow \frac{2}{t^2}\vec{d}=\vec{a}$$

Por lo tanto, comparando con la expresión (I) se obtiene que

$$\boxed{\vec{a}_{B/A}=\vec{a}_B-\vec{a}_A}$$

entonces $\vec{a}_{B/A}$ es la aceleración relativa del móvil B respecto de A y $\vec{a}_B$, $\vec{a}_A$ son la aceleración de B y A respecto de un observador ubicado en tierra respectivamente.

Observación

La fórmula de la aceleración relativa $\left(\vec{a}_{B/A}\right)$; también se puede obtener directamente derivando respecto del tiempo la ecuación de la velocidad relativa; es decir

$$\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$$

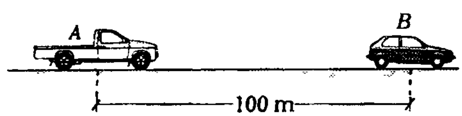
derivando respecto del tiempo todos los términos

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{B/A}=\frac{d\vec{v}_B}{dt}-\frac{d\vec{v}_A}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_{B/A}=\vec{a}_B-\vec{a}_A}$$

Ejemplo 5

Los automóviles mostrados A y B inician su movimiento hacia la derecha en la posición mostrada, con aceleraciones constantes de $+4\ m/s^2$ y $+1\ m/s^2$ respectivamente. Respecto del conductor del vehículo B, determine la aceleración del vehículo A y la distancia que este avanza en los 4 primeros segundos.



Resolución

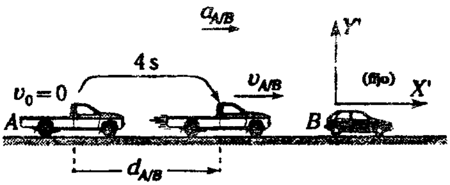
- Cálculo de la aceleración relativa
 Tienen aceleraciones con signo (+) significa que empezaran a moverse hacia la derecha.

Como en este caso el sistema de referencia es el vehículo *B*, la aceleración relativa de *A* respecto de *B* será

$$\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_A-\vec{a}_B=(+4)-(+1)$$

$$\vec{a}_{A/B}=+3\ \text{m/s}^2$$

- Cálculo de la distancia relativa
 Para el conductor del vehículo *B*, el vehículo *A* se encuentra inicialmente en reposo y luego desarrolla un M.R.U.V., porque su aceleración relativa $(\vec{a}_{A/B})$ es constante y su trayectoria es recta luego



$$\vec{d}_{A/B}=\vec{v}_0\,t+\frac{1}{2}\vec{a}_{A/B}\,t^2$$

$$\vec{d}_{A/B}=0+\frac{1}{2}(+3)(4)^2$$

$$\Rightarrow\ \vec{d}_{A/B}=+24\,\text{m}$$

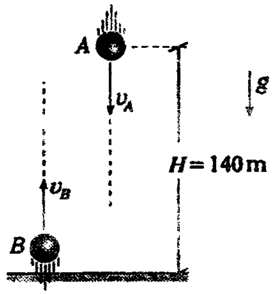
Esto significa que para el conductor del vehículo *B* después de 4 segundos el vehículo *A* se desplazó 24 m a la derecha (se le acercó).

Observación

Conociendo la aceleración relativa, también se puede determinar la velocidad relativa para cualquier instante de tiempo.

Ejemplo 6

En la figura mostrada las esferas *A* y *B* son lanzadas simultáneamente con rapidez de [illegible]0 m/s y 40 m/s respectivamente. Determine el intervalo de tiempo que transcurre a partir del instante de lanzamiento hasta cuando las esferas se cruzan ($g=10\,\text{m/s}^2$)



Resolución

Para desarrollar este ejemplo podemos recurrir a las nociones antes vistas del M.V.C.L., pero la intención en este capítulo es aplicar el movimiento relativo y para ello vamos a considerar el análisis de *A* respecto de *B* (fijo).

Para que el móvil *B* observe que *A* lo cruza (movimiento relativo), *A* debe recorrer los H = 140 m con velocidad y aceleración relativa respecto de él. Para el móvil *B* y el móvil *A* sus aceleraciones respecto a tierra son $\vec{g}$, porque ambos realizan caída libre. Luego, la aceleración de *A* respecto de *B* será

$$\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_A-\vec{a}_B=(-g)-(-g)$$

$$\vec{a}_{A/B}=\vec{0}$$

Esto significa que para el móvil *B*, el móvil *A* no tiene aceleración; esto implica que la velocidad de *A* respecto de B $(\vec{v}_{A/B})$ no varía, es decir permanece constante en otras palabras *A* para *B* experimentará M.R.U.; ahora para el instante inicial se puede determinar la velocidad de *A* respecto de *B* $(\vec{v}_{A/B})$ y esta será la misma en todo instante.

Entonces usamos

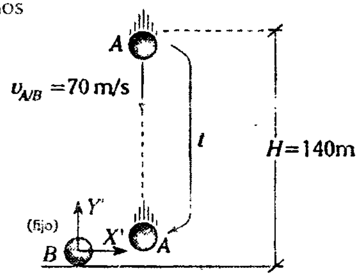
$$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$$

$$\vec{v}_{A/B}=(-30\hat{j})-(+40\hat{j})=-70\hat{j}\ \text{m/s}$$

$$\therefore\ \vec{v}_{A/B}=-70\hat{j}\ \text{m/s}$$

Esto significa que para el móvil B, el móvil A tiene una velocidad constante de 70 m/s y dirigida hacia abajo.

Veamos



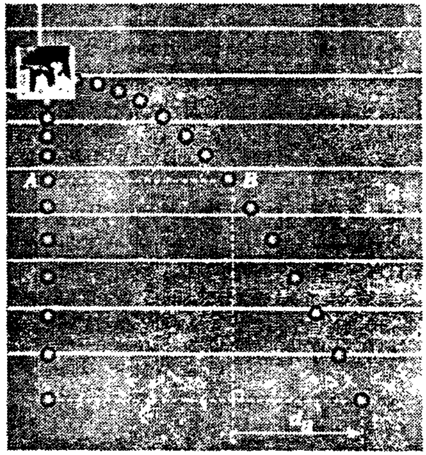
Ahora para determinar t, usamos:

$$d_{A/B}=v_{A/B}\,t \Rightarrow H=70t$$
$$140=70t$$
$$\therefore t=2\text{ s}$$

Esto significa que el móvil A cruza al móvil B después de 2 segundos de estar separados 140m.

Observación

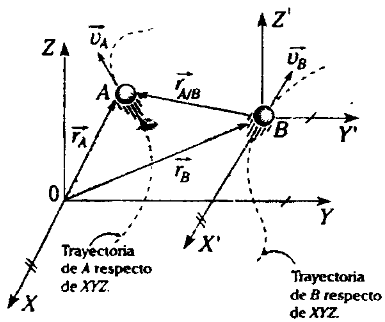
Si se determina el intervalo de tiempo que demoran en cruzarse A y B, analizando sus movimientos respecto a tierra, observará que la respuesta es la misma. Esto es consecuencia de que el tiempo en la mecánica clásica es considerado absoluto y la medida que se haga sobre él siempre será la misma, así se trabaje desde un sistema en reposo o en movimiento. Cuando dos cuerpos o más están en caída libre ($\vec{a}=\vec{g}$ constante), un cuerpo respecto a otro, siempre desarrolla un M.R.U., porque la aceleración relativa es nula.



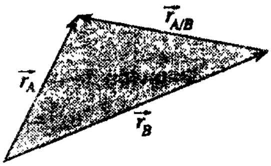
Las dos esferas están en caída libre, es decir tienen una aceleración común. Si un observador pudiese colocarse sobre la esfera A notaría que la esfera B se desplaza hacia la derecha con velocidad constante.

CASO GENERAL DE MOVIMIENTO RELATIVO

Sabemos que los movimientos de los cuerpos en la vida cotidiana no solo se realizan en una dirección sino que en un caso general lo hacen en varias direcciones; por ello se requiere de sistemas de referencia espaciales (X, Y, Z) para poder analizarlo. El movimiento relativo de un móvil respecto de otro como se indica en el siguiente gráfico



Consideremos que el cuerpo de referencia es B, es decir el móvil A será analizado por B donde se encuentra el sistema de referencia $X'Y'Z'$. El sistema de referencia XYZ está ubicado en un lugar fijo, ligado a tierra, respecto al cual se traslada el sistema $X'Y'Z'$. Los tres vectores $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ y $\vec{r}_{A/B}$ se pueden relacionar del triángulo vectorial que han formado, obteniéndose



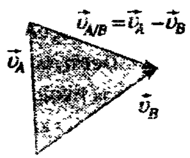
$$\vec{r}_A=\vec{r}_B+\vec{r}_{A/B}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{r}_{A/B}=\vec{r}_A-\vec{r}_B}$$

Ecuación de la posición relativa

La velocidad relativa de A respecto de B $\left(\vec{v}_{A/B}\right)$ se puede obtener derivando a la relación $\vec{r}_{A/B}=\vec{r}_A-\vec{r}_B$, respecto al tiempo.



$$\frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt}=\frac{d\vec{r}_A}{dt}-\frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B}$$

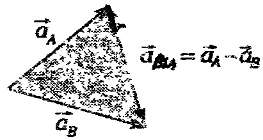
Ecuación de la velocidad relativa

donde

$\vec{v}_{A/B}$: velocidad relativa de A respecto a B

$\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$: velocidades de los móviles A y B respecto a un lugar fijo.

De igual forma la aceleración relativa de A respecto a B $\left(\vec{a}_{A/B}\right)$ se puede obtener derivando a la relación $\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$, respecto al tiempo, obteniéndose



$$\frac{d\vec{v}_{A/B}}{dt}=\frac{d\vec{v}_A}{dt}-\frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_A-\vec{a}_B}$$

Ecuación de la aceleración relativa

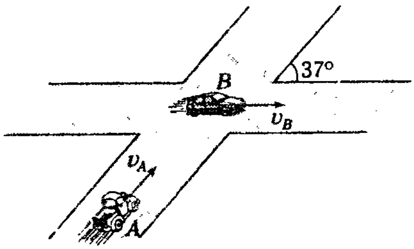
Las características cinemáticas del movimiento relativo, posición, velocidad y aceleración se pueden obtener con la ayuda de triángulos vectoriales, como se muestra en cada caso (como la diferencia de vectores).

Nota

Para los fines que se persigue en el texto, se cubrirá básicamente, salvo excepciones, el movimiento relativo de traslación ya que también se dan situaciones donde el análisis del movimiento de un cuerpo se hace desde un sistema de referencia rotante. Este tipo de análisis se hace en otros niveles.

Ejemplo 7

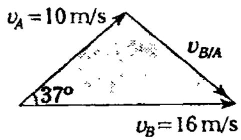
Dos automóviles A y B viajan con rapidez constante de 10 m/s y 16 m/s respectivamente y sobre vías que se cruzan en la forma mostrada. Determine la rapidez relativa del automóvil B respecto al automóvil A.



Resolución

La solución de este ejemplo lo haremos con dos métodos: utilizando un triángulo vectorial (forma geométrica) y con vectores unitarios en el plano (forma analítica).

1. Construyendo el triángulo vectorial a partir de
$\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A$ o $\vec{v}_B=\vec{v}_A+\vec{v}_{B/A}$
La idea es formar un triángulo con los vectores que representan a la velocidad de los automóviles respecto a tierra y de la velocidad relativa.



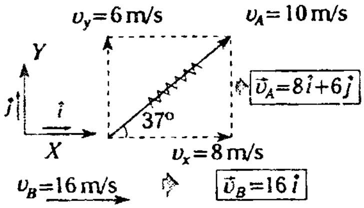
Del gráfico notamos que las vías forman un ángulo de 37°, entonces $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_A$ también forman dicho ángulo. Utilizando la ley de cosenos determinaremos el módulo de $\vec{v}_{A/B}$.

$$v_{B/A}=\sqrt{v_A^2+v_B^2-2v_A\,v_B\cos 37°}$$

$$v_{B/A}=\sqrt{10^2+16^2-2(10)(16)\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$\therefore\ v_{B/A}=10\text{ m/s}$$

2. Con los vectores unitarios
Se utiliza los vectores unitarios en el plano donde se hará la descomposición de las velocidades.



Utilizando la definición de velocidad relativa

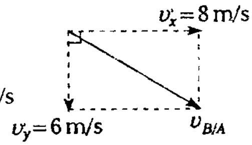
$$\vec{v}_{B/A}=\vec{v}_B-\vec{v}_A=(16\hat{i})-(8\hat{i}+6\hat{j})=[(16-8)\hat{i}-6\hat{j}]$$

$$\vec{v}_{B/A}=8\hat{i}-6\hat{j}=8(+\hat{i})+6(-\hat{j})$$

Ahora, representemos gráficamente la velocidad relativa y obtengamos su módulo

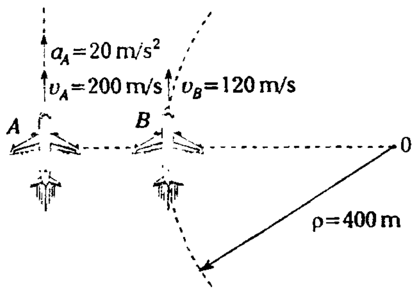
$$v_{A/B}=\sqrt{8^2+6^2}$$

$$\therefore\ v_{A/B}=10\text{ m/s}$$



Ejemplo 8

Dos aviones a la misma altura se trasladan como muestra el gráfico. El avión A vuela en línea recta, mientras que el avión B vuela en trayectoria curva (circunferencia) con radio de curvatura de 400 m y disminuye su rapidez con aceleración tangencial de módulo 16 m/s^2. Determine la velocidad y aceleración de B para el piloto del avión A.



Resolución

- Cálculo de la velocidad relativa

  Utilizando los vectores unitarios en el plano, (método analítico) la velocidad de A y B será

$$v_A = 200\text{ m/s} \qquad v_B = 120\text{ m/s}$$

$$\vec{v}_A = +200\hat{j}\text{ m/s} \qquad \vec{v}_B = +120\hat{j}\text{ m/s}$$

  Utilizando la definición de velocidad relativa, se obtiene

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (+120\hat{j}) - (+200\hat{j})$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{B/A} = -80\hat{j}\text{ m/s}$$

  Para el piloto del avión A, en el instante mostrado, el avión B tiene una velocidad de 80 m/s y dirigida hacia abajo.

- Cálculo de la aceleración relativa

  Nótese que el avión B tiene una aceleración que tiene componente tangencial con dirección contraria a la velocidad por estar desacelerando (según dato de módulo 16 m/s^2) y normal, porque su trayectoria es curvilínea. La componente normal será

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{120^2}{400} = 36\text{ m/s}^2$$

  Aplicando la definición de aceleración relativa se obtiene

$$a_A = 20\text{ m/s}^2 \qquad a_{N(B)} = 36\text{ m/s}^2 \qquad a_{T(B)} = 16\text{ m/s}^2$$

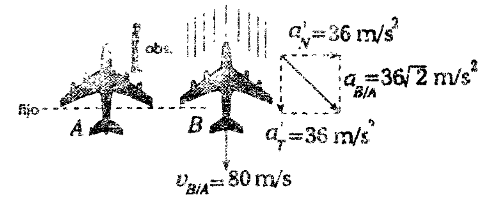
$$\underbrace{\vec{a}_A = 20\hat{j}}_{A} \qquad \underbrace{\vec{a}_B = (36\hat{i} - 16\hat{j})}_{B}$$

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{B/A} = (36\hat{i} - 16\hat{j}) - (20\hat{j})$$

$$\therefore \quad \vec{a}_{B/A} = (36\hat{i} - 36\hat{j})\text{ m/s}^2$$

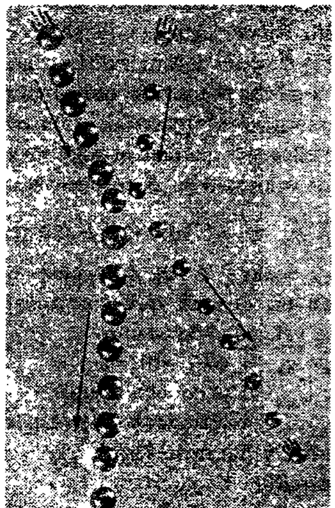
Ahora respecto a la velocidad y aceleración relativa podemos representar



Según el gráfico, para el observador en el avión A (fijo) el avión B tiene una aceleración tangencial de 36 m/s^2 y una aceleración normal de 36 m/s^2. Por los datos dados tenemos que el radio de curvatura, respecto de tierra, es 400 m y respecto del observador sería

$$a'_N = \frac{v^2_{B/A}}{\rho'} \Rightarrow \rho' = \frac{v^2_{B/A}}{a'_N} = \frac{(80)^2}{36}$$

$$\therefore \quad \rho' = 177{,}78\text{ m}$$



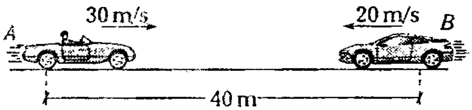
Una importante aplicación del movimiento relativo lo vemos al analizar los choques. Al estudiar estos fenómenos es importante controlar el acercamiento relativo antes del choque y el alejamiento relativo después del choque.

Problema 1

Dos automóviles A y B viajan sobre vías paralelas en una pista rectilínea con rapidez constante de 30 m/s y 20 m/s y en direcciones contrarias. Si inicialmente están separados 40m, determine luego de qué tiempo B se encontrará a 160 m de A.

Resolución

Grafiquemos la situación inicial.



Se puede notar que los automóviles se acercan y por ello la distancia de separación disminuiría; mas luego de que se cruzan, la distancia entre ellos aumentará. Por consiguiente, B se encontrará a 160m de A después del cruce de los automóviles. Para no analizar el movimiento simultáneo de ambos automóviles tomaremos como referencia a uno de ellos, por ejemplo al automóvil A.

¿Cuál es la velocidad de B respecto de A?

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (-20) - (30) = -50 \text{ m/s}$$

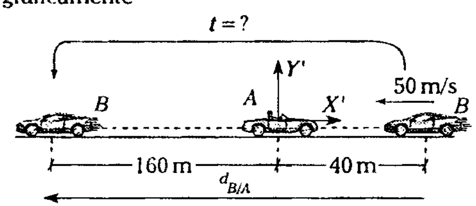
¿Cuál es la aceleración de B respecto de A?

Teniendo en cuenta que los automóviles presentan velocidad constante

$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = (0) - (0) = \vec{0}$$

Como la $\vec{a}_{B/A} = \vec{0}$ se concluye que:

el automóvil B realiza un M.R.U. respecto de A con 50 m/s y hacia la izquierda; veámoslo gráficamente



Del M.R.U., tenemos

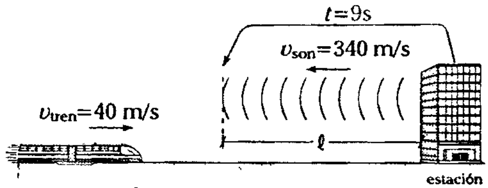
$$t = \frac{d_{B/A}}{v_{B/A}} = \frac{200}{50} = 4 \text{ s}$$

Problema 2

Un tren de longitud L se dirige en línea recta hacia la estación con una rapidez constante de 40 m/s y en la estación se hace sonar una sirena durante un tiempo de 9 s. ¿Durante cuánto tiempo escucharán el sonido los pasajeros del tren? ($v_{son} = 340$ m/s).

Resolución

Sabemos que al emitir un sonido durante cierto intervalo de tiempo se origina un tren sonoro (o un tren de ondas) el cual tendrá una determinada longitud que llamaremos ℓ. El intervalo de tiempo de recepción del sonido por los pasajeros será desde que ellos perciben la primera señal hasta que perciben la última señal del tren de ondas. Analicemos gráficamente.

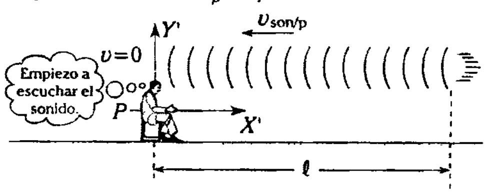


La longitud ℓ del tren de ondas sonoras es

$$\ell = v_{son} \times t = (340) \times (9) = 3060 \text{ m}$$

Para determinar el tiempo de recepción, tomemos como referencia a cualquiera de los pasajeros (p) y analicemos el movimiento del tren sonoro respecto de él.

Como el pasajero se traslada junto con el tren respecto de tierra, $\vec{v}_p = \vec{v}_T$



El tiempo de recepción por parte del pasajero, será igual al tiempo que emplee el tren sonoro en pasar completamente por él, es decir en recorrer una longitud ℓ.

La velocidad del sonido respecto del pasajero es

$$\vec{v}_{son/p}=\vec{v}_{son}-\vec{v}_{p}=(-340)-(+40)=-380\text{ m/s}$$

Además como las velocidades son constantes, las aceleraciones son nulas y en tal sentido la aceleración relativa es nula. Al tratarse de un M.R.U., entonces

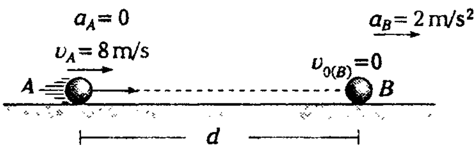
$$t=\frac{\ell}{v_{son/p}}=\frac{3060}{380}=8{,}05\text{ s.}$$

Problema 3

Inicialmente dos cuerpos A y B se encuentran separados una distancia d. El móvil A avanza hacia la derecha con 8 m/s y B inicia su movimiento con una aceleración de 2 m/s^2 también hacia la derecha. Determine d, si el móvil A alcanza a B una sola vez.

Resolución

Según los datos del enunciado podemos graficar.



Para determinar d según la condición que plantean, podemos proceder con el análisis del movimiento de un cuerpo respecto del otro. Por ejemplo el movimiento del cuerpo B respecto al cuerpo A, para ello se requiere determinar la aceleración y velocidad relativa $\left(\vec{a}_{B/A}\text{ y }\vec{v}_{B/A}\right)$.

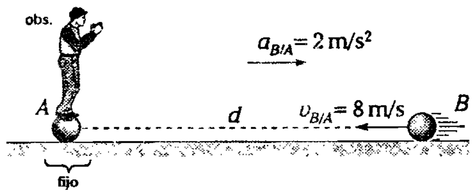
Por definición sabemos

$$\vec{a}_{B/A}=\vec{a}_B-\cancel{\vec{a}_A}=\vec{a}_B=+2\text{ m/s}^2$$

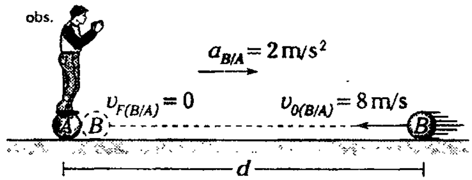
También

$$\vec{v}_{B/A}=\cancel{\vec{v}_{0(B)}}-\vec{v}_A=-(+8\text{ m/s})=-8\text{ m/s}$$

Esto significa que un observador colocado en el cuerpo A verá al cuerpo B moverse con una aceleración constante de 2 m/s^2 hacia la derecha y una velocidad inicial de 8 m/s hacia la izquierda



Como la trayectoria es recta y $\vec{a}_{B/A}=$ constante, entonces para el observador ubicado en A, B experimenta M.R.U.V. (desacelerado). Ahora para que se dé la condición del problema de que A y B se encuentren uno frente al otro una sola vez, para el observador, B debe llegar a donde esta él deteniéndose por un instante, luego iniciar su movimiento hacia la derecha alejándose, tal como se indica.



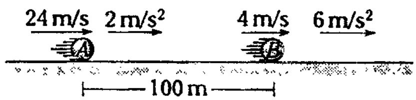
Ahora planteamos la siguiente ecuación del M.R.U.V.

$$v_{F(B/A)}^2=v_{0(B/A)}^2-2a_{(B/A)}d$$

$$0=8^2-2(2)d\ \Rightarrow\ d=16\text{m}$$

Problema 4

Se muestran dos partículas que experimentan M.R.U.V. A partir del instante mostrado ¿qué intervalo de tiempo transcurre hasta que entre ellas se tenga la menor separación?



Resolución

Este problema es habitual resolverlo si se considera el movimiento simultáneo de los cuerpos (M.R.U.V) y señala que la menor separación se tendrá cuando ambas partículas tengan igual velocidad, pero la intención es resolverlo con las nociones del movimiento relativo. Como ya se ha establecido que es indistinto, el análisis de A respecto de B o de B respecto de A, se considerará el movimiento de A respecto de B (cuerpo de referencia–fijo).

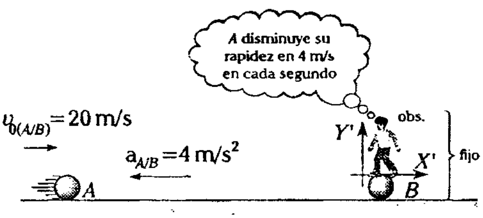
Calculemos entonces $\vec{v}_{A/B}$ y $\vec{a}_{A/B}$; según la definición si tenemos

$$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=(+24)-(+4)=+20\text{ m/s}$$

también

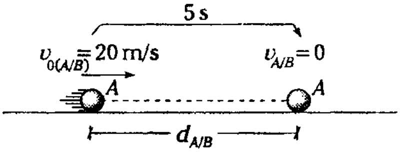
$$\vec{a}_{A/B}=\vec{a}_A-\vec{a}_B=(+2)-(+6)=-4\text{ m/s}^2\text{ (constante)}$$

Ahora para un observador colocado en B tenemos



Aquí para el observador, A experimentará un M.R.U.V. desacelerado

Con la información que se tiene planteamos que, para el observador, A se detiene por un instante luego de 5 s y luego empieza a moverse hacia la izquierda, pero calculemos cuánto avanza $A(d_{A/B})$ en esos 5 s.

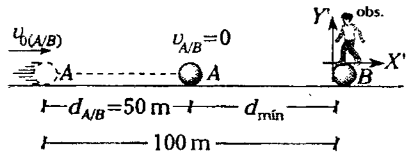


$$d_{A/B}=\left(\frac{v_{0(A/B)}+v_{F(A/B)}}{2}\right).t$$

$$d_{A/B}=\left(\frac{20+0}{2}\right)(5)$$

$$d_{A/B}=50\text{ m}$$

Este resultado significa que A respecto de B avanza (acercándose a B) 50 m hasta que se detiene por instante y luego empieza a moverse hacia la izquierda alejándose de B, tal como lo indicamos a continuación



Del gráfico, se deduce que

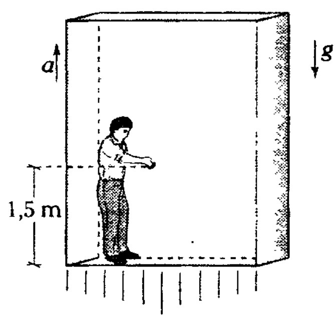
$$d_{mín}=50\text{ m}$$

Problema 5

Una persona se encuentra dentro de un ascensor que se eleva con aceleración constante. A 1,5 m del piso del ascensor la persona suelta una moneda y esta impacta en el piso luego de 0,5 s. ¿Qué aceleración experimenta el ascensor? (g = 10 m/s²).

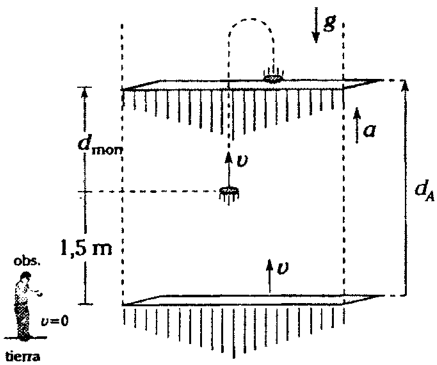
Resolución

Grafiquemos lo que acontece.



Por dato sabemos que el hombre suelta la moneda; ¿con qué rapidez sale la moneda de las manos del hombre? La respuesta depende desde donde observamos el fenómeno (sistema de referencia).

- Si nos ubicamos fuera del ascensor en tierra firme, notaremos que el ascensor; la moneda y el hombre suben juntos. Si el hombre suelta la moneda cuando presenta rapidez v, esta en ese instante tendrá la misma rapidez y describirá la trayectoria siguiente



Como la moneda asciende y desciende, nos conviene usar la ecuación vectorial de caída libre.

$$\vec{d}_{mon} = \vec{v}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$d = v(0,5) + \frac{1}{2}(-10)(0,5)^2$$

$$d = v(0,5) - \frac{5}{4} \qquad \text{(I)}$$

Además el piso del ascensor se eleva recorriendo $(1,5 + d)$ con aceleración constante (M.R.U.V.), entonces podemos usar

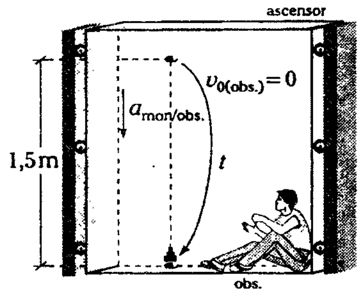
$$1,5 + d = vt + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$1,5 + \left[v(0,5) - \frac{5}{4}\right] = v(0,5) + \frac{1}{2}a(0,5)^2$$

$$\therefore\ a = 2\ \text{m/s}^2$$

- Si nos ubicamos dentro del ascensor, el hombre estará en reposo respecto del ascensor y por lo tanto también la moneda. ¡Entonces al soltar la moneda! veremos que esta en ese instante presentará $v_{0(obs.)} = 0$ y su trayectoria será rectilínea.



Respecto de tierra ya hemos visto que la moneda realiza caída libre vertical, por lo tanto respecto de tierra la aceleración de la moneda será $\vec{g} = 10$ m/s^2 (↓). El observador ubicado dentro del ascensor respecto de tierra tiene la misma aceleración del ascensor. $\vec{a} = a$ m/s^2 (↑).

Así

$$\vec{a}_{mon/obs.} = \vec{a}_{mon} - \vec{a}_{obs.} = (-10) - (+a)$$

$$\Rightarrow\ \vec{a}_{mon/obs.} = -[10 + a]$$

En módulo será

$$a_{mon/obs.} = 10 + a$$

Ahora la moneda respecto del observador debe recorrer 1,5 m para llegar al piso.

Luego, planteamos

$$d = v_{0(mon/obs.)} \cdot t + \frac{1}{2}(a_{mon/obs.})t^2$$

Reemplazando valores

$$1,5 = \frac{1}{2}(10 + a)(0,5)^2$$

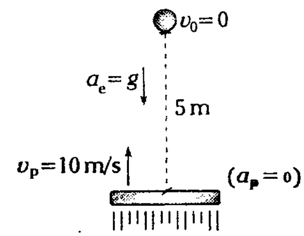
$$\therefore\ a = 2\ \text{m/s}^2$$

Problema 6

Se suelta una pequeña esfera desde una altura de 5 m respecto de una plataforma que asciende verticalmente con rapidez constante de 10 m/s. Determine el intervalo de tiempo entre las dos primeras colisiones, entre la esfera y la plataforma. Considere que respecto de la plataforma antes y después del impacto la esfera tiene la misma rapidez (g = 10 m/s^2)

Resolución

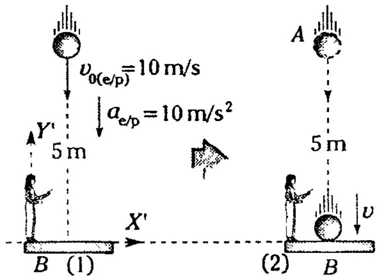
De acuerdo con el enunciado del problema, se establece el siguiente gráfico:

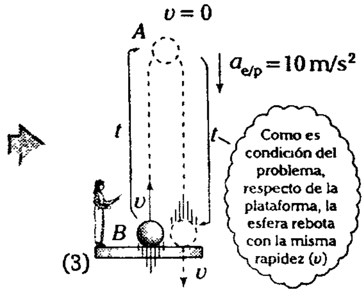


Lo que acontece entre ambos cuerpos sabemos que lo podemos analizar desde tierra o desde la misma plataforma y que se trabajará analizando desde la plataforma. Para ello es conveniente calcular la velocidad y la aceleración relativa en el instante inicial.

- La velocidad de la esfera respecto de la plataforma será
  $\vec{v}_{e/p}=\vec{v}_e-\vec{v}_p=(0)-(+10)=-10$ m/s
- La aceleración de la esfera, respecto de la plataforma es
  $\vec{a}_{e/p}=\vec{a}_e-\vec{a}_p=(-10)-(0)=-10$ m/s^2 (constante)
- Este resultado significa que la esfera respecto de la plataforma describe un M.R.U.V. y aumenta el módulo de su velocidad en 10 m/s cada segundo.

Para la persona que está en la plataforma estos resultados significan que la esfera se le empieza a acercar con una aceleración constante de 10 m/s^2 y presenta una rapidez inicial de 10 m/s. Luego, tendremos





Para el observador en la plataforma, el tiempo que transcurre desde el primero hasta el segundo choque, es el que emplea la esfera en subir y bajar. Por lo tanto, $t_{pedido}=2t$

pero $t=\dfrac{v}{a_{e/p}}=\dfrac{v}{10}$ (I)

Se requiere v

Cálculo de v en el trayecto A hacia B (Fig. 2), es conveniente usar

$$v_F^2=v_0^2+2ad$$

$$v^2=10^2+2(10)(5) \Rightarrow v=10\sqrt{2}\text{ m/s}$$

Reemplazando en la ecuación (I), tenemos

$t=\sqrt{2}$ s

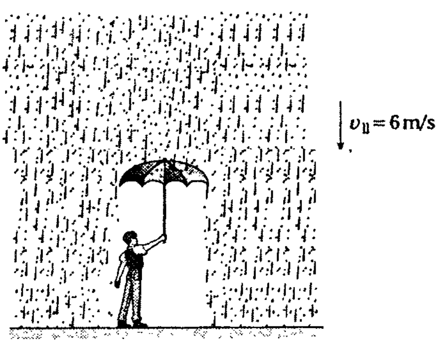
$\therefore\ t_{pedido}=2\sqrt{2}$ s

Problema 7

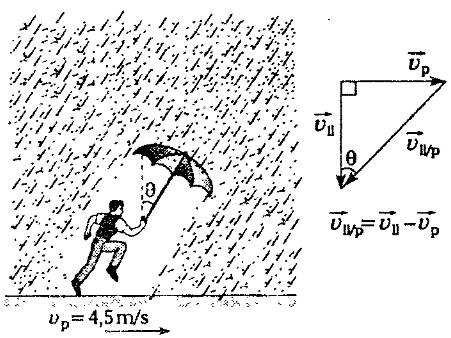
Una persona corre con una rapidez constante de 4,5 m/s sobre una pista horizontal mientras llueve y las gotas de agua caen verticalmente con una rapidez de 6 m/s. ¿Con qué rapidez ve caer la lluvia dicha persona? ¿Qué ángulo respecto de la vertical deberá inclinar su paraguas para mojarse lo menos posible?

Resolución

Para una persona parada (fija en tierra) las gotas de lluvia caen verticalmente a razón de 6 m/s y por consiguiente ubica su paraguas verticalmente para no mojarse.



Pero, cuando la persona corre hacia la derecha ve caer las gotas de lluvia en otra dirección, la cual determinaremos del siguiente modo



Del triángulo de velocidades con $\vec{v}_{ll}(\downarrow)$ y $\vec{v}_p(\rightarrow)$, deducimos que ve caer las gotas con la velocidad relativa $\vec{v}_{ll/p}(\swarrow)$, cuyo módulo lo determinamos mediante

$$v_{ll/p} = \sqrt{v_{ll}^2 + v_p^2} = \sqrt{6^2 + 4{,}5^2}$$

$$\therefore\ v_{ll/p} = 7{,}5\,m/s$$

Respecto al ángulo (θ) que debe inclinar el paraguas para mojarse lo menos posible debe inclinarlo en la dirección de la velocidad relativa $\vec{v}_{ll/p}$. Del gráfico tenemos que

$$\tan\theta = \frac{v_p}{v_{ll}} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{3}{4}$$

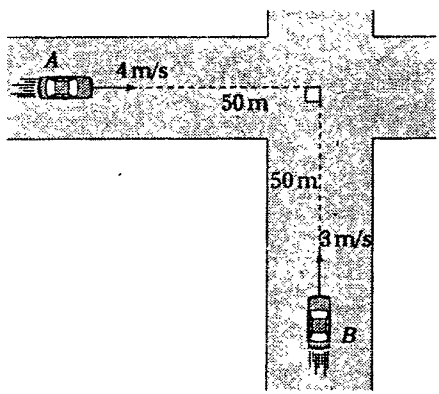
$$\therefore\ \theta = 37°$$

Problema 8

Dos automóviles se desplazan en trayectorias rectilíneas y en direcciones perpendiculares entre sí rumbo hacia una esquina de la cual en cierto instante equidistan 50 m. Si trasladan con rapidez constante de 4 m/s y 3 m/s; ¿cuál será la menor separación entre los automóviles?

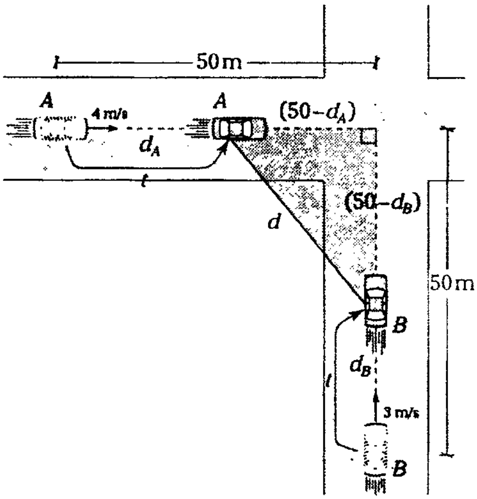
Resolución

Representemos gráficamente lo que acontece



Podemos observar que el automóvil A es más rápido que B, por lo tanto llegará primero al cruce. Pero antes de ello el automóvil A y el automóvil B se están acercando. Como en el problema se nos pide determinar la menor separación, esto significa determinar la distancia de separación más pequeña o mínima que logran los automóviles en su movimiento.

Supongamos que esto ocurre al cabo de t segundos del instante señalado por el problema, y antes de que los automóviles lleguen al cruce, aunque esto es solo una suposición la cual confirmaremos o refutaremos luego de conocer t. Entonces tendremos:



Del ◺ sombreado

$$d^2 = (50-d_A)^2 + (50-d_B)^2 \qquad \text{(I)}$$

Además como los automóviles A y 3 experimentan un M.R.U.

$$d_A = v_A t = 4t$$

$$d_B = v_B t = 3t$$

Reemplazando en I

$$d^2 = (50-4t)^2 + (50-3t)^2$$

$$d^2 = 5000 - 700t + 25t^2$$

De esta expresión podemos observar que para hallar d debemos conocer t, para lo cual debemos emplear la condición del problema, en la cual d es la más pequeña de todas las distancias de separación. Entonces acomodamos la expresión completando cuadrados y dando la forma de un trinomio cuadrado perfecto.

$$d^2 = \underbrace{4900}_{70^2} - 2(70)(5t) + (5t)^2 + 100$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = (70-5t)^2 + 100 \qquad \text{(II)}$$

Sabemos que cualquier número real elevado al cuadrado es mayor o igual a cero y como nos piden el mínimo valor de d.

$$\Rightarrow \quad (70-5t)^2 = 0$$

Reemplazando en II obtenemos

$$d_{mín} = 10 \text{ m}$$

Note que $d_{mín}$ se da para cuando $t = 14$ s y con ello $d_A = 56$ m y $d_B = 42$ m. Esto significa que el automóvil A ya pasó el cruce, mientras que B aún no, entonces nuestra suposición inicial no fue del todo correcta, pero ello no cambia el resultado obtenido.

Otro método

Criterio de movimiento relativo. Para este caso ubicamos nuestro sistema de referencia sobre A. (fijo).

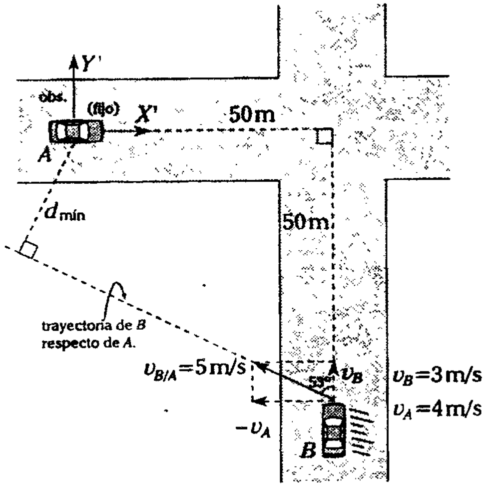
Como los automóviles experimentan M.R.U.

$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{0}$, entonces $\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = \vec{0}$.

Este resultado significa que B experimenta M.R.U. respecto de A. Para trazar la trayectoria de B respecto de A, calculemos $\vec{v}_{B/A}$

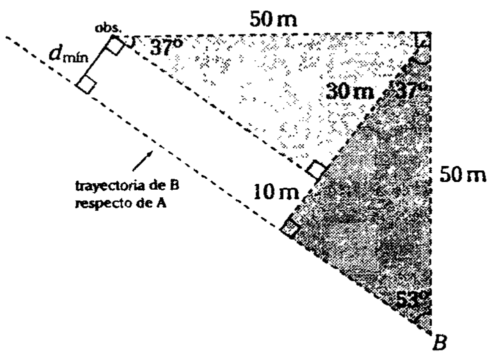
$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_B + \left(-\vec{v}_A\right)$. (Esto significa que debemos sumar $\vec{v}_B$ con el opuesto de $\vec{v}_A$).

Con esto graficamos



El automóvil B respecto de A se mueve con una rapidez $\upsilon_{B/A}$ = 5 m/s. Además la menor separación entre el automóvil A y el automóvil B es aquella que parte de A y llega en forma perpendicular al trayecto relativo de B.

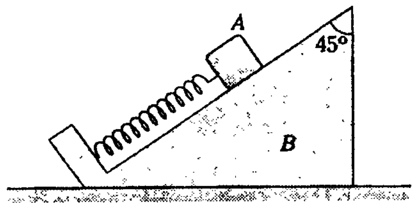
Ahora para determinar la menor separación (d_{MN}) hacemos algunos trazos auxiliares y obtenemos la siguiente figura.



A partir de este gráfico se obtiene que $d_{mín}$= 10 m

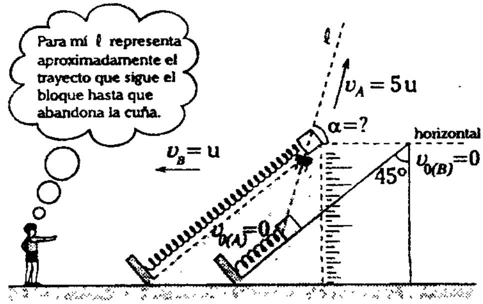
Problema 9

El sistema mostrado es soltado cuando el resorte está comprimido. Determine la medida del ángulo que forma la velocidad del bloque A con la horizontal, si cuando abandona el bloque B se cumple $\upsilon_A = 5\upsilon_B$.

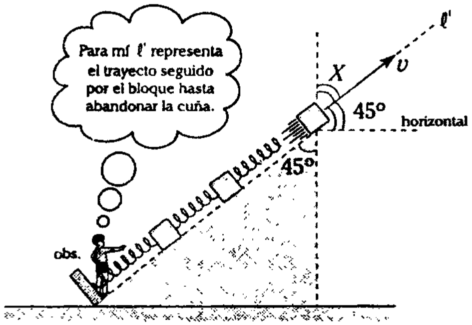


Resolución

Según el enunciado entendemos que al soltar el bloque, el resorte en su intento de recuperar su longitud natural (sin deformar) impulsa al bloque hacia arriba sobre la superficie de la cuña y a la vez impulsa a la cuña hacia la izquierda, tal como mostramos a continuación.



Al colocar un observador en la cuña, para él, el bloque se mueve a lo largo de la superficie de la cuña tal como se indica.

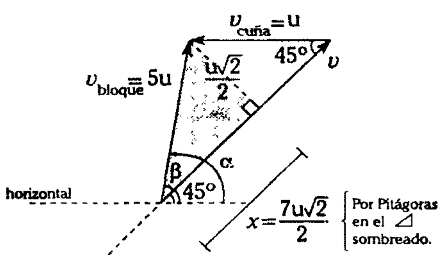


En el gráfico $\vec{v}$ es la velocidad del bloque cuando abandona la cuña respecto del observador que está ubicado en la cuña. En otras palabras.

$$\vec{v}=\vec{v}_{\text{bloque/cuña}} \Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_{\text{bloque}}-\vec{v}_{\text{cuña}}$$

$$\therefore \quad \vec{v}+\vec{v}_{\text{cuña}}=\vec{v}_{\text{bloque}} \qquad \text{(I)}$$

Para determinar la medida del ángulo α, podemos proceder en forma geométrica, al construir un triángulo con las velocidades que aparecen en (I). Según esto podemos plantear:



Del gráfico

$$\alpha=\beta+45° \qquad (II)$$

Ahora se requiere conocer .β

En el ⊿ sombreado

$$\tan\beta=\frac{\frac{v\cancel{\sqrt{2}}}{2}}{\frac{7v\cancel{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{7}$$

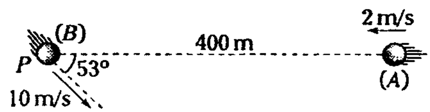
$$\therefore \quad \beta=8°$$

En (II)

$$\alpha=53°$$

Problema 10

Se muestran dos partículas que experimentan M.R.U. ¿A qué distancia de P se encuentra A, cuando los cuerpos presentan su menor separación?



Resolución

Para determinar la distancia que separa a la partícula A del punto P, cuando entre A y B la separación es mínima se requiere el tiempo transcurrido (t) hasta dicho instante; para ello se puede proceder de varias formas, en este caso procederemos haciendo uso del movimiento relativo; analizaremos el movimiento de la partícula A respecto de B (de referencia – fijo).

Como ya se ha visto anteriormente, si los móviles desarrollan M.R.U.

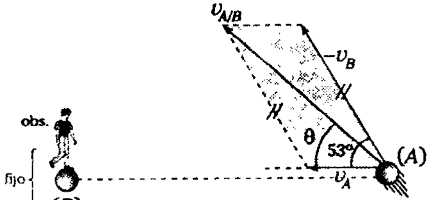
a aceleración de ambos respecto de tierra es nula y también lo es la aceleración relativa de un respecto del otro. Esto

significa que A respecto de B realiza un M.R.U.

Ahora determinemos la $\vec{v}_{A/B}$, para establecer el trayecto de A respecto de B. Como las velocidades de A y B no son paralelas, procederemos en forma geométrica.

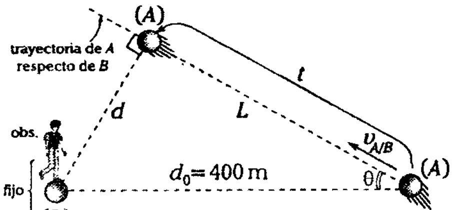
$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=\vec{v}_A+\left(-\vec{v}_B\right)$ (Suma de la velocidad de A con el opuesto de la velocidad de B).

En el gráfico tenemos



Aquí la $v_{A/B}$ define la dirección de movimiento de A respecto de B, ello se mantendrá en todo instante.

Luego planteamos

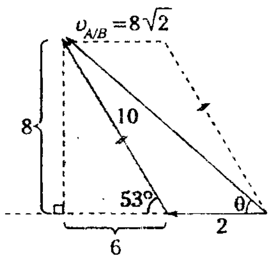


Aquí d representa la menor separación entre A y B

Para determinar t planteamos

$$t=\frac{L}{v_{A/B}}=\frac{4\cos\theta}{v_{A/B}} \qquad \text{(I)}$$

Ahora, para conocer θ y $v_{A/B}$ podemos proceder geométricamente, de la siguiente manera



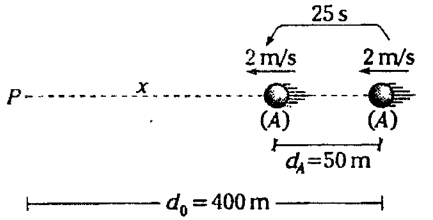
Del gráfico se logra deducir que

$v_{A/B}=8\sqrt{2}$ m/s y que $\theta=45°$

Ahora en (I) tenemos

$$t=\frac{400\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{8\sqrt{2}}=25\text{ s}$$

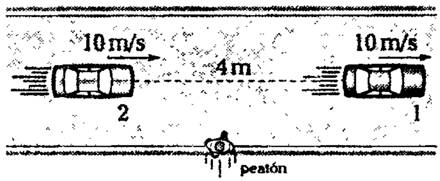
Finalmente sobre el gráfico dado por el enunciado al analizar desde tierra a la partícula A y controlarle 25 s se tendrá



Por lo tanto, x=350 m

Problema 11

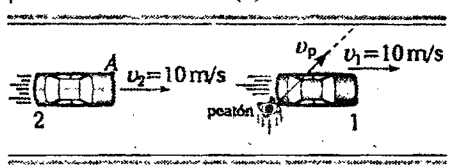
Por una calle circulan automóviles de 3 m de ancho, espaciados 4 m entre sí y con una rapidez constante de 10 m/s. Determine la menor rapidez con la que un peatón puede cruzar la calle sin peligro.



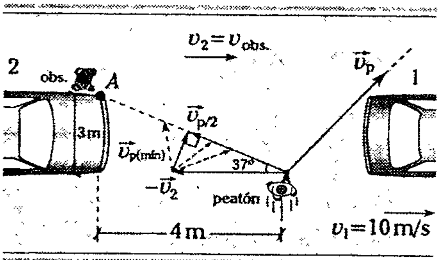
Resolución

Como nos piden calcular la mínima rapidez del peatón para que cruce la pista sin accidentarse, qué aspectos debemos tener en consideración.

- Debe empezar a cruzar la pista justo cuando termina de cruzar frente a él, el primer automóvil. ¿Hacia qué lado? Hacia la derecha, ya que al ser su rapidez mínima debe emplear el mayor tiempo posible en cruzar y por ello debe estar lo más alejado posible del automóvil (2).

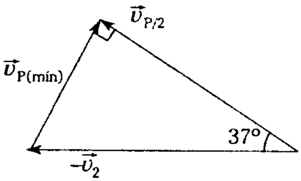


- También, nótese que el extremo A del automóvil (2) no debe chocar con el peatón que se mueve con $\vec{v}_p$ respecto a tierra.
- La menor rapidez del peatón se dará cuando logre cruzar con las justas; esto significa que pasará rasante por A.
- Visto por un observador en el automóvil (2), el peatón se acerca al extremo A, esto físicamente lo enfocamos así



La dirección de la velocidad relativa del peatón respecto del observador situado en (2) es 37° (se deduce con las dimensiones del automóvil y su separación).

Nótese que para que la velocidad del peatón $\vec{v}_P$ sea mínima será necesario que sea perpendicular a $\vec{v}_{P/A}$. Ahora del Δ de velocidades.



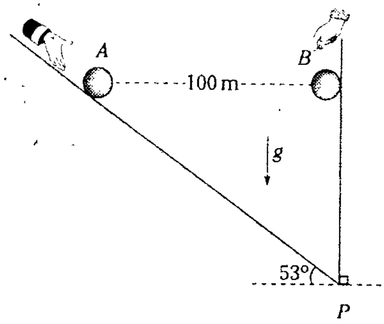
$$\left|\vec{v}_{p(mín)}\right| = \left|-\vec{v}_A\right| \text{sen}37° = 10\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \ \left|\vec{v}_{p(mín)}\right| = 6 \text{ m/s}$$

Problema 12

Dos pequeñas esferas son soltadas simultáneamente desde las posiciones que se muestran en la figura y experimentan M.R.U.V. Determine luego de cuánto tiempo estarán separadas 60 m antes de que lleguen al vértice P. ($g = 10$ m/s^2)

Considere que las superficies son lisas.



Resolución

El movimiento de las esferas se puede analizar desde tierra o desde una de las esferas. Analicemos a B desde A, dado que A estará en reposo y solo B experimenta movimiento.

- Velocidad inicial de B respecto de A $\left(\vec{v}_{0(B/A)}\right)$

$$\left(\vec{v}_{0(B/A)}\right) = \underbrace{\vec{v}_{0(B)}}_{0} - \underbrace{\vec{v}_{0(A)}}_{0} = \vec{0}$$

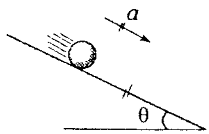
ión de B respecto de A $\left(\vec{a}_{B/A}\right)$

$$\vec{a}_B - \vec{a}_A \qquad \text{(I)}$$

cesitamos determinar

$\vec{a}_A$

En una superficie lisa



$a = g\text{sen}\theta$

esta relación se demostrará en el capítulo de Dinámica

$$\Rightarrow \ a_A = g\text{sen}53° = 8 \text{ m/s}^2$$

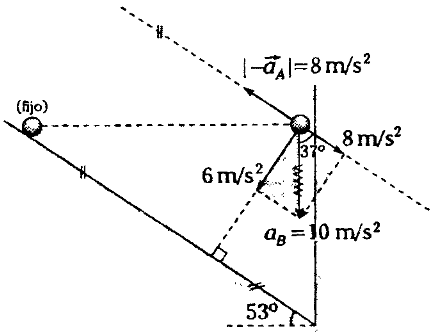
$$\therefore \ \vec{a}_A = 8 \text{ m/s}^2 (\searrow)$$

Análogamente (si $\theta = 90°$)

$$\vec{a}_B = 10 \text{ m/s}^2 (\downarrow)$$

Luego $\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B + \left[-\vec{a}_A\right]$

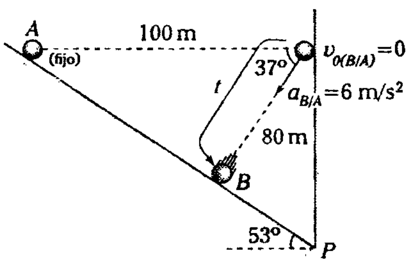
Gráficamente



Del gráfico, se logra deducir que

$$\vec{a}_{B/A}=6\ m/s^2\ (\swarrow)$$

Además la $\vec{a}_{B/A}$ es perpendicular a la superficie inclinada. Luego, la velocidad inicial de B respecto de A es nula y la aceleración de B respecto de A es constante; B respecto de A comenzará a describir un M.R.U.V. en forma perpendicular a la superficie inclinada.



Del gráfico notamos que la distancia entre A y B es 60 m, cuando la esfera B recorre 80 m respecto de A. Luego planteamos

$$d_{B/A}=\left(\cancel{v_{0(B/A)}}\right)t+\frac{1}{2}a_{B/A}\,t^2$$

$$80=\frac{1}{2}(6)\,t^2$$

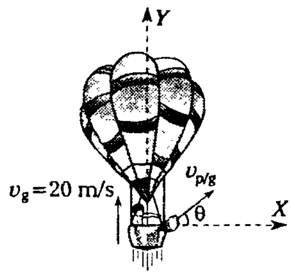
$$t=\frac{4}{3}\sqrt{15}\ s$$

Problema 13

Desde un globo aerostático, que asciende verticalmente con velocidad constante de $20\hat{j}$ m/s, se lanza una piedra con una velocidad $\vec{v}=(30\hat{i}+40\hat{j})$ m/s respecto del globo. Determine luego de cuánto tiempo y a qué distancia del punto de lanzamiento la piedra y el globo se encontrarán en la misma línea horizontal. ($g=10\ m/s^2$).

Resolución

Como existe movimiento simultáneo de dos cuerpos respecto de tierra, ubiquémonos en uno de ellos, por ejemplo en el globo aerostático. Entonces analicemos el movimiento de la piedra respecto del globo; el globo estará fijo y la piedra será la única que experimenta movimiento.



Determinemos las magnitudes que caracterizan el movimiento de la piedra respecto del globo.

- Aceleración de la piedra respecto del globo

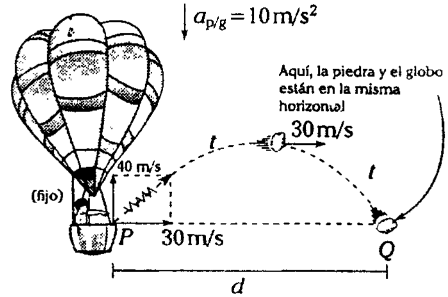
$$\vec{a}_{p/g}=\underbrace{\vec{a}_{piedra}}_{\vec{g}}-\underbrace{\vec{a}_{globo}}_{\vec{0}}$$

$$\therefore\ \vec{a}_{p/g}=\vec{g}$$

- La velocidad inicial de la piedra respecto del globo es según dato del problema $\vec{v}_{p/g}=(30\hat{i}+40\hat{j})$ m/s

A partir de estos resultados, se concluye que la piedra respecto del globo desarrollará un M.P.C.L.

Luego analizando desde el globo tendremos



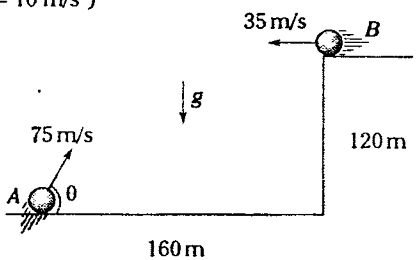
Del M.P.C.L., en la vertical, podemos deducir que $t = 4$ s, luego el tiempo transcurrido entre P y Q es $t_{PQ} = 8\,s$.

También en la horizontal, tenemos que

$$d = v_{H} \cdot t_{PQ} \Rightarrow d = (30)(8) = 240 \text{ m}$$

Problema 14

Dos pequeñas esferas son lanzadas simultáneamente según se muestra en el gráfico. Determine la medida del ángulo θ con la condición de que las esferas impacten.
($g = 10\,m/s^2$)

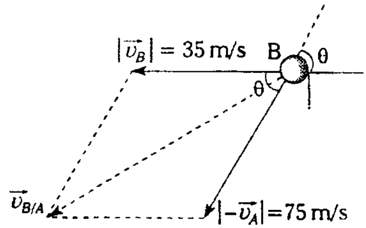


Resolución

Analicemos el movimiento de la esfera B respecto de A.

Como sabemos es necesario determinar las magnitudes que caracterizan el movimiento de B respecto de A.

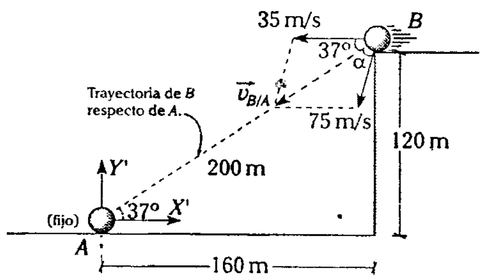
- $\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$; gráficamente, tenemos



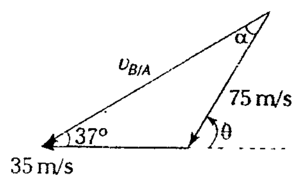
- Como ambas esferas realizan un M.P.C.L., tienen igual aceleración $(\vec{g})$, por lo tanto la aceleración de B respecto de A es nula.

$$\vec{a}_{B/A} = \underbrace{\vec{a}_B}_{\vec{g}} - \underbrace{\vec{a}_A}_{\vec{g}} = \vec{0}$$

De lo anterior podemos concluir que la esfera B realizará un M.R.U. respecto de A. Además, para que las esferas choquen, la trayectoria de B respecto de A debe pasar necesariamente por A (fijo) Veámoslo gráficamente.



Analizando el diagrama de velocidades



Note que $\theta = \alpha + 37°$ (I)

$$\frac{35}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{75}{\operatorname{sen}37°}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{35}{75} \times \operatorname{sen}37° = \frac{7}{25}$$

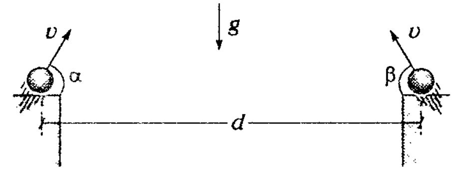
$$\Rightarrow \quad \alpha = 16°$$

Finalmente reemplazamos en (I) y obtenemos

$$\theta = 53°$$

Problema 15

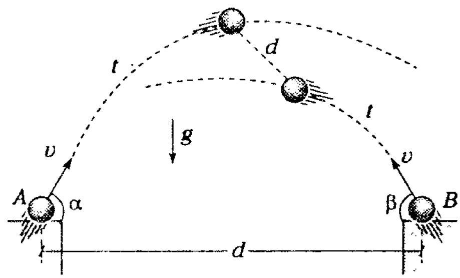
Dos proyectiles son lanzados simultáneamente y con igual rapidez tal como se muestra. Determine la menor distancia de separación entre los proyectiles y al cabo de qué tiempo ocurre ello $(\alpha > \beta)$.



Resolución

Una vez lanzados los proyectiles, respecto de tierra empiezan a describir un M.P.C.L.

Graficando las trayectorias seguidas por los proyectiles, tenemos



Como ya hemos visto, este problema se ha resuelto anteriormente pero con cierta complejidad matemática (Ver problemas de M.P.C.L.). Ahora vamos a resolverlo planteando las nociones de movimiento relativo. Para ello analicemos el movimiento de un proyectil respecto del otro; por ejemplo de B respecto de A. (Puede hacerse al contrario, se obtendrá el mismo resultado). Como en los problemas anteriores determinemos la $\vec{a}_{B/A}$ y $\vec{v}_{B/A}$

Como los proyectiles tienen la aceleración de caída libre $(\vec{g})$.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{g}$$

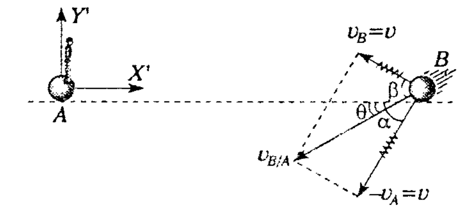
$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = \vec{0}$$

Con esto se concluye que B respecto de A desarrollará un M.R.U.; en donde la dirección del movimiento lo determina la velocidad relativa $(\vec{v}_{B/A})$.

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_B + (-\vec{v}_A)$$

(Adición de la velocidad de B con el opuesto de la velocidad de A).

Entonces el sistema físico equivalente es:

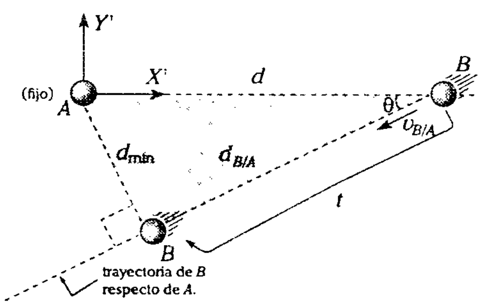


De la composición de velocidades se tiene

$$\alpha - \theta = \beta + \theta$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Graficando la trayectoria de B respecto de A tenemos



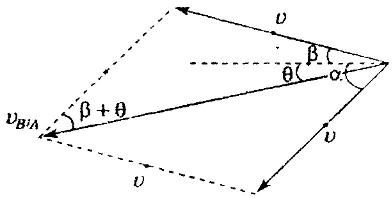
Del triángulo rectángulo, obtenemos que

$$d_{min} = d\text{sen}\theta = d\text{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Para determinar el tiempo (t) planteamos el M.R.U. de B respecto de A y hacemos

$$t = \frac{d_{B/A}}{v_{B/A}} = \frac{d\cos\theta}{v_{B/A}} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere calcular $v_{B/A}$: De la composición de velocidades tenemos un rombo y en el triángulo isósceles sombreado se determina que



$$v_{B/A} = 2v\cos(\beta+\theta)$$

pero como

$$\theta = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v_{B/A} = 2v\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

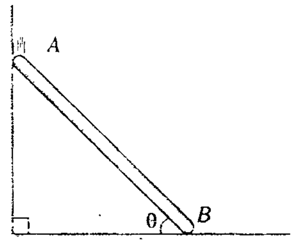
En (I) tenemos

$$t = \frac{d\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2v\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Después de ver esta resolución vemos cómo este problema, que también fue resuelto en M.P.C.L., se hace más simple con la aplicación del movimiento relativo.

Problema 16

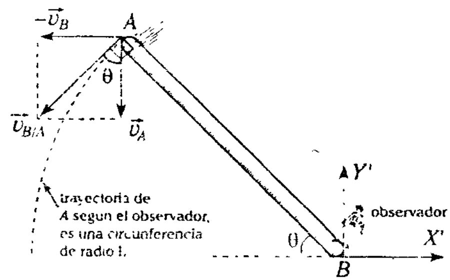
Una barra rígida de longitud L resbala apoyada en dos superficies planas tal como se muestra en el gráfico. Si el extremo apoyado en la pared se traslada con una rapidez constante de 6 cm/s, determine la rapidez del extremo B, cuando θ=37°.



Resolución

La barra al moverse apoyada en las superficies experimenta un movimiento de traslación y rotación combinado. Ahora existen varios métodos para resolver este problema, aquí vamos a resolver utilizando el método del movimiento relativo. Para ello se analizará el movimiento del extremo A respecto del extremo B, por lo que ubicamos nuestro sistema de referencia en el extremo B.

Como durante el movimiento del extremo A, su distancia a B es en todo instante la misma (L), entonces A respecto de B desarrollará un movimiento con trayectoria circunferencial; por lo tanto la velocidad de A respecto de B en todo instante es tangente a la circunferencia y por consiguiente perpendicular a la barra.



Del diagrama de velocidades tenemos

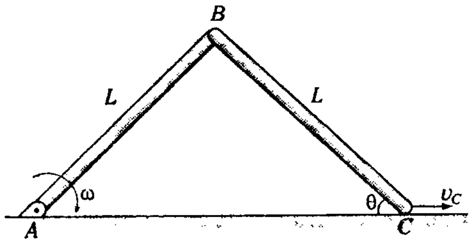
$$\frac{v_B}{v_A}=\tan\theta \Rightarrow v_B=v_A\tan\theta$$

Reemplazando los datos

$$v_B=6\times\frac{3}{4}=4{,}5\text{ cm/s}$$

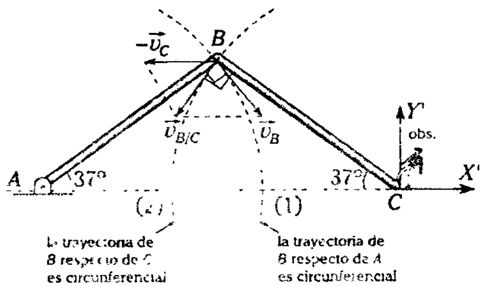
Problema 17

Se tienen dos varillas idénticas de 2 m de longitud. Si AB rota con una rapidez angular constante $\omega=0{,}1$ rad/s, determine la rapidez del extremo C cuando $\theta=37$.



Resolución

Como el problema anterior, hay varios métodos para la resolución, pero escogeremos la del movimiento relativo. Se analizará el movimiento del extremo B respecto del extremo C (de referencia). En esto tendremos el siguiente gráfico:

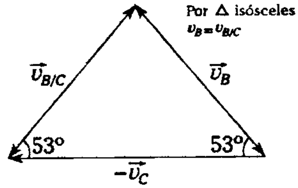


Nótese que

- Siendo A punto fijo, el punto B describe una circunferencia respecto de el y $\vec{v}_B$ es tangente a la circunferencia (1).
- Para un observador fijo en C, el punto B también describe una circunferencia respecto de él.

  Por lo que la velocidad relativa de B con respecto a A $(\vec{v}_{B/A})$ también es tangente a la circunferencia (2).

Construimos un triángulo con las velocidades a partir del punto B y podemos notar que:



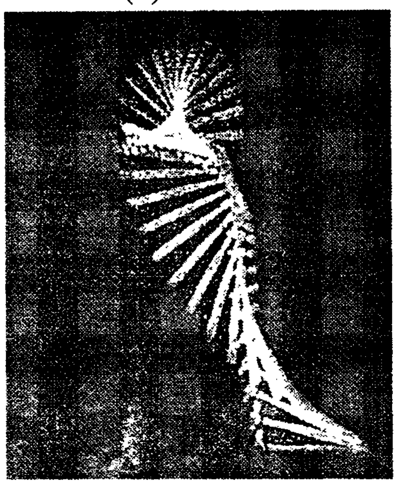
$$|-\vec{v}_C|=2|\vec{v}_B|\cos 53^\circ \qquad (I)$$

donde

$$v_B=\omega L=(0{,}1)(2)=0{,}2\text{ m/s}$$

Reemplazando en (I) tenemos

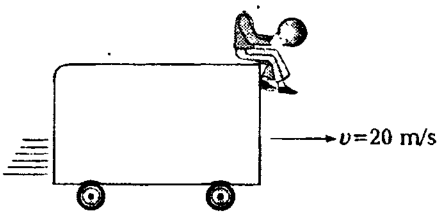
$$v_C=(2)(0{,}2)\left(\frac{3}{5}\right)=0{,}24\text{ m/s}$$



El martillo después de ser lanzado. su centro de gravedad describe una parábola, si un observador se pudiese colocar en dicho punto solo observaría rotación pura.

Problemas Propuestos

1. Un coche experimenta un M.R.U. con una rapidez de 20 m/s. Un joven sentado en el coche lleva una esfera en sus manos.
   Determine la velocidad de la esfera para los siguientes casos:
   I. Cuando la esfera se lanza horizontalmente hacia la derecha con 10 m/s.
   II. Cuando se lanza horizontalmente hacia la izquierda con 20 m/s.
   III. Cuando se lanza verticalmente hacia arriba con 20 m/s.
   (En los tres casos respecto del coche)

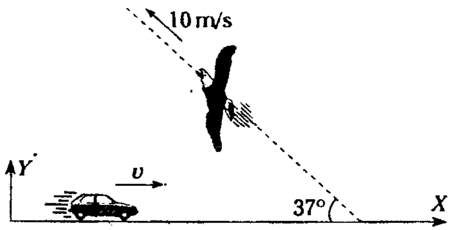


A) 10 m/s (←); 0; 20 m/s (45°)
B) 5 m/s (→); 20 m/s (→); 10 m/s (↑)
C) 30 m/s (→); 10 m/s (→); 20 m/s (↓)
D) 30 m/s (→); 0; $20\sqrt{2}$ m/s; [45°]
E) 0; 20 m/s (↑); $10\sqrt{2}$ m/s [45°]

2. En una región donde llueve y no hay viento, cerca de la superficie, las gotas de agua descienden verticalmente con rapidez constante. Cuando hay participación del viento las gotas caen con 10 m/s formando 37° con la vertical. ¿Para qué rapidez del viento las gotas descienden formando 60° con la vertical?

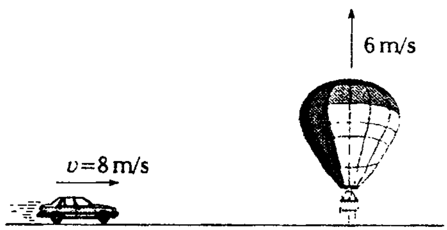
A) $6\sqrt{3}$ m/s B) $5\sqrt{3}$ m/s C) 10 m/s
D) 6 m/s E) $8\sqrt{3}$ m/s

3. La gráfica adjunta muestra la trayectoria y velocidad de un ave respecto del conductor. Determine la velocidad y la rapidez del ave respecto de tierra. Considere que la velocidad del automóvil respecto de tierra es $4\hat{i}$ m/s.



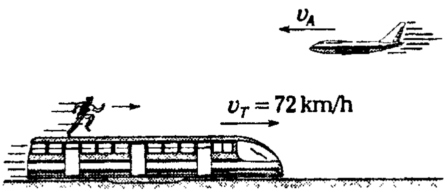
A) $(-3\hat{i}+4\hat{i})$m/s ; 5 m/s
B) $(3\hat{i}+4\hat{i})$m/s ; 5 m/s
C) $(-8\hat{i}+6\hat{i})$m/s ; 10 m/s
D) $(6\hat{i}+8\hat{i})$m/s ; 10 m/s
E) $(-4\hat{i}+6\hat{i})$m/s ; $2\sqrt{13}$ m/s

4. En el instante mostrado el globo aerostático asciende verticalmente con una rapidez constante de v=6 m/s, mientras que un automóvil se encuentra experimentando un M.R.U. a 100 m del globo. ¿Luego de cuántos segundos se encontrarán separados la mínima distancia?



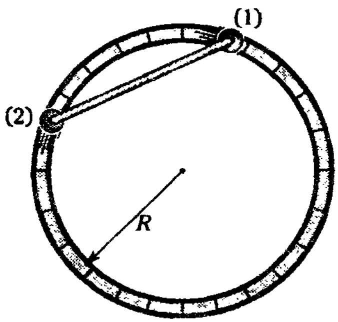
A) 2 s B) 3 s C) 5 s
D) 7 s E) 8 s

5. En el gráfico adjunto, la rapidez del joven respecto del tren, que experimenta M.R.U., es 3 m/s. Si la velocidad del tren respecto del avión es +180 km/h, ¿qué rapidez tiene el joven respecto del avión?



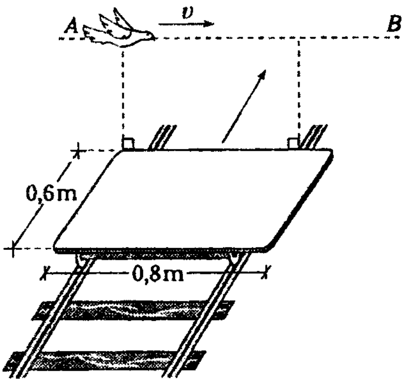
A) 51 m/s B) 53 m/s C) 47 m/s
D) 63 m/s E) 57 m/s

6. La barra de longitud $R/2$ se encuentra articulada de los centros de las cuentas (1) y (2) que se mueven con rapidez constante v a través del riel en forma de circunferencia. Determine la rapidez con la que se mueve la cuenta (1) respecto de (2).



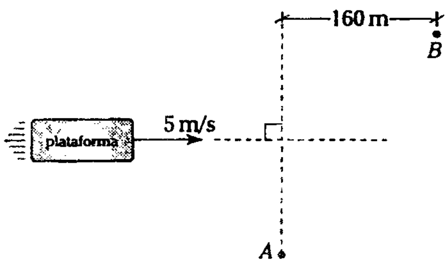
A) $2v$ B) $\sqrt{2}v$ C) $4v$
D) v E) $\left(\dfrac{v}{2}\right)$

7. Una paloma viaja horizontalmente en una línea recta perpendicular a las vías del tren. Cuando la paloma pasa sobre la plataforma mostrada, la sombra de la paloma recorre la diagonal de dicha plataforma. Determine la rapidez constante de la paloma si la plataforma lo hace con 3 m/s. Considere que los rayos solares inciden perpendicularmente a la plataforma.



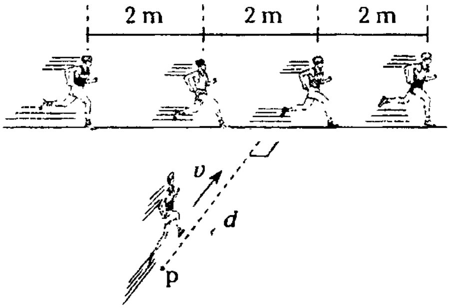
A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

8. Juan emplea 40 s en ir de A hacia B si sigue una trayectoria rectilínea y al realizar dicho recorrido, Juan debe cruzar una plataforma. Determine el valor de su velocidad respecto a la plataforma cuando pase sobre ella, si para una persona en tierra, Juan mantiene su velocidad constante de valor 5 m/s. (Desprecie el tiempo de salto a la plataforma)



A) 2 m/s B) 3 m/s C) $\sqrt{10}$ m/s
D) 4 m/s E) 2,8 m/s

9. Una columna de atletas realiza M.R.U., cada uno de los cuales avanza con 4 m/s, separados en 2 m. Un joven que se encuentra en p desea cruzar la columna, pero sin chocar con algún atleta. Si el joven corre con M.R.U. a razón de 3 m/s, determine la distancia d necesaria que debe recorrer.



A) 2,5 m/s B) 1,5 m/s C) 3,5 m/s
D) 4,5 m/s E) 6,0 m/s

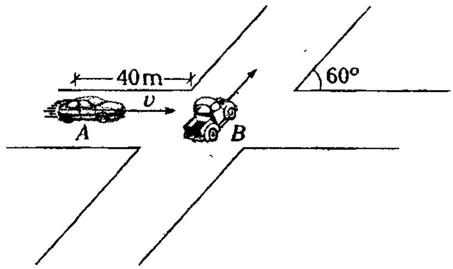
10. Un portaaviones avanza hacia el sur con una rapidez constante de 50 m/s respecto de tierra, en determinado instante salen de su cubierta dos aviones de reconocimiento, uno hacia el norte y el otro hacia el sur, ambos con una rapidez constante de 250 m/s con respecto a tierra. Si cada uno se aleja 3 km respecto al portaviones y regresan a él, ¿en qué relación se encuentran los tiempos empleados por los aviones?

A) 1 B) 1,5 C) 0,8
D) 2,0 E) 3,1

11. Sobre una pista rectilínea un ómnibus se desplaza con rapidez constante de 54 km/h y un muchacho que esta a cierta distancia de la pista se dirige en todo instante hacia el ómnibus con una rapidez constante. En un momento dado el muchacho nota que el ómnibus pasa frente a él en forma perpendicular con una rapidez de 12 m/s. ¿Qué rapidez tiene el muchacho?

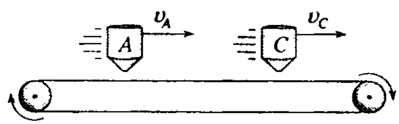
A) 6 m/s B) 8 m/s C) 9 m/s
D) 10 m/s E) 12 m/s

12. La figura muestra dos automóviles que realizan M.R.U. Las vías forman un ángulo de 60°. Si luego de 2 s se tiene la menor distancia entre ellos y de $20\sqrt{3}$ m , determine la rapidez del automóvil A. Considere que la rapidez de B es 10 m/s.



A) 5 m/s B) 7 m/s C) 10 m/s
D) 30 m/s E) 40 m/s

13. Se muestra una cinta transportadora que se traslada con una rapidez v y además se muestra un dispositivo automático (A) que deja n esferas por unidad de tiempo y un contador (C) con una fotocélula, que registra las esferas que pasan debajo de él. Si la rapidez del dispositivo automático y del contador es constante, además es menor que v; ¿cuántas esferas en la unidad de tiempo registrará el contador?



A) $n\left(\dfrac{v+v_A}{v-v_C}\right)$ B) $n\left(\dfrac{v-v_C}{v-v_A}\right)$

C) $n\left(\dfrac{v-(v_A+v_C)}{v}\right)$

D) $n\left(\dfrac{v-v_A}{v-v_C}\right)$ E) $n\left(\dfrac{v}{v_A+v_C}\right)$

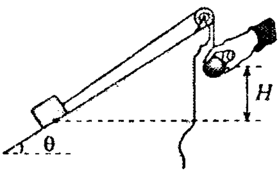
14. Dos partículas A y B se encuentran en reposo sobre el plano XY en las posiciones $M(-18;-24)$m y $N(32;-24)$m respectivamente. Si inician su movimiento con una aceleración constante de

$$\vec{a}_A=(2{,}4\hat{i}+3{,}2\hat{j})\text{m/s}^2$$
$$\vec{a}_B=(-0{,}6\hat{i}-0{,}8\hat{j})\text{m/s}^2$$

determine la mínima separación entre las partículas.

A) 12 m B) 30 m C) 16 m
D) 20 m E) 24 m

15. En el instante mostrado el sistema es abandonado, de tal manera que la esfera desciende. Determine la mínima distancia de separación entre el bloque y la esfera.

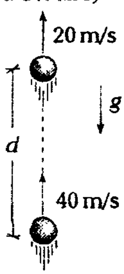


A) $\dfrac{H\sec\theta}{2}$ B) $\dfrac{H\cos\theta}{2}$ C) $\dfrac{H\text{sen}(45°-\theta)}{\text{sen}2\theta}$

D) $H\tan 2\theta$ E) $\dfrac{H\cot\theta}{(1+\text{sen}\theta)}$

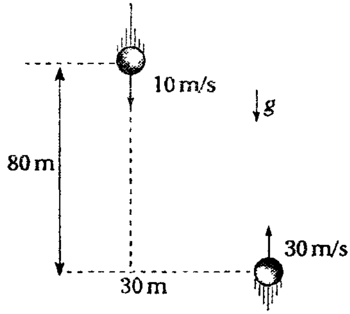
16. Dos esferas son lanzadas simultáneamente tal como muestra el gráfico adjunto. Si el choque entre ambos se da luego de 5 s del lanzamiento, determine la distancia d de separación inicial. (Desprecie la resistencia del aire)

A) 60 m
B) 80 m
C) 100 m
D) 120 m
E) 150 m



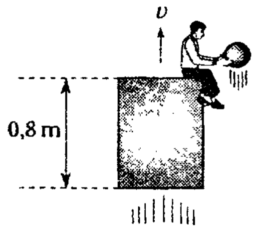
17. Las esferas experimentan M.V.C.L. luego de cuántos segundos se encuentran separados en 50 m por primera vez.

A) 1 s
B) 2 s
C) 1,5 s
D) 2,5 s
E) 3 s

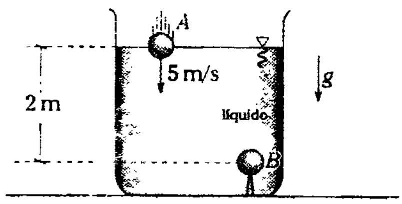


18. Una caja asciende verticalmente con una rapidez constante $[v]$. Si el joven suelta la esfera, ¿luego de cuántos segundos pasará por la parte inferior de la caja?
($g=10$ m/s^2)

A) 0,1 s
B) 0,2 s
C) 0,3 s
D) 0,4 s
E) 0,6 s

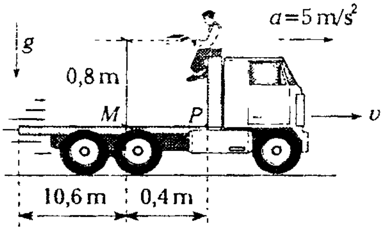


19. En el instante que se rompe el hilo, se lanza verticalmente hacia abajo otra esfera. Si ambas experimentan M.R.U.V. con la misma aceleración vertical hacia abajo, ¿luego de cuántos segundos se cruzan las esferas?



A) 0,2 s B) 0,4 s C) 0,6 s
D) 0,7 s E) 0,8 s

20. Un joven lleva un ladrillo en sus manos y luego la suelta. Indique las proposiciones verdaderas (V) y falsas (F). Considere un M.R.U.V. para el camión.($g=10$ m/s^2)

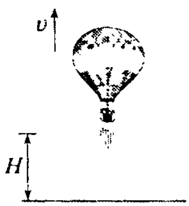


I. El ladrillo cae en el punto P de la plataforma.
II. El ladrillo cae sobre el punto M de la plataforma.
III. El ladrillo cae fuera de la plataforma.
IV. Respecto al joven el ladrillo describe una trayectoria parabólica.

A) FFFF B) VVFF C) VVVF
D) FVFV E) FVFF

21. Un globo aerostático experimenta un M.R.U., cuando se encuentra a 15 m de altura desde el globo se suelta un objeto llegando a tierra al cabo de 3 s. Determine la rapidez del globo. respecto al objeto cuando éste impacta en el piso.

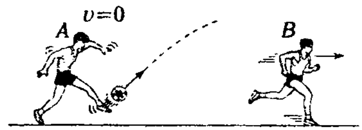
A) 10 m/s
B) 20 m/s
C) 30 m/s
D) 40 m/s
E) 50 m/s



22. Un ascensor de 3 m de altura sube verticalmente acelerando con 0,8 m/s^2. Un niño dentro del ascensor lanza una moneda verticalmente hacia arriba desde 0,6 m respecto del piso del ascensor. ¿Con qué rapidez mínima respecto del ascensor debe lanzarlo para que toque el techo del ascensor? (Desprecie la resistencia del aire) ($g=10$ m/s^2)

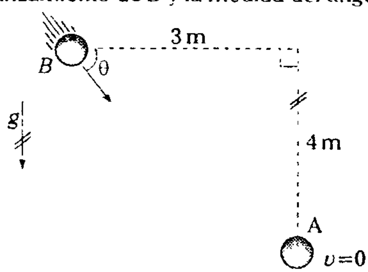
A) 2 m/s B) 6,5 m/s C) 7,2 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

23. Un jugador de fútbol A lanza una pelota con una velocidad $\vec{v}=(30\,;K)$ m/s. Cuando la pelota alcance su punto más alto ¿en qué relación se encuentran los radios de curvatura de la trayectoria de la pelota, respecto de los jugadores A y B?, (Considere que en ese instante el jugador B tiene 5 m/s y desprecie la resistencia del aire).



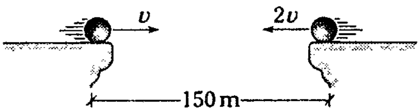
A) 10/17 B) 16/21 C) 36/25
D) 25/32 E) 15/19

24. De una gran altura se suelta una esfera A y simultáneamente se lanza otra esfera B, impactando con A luego de 0,5 s, del lanzamiento. Determine la rapidez de lanzamiento de B y la medida del ángulo θ.



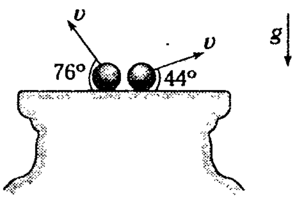
A) 10 m/s ; 37° B) 5 m/s ; 53°
C) 10 m/s ; 53°
D) 15 m/s ; 53° E) 20 m/s ; 37°

25. Dos partículas, A y B, son lanzadas tal como se muestra. Si después de t segundos se encuentran separadas una distancia de 120 m. Calcule después de qué tiempo dado el lanzamiento chocarán. (Desprecie la resistencia del aire)



A) $2t$ B) $3t$ C) $4t$
D) $5t$ E) $6t$

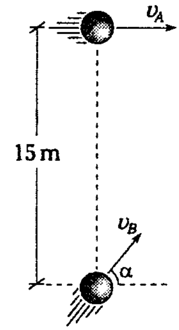
26. Dos esferas son lanzadas simultáneamente tal como se muestra. Determine la distancia vertical que los separa luego de 10 s del lanzamiento. Desprecie la resistencia del aire. ($v = 25$ m/s)



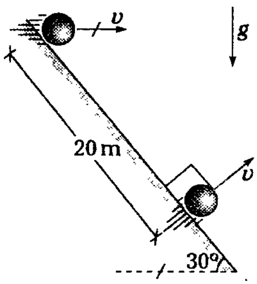
A) 60 m B) 70 m C) 80 m
D) 240 m E) 250 m

27. Dos pequeñas esferas son lanzadas simultáneamente tal como se muestra en la gráfica adjunta. Si $v_A = 16$ m/s y $v_B = 39$ m/s, determine la distancia que separa dichas esferas luego de 1 s del lanzamiento. Desprecie la resistencia del aire. ($\tan\alpha = 5/12$; $g = 10$ m/s^2)

A) 5 m
B) 7 m
C) 12 m
D) 15 m
E) 20 m

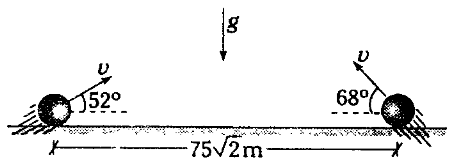


28. Se lanzan las esferas como se muestra en la gráfica. Determine la mínima distancia de separación entre dichas esferas.



A) 10 m B) 20 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

29. Se muestra el lanzamiento simultáneo de los proyectiles con la misma rapidez $(v = \sqrt{6}$ m/s$)$. Determine el intervalo de tiempo que transcurre hasta que los dos proyectiles presentan su menor separación. Desprecie la resistencia del aire. ($g = 10$ m/s^2)



A) 5 s B) 4 s C) 3 s
D) 2 s E) 1 s

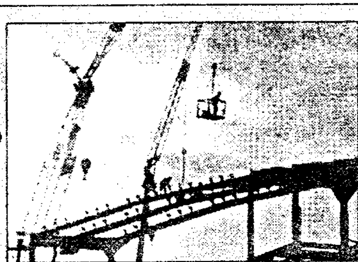
CLAVES

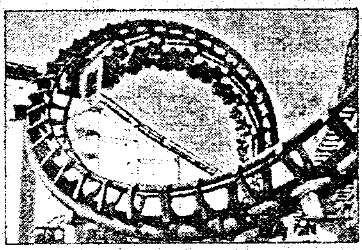
1	D	10	A	19	B
2	E	11	C	20	E
3	E	12	C	21	C
4	E	13	B	22	C
5	B	14	B	23	C
6	E	15	E	24	C
7	D	16	C	25	D
8	C	17	A	26	B
9	B	18	D	27	E

28	A	29	D

IX
CAPÍTULO

Dinámica

(a)



(b)


(c)

Las leyes de la dinámica, encuentran diversas aplicaciones como, por ejemplo: **Fig. (a)** La ingeniería y la técnica. **Fig. (b)** En la elaboración de juegos mecánicos. **Fig. (c)** Y hasta en el deporte.

LECTURA

LOS CONOCIMIENTOS USUALES Y DINÁMICOS

En el estudio de la Dinámica sucede que muchas personas consideran simplemente una ciencia sencilla y casual, esto produce a menudo concepciones erróneas. Aquí daremos un ejemplo demostrativo de esto. ¿Cómo se debe mover un cuerpo sobre el cual obra siempre la misma fuerza? El sentido común afirmará que tal cuerpo debe moverse siempre con la misma velocidad, es decir, continuamente y de manera uniforme.

A veces esto se plantea de manera inversa, si el cuerpo se mueve siempre igual, esto quiere decir, que sobre él actúa continuamente la misma fuerza. El movimiento del carro, de la locomotora, etc., podrán confirmar esta tesis.

La dinámica dice, sin embargo, una cosa completamente diferente. Enseña que las fuerzas constantes no producen movimientos iguales, sino cada vez más acelerados, porque la velocidad prematuramente acumulada de las fuerzas, produce ininterrumpidamente un aumento en el valor de velocidad. En el caso de un movimiento uniforme el cuerpo en general no se encuentra bajo el efecto de fuerzas externas o en todo caso están equilibradas, porque de otro modo no se movería igual y uniforme.

¿Es posible que el sentido común, debido a la observación cotidiana, ha caído en un grave error?

No, esta observación no es completamente errónea, sino únicamente en relación a una serie de fenómenos limitados. La observación cotidiana se realiza en cuerpos que se trasladan bajo las condiciones del roce y de las contradicciones del medio. Pero las leyes de la mecánica se ocupan de cuerpos que se mueven libremente. Por ejemplo: el cuerpo que se mueve bajo condiciones de rozamiento, posee una velocidad determinada, para lo cual hace falta aplicar fuerzas constantes para lograr una eficacia. Pero en este caso, la fuerza no es aplicada para mover el cuerpo, sino exclusivamente para vencer el roce, es decir para crear aquellas condiciones libres que son necesarias para el movimiento. Por lo tanto, es aún más probable que en los casos en los cuales el cuerpo se mueve bajo condiciones de un rozamiento uniforme, para los efectos del movimiento hacen falta fuerzas constantes.

Veremos, pues, por qué peca la mecánica cotidiana: sus afirmaciones sufren debido a las insuficiencias del material. La generalización científica tiene una base más amplia. Las leyes de la dinámica han surgido no sólo por medio del examen de los movimientos de los carros y máquinas de vapor, sino también por el estudio del movimiento de los planetas y cometas Para poder hacer una justa generalización, hace falta ampliar el campo de la observación y limpiar los ejemplos de las circunstancias casuales. Sólo un conocimiento logrado así descubre las raíces profundas de los fenómenos y puede ser aplicado en la práctica con verdadera fecundidad

En la práctica, observaremos una serie de ejemplos y de fenómenos, en los cuales, de un modo excelente, se demuestra la ligazón entre el número de fuerzas que mueven los cuerpos libres y el valor de la aceleración adquirida por ellos, ligazón que está basada en la segunda ley de Newton. Esta importante correlación, desgraciadamente, ha sido tratada con mucha confusión, en los métodos escolares para el estudio de la mecánica. Nuestros ejemplos han sido tomados de situaciones algo ideales, pero en la naturaleza estos fenómenos se comprueban en este sentido, con una mayor exactitud aún.

FUENTE: Mecánica para todos AUTOR: Y. Perelman. Editorial MIR. Pág.: 35

Dinámica

OBJETIVOS

- Conocer el concepto y manifestación de la inercia como propiedad de los cuerpos (propiedad de la materia) y su síntesis en la Primera Ley de Newton.
- Establecer la relación entre el movimiento que desarrolla un cuerpo y las fuerzas que sobre él actúan y su síntesis en la Segunda ley de Newton.
- Aplicar estas dos leyes al análisis del movimiento rectilíneo y curvilíneo y, en este último caso, en forma particular al movimiento circunferencial.
- Conocer la forma en que se analiza un movimiento respecto de un observador que acelera (sistema de referencia no inercial), como un método que permite enfocar el análisis de un problema de manera sencilla y simplificada.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo de Cinemática observamos y definimos algunos elementos y magnitudes físicas que están ligados al movimiento mecánico realizado por un cuerpo, tanto es así que ya conocemos conceptos como: velocidad, aceleración, aceleración angular, velocidad angular, etc.; así mismo, en el estudio del capítulo anterior hemos centrado nuestro análisis en el equilibrio mecánico de los cuerpos y la influencia de las fuerzas para mantener dicha situación mecánica; también se estableció una magnitud física muy importante como es el momento de una fuerza y su relación con el equilibrio de rotación.

La fuerza como acción de un cuerpo sobre otro y el movimiento mecánico son aspectos inseparables en los fenómenos mecánicos que vemos a nuestro alrededor.

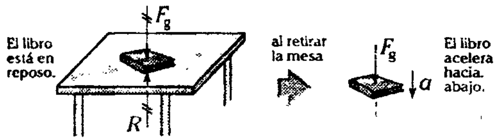
Ahora, recordemos que el equilibrio mecánico se identifica por el **efecto:** aceleración nula $(\vec{a}=\vec{0})$ y que para ello necesariamente debe haber una **causa física** que la ocasione; ¿cuál es esta causa? de análisis anteriores del equilibrio, se deduce que la fuerza resultante que actúa sobre el objeto debe ser necesariamente nula $(\vec{F}_R=\vec{0})$.

En consecuencia existe una relación entre

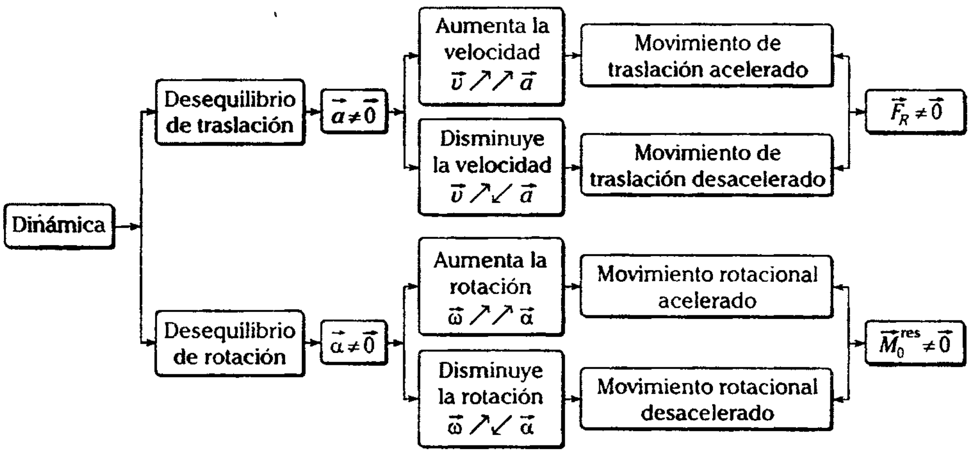
$$\boxed{\begin{array}{ccc}\text{Causa física} & & \text{Efecto físico}\\ (\vec{F}_R=\vec{0}) & \Rightarrow & (\vec{a}=\vec{0})\end{array}}$$

La aceleración nula en un objeto es porque $\vec{F}_R=\vec{0}$

Un cuaderno reposa sobre la mesa cuando su aceleración es nula y esto a su vez sucede porque la fuerza resultante sobre el cuaderno es nula, ya que la fuerza de gravedad $(\downarrow)$ se equilibra con la reacción de la superficie de la mesa $(\uparrow)$, casos de esta índole ya se examinaron; sin embargo, ¿qué ocurre con el cuaderno si retiramos horizontalmente la superficie de la mesa que le sirve de apoyo de manera brusca? La experiencia nos hace observar que el objeto cae hacia tierra, verticalmente en caída libre y con aceleración $(\vec{a}=\vec{g})$, así experimentalmente lo comprobamos, pero ¿por qué surge $\vec{a}$? Surge porque sobre el objeto en caída libre sólo actúa la fuerza gravedad $(\downarrow)$ que es la fuerza resultante diferente de cero y provoca una $\vec{a}(\downarrow)$. En resumen, se ratifica la ley de la naturaleza sintetizada por Isaac Newton que establece a la causa: la fuerza resultante diferente de cero; como aquella que origina el efecto físico que experimentan los objetos, la aceleración diferente de cero.



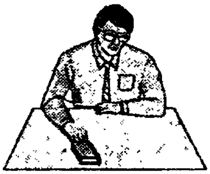
A continuación, nuestro propósito será examinar situaciones físicas contrarias a la de equilibrio mecánico de un cuerpo o sistema, pues ahora en *Dinámica* estudiaremos situaciones en las cuales el equilibrio es alterado, para tener un panorama general de este interesante capítulo, usando otra de las leyes de la naturaleza, podemos esbozar el tratamiento de la dinámica (contrario al de Estática) con el siguiente cuadro:



Nótese que ahora el efecto físico (Desequilibrio mecánico) donde $\vec{a}\neq\vec{0}$ es ocasionado por la $\vec{F}_R\neq\vec{0}$ (causa física), por lo tanto, en este tratado se abordará el estudio y aplicación de la segunda ley de Newton y otras propiedades-conceptos físicos de gran importancia como son la inercia y la masa.

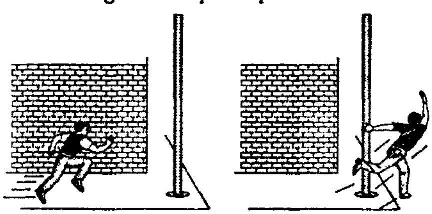
A partir de nuestra experiencia diaria estamos acostumbrados a que la velocidad de un cuerpo solo puede variar cuando otro cuerpo actúa sobre el. Por ejemplo, un libro que está en nuestra mesa comienza a moverse (cambia su velocidad) cuando lo empujamos, jalamos o lanzamos.

El libro (cuerpo) permanece en reposo si no actuamos sobre él.



Ahora, ¡por la acción del joven, altera su estado inicial de reposo y comienza a moverse!

Si la velocidad cambia, tanto su módulo como su dirección pueden variar. Pero, ¿por qué cambia la dirección de la velocidad? Cambia porque el cuerpo interactúa con otro cuerpo. Esto lo comprobamos lanzando un balón contra la pared, observamos que luego del impacto, éste cambia la dirección de su movimiento. Otro ejemplo a citar es cuando un estudiante que va corriendo con gran rapidez por la vereda desea doblar en la esquina, para ello las ranuras de sus zapatillas interactúan con las asperezas de la vereda para dar la vuelta o bien debe cogerse del poste para ello.

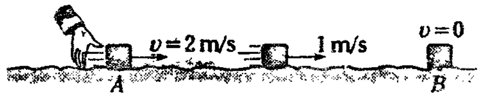


El corredor requiere del poste para que pueda girar (cambiar la dirección de su velocidad).

Estos casos los hemos citado con la intención de examinar y entender una propiedad de los cuerpos en la naturaleza denominada **Inercia**.

INERCIA

Examinemos el siguiente experimento: sobre una mesa muy pulida ponemos una determinada cantidad de arena. Ahora, lancemos un bloque de madera con una velocidad de 2 m/s hacia la derecha.



Vemos que éste se detiene, conserva durante poco tiempo su movimiento mecánico. Ahora, si retiramos un poco de arena y lanzamos nuevamente el bloque con la misma velocidad, veremos que conserva por más tiempo su movimiento; con todo lo anterior, podemos intuir que si no hubiese nada de arena, el bloque recorrerá una distancia aún mayor ya que conservará durante mayor tiempo su movimiento.

Luego podemos establecer que a menor oposición o resistencia el bloque se moverá durante un mayor tiempo, tal es así que si la oposición fuese nula el bloque realizaría un movimiento uniforme (M.R.U.)

Lo expuesto anteriormente era lo que se planteaba el italiano Galileo Galilei: *Si sobre un cuerpo no actúan otros cuerpos, el primero estará con movimiento rectilíneo uniforme*, es decir conservaría su velocidad de manera indefinida.

Este planteamiento hecho por Galileo ha sido confirmado con diferentes cuerpos de modo que podríamos asegurar que se trata de una propiedad de todos los cuerpos el hecho de tratar de conservar su velocidad, en consecuencia: **¿Qué es la inercia?**

Es una propiedad que tienen los cuerpos quienes en forma natural tienden a conservar su velocidad, es decir, su movimiento uniforme; esto es constantemente contrastado en nuestro quehacer cotidiano.

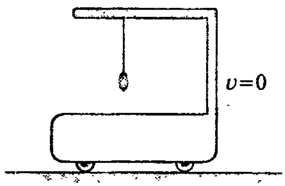
PRIMERA LEY DE NEWTON

Se sabe que I. Newton continuó con el trabajo hecho por G. Galilei; a partir de ahí pudo deducir que si un cuerpo estaba en reposo iba a conservar dicho estado a no ser que otro cuerpo actúe sobre él. A partir de esto, Newton formuló una conclusión que hoy en día la denominamos primera ley de Newton, también se le conoce como ley de inercia y plantea que

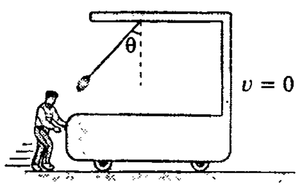
Si un cuerpo se halla en reposo, continuará en reposo; si está realizando M.R.U., continuará con M.R.U. a no ser que sobre él actúe una fuerza y modifique dicho estado mecánico.

Veamos ejemplos donde se manifiesta la inercia

I. Cuando un cuerpo reposa colgado de un techo de un coche, como se indica en la figura.

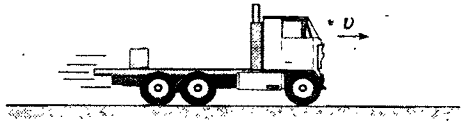


¿Qué sucede si empujamos lentamente el coche? Experimentalmente, se observará lo siguiente:

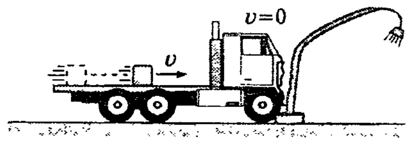


El hilo experimenta una inclinación θ. ¿Por qué? El extremo del hilo amarrado al techo avanza, pero el otro extremo del hilo que está unido al cuerpo en reposo tiende a quedarse, debido a su inercia de reposo.

II. Cuando un camión se mueve llevando un ladrillo sobre su plataforma, así

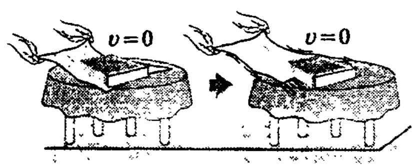


¿Qué sucede con el ladrillo si el camión choca contra un poste? El camión se deforma y se detiene, el poste se inclina así.



Pero el ladrillo empieza a resbalar sobre la plataforma, ¿por qué ocurre ello? El ladrillo, como estaba en movimiento, busca conservar dicho movimiento manifestándose la propiedad de la inercia.

En consecuencia, en el análisis de los fenómenos físicos se podrá apreciar y comprobar la inercia de reposo e inercia de traslación.

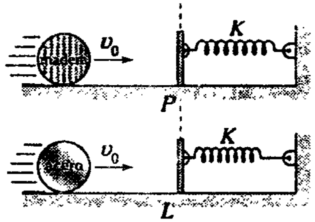


En la figura un diccionario reposa sobre una tela de seda, al retirar rápidamente la tela el diccionario sigue en reposo, ¿por qué? Esa es su tendencia natural o propiedad de conservar su estado de reposo (inercia de reposo).

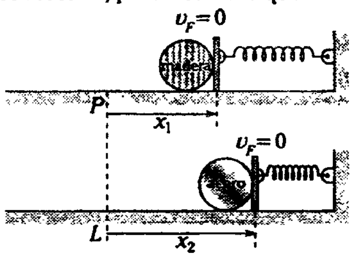
En resumen: todos los cuerpos o partículas tienen una propiedad denominada inercia que se caracteriza por la tendencia a seguir reposando o a conservar su estado de M.R.U.

UNA MAGNITUD DINÁMICA: LA MASA

Todos los cuerpos tienen inercia, claro está que unos en mayor medida que otros; para ver ello examinemos el caso siguiente: se lanza una esfera de madera con una velocidad $\vec{v}_0$ contra un resorte de rigidez K sin deformar y otra esfera de igual radio, pero de acero con la misma velocidad $\vec{v}_0$ y contra otro resorte idéntico sin deformar sobre una superficie lisa.



Luego, ambas esferas impactan y deforman a ambos resortes, pero notamos que



La esfera de madera comprime x_1 al resorte y la esfera de acero comprime x_2 al otro resorte, notándose experimentalmente que $x_2>x_1$.

La esfera de acero deformó más al resorte ($x_2>x_1$) porque demoró más tiempo en detenerse que la esfera de madera; por lo tanto, podemos afirmar que conservó durante un mayor tiempo su movimiento, y en consecuencia se puede afirmar que tiene más inercia que la esfera de madera.

Por lo tanto, todos los cuerpos tienen inercia, pero no necesariamente en la misma medida, por lo tanto, es necesario diferenciar la cantidad de inercia de los cuerpos. ¿Cómo? Mediante una magnitud física escalar denominada **masa**.

La masa cuantifica la inercia que presenta un cuerpo, entonces, la masa de la esfera de acero es mayor que la masa de la esfera de madera. A la masa que nos mide o cuantifica la inercia de los cuerpos se le denomina masa inercial y su unidad es el kilogramo (kg).

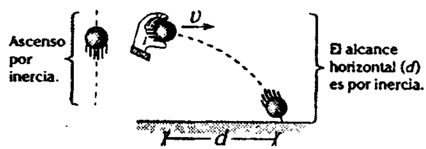
Ahora, la masa de los cuerpos que permite las interacciones gravitacionales; por ejemplo, un objeto que interactúa con la Tierra, esta situación es atribuida a la masa gravitacional, la cual permite justificar las interacciones gravitacionales. Ahora para los fines que seguimos, se plantea

$$m_{\text{inercial}} \approx m_{\text{gravitacional}}$$

Luego, podemos plantear que si un bloque A tiene 1 kg de masa y otro bloque B posee 3 kg de masa, ¿qué significa esto? Significa que la cantidad de inercia del bloque B es 3 veces la cantidad de inercia de A; es decir, B tiene mayor tendencia a conservar su velocidad que A.

La masa (gravitacional) cualitativamente nos permite explicar y sustentar las interacciones a distancia entre dos cuerpos, a los cuales se denominan interacciones gravitacionales. Las interacciones gravitacionales son más intensas cuanto más masa tengan los cuerpos; por ejemplo, las interacciones entre dos planetas son mucho mayores que la interacción gravitacional entre dos canicas (Esto se estudiará con mayor detalle en el capítulo de Gravitación).

Con los recursos ya planteados podemos explicar los movimientos de caída libre. Cuando lanzamos a un cuerpo verticalmente hacia arriba, este asciende por inercia y retorna debido a la atracción terrestre; en cambio, si lanzamos horizontalmente a un cuerpo, le comunicamos movimiento en dicha dirección y por inercia lo conservará, mientras que su aproximación a la superficie es debido a la atracción terrestre.



SEGUNDA LEY DE NEWTON (DEDUCCIÓN CUANTITATIVA)

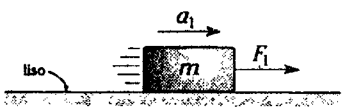
Tomando en consideración los análisis anteriores, se dedujo que

ESTADO FÍSICO	EFECTO	CAUSA
Equilibrio mecánico	$\vec{a}=0$	$\vec{F}_R=0$
Desequilibrio mecánico	$\vec{a}\neq 0$	$\vec{F}_R\neq 0$

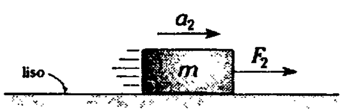
Todo movimiento acelerado o desacelerado que experimenta un cuerpo o sistema es causado por la acción de una fuerza resultante diferente de cero.

A mayor aceleración, se ejerce mayor fuerza resultante sobre el cuerpo y viceversa; esto lo comprobamos así:

- $\vec{F}_1$ origina su movimiento acelerado del bloque, es decir, el bloque acelera con $\vec{a}_1$.



$\vec{F}_2$ origina una aceleración $\vec{a}_2$ en el bloque de igual masa que el anterior.



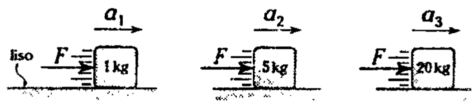
Experimentalmente, se comprueba que

Si $F_1>F_2 \Rightarrow a_1>a_2$

Por lo tanto, la aceleración que experimenta un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza resultante sobre él.

$\therefore$ Aceleración $(\vec{a})$ D.P. Fuerza resultante $(\vec{F}_R)$ (I)

Por otra parte, la misma fuerza $\vec{F}$ si es aplicada sucesivamente sobre distintos cuerpos.



Notaremos que el cuerpo de mayor masa (lo que significa mayor inercia) cambia su velocidad en menor valor; en cambio, al cuerpo de menor masa sometido a la acción de la misma fuerza cambia de velocidad en un mayor valor; esto significa que experimentará mayor aceleración que aquel cuerpo que tenga menor masa. Por lo tanto, concluimos en que $a_1>a_2>a_3$

$\therefore$ Aceleración $(\vec{a})$ I.P. Masa (m)

$$\Rightarrow \vec{a} \xrightarrow{\text{D.P.}} \left(\frac{1}{m}\right) \qquad \text{(II)}$$

A partir de (I) y (II) podemos plantear una relación entre aceleración, fuerza resultante y masa, del siguiente modo:

$$\vec{a} \text{ D.P. } \frac{\vec{F}_R}{m}$$

Planteando la igualdad

$$\boxed{\vec{a}=K\frac{\vec{F}_R}{m}} \qquad \text{(III)}$$

En esta relación puede adoptarse para la $\vec{F}_R$, m y $\vec{a}$ cualquier unidad con tal de dar a K el valor apropiado, que en cada caso varía con las unidades elegidas. Si trabajamos en el Sistema Internacional (SI), tendremos que la unidad de aceleración es el m/s^2, de la masa es el kg y de la fuerza es el N; trabajando las magnitudes señaladas en estas unidades, tendremos $K=1$. Por lo tanto, la ecuación (III) se convierte en:

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\vec{F}_R}{m}}$$

(Segunda Ley de Newton)

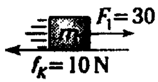
Es muy importante tener en cuenta que a la segunda ley de Newton se le conoce como Ley del Movimiento, ya que haciendo uso de la fórmula establecida y conociendo las condiciones iniciales, se determina la ecuación del movimiento de un cuerpo. Una de las aplicaciones más significativas de la segunda ley de Newton fue al movimiento planetario, lo cual demostró que el movimiento de los planetas y cometas al moverse en torno del Sol, siguen trayectorias elípticas.

También es importante tener presente que mientras la masa del cuerpo sea constante, la aceleración y la fuerza resultante tienen igual dirección.

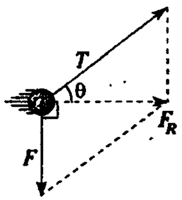
$\vec{a} \nearrow\!\nearrow \vec{F}_R$

Ahora, ¿cómo obtendremos la fuerza resultante $\vec{F}_R$? Por lo general será deducida a partir del diagrama de fuerzas del cuerpo o sistema que sea objeto de estudio.

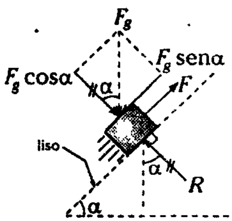
Ejemplos



$\Rightarrow F_R=F_1-f_K=20\text{ N }(\rightarrow)$



$\Rightarrow F_R=T\cos\theta(\rightarrow)$



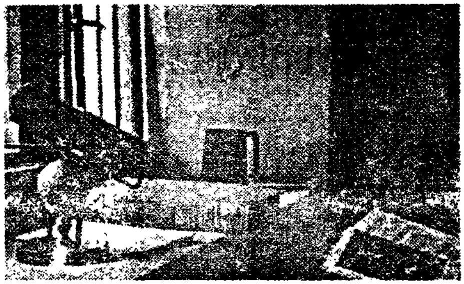
En este caso el bloque acelera hacia arriba.

$F_R=(F-F_g\,\text{sen}\alpha)(\nearrow)$

Si el bloque acelera hacia abajo

$F_R=(F_g\,\text{sen}\alpha-F)(\swarrow)$

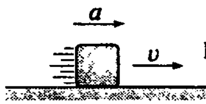
Nótese que la fuerza de gravedad se ha descompuesto en la dirección del movimiento y perpendicular a ella.



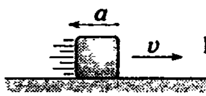
El libro Principios Matemáticos de la Filosofía natural escrito en 1666 y publicado en 1687 representa uno de los aportes más significativos en la historia de la ciencia. En la foto está junto al telescopio reflector que el mismo I. Newton construyó.

Observaciones respecto a la Segunda Ley de Newton

Lo que se sabe de la Cinemática es lo siguiente:

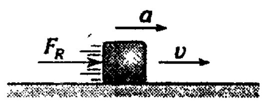


la rapidez aumenta

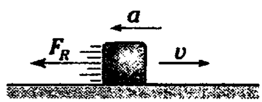


la rapidez disminuye

Pero debemos tener presente que la $\vec{F}_R$ tiene la misma dirección que la $\vec{a}$, entonces



υ: aumenta. ¡Movimiento acelerado!



υ: disminuye. ¡Movimiento desacelerado!

Cuando un cuerpo se mueve en trayectoria recta, variando su velocidad, la $\vec{F}_R$ siempre es paralela con la velocidad, puede estar en la misma dirección o en dirección contraria.

Debemos, en realidad, señalar que la expresión planteada como Segunda Ley de Newton es un aspecto particular de esta ley. La Segunda Ley de Newton en su forma más general fue planteada así:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La $\vec{F}_R$ es igual a la derivada de la cantidad de movimiento $(\vec{p})$ con respecto al tiempo.

A partir de esta expresión se demuestra que para el caso particular en el que la masa del cuerpo permanezca constante durante el tiempo, se cumple que $\vec{F}_R = m\vec{a}$. Por lo tanto, esta expresión será válida cuando durante el movimiento la masa del cuerpo no cambie.

Hay algunos casos donde la masa es variable, por ejemplo: cuando un cohete asciende, va expulsando combustible (en forma de gases), un camión cisterna, cuando riega los jardines, va expulsando agua conforme se traslada y así podemos citar varios ejemplos en los cuales la expresión antes planteada no podrá ser aplicada.

Una limitación que tiene la Segunda Ley de Newton, ya sea en su forma general o particular, es que sólo es válida en sistemas de referencia inerciales (cuando el observador que analiza no acelere, es decir esté en reposo o con M.R.U.). Si el análisis se hace desde un sistema acelerado (sistema de referencia no inercial), debemos trabajar de una manera especial que más adelante en este capítulo se detallará.

Por último, si los cuerpos adquieren rapidez cercana a la rapidez de la luz ($v \approx c$: c es la rapidez de la luz), se manifiestan efectos relativistas, por ejemplo, la masa experimenta un incremento (como la medida de la inercia) y la Segunda Ley de Newton ya no es válida y debe tratarse el análisis dentro del marco de la Teoría de la relatividad especial.

En la teoría de la relatividad se demuestra que la masa de un cuerpo en movimiento viene dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

m_0 : masa en reposo del cuerpo.
v : rapidez del cuerpo.

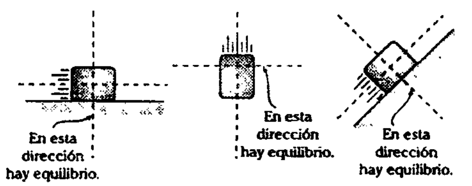
Algunas recomendaciones para la resolución de problemas

Si un objeto o sistema realiza movimiento acelerado, necesariamente sobre él se tendrá una $\vec{F}_R$; entonces nuestra tarea será descubrir o hallar dicha $\vec{F}_R$; y esto se conseguirá realizando un diagrama de fuerzas, para lo cual debe

- Aislar imaginariamente el cuerpo o sistema de cuerpos que conviene analizar.
- Graficamos las fuerzas sobre el cuerpo o sistema; sin incluir, las fuerzas que el cuerpo ejerce sobre sus alrededores.
- En la dirección del movimiento acelerado o desacelerado estará la $\vec{F}_R$ para ello; si es necesario, habrá que descomponer algunas fuerzas en la dirección del movimiento.
- En un movimiento rectilíneo las fuerzas o componentes de fuerzas que son perpendiculares a la velocidad tienen por resultante cero, ya que en esta dirección no hay desplazamiento, en consecuencia:

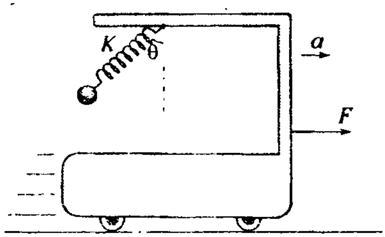
$$\vec{F}_R\begin{pmatrix}\text{de todas las fuerzas}\\ \text{que son } \perp \text{ a la } \vec{v}\end{pmatrix} = \vec{0}$$

Esto lo podemos ver reflejado en los siguientes casos:



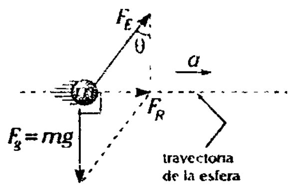
Ejemplo 1

¿Con qué aceleración constante se desplaza el coche si $\theta = 37°$ y se mantiene constante?
($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Mientras el coche se desplaza y el ángulo θ se mantiene constante, significa que la esfera no se mueve respecto de él; por lo tanto, la esfera debe moverse igual que el coche (horizontalmente) y con la misma aceleración. Por este motivo, para calcular la aceleración del coche $(\vec{a})$, analizamos a la esfera. Como la $\vec{a}$ es horizontal, la fuerza resultante también, lo que verificamos mediante el método del paralelogramo. El D.C.L. de la esfera sería



Del gráfico deducimos que

$$F_R = mg\tan\theta$$

$$\cancel{m}a = \cancel{m}g\tan\theta$$

$$\Rightarrow \; a = g\tan\theta = 10\tan 37°$$

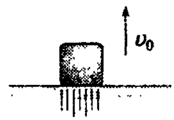
$$\therefore \; a = 7{,}5 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 2

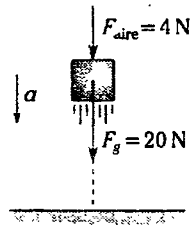
Un bloque de 2 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 12 m/s. Considerando que el aire ejerce una fuerza constante de 4 N, ¿hasta qué altura subirá el bloque como máximo? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

Tenemos inicialmente $\upsilon_0 = 12$ m/s.



Ahora, a medida que este asciende (por inercia), no solamente está actuando la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$, sino también la fuerza de oposicion del aire $(\vec{F}_{aire})$. Por lo tanto, concluimos que el bloque no está en caída libre y la aceleración para su movimiento debe ser diferente que la aceleración de la gravedad.



Del diagrama deducimos

$$F_R = F_g + F = (20 + 4)$$

$$F_R = 24 \text{ N}$$

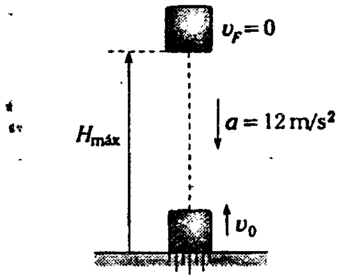
Entonces, el bloque presenta una aceleración $(\vec{a})$, la cual se calcula usando la Segunda Ley de Newton.

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{24}{2}$$

$$a = 12 \text{ m/s}^2$$

Como la $\vec{a}$ resulta ser constante y la trayectoria es recta, se concluye que el bloque experimenta un M.R.U.V.

Nos piden la altura máxima ($H_{máx}$) y esta se presentará en el instante en que la rapidez sea nula. ($v_F = 0$)



Hallemos H, utilizando la ecuación del M.R.U.V.

$$v_F^2 = v_0^2 - 2ad$$

$$0^2 = 12^2 - 2(12)H_{máx}$$

$$12^2 = 2(12)H_{máx}$$

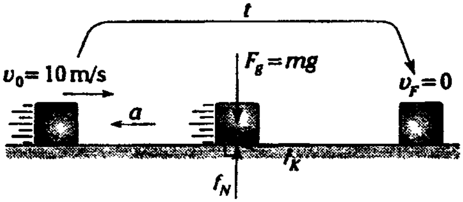
$$\therefore\ H_{máx} = 6\,m$$

Ejemplo 3

Un bloque de masa m es lanzado con 10 m/s sobre una superficie horizontal rugosa ($\mu_K = 0{,}2$). Determine al cabo de qué tiempo el bloque se detiene. ($g = 10\,m/s^2$)

Resolución

Una vez lanzado el bloque, él se traslada por inercia y mientras resbala sobre la superficie rugosa, esta le ofrece una resistencia $(\vec{f}_K)$. Ahora, representemos gráficamente lo que el problema nos señala



Podemos notar que en la dirección perpendicular a la velocidad actúan la $\vec{F}_g$ y $\vec{f}_N$ y como el movimiento es horizontal, en la vertical las fuerzas deben estar equilibradas.

$$\Rightarrow\ \sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$\therefore\ f_N = F_g = mg$$

Pero, horizontalmente se deduce que la fuerza resultante sobre el bloque es $\vec{f}_K$ y actúa en dirección contraria a la velocidad, lo que nos lleva a plantear que el bloque experimenta un movimiento desacelerado.

De la figura, deducimos que

$$F_R = f_K$$

$$\Rightarrow\ ma = \mu_K f_N$$

$$\cancel{m}a = 0{,}2(\cancel{m}g) \qquad (1)$$

$$\therefore\ a = 2\,m/s^2$$

Con esto demostramos que la aceleración es constante, no depende de la masa del cuerpo, pero sí de μ_K lo que significa que depende del material del que esté fabricando el bloque y el piso.

Como la aceleración es constante y la trayectoria es recta, concluimos en que el bloque desarrolla un M.R.U.V.

Luego, aplicando una ecuación del M.R.U.V.

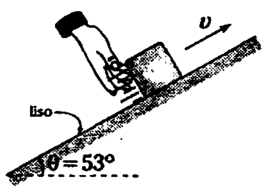
$$v_F = v_0 - at$$

$$0 = (10) - (2)t$$

$$\therefore\ t = 5\,s$$

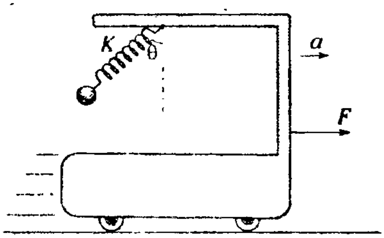
Ejemplo 4

Un bloque es lanzado sobre un plano inclinado liso, tal como se indica en la figura. ¿Qué módulo tendrá la aceleración del bloque? ($g = 10\,m/s^2$)



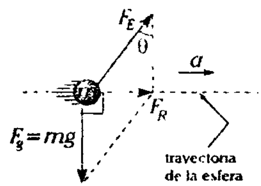
Ejemplo 1

¿Con qué aceleración constante se desplaza el coche si $\theta = 37°$ y se mantiene constante? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Mientras el coche se desplaza y el ángulo θ se mantiene constante, significa que la esfera no se mueve respecto de él; por lo tanto, la esfera debe moverse igual que el coche (horizontalmente) y con la misma aceleración. Por este motivo, para calcular la aceleración del coche ($\vec{a}$), analizamos a la esfera. Como la $\vec{a}$ es horizontal, la fuerza resultante también, lo que verificamos mediante el método del paralelogramo. El D.C.L. de la esfera sería



Del gráfico deducimos que

$$F_R = mg\tan\theta$$

$$\cancel{m}a = \cancel{m}g\tan\theta$$

$$\Rightarrow \; a = g\tan\theta = 10\tan 37°$$

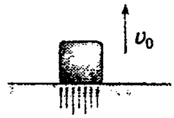
$$\therefore \; a = 7{,}5 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 2

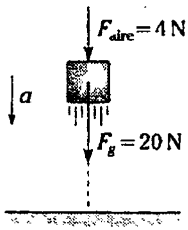
Un bloque de 2 kg es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 12 m/s. Considerando que el aire ejerce una fuerza constante de 4 N, ¿hasta qué altura subirá el bloque como máximo? ($g = 10$ m/s^2)

Resolución

Tenemos inicialmente $v_0 = 12$ m/s.



Ahora, a medida que este asciende (por inercia), no solamente está actuando la fuerza de gravedad ($\vec{F}_g$), sino también la fuerza de oposición del aire ($\vec{F}_{aire}$). Por lo tanto, concluimos que el bloque no está en caída libre y la aceleración para su movimiento debe ser diferente que la aceleración de la gravedad.



Del diagrama deducimos

$$F_R = F_g + F = (20 + 4)$$

$$F_R = 24 \text{ N}$$

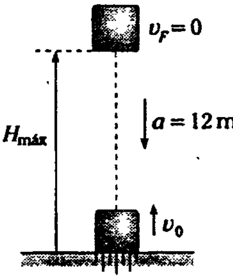
Entonces, el bloque presenta una aceleración ($\vec{a}$), la cual se calcula usando la Segunda Ley de Newton.

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{24}{2}$$

$$a = 12 \text{ m/s}^2$$

Como la $\vec{a}$ resulta ser constante y la trayectoria es recta, se concluye que el bloque experimenta un M.R.U.V.

Nos piden la altura máxima ($H_{máx}$) y esta se presentará en el instante en que la rapidez sea nula. ($v_F = 0$)



Hallemos H, utilizando la ecuación del M.R.U.V.

$$v_F^2 = v_0^2 - 2ad$$

$$0^2 = 12^2 - 2(12)H_{máx}$$

$$12^2 = 2(12)H_{máx}$$

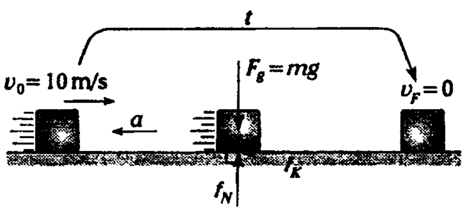
$$\therefore\ H_{máx} = 6\text{ m}$$

Ejemplo 3

Un bloque de masa m es lanzado con 10 m/s sobre una superficie horizontal rugosa $(\mu_K = 0,2)$. Determine al cabo de qué tiempo el bloque se detiene. (g = 10 m/s^2)

Resolución

Una vez lanzado el bloque, él se traslada por inercia y mientras resbala sobre la superficie rugosa, esta le ofrece una resistencia $(\vec{f}_K)$. Ahora, representemos gráficamente lo que el problema nos señala



Podemos notar que en la dirección perpendicular a la velocidad actúan la $\vec{F}_g$ y $\vec{f}_N$ y como el movimiento es horizontal, en la vertical las fuerzas deben estar equilibradas.

$$\Rightarrow\ \sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$\therefore\ f_N = F_g = mg$$

Pero, horizontalmente se deduce que la fuerza resultante sobre el bloque es $\vec{f}_K$ y actúa en dirección contraria a la velocidad, lo que nos lleva a plantear que el bloque experimenta un movimiento desacelerado.

De la figura, deducimos que

$$F_R = f_K$$

$$\Rightarrow\ ma = \mu_K f_N$$

$$\cancel{m}a = 0,2(\cancel{m}g) \qquad (1)$$

$$\therefore\ a = 2\text{ m/s}^2$$

Con esto demostramos que la aceleración es constante, no depende de la masa del cuerpo, pero sí de μ_K lo que significa que depende del material del que esté fabricando el bloque y el piso.

Como la aceleración es constante y la trayectoria es recta, concluimos en que el bloque desarrolla un M.R.U.V.

Luego, aplicando una ecuación del M.R.U.V.

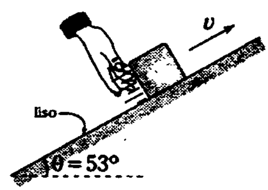
$$v_F = v_0 - at$$

$$0 = (10) - (2)t$$

$$\therefore\ t = 5\text{ s}$$

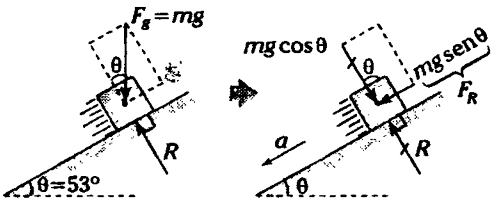
Ejemplo 4

Un bloque es lanzado sobre un plano inclinado liso, tal como se indica en la figura. ¿Qué módulo tendrá la aceleración del bloque? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Una vez lanzado el bloque, él asciende por inercia y al realizar el diagrama de fuerzas, vemos que sobre el bloque actúan dos fuerzas de las cuales una componente de la fuerza de gravedad es paralela y contraria a la velocidad.



Como $\vec{a}$ tiene dirección contraria a la del movimiento del bloque, este desacelera.

Note además que en la dirección perpendicular al plano el bloque no experimenta movimiento, en tal sentido, en esa dirección la suma de fuerzas será nula.

$$\Rightarrow \quad R = mg\cos\theta$$

En la dirección del movimiento existe fuerza resultante y usando la segunda ley de Newton, calculamos la aceleración del bloque.

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{\cancel{m}g\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{m}}$$

$$\therefore \quad a = g\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{(I)}$$

Reemplazando los valores de g y θ

$$a = 10\left(\frac{4}{5}\right)$$

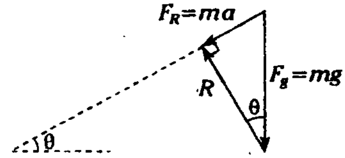
$$\Rightarrow \quad a = 8\ \mathrm{m/s^2}$$

Es importante destacar de la expresión (I) que la aceleración que experimenta un bloque que se mueve sobre una superficie inclinada lisa, no depende de su masa, sino que sólo del ángulo de inclinación θ. Esto significa que sobre un plano inclinado liso cualquier cuerpo experimenta la misma aceleración.

Otro método

Usando el método del triángulo con $\vec{R}$ y $\vec{F}_g$, se construye y deduce la $\vec{F}_R$ y debe tener la misma dirección de la $\vec{a}$.

Por lo tanto



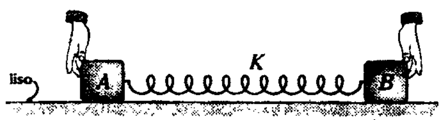
Del triángulo de fuerzas deducimos que

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{F_R}{F_g} = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g}$$

$$\therefore \quad a = g\,\mathrm{sen}\,\theta = 10\,\mathrm{sen}\,53^\circ = 8\ \mathrm{m/s^2}$$

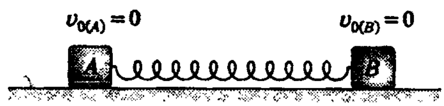
Ejemplo 5

Dos bloques A y B, de 3 kg y 5 kg respectivamente están unidos por medio de un resorte ideal que se encuentra estirado. Luego de que los bloques son abandonados en las posiciones mostradas, ¿cuánto será la aceleración del bloque A para el instante en que B tiene una aceleración de módulo 9 m/s²?

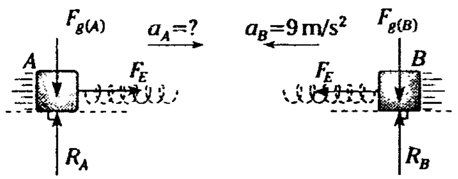


Resolución

En el instante de ser soltados, los bloques empiezan a resbalar, pues el resorte estirado trata de recuperar su longitud natural.



Realizando el diagrama de fuerzas de cada bloque se puede observar que sobre cada bloque la fuerza resultante es la fuerza elástica (F_E), la cual estará disminuyendo debido a que al acercarse los bloques la deformación del resorte disminuye, la cual ocasionará que los bloques tengan aceleraciones que también estarán disminuyendo y cuyos módulos instantáneos los llamaremos a_A y a_B respectivamente.



Para el instante que se indica en la figura se requiere a_A, sobre el bloque A planteamos

$$a_A = \frac{F_R}{m_A}$$

$$\Rightarrow \quad a_A = \frac{F_E}{m_A} = \frac{F_E}{3} \qquad \text{(I)}$$

Análogamente, sobre el bloque B

$$a_B = \frac{F_R}{m_B} = \frac{F_E}{m_B}$$

$$\Rightarrow \quad F_E = m_B \cdot a_B$$

$$F_E = (5)(9)$$

$$F_E = 45 \text{ N}$$

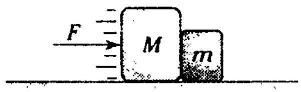
Reemplazando en (I)

$$\therefore \quad a_A = 15 \text{ m/s}^2$$

Tenga presente que el valor hallado es instantáneo, es decir solo para el instante señalado, ya que la fuerza resultante $\left(\vec{F}_R = \vec{F}_E\right)$ está cambiando de valor y para un instante diferente se tendrá también diferente aceleración.

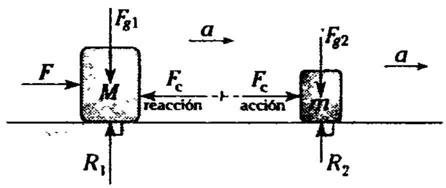
Ejemplo 6

Dos bloques se mueven juntos sobre una superficie horizontal lisa mediante la acción de la fuerza horizontal $\vec{F}$. Determine el módulo de la fuerza entre los bloques.



Resolución

A partir del gráfico podemos notar que el bloque de mayor tamaño es empujado mediante la fuerza $\vec{F}$ y, debido a esto, este bloque empuja al más pequeño. La fuerza que se ejerce en estos bloques es también conocida como *fuerza de contacto* $\left(\vec{F}_c\right)$. Hagamos el diagrama de fuerzas para cada bloque, teniendo presente que si se mueven juntos lo hacen con la misma aceleración.



Apliquemos la Segunda Ley de Newton para cada uno de los bloques.

- Bloque de masa M

$$F_R = Ma$$

$$F - F_c = Ma \qquad \text{(I)}$$

- Bloque de masa m

$$F_R = ma$$

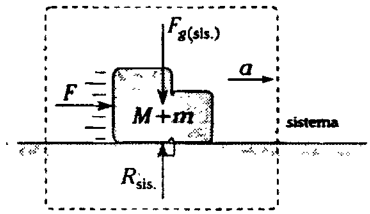
$$F_c = ma \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo simultáneamente (I) y (II), se obtiene

$$F_c = F\left(\frac{m}{M+m}\right)$$

Otro método

Del análisis del bloque de masa m notamos que sólo falta conocer a para determinar F_c. Por lo tanto, aprovechando que ambos bloques se mueven juntos, con la misma aceleración podemos aplicar el criterio de sistema, es decir, considerar a ambos bloques como partes de uno solo. Así



Aplicamos la Segunda Ley de Newton para el sistema.

$$F_{R(sis.)} = m_{sis.}a$$

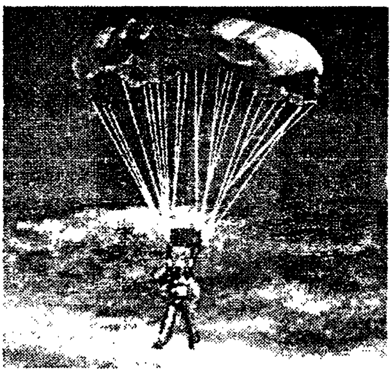
$$F = (M+m)a$$

$$\therefore \ a = \frac{F}{(M+m)}$$

Reemplazando en (I)

$$F - F_c = M\left(\frac{F}{M+m}\right)$$

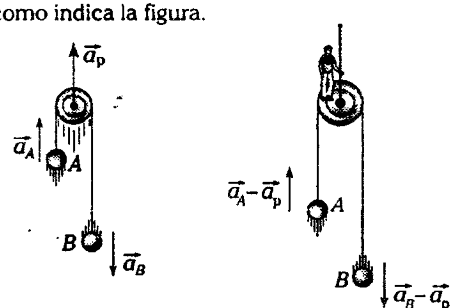
$$\therefore \ F_c = F\left(\frac{m}{M+m}\right)$$



Los paracaidistas cuando alcanzan su velocidad límite, ésta se mantiene constante, debido a que la resistencia del aire logra alcanzar el mismo valor que la fuerza de gravedad que experimenta el paracaidista.

Caso especial: estudio de la polea móvil

Existe una gran variedad de problemas en Dinámica donde resulta muy útil conocer la aceleración de una polea móvil; para ello examinemos una polea que asciende con $\vec{a}_p$ como indica la figura.



(a) (b)

Los puntos A y B pertenecen a la misma cuerda, pero desde Tierra se mueven con aceleraciones $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_B$ (como muestra la figura a). ¿Cómo relacionamos entre sí a las aceleraciones $\vec{a}_A$ y $\vec{a}_B$ con $\vec{a}_p$? Para esto tratemos de analizar los puntos A y B de la cuerda, ubicándonos sobre la polea (Fig. b). Para el observador la polea no se mueve, el punto A de la cuerda se le acerca con $\vec{a}_{A/p} = \vec{a}_A - \vec{a}_p$ y para él mismo el punto B de la misma cuerda se le aleja con $\vec{a}_{B/p} = \vec{a}_B - \vec{a}_p$

El punto A, para el observador situado en la polea, supongamos que se le acercó 1 m; entonces, el punto B, como pertenece a la misma cuerda, se alejará también un metro en el mismo intervalo de tiempo, esto nos lleva a plantear que

$$a^{\text{acercamiento}}_{\text{de } A} = a^{\text{alejamiento}}_{\text{de } B}$$

Vectorialmente, para que $\vec{a}_{A/p}(\uparrow)$ sea igual a $\vec{a}_{B/p}(\downarrow)$, hacemos $\vec{a}_{A/p} = (-)\vec{a}_{B/p}$

Reemplazando

$$\vec{a}_A - \vec{a}_p = -\left(\vec{a}_B - \vec{a}_p\right)$$

de donde

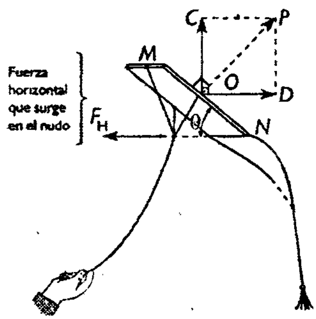
$$\boxed{\vec{a}_p = \frac{\vec{a}_A + \vec{a}_B}{2}}$$

(Ecuación para la polea móvil)

¿POR QUÉ SE ELEVAN LOS COMETAS?

Las cometas se elevan cuando tiramos de la cuerda hacia adelante, ¿por qué?

Todo aquel que sepa responder a esta pregunta puede explicarse también por qué vuelan los aviones, por qué se trasladan por el aire las semillas de algunas plantas e, incluso, cuáles son las causas que determinan los extraños movimientos del bumerang. Todos estos movimientos son del mismo género. El mismo aire que se opone a que vuelen las balas y los proyectiles, es el que hace posible el vuelo, no sólo de las ligeras semillas y las cometas de papel, sino también de los pesados aviones que transportan decenas de pasajeros.



Para explicar cómo se eleva la cometa, recurriremos al dibujo simplificado de la figura. Supongamos que la línea *MN* representa el corte de la cometa. Cuando al echar la cometa tiramos de su cuerda, aquella avanza en posición inclinada, debido al peso de la cola. Convengamos en que este avance se realiza de derecha a izquierda; designemos el ángulo de inclinación del plano de la cometa, respecto al horizonte, con la letra θ y examinemos qué fuerzas actúan sobre la cometa al efectuarse este movimiento. El aire, como es natural, debe entorpecer el avance, ejerciendo cierta presión sobre la cometa. Esta presión está representada en la figura por medio del vector *OP*. Como quiera que el aire presiona siempre en dirección perpendicular al plano de la cometa, el vector *OP* formará en el dibujo un ángulo recto con la *MN*. La fuerza *OP* se puede descomponer en dos, construyendo lo que se llama el rectángulo de fuerzas. Hecho esto, en lugar de la fuerza *OP* tendremos las dos fuerzas *OD* y *OC*. De ellas, la fuerza *OD* empuja nuestra cometa hacia atrás, y, por consiguiente, disminuye su velocidad inicial. La otra fuerza, es decir, la *OC* tira del artefacto hacia arriba, disminuye su peso y, si es suficientemente grande, puede vencer el peso de la cometa y elevarla. Esta es la explicación de por qué se remonta la cometa, cuando tiramos de su cuerda hacia abajo.

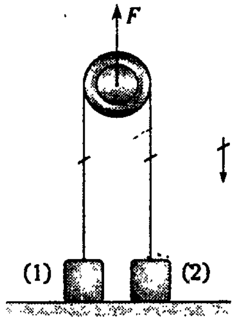
El avión es lo mismo que la cometa, con la única diferencia de que la fuerza motriz que actúa en él no es la de nuestra mano, sino la de una hélice o de un motor a reacción, la cual impulsa hacia adelante el aparato y, por lo tanto, hace que este se eleve de forma semejante a como lo hace la cometa.

El esquema que acabamos de dar está muy simplificado. Hay otras circunstancias que también influyen en la elevación de los aviones y de las cuales trataremos en otro momento.

FUENTE: Física recreativa. AUTOR: Y. Perelman. Pág.: 55 Tomo I

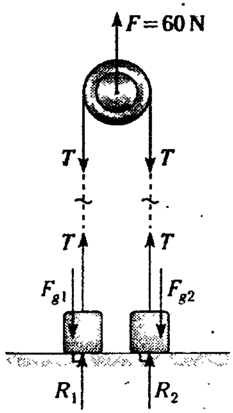
Problema 1

Se muestra un sistema conformado por dos bloques y una polea ideal. Si a la polea se le ejerce una fuerza vertical y hacia arriba de módulo 60 N, determine el módulo de la aceleración que experimenta cada bloque y también la polea.
($m_1 = 2$ kg ; $m_2 = 4$ kg ; $g = 10$ m/s^2)



Resolución

Hagamos el diagrama de fuerzas para cada uno de los bloques y para la polea.

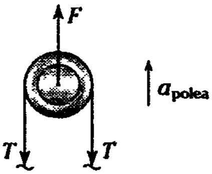


Para que los bloques se eleven, la fuerza por parte de la cuerda (tensión) debe superar en valor a sus respectivos F_g.

Esto significa que

- para que se eleve el bloque 1:
  $T > F_{g1} = 20\text{ N} \wedge R_1 = 0$
- para que se eleve el bloque 2:
  $T > F_{g2} = 40\text{ N}$

Ahora, para hallar T, analizamos a la polea móvil



Aún no sabemos si la polea acelera o no, eso dependerá, si los bloques se mueven. Pero debido a que la polea es considerada ideal ($m_{polea} = 0$), el módulo de la fuerza de tensión ($\vec{T}$) es independiente de si la polea acelera o no y de cuánto sea esa aceleración. Para la polea planteamos

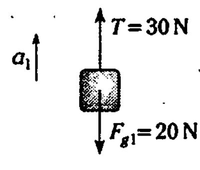
$$F_{R(polea)} = m_{polea}a_{polea}$$
$$F - 2T = (0)a_{polea}$$
$$\therefore\ F = 2T$$

y como $F = 60$ N, se concluye que T tiene un módulo igual a 30 N.

A partir de este resultado se llega a la conclusión de que sólo elevará el bloque (1) mientras que el bloque (2) se mantendrá en todo instante en reposo apoyado sobre el piso.

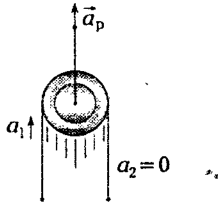
$$\therefore\ a_2 = 0$$

Para determinar la aceleración del bloque (1), lo analizamos solo a él y planteamos



$$F_R = m_1a_1$$
$$30 - 20 = (2)a_1$$
$$\therefore\ a_1 = 5\text{ m/s}^2$$

Finalmente debemos determinar la aceleración de la polea $\left(\vec{a}_P\right)$, para ello hacemos uso de la relación de aceleraciones para una polea móvil.



$$\Rightarrow \vec{a}_P=\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2}{2}$$

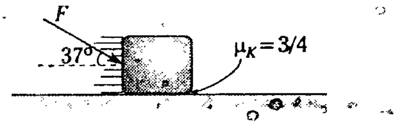
$$\vec{a}_P=\frac{(+5)+(0)}{2}=+2{,}5\ \text{m/s}^2$$

indica que la polea acelera hacia arriba

$$\therefore\ a_P=2{,}5\ \text{m/s}^2$$

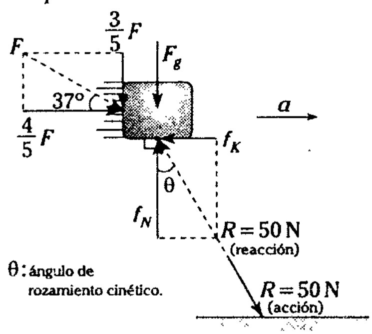
Problema 2

En la figura se muestra a un bloque de 1 kg que resbala sobre una superficie horizontal. Si el bloque le ejerce una fuerza de 50 N a la superficie, calcule el módulo de la aceleración del bloque ($g=10$ m/s^2)



Resolución

El bloque experimenta aceleración horizontal, entonces existe $\vec{F}_R$, para calcular ello graficamos y descomponemos las fuerzas



Por otro lado, el bloque actúa con 50 N sobre la superficie y esta debe reaccionar con 50 N, en dirección contraria, sobre él; tal como se ha indicado.

Ahora, para determinar el módulo de la $\vec{a}$ planteamos

De la figura

$$F_R=\frac{4}{5}F-f_K$$

$$ma=\frac{4}{5}F-50\operatorname{sen}\theta$$

$$(1)a=\frac{4}{5}F-50\operatorname{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$

Hallemos θ y F

Note que θ es el ángulo de rozamiento cinético y se verifica.

$$\tan\theta=\frac{f_K}{f_N}=\mu_K=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow\ \theta=37° \qquad \text{(II)}$$

Para que el bloque deslice en dirección horizontal, debe registrarse equilibrio de fuerzas en la vertical.

$$\sum F(\downarrow)=\sum F(\uparrow)$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{5}F+F_g=f_N$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{5}F+mg=\underbrace{50\cos 37°}$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{5}F+(1)(10)=40$$

$$\Rightarrow\ F=50\ \text{N} \qquad \text{(III)}$$

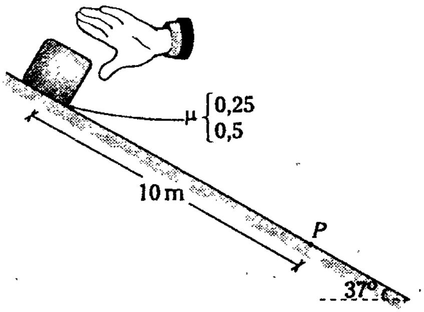
Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$a=\frac{4}{5}(50)-50\operatorname{sen}37°$$

$$\therefore\ a=10\ \text{m/s}^2$$

Problema 3

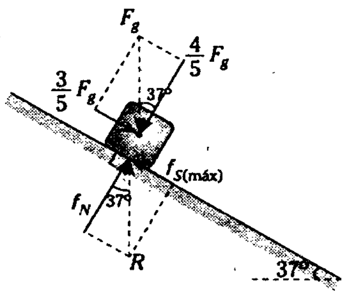
Se muestra el instante en que se abandona a un bloque, determine el intervalo de tiempo que emplea en pasar por P. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Luego de abandonar el bloque, éste tiende a deslizar, la fuerza de rozamiento estático no es suficiente para mantenerlo en reposo, por lo que finalmente el bloque desliza y luego de cierto tiempo pasa por P.

Verifiquemos lo señalado:



Si asumimos que el bloque se mantiene en reposo, $\vec{R}$ debería ser vertical.

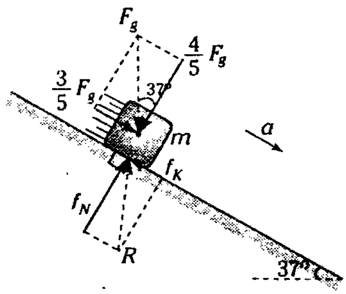
Sabemos que

$$f_{S(máx)} = \mu_s f_N$$

$$f_{S(máx)} = 0{,}5\left(\frac{4}{5}F_g\right)$$

$$\therefore\ f_{S(máx)} = 2\frac{F_g}{5}$$

Como la componente $\frac{3}{5}F_g$ vence a la $f_{S(máx)}$ entonces el bloque resbala y sobre él actuará la fuerza de rozamiento cinético $(\vec{f}_K)$, que se graficará así:



donde $\frac{3}{5}F_g > f_K$

Sobre el bloque la fuerza resultante viene dada por

$$F_R = \frac{3}{5}F_g - f_K$$

$$\Rightarrow\ ma = \frac{3}{5}mg - \mu_K f_N \qquad \text{(I)}$$

En la dirección perpendicular al movimiento no hay desplazamiento; entonces, se cumple que

$$f_N = \frac{4}{5}F_g = \frac{4}{5}mg$$

En (I)

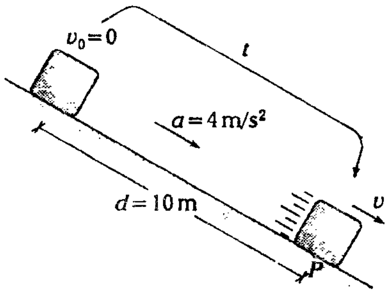
$$\cancel{m}a = \frac{3}{5}\cancel{m}g - \mu_K\left(\frac{4}{5}\cancel{m}g\right)$$

$$\therefore\ a = \frac{3}{5}(10) - 0{,}25\left[\frac{4}{5}(10)\right]$$

$$a = 4\ \text{m/s}^2$$

Este resultado indica que la aceleración del bloque es constante.

Con este resultado demostramos que el bloque se mueve rectilíneamente y con aceleración constante, lo cual significa que desarrolla un M.R.U.V.



Para determinar el tiempo t usamos la siguiente ecuación:

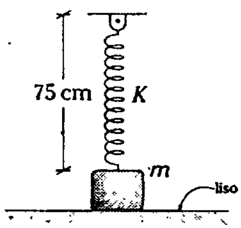
$$d=v_0t+\frac{1}{2}at^2=0t+\frac{1}{2}(4)t^2$$

$$10=2t^2$$

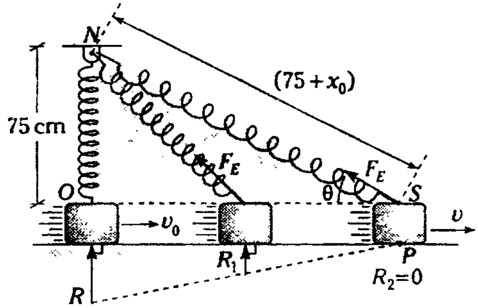
$$\therefore\ t=\sqrt{5}\ s$$

Problema 4

En la figura se muestra un bloque unido a un resorte sin deformar. Si al bloque se le comunica una velocidad horizontal, ¿qué aceleración presentará cuando está a punto de elevarse? (Considere $K=6$ N/cm, $m=18$ kg y $g=10$ m/s^2)

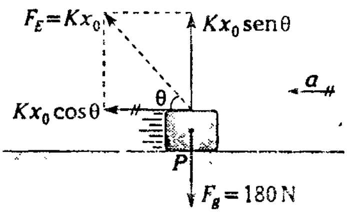


Resolución



Una vez lanzado el bloque, se desplaza horizontalmente por inercia estirando cada vez más al resorte, surgiendo en él una fuerza elástica que frena al bloque y trata de elevarlo con una mayor intensidad.

Nos piden el módulo de la aceleracion en el instante que está a punto de elevarse, en dicho instante la reacción del piso es nula ($R_2=0$), en P realizamos el D.C.L. del bloque.



- Verticalmente, como el bloque está a punto de elevarse, pero aún no se eleva

$$\Rightarrow\ \sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$Kx_0\,\text{sen}\,\theta=180 \qquad \text{(I)}$$

- Horizontalmente, nótese que existe fuerza resultante hacia la izquierda.

$$F_R=Kx_0\cos\theta$$

$$ma=Kx_0\cos\theta \qquad \text{(II)}$$

Del ⊿NOS

$$\text{sen}\,\theta=\frac{75}{(75+x_0)} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en (I) y también $K = 6$ N/m

$$6x_0\left(\frac{75}{75+x_0}\right)=180$$

Resolviendo

$$x_0 = 50 \text{ cm}$$

En (III)

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{75}{(75+50)}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \theta=37°$$

En (II)

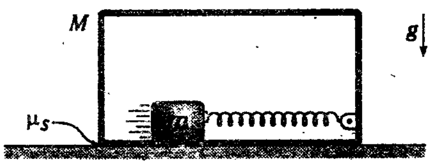
$$18a = 6(50)\cos 37°$$

de donde

$$a = 13{,}33 \text{ m/s}^2$$

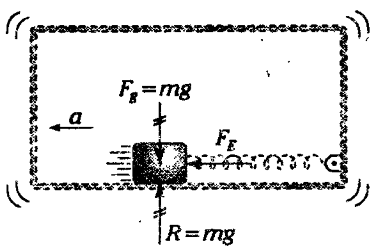
Problema 5

En la figura se muestra un bloque liso, oscilando dentro de un cajón. Determine la máxima aceleración del bloque si se sabe que en dicho instante, el cajón está a punto de resbalar.



Resolución

Analizamos al bloque cuando el resorte tiene su máxima compresión.

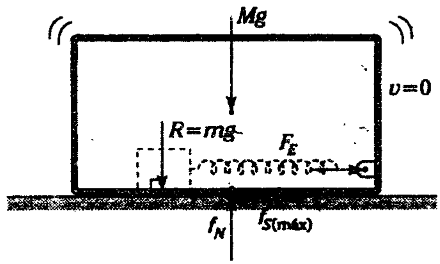


Sobre el bloque hay fuerza resultante dada por

$$F_R = F_E$$

$$ma = Kx \qquad \text{(I)}$$

D.C.L. del cajón, cuando se encuentra a punto de deslizar, el piso ofrece la máxima oposición



El cajón no resbala, está en reposo, entonces

$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$F_E = \underbrace{f_{S(\text{máx})}}$$

$$Kx=\mu_S f_N \qquad \text{(II)}$$

Verticalmente tenemos que

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$(M+m)g=f_N$$

En (II)

$$Kx=\mu_S(M+m)g$$

En (I)

$$ma=\mu_S(M+m)g$$

$$\therefore\ a=\left(1+\frac{M}{m}\right)\mu_S g$$

Después de la solución, tenemos que la caja está a punto de resbalar cuando el bloque ha comprimido al resorte en $x=\dfrac{\mu_S(M+m)g}{K}$.

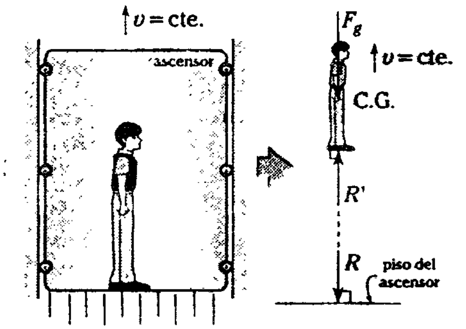
Si no se tiene más deformación en el resorte, la caja estará en reposo y el bloque presentará un movimiento de vaivén (oscila) en el interior de la caja.

Problema 6

En el interior de la cabina de un ascensor se encuentra un joven parado sobre su base; calcule el valor de la fuerza que ejerce el joven al piso de la cabina cuando ésta se eleva verticalmente con rapidez constante. Si se sabe que para el caso en que la cabina se eleva con una aceleración de 3 m/s^2, el joven ejerce una fuerza 300 N mayor que cuando la cabina desciende con una aceleración de 2 m/s^2. (g = 10 m/s^2)

Resolución

Debemos determinar el módulo de la fuerza que ejerce el joven al piso del ascensor, ello lo mostramos en el siguiente diagrama.



Del gráfico debemos calcular R, de la Tercera Ley de Newton establecemos que

$$R = R'$$

Según esta relación, debemos determinar el módulo de la fuerza que ejerce el ascensor al joven $(\vec{R}')$.

Como el ascensor se eleva a velocidad constante, el joven se encontrará en equilibrio cinético; entonces

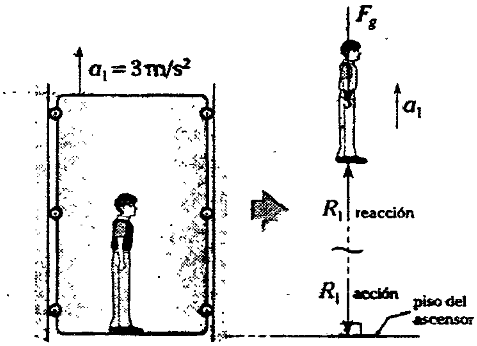
$$\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$$

$$\Rightarrow \; R' = F_g$$

$$\Rightarrow \; R' = mg = m(10) \qquad \text{(I)}$$

Ahora para determinar R' debemos encontrar m, lo cual haremos aprovechando la condición de que cuando la cabina se eleva con una aceleración de a_1 = 3 m/s^2, el joven ejerce una fuerza cuyo módulo es 300 N mayor que cuando la cabina desciende con una aceleración de a_2 = 2 m/s^2.

- Cuando el ascensor se eleva con una aceleración a_1 tenemos



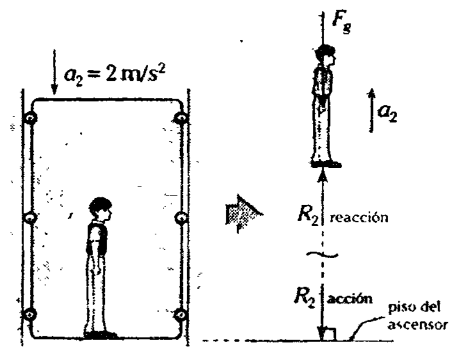
El joven se eleva con la misma aceleración que la del ascensor; entonces, en él existe una

$$F_R = R_1 - F_g$$

$$ma_1 = R_1 - F_g$$

$$m(3) = R_1 - F_g \qquad \text{(II)}$$

- Cuando el ascensor desciende con una aceleración a_2, tenemos



El joven desciende con la misma aceleración que la del ascensor, entonces, tenemos

$$F_R = F_g - R_2$$
$$ma_2 = F_g - R_2$$
$$\Rightarrow \quad m(2) = F_g - R_2 \qquad \text{(III)}$$

A continuación, si sumamos la expresión (II) y (III) se tiene

$$5m = R_1 - R_2 \qquad \text{(IV)}$$

Por condición del problema

$$R_1 - R_2 = 300$$

Reemplazando en (IV)

$$m = 60 \text{ kg}$$

Finalmente, reemplazando en (I)

$$R' = 600 \text{ N}$$

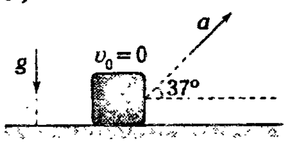
Por lo tanto, la fuerza que ejerce el joven al piso cuando el ascensor asciende a velocidad constante es

$$R = R' = 600 \text{ N}$$

Si la cabina del ascensor descendiera con una aceleración de igual valor que la aceleración de la gravedad ($a = g$), al reemplazar en la ecuación (III), se tiene que $R_2 = 0$; esto significa que el joven no presiona el piso del ascensor. Concluimos que, si la cabina de un ascensor desciende en caída libre, los cuerpos que estén en su interior también están en caída libre.

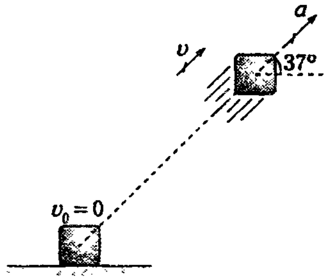
Problema 7

El bloque de 1 kg debe ser elevado con una aceleración constante $(\vec{a})$ de módulo 10 m/s^2. ¿Cuánta fuerza es necesario aplicarle?
($g = 10$ m/s^2)



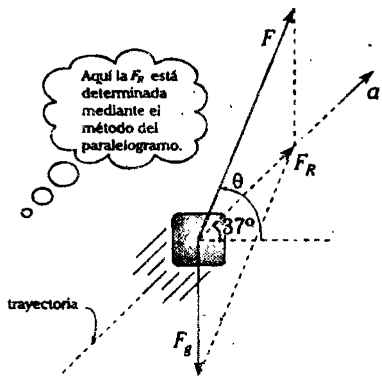
Resolución

Como el bloque parte del reposo con una aceleración $(\vec{a})$ constante, éste necesariamente debe de moverse en la dirección de dicha aceleración, tal como se muestra



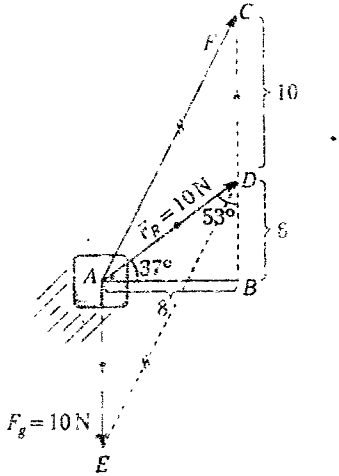
Ahora nos preguntamos ¿cómo actúa la fuerza $(\vec{F})$ que moviliza al bloque? Para saberlo, primero veamos cual es la dirección de su fuerza resultante $(\vec{F}_R)$.

Sabemos que la $\vec{a}$ debe tener la misma dirección que la fuerza resultante. Graficando las fuerzas actuantes sobre el bloque, tenemos aproximadamente



A partir de este gráfico, concluimos que la fuerza $\vec{F}$ debe de tener una dirección θ. tal que θ se encuentra comprendido entre $37° < \theta < 90°$.

A continuación para determinar $\vec{F}$ podemos emplear el método analítico descomponiendo las fuerzas o el método geométrico; para este caso, emplearemos el método geométrico.



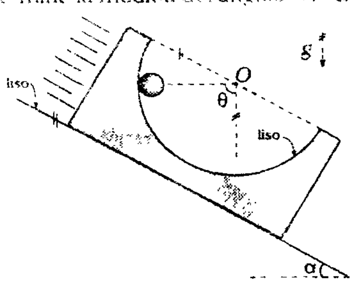
Note que en el ⊿ 37° y 53°, la hipotenusa es la $\vec{F}_R$, con lo cual se determina los catetos $\overline{AB}=8$ y $\overline{BD}=6$. Por último, en el ⊿ABC, empleando el teorema de Pitágoras se tiene

$$F=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2} \Rightarrow F=\sqrt{8^2+(16)^2}$$

Resolviendo se tiene $F=8\sqrt{5}$ N

Problema 8

El bloque desliza sobre una superficie inclinada lisa y la pequeña esfera no se mueve respecto de él. Determine la medida del ángulo θ. ($\alpha=37°$)

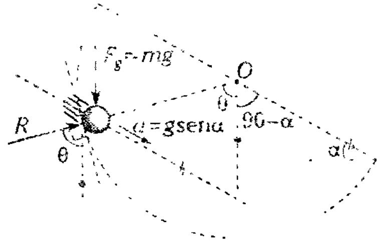


Resolución

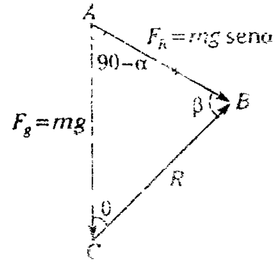
Sabemos que si el sistema desliza sobre la superficie inclinada lisa, su aceleración es $a=g\,\text{sen}\,\alpha=10\,\text{sen}\,37°=6$ m/s² (ver ejemplo 4)

Ahora como la pequeña esfera no se mueve respecto del bloque tendrá la misma aceleración que éste.

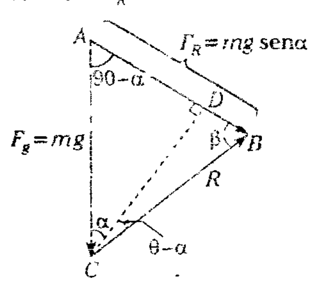
Hagamos el diagrama de fuerzas sobre la esfera



Para obtener geométricamente la fuerza resultante, consideremos el método del triángulo

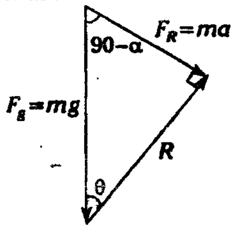


Ahora para determinar θ podemos proceder de la siguiente manera: de C bajamos una perpendicular a la F_R.



En el ⊿ADC se verifica que $AD=mg\,\text{sen}\alpha$

Pero $AB = mg\,\text{sen}\,\alpha$ Esta contradicción se resuelve señalando que B debe coincidir con D; si esto es así, la fuerza $\vec{R}$ debe ser perpendicular a la $\vec{F}_R$; con esto concluimos que el triángulo de fuerzas debe ser así:



Del gráfico $\theta = \alpha$

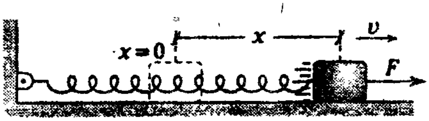
$\therefore\ \theta = 37°$

Problema 9

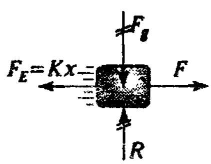
A partir del instante mostrado, sobre el bloque liso se aplica una fuerza horizontal $\vec{F} = +50(\vec{i})\,\text{N}$. Determine cuánto recorre el bloque hasta que adquiere su máxima rapidez. Considere el resorte ideal inicialmente sin deformar (K = 10 N/cm).

Resolución

Como el resorte inicialmente está sin deformar, al aplicar la fuerza horizontal sobre el bloque, éste empezará a desplazarse hacia la derecha, de manera que lo que recorra el bloque será igual a la deformación (x) que experimenta el resorte x.

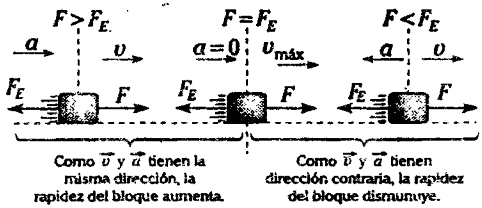


En la posición dada el D.C.L. del bloque es



Conforme el bloque se desplace hacia la derecha, la deformación del resorte x va aumentando; en consecuencia, también aumenta el módulo de la $\vec{F}_E$.

Pero mientras $F > F_E$ la rapidez aumenta hasta el instante en que $F_E = F$. De ahí en adelante el bloque sigue desplazándose hacia la derecha debido a su inercia, pero ya $F < F_E$, de modo que la rapidez va disminuyendo.



Nótese que en el instante en que la rapidez es máxima ($v_{máx}$), la fuerza resultante es nula ($F_R = 0$).

$$\therefore\ F = F_E = Kx$$

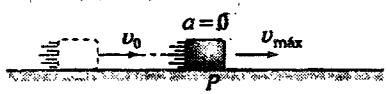
$$50 = 10x$$

$$\Rightarrow\ x = 5\,\text{cm}$$

El bloque recorre 5 cm hasta que adquiere su máxima rapidez.

Propiedad importante

Un cuerpo (partícula) en movimiento rectilíneo sometida a la acción simultánea de varias fuerzas, alcanza su máxima velocidad $(\vec{v}_{máx})$ en el instante en que las fuerzas que actúan sobre se equilibren $(\vec{F}_R = \vec{0})$.



En P

$$F_R = 0\ \Rightarrow\ a = 0$$

En dicha posición se verifica que

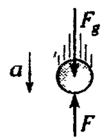
$$v = v_{máx}$$

Problema 10

Una canica es abandonada desde una gran altura. Si el aire le ofrece una resistencia que depende de la rapidez según $F = bv$, donde b es una constante en (kg/s), determine el módulo de la aceleración para el instante en que su rapidez sea la cuarta parte de su rapidez límite.
($g = 10\ m/s^2$)

Resolución

Analicemos a la canica cuando desciende



En la figura $F_g = mg = $ cte.
Resistencia del aire: $F = bv$, inicialmente, la canica es abandonada $v = 0 \Rightarrow F = 0$
En una primera fase

$$F_g > F$$

Existe

$$F_R = F_g - F \quad \text{(hacia abajo)}$$

$$\Rightarrow \quad ma = mg - bv$$

$$\Rightarrow \quad a = g - \left(\frac{b}{m}\right)v \qquad \text{(I)}$$

Analizando (I): Si v aumenta la a disminuye. Entonces, existe una rapidez v para lo cual $a = 0$, a dicha rapidez se le denomina rapidez límite o terminal y se caracteriza por tener un módulo constante, es decir, de allí en adelante la partícula se mueve por inercia y realiza M.R.U.
Por lo tanto, durante la caída la rapidez de la esfera varía entre

$$0 \leq v \leq v_{\text{lím}}$$

Esto implica que la $v_{\text{lím}}$ es la rapidez máxima de la canica.

Reemplazando en (I)

$$v = v_{\text{lím}} \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = g - \left(\frac{b}{m}\right)v_{\text{lím}}$$

$$\therefore \quad v_{\text{lím}} = \frac{mg}{b}$$

Ahora, nos piden la aceleración cuando

$$v = \frac{v_{\text{lím}}}{4} = \frac{mg}{4b}$$

Reemplazamos en (I)

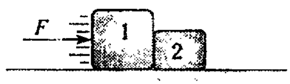
$$\Rightarrow \quad a = g - \left(\frac{b}{m}\right)\frac{mg}{4b}$$

Simplificando

$$a = \frac{3}{4}g = 7{,}5\ m/s^2$$

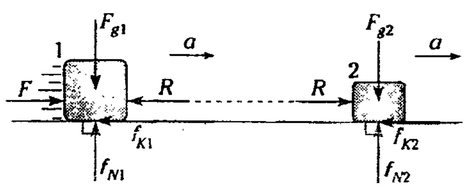
Problema 11

El sistema mostrado se traslada aumentando uniformemente su velocidad. Si el bloque (1) experimenta una fuerza de rozamiento de parte de la superficie igual a 20 N, determine el módulo de la fuerza entre los bloques. Considere $m_1 = 4m_2$, $F = 100$ N y que los dos bloques están hechos del mismo material.



Resolución

Conforme los bloques se trasladan, el bloque 1 empuja al bloque 2 con una fuerza $\vec{R}$ y por reacción el bloque 2 empujará a 1 con una fuerza de igual módulo tal como se muestra al hacer una separación imaginaria.



Como los bloques son de igual material, el coeficiente de rozamiento cinético (μ_K) entre la base de cada bloque y el piso es el mismo; entonces, como $f_K = \mu_K f_N$ esto significa que la $\vec{f}_K$ sobre cada bloque solo se diferencia por el valor de la $\vec{f}_N$, siendo $f_{N1} = F_{g1}$ y $f_{N2} = F_{g2}$ y por dato $m_1 = 4m_2$, entonces

$$f_{K1} = 4f_{K2}$$

Además, por dato

$$f_{K1} = 20\text{ N}$$

en tal sentido la

$$f_{K2} = 5\text{ N}$$

Luego, como el módulo de la velocidad aumenta uniformemente, los bloques experimentan una aceleración constante $\vec{a}$.

- Sobre el bloque 1, actúa

$$F_R = m_1 a$$

$$\Rightarrow\ F - f_{K1} - R = m_1 a$$

$$\Rightarrow\ 100 - 20 - R = m_1 a$$

$$80 - R = m_1 a \qquad \text{(I)}$$

- Sobre el bloque 2, también actúa

$$F_R = m_2 a$$

$$R - f_{K2} = m_2 a$$

$$R - 5 = m_2 a \qquad \text{(II)}$$

A continuación dividimos I entre II

$$\frac{80 - R}{R - 5} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{80 - R}{R - 5} = \frac{4\cancel{m_2}}{\cancel{m_2}}$$

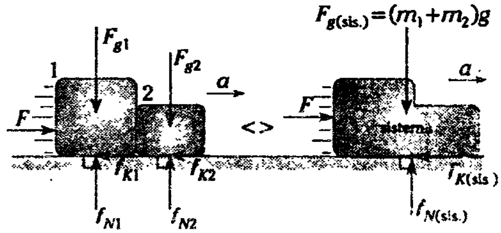
Resolviendo

$$R = 20\ N$$

Si en el problema tendríamos que determinar el módulo de la aceleración $\vec{a}$ que experimentan los bloques, esto lo obtendríamos sumando la expresión I y II de tal forma que se tendría

$$a = \frac{75}{m_1 + m_2}$$

Ahora, otra forma de determinar el módulo de la aceleración de los bloques, sin necesidad de realizar una separación imaginaria de los bloques, se realiza considerando el sistema (bloque 1 + bloque 2)



De la Segunda Ley de Newton para el sistema

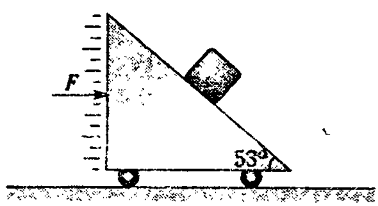
$$F_{R(sis.)} = m_{sis.} a$$

$$\therefore\ a = \frac{F_{R(sis.)}}{m_{(sis)}} = \frac{F - f_{K1} - f_{K2}}{(m_1 + m_2)} = \frac{100 - 20 - 5}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow\ a = \frac{75}{m_1 + m_2}$$

Problema 12

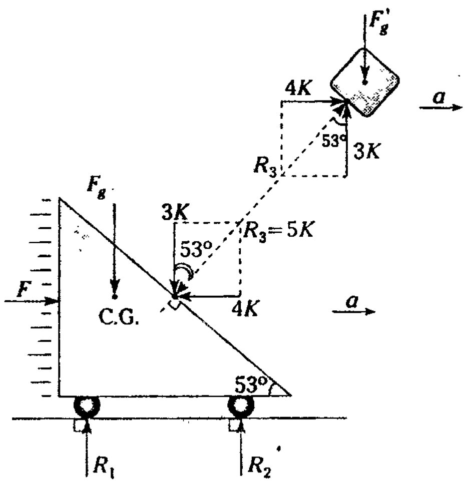
En el gráfico mostrado, el coche de 10 kg se traslada con cierta aceleración constante. Si el bloque de 2 kg no se mueve respecto del coche ¿qué valor tiene la fuerza $\vec{F}$? (g = 10 m/s^2 y desprecie todo rozamiento).



Resolución

Por dato, el bloque no se mueve respecto del coche, esto significa que el bloque se traslada junto con el coche con la misma aceleración que tiene el coche.

Ahora, sobre cada cuerpo realizamos el D.C.L., así



Con el objetivo de facilitar la descomposición, le asignamos a $\vec{R}_3$ un módulo proporcional a 5, así

$R_3 = 5K$

Sobre el coche consideramos la segunda ley de Newton

$F_R = m_{coche}a$

$\Rightarrow \; F - 4K = 10a$ (I)

Sobre el bloque también

$F_R = m_{bloque}a$

$\Rightarrow \; 4K = 2a$ (II)

A continuación dividamos (I) entre (II)

$$\frac{F-4K}{4K} = 5$$

$\Rightarrow \; F = 24K$ (III)

Determinemos K, como el bloque no acelera verticalmente en él se debe cumplir

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$\Rightarrow \; 3K = F_g'$

$\Rightarrow \; 3K = m_{bloque}g$

$\Rightarrow \; 3K = 2(10)$

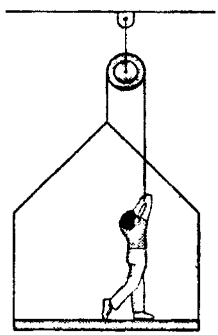
$\Rightarrow \; K = \dfrac{20}{3}$ (IV)

Reemplazando (IV) en (III)

$F = 160$ N

Problema 13

Un pintor de brocha gorda, con masa de 72 kg, trabaja en una plataforma colgante, necesita urgentemente elevarse, con este fin comienza a tirar de la cuerda con una fuerza tal qué su fuerza sobre la plataforma disminuye hasta 400 N. La masa de la plataforma es de 12 kg. ¿Qué aceleración tendrá el pintor y la plataforma? ($g = 10$ m/s^2)

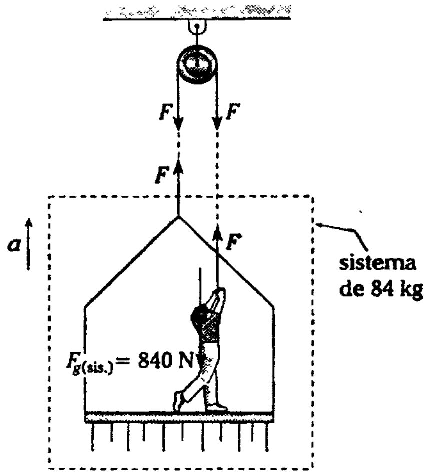


Resolución

Como el pintor y la plataforma ascienden juntos, ambos experimentarán igual aceleración.

$$\vec{a}_{pintor} = \vec{a}_{plataforma} = \vec{a}$$

Dicha aceleración es consecuencia de la acción de una fuerza resultante sobre el conjunto plataforma-pintor. Analicemos este sistema



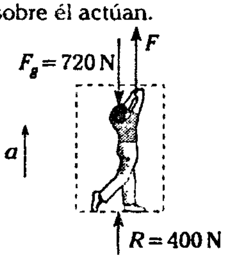
Sobre el sistema podemos plantear

$F_R = m_{sis.}a$

$2F - 840 = 84a$

$F = 42a + 420$ (1)

Para determinar el valor de $\vec{a}$ necesitamos primero determinar el valor de $\vec{F}$, para ello, podemos analizar solo al pintor. Grafiquemos las fuerzas que sobre él actúan.



Usando la Segunda Ley de Newton

$F_R = m_{pintor}a$

$F + 400 - 720 = 72a$

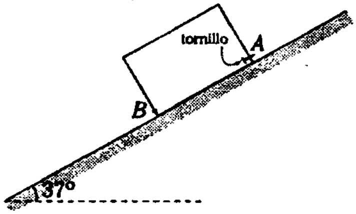
$F = 72a + 320$ (2)

Resolviendo (1) y (2) tenemos

$a = \dfrac{10}{3}\ m/s^2$

Problema 14

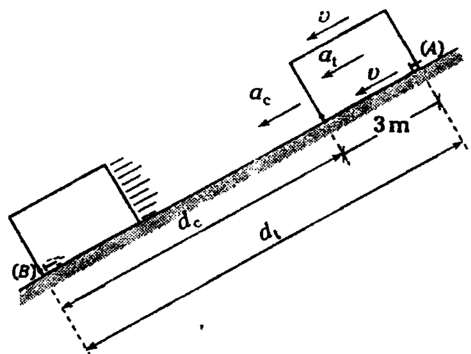
En la figura, se muestra una caja de 3 m de longitud deslizando con aceleración constante hacia abajo sobre el plano rugoso. En cierto instante, desde A se desprende un tornillo, el cual llega a B al cabo de 2 s. Si las paredes internas de la caja son lisas, ¿cuál es el módulo de la aceleración de la caja?



Resolución

Haciendo uso de la segunda ley de Newton se demuestra que la caja desciende aceleradamente con $a_{caja} = g(\text{sen}\,\theta - \mu_K\,\text{sen}\,\theta)$, pero el valor de esta aceleración es menor que el valor de la aceleración que experimenta el tornillo: $a_{tornillo} = g\,\text{sen}\,\theta$.

¿Por qué sucede esto? Lo que sucede es que el rozamiento sobre la caja retarda su caída, en cambio, el tornillo desliza sin rozamiento, es por esto que el tornillo, finalmente, da alcance a la otra pared de la caja (en B). Hasta ese instante se verifica, según dato del problema, que el tiempo transcurrido para ambos es 2 s. En el instante que el tornillo se desprende de la caja (en A), ambos presentan igual velocidad. Graficando lo que ocurre



Para un observador en tierra el tornillo recorre

$$d_t = d_c + 3 \qquad \text{(I)}$$

Como la caja desciende rectilíneamente y con aceleración constante, realiza un M.R.U.V. Por lo tanto

$$d_c = vt + \frac{1}{2}a_c t^2 \qquad \text{(II)}$$

Se demuestra que el tornillo también realiza M.R.U.V., como se mueve sobre un plano inclinado liso su aceleración es $a_t = g\,\text{sen}\,\theta$.

$$\Rightarrow \quad a_t = g\,\text{sen}37° = (10)\left(\frac{3}{5}\right) = 6\ \text{m/s}^2$$

La distancia recorrida por el tornillo se determina así

$$d_t = vt + \frac{1}{2}a_t t^2 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$\cancel{vt} + \frac{1}{2}a_t t^2 = \cancel{vt} + \frac{1}{2}a_c t^2 + 3$$

Reemplazado datos

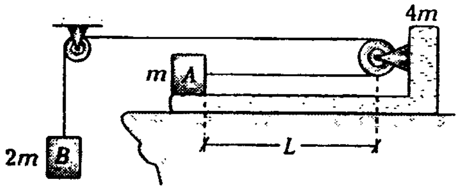
$$\frac{1}{2}(6)2^2 = \frac{1}{2}a_c(2)^2 + 3$$

$$\therefore \quad a_c = 4{,}5\ \text{m/s}^2$$

Tenga presente que otra alternativa de solución sería que el movimiento del tornillo sea analizado respecto de la caja.

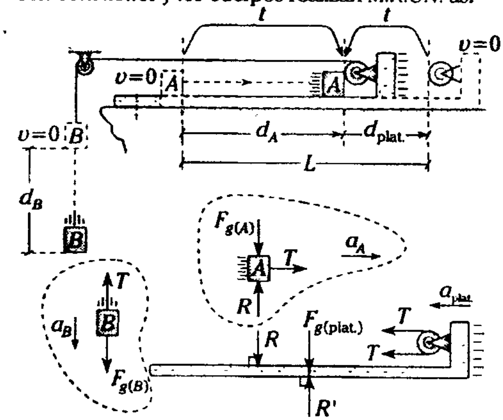
Problema 15

El sistema que se muestra es abandonado despreciando todo tipo de rozamiento ¿qué intervalo de tiempo transcurre desde el instante mostrado hasta que el bloque A choca con la polea? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Luego que el sistema es abandonado, el bloque A deslizará sobre la plataforma hasta el instante en que choca con la polea. Note que mientras mayor sea la distancia L que separa al bloque A de la polea, mayor será el tiempo t que demora en ocurrir el chóque. La trayectoria de ambos cuerpos, luego de ser abandonados, es rectilínea y sólo actúan fuerzas constantes, podemos concluir que las aceleraciones son constantes y los cuerpos realizan M.R.U.V. así



Analizando al bloque A, sobre él tenemos que

$$F_R = m_A a_A$$

$$\Rightarrow \quad T = m_A a_A$$

$$a_A = \frac{T}{m} \qquad \text{(I)}$$

La polea ideal y la plataforma se mueven juntas, por lo tanto, experimentan igual aceleración. Sobre este sistema actúa $F_R = m_{\text{plat.}} a_{\text{plat.}}$

$$\Rightarrow \quad 2T = m_{\text{plat}} a_{\text{plat}}$$

$$2T = (4m)a_{\text{plat.}}$$

$$\therefore \quad a_{\text{plat.}} = \frac{T}{2m} \qquad \text{(II)}$$

Ahora para calcular el tiempo t, del gráfico inicial podemos plantear

$$\underbrace{d_A} + \underbrace{d_{\text{plat.}}} = L$$

$$\frac{1}{2}a_A t^2 + \frac{1}{2}a_{\text{plat.}} t^2 = L \qquad \text{(III)}$$

Como de (I) y (II) se concluye

$$a_A = 2a_{\text{plat}}$$

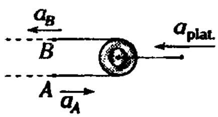
En (III)

$$\frac{3}{2}a_{\text{plat.}}t^2 = L$$

$$\therefore\ t = \sqrt{\frac{2L}{3a_{\text{plat.}}}} \qquad \text{(IV)}$$

Falta conocer la $\vec{a}_{\text{plat.}}$

La $\vec{a}_{\text{plat.}}$ está relacionada con la $\vec{a}_A$ pero también con $\vec{a}_B$ y esta relación la determinamos mediante la ecuación para la polea móvil.



$$\vec{a}_{\text{plat.}} = \frac{\vec{a}_A + \vec{a}_B}{2}$$

$$\vec{a}_{\text{plat}} = \frac{(+2a_{\text{plat}}) + \vec{a}_B}{2}$$

$$\therefore\ \vec{a}_B = -4a_{\text{plat.}}$$

(–) indica que la dirección es hacia la izquierda.

Ahora, analizando al bloque B, vemos que sobre él actúa una

$$F_R = m_B a_B$$

$$F_{g(B)} - T = m_B a_B$$

$$m_B g - T = m_B a_B$$

$$(2m)(10) - T = (2m)\,a_B$$

Pero como $T = 2ma_{\text{plat}}$ y $a_B = 4a_{\text{plat.}}$

$$\Rightarrow\ 20\cancel{m} - 2\cancel{m}a_{\text{plat.}} = 8\cancel{m}a_{\text{plat.}}$$

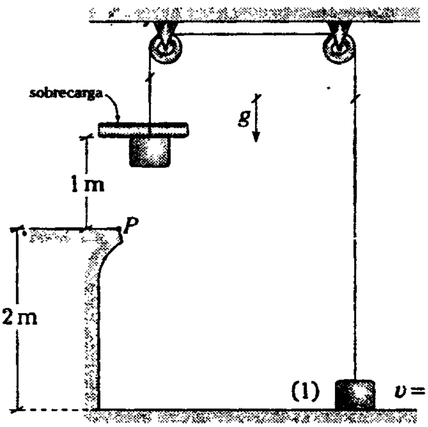
$$\therefore\ a_{\text{plat.}} = 2\ \text{m/s}^2$$

En (4)

$$\therefore\ t = \sqrt{\frac{L}{3}}$$

Problema 16

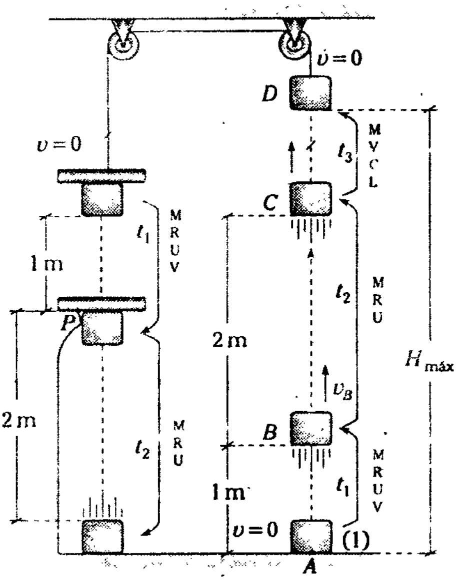
El sistema que se muestra se utiliza en el laboratorio para establecer las leyes del movimiento uniformemente acelerado; consta de dos bloques de 1 900 g, cada uno unidos por un hilo ideal. Al colocar la sobrecarga de 200 g, el sistema inicia su movimiento, luego la sobrecarga se queda enganchada en P. ¿Qué intervalo de tiempo transcurre desde que el sistema empezó a moverse hasta el instante en que el bloque (1) alcanza su altura máxima? Considere $g = 10\ \text{m/s}^2$.



Resolución

Describiremos brevemente lo que sucede con el sistema y luego procederemos a los cálculos.

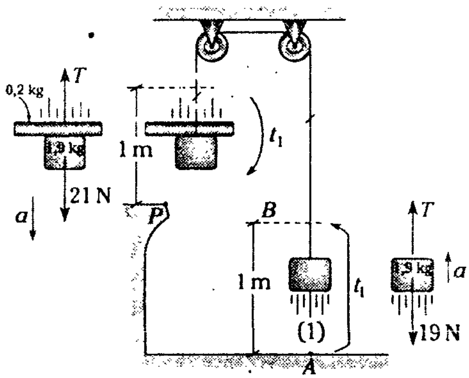
Inicialmente, los bloques están en equilibrio (no se mueven), debido a la igualdad de masas de los bloques. Al colocar la sobrecarga, el sistema se desequilibra y el nuevo sistema inicia un movimiento rectilíneo y con aceleración constante (M.R.U.V.), este finaliza cuando la sobrecarga choca en P, a partir de este instante entre los bloques no hay desequilibrio y la aceleración de ellos se hace nula, con lo cual los bloques se mueven por inercia con velocidad constante (M.R.U.). El M.R.U. de los bloques concluye cuando el bloque que desciende impacta contra el suelo, sin embargo el bloque (1) seguirá ascendiendo en virtud a su inercia e influenciado únicamente por la atracción terrestre; ya que a partir de ese instante la cuerda deja de estar tensa, es decir, este bloque realiza M.V.C.L. y cuando se detiene por un instante habrá alcanzado su altura máxima.



El intervalo de tiempo pedido es

$$t_{AD}=t_1+t_2+t_3 \qquad \text{(I)}$$

t_1 es el tiempo que emplea el bloque (1) en ir desde A hasta B.



Analizando al bloque (1), y aplicando la Segunda Ley de Newton

$$F_R=ma$$

$$T-19=1{,}9a \qquad \text{(II)}$$

Analizando al bloque y a la sobrecarga

$$F_R=Ma$$

$$21-T=2{,}1a \qquad \text{(III)}$$

Resolviendo (2) y (3)

$$a=0{,}5\ \text{m/s}^2$$

De esto concluimos que los bloques y la sobrecarga realizan un M.R.U.V. Luego, analizando al bloque (1) sube $d_{AB}=1$ m, consideremos

$$\Rightarrow\ d_{AB}=\cancel{\upsilon_A}t_1+\frac{1}{2}at_1^2$$

$$d_{AB}=\frac{1}{2}at_1^2$$

$$1=\frac{1}{2}(0{,}5)t_1^2$$

$$\Rightarrow\ t_1=2\ \text{s}$$

Ahora, la rapidez que tiene el bloque (1) justo antes que la sobrecarga se enganche en P es

$$\upsilon_B=\cancel{\upsilon_A}+at_1$$

$$\upsilon_B=1\ \text{m/s}$$

Luego que la sobrecarga se engancha en P, ya no forma parte del sistema. A partir de ahí, los bloques se mueven desarrollando M.R.U. Por lo tanto, para determinar t_2 planteamos

$$d_{BC}=\upsilon.t_2$$

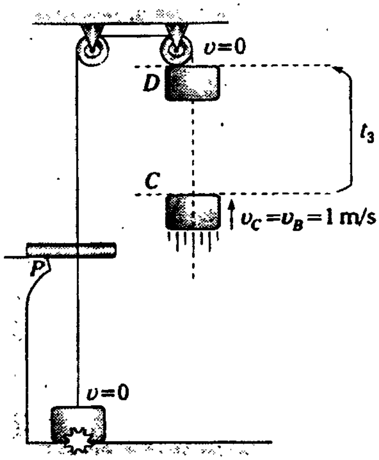
υ es igual a la rapidez del bloque (1) en B.

$$d_{BC}=\upsilon_Bt_2$$

$$2=(1)t_2$$

$$\Rightarrow\ t_2=2\ \text{s}$$

Ahora, t_3 es el tiempo que emplea el bloque (1) en ir desde C hasta D realizando M.V.C.L. Note que en D el bloque se detiene alcanzando en esa posición su altura máxima.



Analizando al bloque (1) de C hacia D por caída libre

$$v_D = v_C - g t_{DC}$$

$$0 = 1-(10)t_3$$

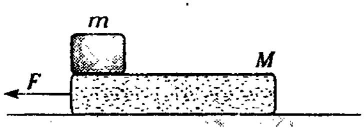
$$\Rightarrow \; t_3 = 0{,}1 \text{ s}$$

Luego, en (1) reemplazamos t_1, t_2 y t_3.

$$\therefore \; t_{AD} = 4{,}1 \text{ s}$$

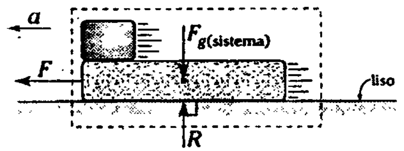
Problema 17

En una tabla de masa M colocada sobre cierto plano horizontal liso yace un cuerpo de masa m. El coeficiente de fricción entre el cuerpo y la tabla es μ, ¿qué fuerza es necesario aplicar a la tabla para que el cuerpo deslice sobre ella?

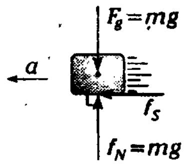


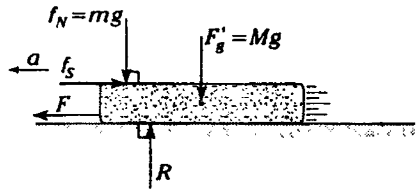
Resolución

Si jalamos gradualmente la tabla con F, ¿qué sucede? La tabla resbala hacia la izquierda, pues el piso es liso, pero el bloque como está adherido a la superficie de la tabla debido a las rugosidades mutuas también va a experimentar respecto al piso una aceleración a así:



La tabla jalada hacia la izquierda experimenta una oposición hacia la derecha en su superficie áspera $f_S(\rightarrow)$; en consecuencia, la reacción sobre el bloque será $f_S(\leftarrow)$. Graficando fuerzas tenemos





Para el bloque usamos

$$F_R = ma$$

$$\Rightarrow \; f_S = ma$$

$$\therefore \; a = \frac{f_S}{m}$$

Debido a su inercia, el bloque tiende a rezagarse respecto a la tabla; en otras palabras, el bloque tiende a deslizar hacia la derecha sobre la tabla y, en consecuencia, sobre el bloque y la tabla se manifiesta fuerza de rozamiento estático.

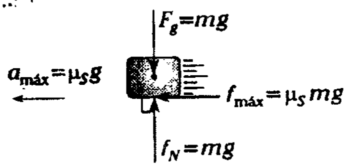
A mayor aceleración mayor, será la tendencia del bloque a deslizar, esto es, mayor será el valor de la fuerza de rozamiento entre éste y la tabla. En consecuencia, afirmaremos analizando al bloque que

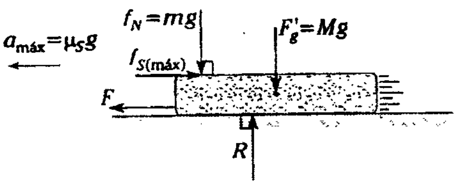
- Si $f_S = 0 \Rightarrow a = 0$
- Si $f_S > 0 \Rightarrow a > 0$
- Si $f_S = f_{S(\text{máx})} \Rightarrow a$ es máximo y el bloque está a punto de resbalar

$$a_{(\text{máx})} = \frac{f_{S(\text{máx})}}{m} = \frac{\mu_S f_N}{f_N} = \frac{\mu_S \cancel{m} g}{\cancel{m}}$$

$\therefore\ a_{(\text{máx})} = \mu_S g$ (aceleración para el bloque y la tabla)

Graficando cuando el bloque está a punto de resbalar





En estas circunstancias la tabla experimenta una fuerza resultante dada por

$$F_R = Ma_{\text{máx}}$$

$$F - f_{S(\text{máx})} = M(\mu_S g)$$

$$F - \mu_S f_N = \mu_S Mg$$

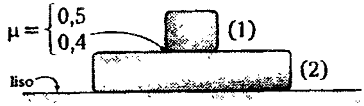
$$F - \mu_S mg = \mu_s Mg$$

$$\therefore\ F = \mu_S (M+m)g$$

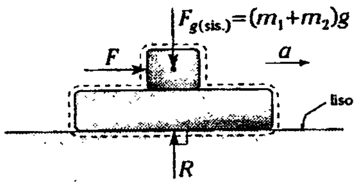
¿Para qué valores de F no hay deslizamiento del bloque? De acuerdo a lo analizado, si $F \le \mu_S (M+m)g$ el bloque no resbalará respecto de la tabla y se moverá con ello con igual aceleración; mientras que para $F > \mu_S (M+m)g$, el bloque resbalará sobre la tabla.

Problema 18

El sistema que se muestra se encuentra en reposo, de pronto al bloque de 2 kg se le aplica una fuerza horizontal que depende del tiempo según $\vec{F} = +8t\hat{i}$ N. Construya una gráfica que muestre la dependencia de la aceleración que experimentan el bloque y la tabla de 6 kg conforme transcurre el tiempo. (g = 10 m/s^2)



Resolución



Como el valor de la fuerza aplicada sobre el bloque aumenta conforme transcurre el tiempo, en un primer instante el valor de $\vec{F}$ no será suficiente para que el bloque pueda resbalar sobre la tabla.

Entonces, como el bloque no resbala sobre la tabla, el bloque y la tabla se mueven juntos experimentando la misma aceleración $(\vec{a})$.

Del D.C.L. para el sistema (bloque-tabla)

$$F_R = m_{\text{sis}} a$$

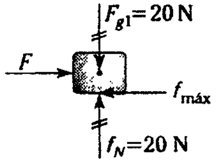
$$F = (m_1 + m_2)a$$

$$8t = (2+6)a$$

$$\therefore\ a = t \ \ (a \text{ varía linealmente con } t)$$

Luego, como $\vec{F}$ aumenta con el tiempo, la tendencia a que el bloque deslice sobre la tabla aumenta hasta el instante en que el resbalamiento sea inminente ($f_S = f_{S(\text{max})}$).

En ese instante $t = t_0$



Para el bloque usamos

$$F_{R(\text{bloque})} = m_1 a$$

$$F - f_{máx} = m_1 a$$

$$F - \mu_S f_N = m_1 a$$

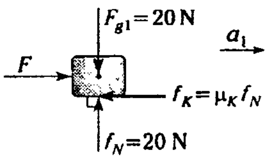
$$8t_0 - (0,5)(20) = (2)t_0$$

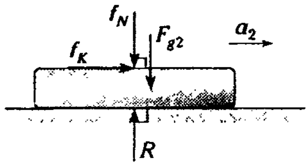
$$6t_0 = 10$$

$$\therefore\ t_0 = \frac{5}{3}\,\text{s}$$

A partir de ese instante, es decir, para $t > t_0$ el bloque resbalará sobre la tabla y ya no tendrá la misma aceleración de la tabla.

Veamos





- Ahora sobre el bloque planteamos

$$F_R = m_1 a_1$$

$$F - f_K = m_1 a_1$$

$$8t - (0,4)(20) = 2a_1$$

$$\therefore\ a_1 = (4t - 4) = 4(t-1)\,\text{m/s}^2$$

- También sobre la tabla se tiene

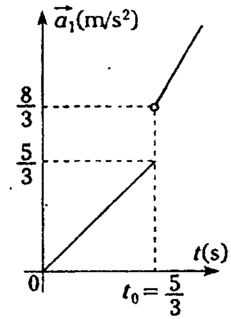
$$F_R = m_2 a_2$$

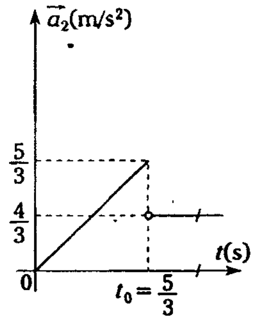
$$f_K = m_2 a_2$$

$$(0,4)(20) = 6a_2$$

$$\therefore\ a_2 = \frac{4}{3}\,\text{m/s}^2 \ (a_2 \text{ no depende del tiempo})$$

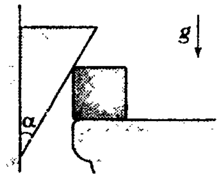
Esbocemos las aceleraciones de los cuerpos respecto al tiempo.





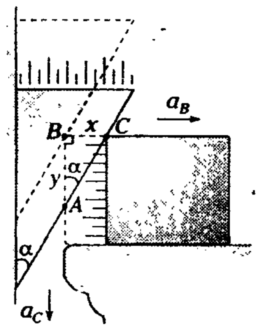
Problema 19

Una cuña de masa M es dejada sobre un bloque de masa m en reposo, si se desprecia las asperezas, determine la aceleración de cada cuerpo.



Resolución

Luego de abandonar la cuña esta descenderá y empujará al bloque y como se desprecia las asperezas el bloque iniciará su movimiento hacia la derecha con una aceleración $\vec{a}_B(\rightarrow)$, mientras que la cuña descenderá con una aceleración $\vec{a}_C(\downarrow)$, tal como se muestra a continuación.



Considerando un intervalo de tiempo t pequeño se puede considerar que la cuña y el bloque realizarán un M.R.U.V. de modo que

- el bloque recorre horizontalmente

$$x=\frac{1}{2}a_B t^2 \qquad \text{(I)}$$

la cuña desciende verticalmente

$$y=\frac{1}{2}a_C t^2 \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) entre (II)

$$\frac{x}{y}=\frac{a_B}{a_C} \qquad \text{(III)}$$

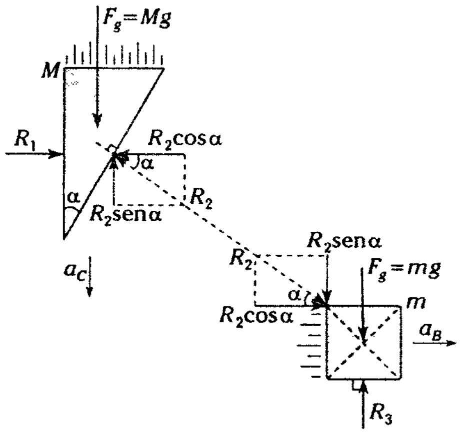
Ahora del ⊿ ABC

$$\tan\alpha=\frac{x}{y}$$

En (III)

$$a_B=a_C.\tan\alpha \qquad \text{(IV)}$$

Haciendo el diagrama de fuerzas sobre cada cuerpo tenemos



Ahora, consideremos la segunda ley de Newton

- Para la cuña

$$F_R=Ma_C$$

$$\Rightarrow\ Mg-R_2\,\text{sen}\,\alpha=Ma_C \qquad \text{(V)}$$

- Para el bloque

$$F_R=ma_B$$

$$\Rightarrow\ R_2\cos\alpha=ma_B$$

$$\Rightarrow\ R_2=\frac{ma_B}{\cos\alpha} \qquad \text{(VI)}$$

(VI) en (V)

$$Mg-\left(\frac{ma_B}{\cos\alpha}\right)\text{sen}\,\alpha=ma_C$$

$$Mg-(ma_B)\tan\alpha=Ma_C \qquad \text{(VII)}$$

(IV) en (VII)

$$Mg-m\big((a_C\tan\alpha)\tan\alpha\big)=Ma_C$$

Resolviendo

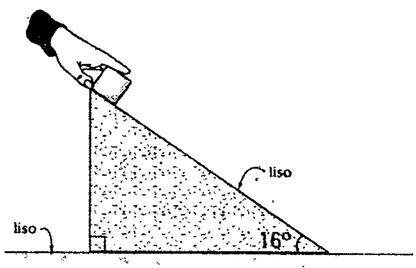
$$a_C=\frac{Mg}{m\tan^2\alpha+M} \qquad \text{(VIII)}$$

(VIII) en (IV)

$$a_B=\frac{Mg\tan\alpha}{m\tan^2\alpha+M}$$

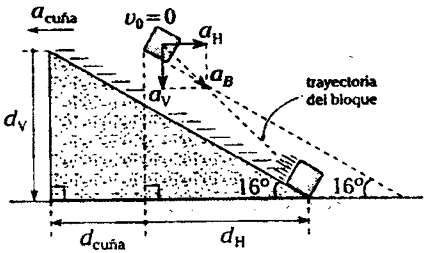
Problema 20

En el gráfico, se muestra el instante en que se suelta a un pequeño bloque de 0,7 kg sobre una cuña de 4,9 kg en reposo. Si el bloque logra resbalar y llega a la superficie horizontal, determine la aceleración del bloque y de la cuña. (g = 10 m/s^2)



Resolución

Como se desprecia las asperezas, luego de abandonar el bloque sobre la cuña, este empieza a descender por acción de la $\vec{F}_g$ experimentando una aceleración $\vec{a}_B$. Se verifica que, sobre el bloque actúan fuerzas constantes, se determina que el bloque tenga una aceleración constante, lo cual nos permite plantear que el bloque se moverá en línea recta y a medida que ocurre esto, debido a la fuerza del bloque sobre la cuña, esta desliza sobre el piso hacia la izquierda, tal como se muestra



Del diagrama se puede notar que, cuando el bloque llega al piso, este horizontalmente se ha desplazado d_H y verticalmente ha descendido d_V, mientras que la cuña se habrá desplazado horizontalmente $d_{cuña}$ del diagrama.

$$\tan 16° = \frac{d_V}{d_{cuña} + d_H}$$

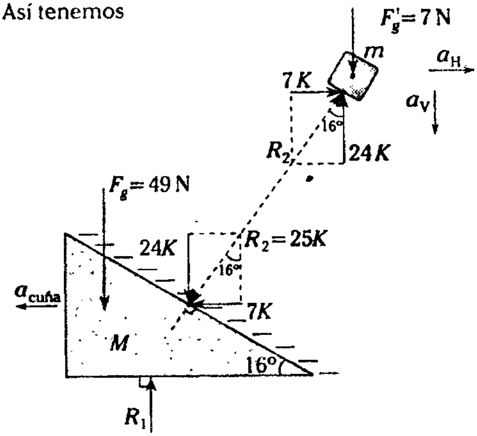
Ahora, como la $\vec{F}_R$ sobre el bloque y la cuña se mantiene constante origina aceleración constante, entonces experimentarán un M.R.U.V.; entonces, para calcular las distancias usamos una ecuación del M.R.U.V.; en la ecuación anterior planteamos

$$\tan 16° = \frac{\frac{1}{2}a_V t^2}{\frac{1}{2}a_{cuña}t^2 + \frac{1}{2}a_H t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{a_V}{a_{cuña} + a_H} \qquad \text{(I)}$$

Para calcular a_H, a_V y $a_{cuña}$, vamos a usar la segunda ley de Newton y para ello debemos graficar las fuerzas sobre la cuña y el bloque.

Así tenemos



- Sobre el bloque horizontalmente tenemos

$$F_R = ma_H$$

$$a_H = \frac{F_R}{m} = \frac{7K}{0{,}7} = 10K \qquad \text{(II)}$$

También verticalmente

$$F_R = ma_V$$

$$a_V = \frac{F_R}{m} = \frac{F_g - 24K}{m} = \frac{7 - 24K}{0{,}7} \qquad \text{(III)}$$

- La cuña experimenta

$$F_R = Ma_{cuña}$$

$$\therefore\ a_{cuña} = \frac{F_R}{m} = \frac{7K}{4{,}9} = \frac{10}{7}K$$

Reemplazando en (I) y resolviendo

$$K = \frac{7}{36}$$

Reemplazando en (II) y en (III) se obtiene

$$a_H = \frac{35}{18}\ \text{m/s}^2\ ,\ a_V = \frac{1}{3}\ \text{m/s}^2\ \text{ y}$$

$$a_{cuña} = \frac{5}{18}\ \text{m/s}^2$$

Vectorialmente

$$\vec{a}_{cuña} = -\frac{5}{18}\hat{i}\ \text{m/s}^2 \ \text{ y } \ \vec{a}_{bloque} = \vec{a}_H + \vec{a}_V$$

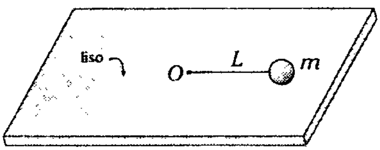
$$\Rightarrow \vec{a}_{bloque} = \frac{1}{3}\left(\frac{35}{6}\hat{i} - \hat{j}\right)\text{m/s}^2$$

DINÁMICA CURVILÍNEA

En la primera parte de este capítulo hemos aplicado la segunda ley de Newton al análisis de los movimientos rectilíneos; sin embargo, esta ley no se restringe sólo a esos casos, sino que también nos permite describir los movimientos curvilíneos, por ejemplo el movimiento parabólico, elíptico, pero en particular el movimiento circunferencial, que será tratado con mayor frecuencia. Como ejemplos de movimiento circunferencial podemos citar: el movimiento de un automóvil en una plaza, el movimiento de los satélites artificiales, el movimiento de una persona al subirse a un juego mecánico (silla voladora), el movimiento de una piedra atada a una cuerda cuando se le hace girar, etc.

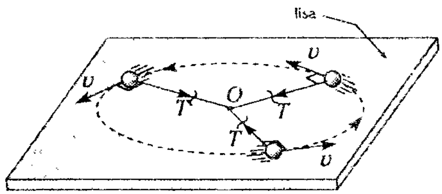
En el lanzamiento de bala, el atleta le hace dar varias vueltas a la esfera metálica antes de lanzarla, haciéndole describir un movimiento circunferencial

En esta parte nos corresponde averiguar bajo qué condiciones un cuerpo describe un trayecto circunferencial. Para ello podríamos empezar analizando el siguiente caso:



Se tiene una pequeña esfera sobre una mesa cuya superficie es lisa, tal como se indica

Ahora, ¿qué notaríamos luego de imprimir un impulso a la esfera perpendicular al hilo? Notaremos que se mueve describiendo una circunferencia ¿Por qué? Después de impulsar a la esfera, esta por inercia trata de conservar la dirección del movimiento que se le ha transmitido, pero esto hace que la cuerda se tense y es la fuerza de tensión la que le obliga continuamente a cambiar la dirección de su movimiento haciéndola seguir un trayecto circunferencial, tal y como lo mostramos en el siguiente gráfico.

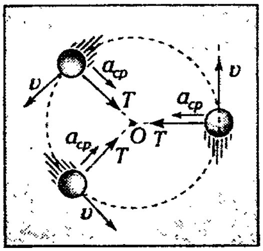


De lo planteado podemos concluir que, debido a la inercia, el cuerpo tiende a alejarse del centro de giro (O), pero debido a la fuerza que le ejerce la cuerda esto no ocurre y el cuerpo se mantiene siempre a una misma distancia del centro (esta distancia viene a ser el radio de giro).

Aquí, siendo la superficie lisa el módulo de la velocidad no se altera, por lo que se concluye que la esfera realiza un M.C.U.

De la figura anterior, la fuerza resultante es la tensión $\left(\vec{T}\right)$ dirigida en todo instante hacia el centro de la trayectoria; por lo tanto, origina en su dirección una aceleración a la cual se le denomina **aceleración centrípeta** $\left(\vec{a}_{cp}\right)$, derivándose este nombre de un término griego que hace referencia a la característica de estar dirigida en todo instante hacia el centro.

Vista desde arriba



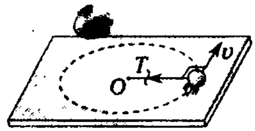
Si v es la rapidez de la esfera y R el radio de la trayectoria, el módulo de la $\vec{a}_{cp}$ se determina como

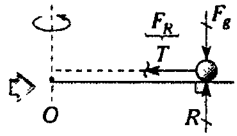
$$\boxed{a_{cp}=\frac{v^2}{R}}$$

Si el cuerpo no describe un M.C.U. y su rapidez es diferente en cada instante, esta relación también es válida y se podrá aplicar para cada instante, como ya en la Cinemática se ha demostrado.

El motociclista al dar la curva se inclina para contrarrestar los efectos de la inercia que intenta alejarlo del centro de la trayectoria

Como ya hemos visto, la esfera presenta una aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ que en todo instante está dirigida hacia el centro de la circunferencia; entonces, sobre ella se debe presentar una fuerza resultante $(\vec{F}_R)$ en la misma dirección (de acuerdo con la Segunda Ley de Newton) que origina dicha aceleración; en nuestro caso esta fuerza resultante radial es la fuerza de tensión $\vec{T}$, la cual podemos notar que en todo instante es perpendicular a la velocidad.





Esto representa una vista hecha de canto sobre la mesa

Esta $\vec{F}_R$ dirigida siempre hacia el centro recibe el nombre de **fuerza centrípeta** $(\vec{F}_{cp})$ y es la causante de que la velocidad cambie en dirección, mas no en módulo.

Recuerde que toda $\vec{F}_R$ origina cambios de velocidad que pueden ser en módulo y/o dirección. Si esta $\vec{F}_R$ es perpendicular en todo instante a la $\vec{v}$, no está en favor ni en contra del movimiento, por ello no modifica el módulo de la velocidad, pero sí su dirección. Por lo tanto, la $\vec{a}_{cp}$ es aquella aceleración que mide la rapidez con que cambia la dirección de la velocidad.

En general, si tenemos un movimiento curvilíneo, donde el movimiento circunferencial sería un caso particular, siempre estará presente **la fuerza centrípeta** lo que originará en su misma dirección una **aceleración centrípeta** que, por cierto, también se le denomina **aceleración normal** debido a que el vector que la representa es perpendicular a la velocidad del cuerpo $(\vec{v}\perp\vec{a}_{cp})$.

Planteando la Segunda Ley de Newton en forma escalar, tendremos

$$\boxed{F_R=ma}$$

Ahora, si aplicamos esta ley en la aceleración normal obtendremos

$$\boxed{F_{cp} = ma_{cp}}$$

o también

$$\boxed{F_{cp} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R}$$

donde

F_{cp} : módulo de la fuerza centrípeta (en N)

m : masa del cuerpo (en kg)

v : rapidez del cuerpo (en m/s)

R : radio de la circunferencia (en m)

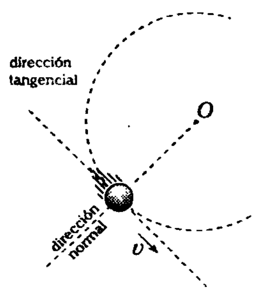
ω : rapidez angular del cuerpo (en rad/s)

Observación

Cuando un cuerpo describe una trayectoria circunferencial, se recomienda hacer el análisis de su movimiento tomando como referencia dos direcciones: la dirección normal, que es perpendicular a la velocidad y la dirección tangencial, que es paralela a la velocidad.

Debemos tener presente que

1. La $\vec{F}_{cp}$ para un instante cualquiera se determina analizando las fuerzas sobre la dirección normal.



2. La $\vec{F}_{cp}$ se obtiene a partir del diagrama de fuerzas, considerando solo las fuerzas o componentes que están contenidas en la dirección normal. Así

$$F_{cp} = \begin{pmatrix}\text{suma de las fuerzas}\\ \text{que se dirigen}\\ \text{hacia el centro}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{suma de las fuerzas}\\ \text{que se alejan}\\ \text{del centro}\end{pmatrix}$$

es decir

$$\boxed{F_{cp} = \sum F_{\substack{\text{apuntan}\\ \text{al centro}}} - \sum F_{\substack{\text{opuestas}\\ \text{al centro}}}}$$

3. Si en un movimiento circunferencial, el módulo de la velocidad va cambiando, entonces, sobre el cuerpo también debe haber una fuerza resultante en la dirección tangencial $\left(\vec{F}_{R(\tan)}\right)$, si coincide con la dirección de la velocidad, esta aumenta su valor y, si está en dirección contraria, el valor de la velocidad disminuye.

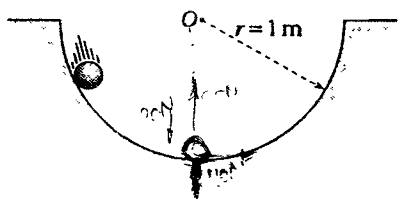
$$\boxed{F_{R(\tan)} = ma_T}$$

a_T representa el módulo de la aceleración tangencial $\left(\vec{a}_T\right)$, que recordemos mide la rapidez con que cambia el módulo de la velocidad.

4. Como en todo movimiento curvilíneo, la velocidad siempre cambia en dirección, pero no necesariamente en módulo; siempre se tendrá fuerza centrípeta, pero no siempre fuerza resultante en la dirección tangencial.

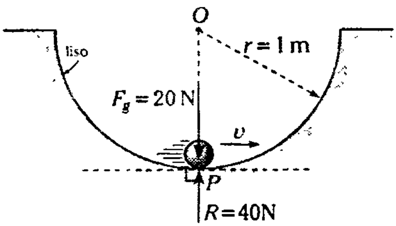
Ejemplo 7

La figura muestra una esfera de 2 kg que al pasar por la parte más baja de su trayectoria, ejerce una fuerza de 40 N de módulo a la superficie cilíndrica lisa; determine la rapidez de la esfera en dicho instante. (g = 10 m/s²)



Resolución

La esfera al ir descendiendo va describiendo una trayectoria circunferencial con centro en O y según el enunciado cuando pasa por la parte más baja acciona sobre la superficie con 40 N, tal como lo indicamos a continuación.



Según el diagrama de fuerzas sobre la esfera, se nota que $R > F_g$, en la dirección normal debe haber una fuerza resultante hacia el centro de la trayectoria. Por consiguiente

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

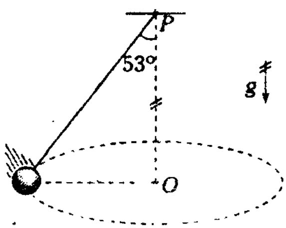
$$\Rightarrow \quad R - F_g = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad 40 - 20 = (2)\frac{v^2}{(1)}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{10}\ \text{m/s}$$

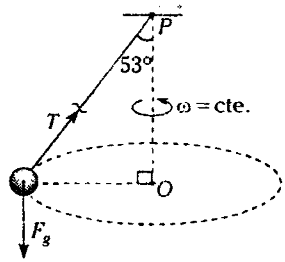
Ejemplo 8

La esfera de 3 kg se encuentra girando con una velocidad angular constante. Determine el módulo de la fuerza centrípeta sobre la esfera. ($g = 10$ m/s²)



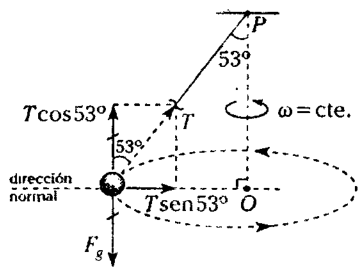
Resolución

Realicemos el diagrama de fuerzas sobre la esfera, teniendo en cuenta que esta realiza movimiento circunferencial en un plano horizontal. A este sistema también se le conoce como péndulo cónico, debido a que al rotar el sistema se forma el sólido de revolución que conocemos como cono.



Mientras la esfera gira con rapidez angular constante, el ángulo que forma la cuerda con la vertical se mantiene constante y esto determina que la esfera siga un trayecto circunferencial en un plano horizontal, con centro en O, tal como se ha mostrado.

Sabemos que la $\vec{F}_{cp}$ se obtiene trabajando con las fuerzas o componentes de fuerzas que se encuentran en la dirección normal y, para ello, descomponemos rectangularmente a la fuerza de tensión, así



Como la esfera se mueve sólo en un plano horizontal, las fuerzas verticales que actúan sobre ella se deben equilibrar.

En la dirección normal se tendrá

$$F_{cp} = T\text{sen}53° \qquad (1)$$

Pero en la vertical como hemos planteado debe haber equilibrio

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$T\cos 53° = F_g$$

$$T\left(\frac{3}{5}\right) = (3)(10)$$

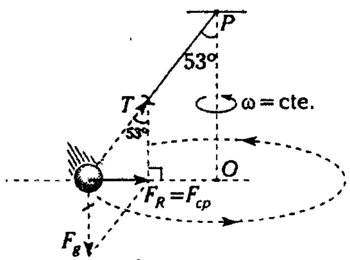
$$T = 50\text{ N}$$

Reemplazando en (1)

$$F_{cp} = T\,\text{sen}\,53° = (50)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore\ F_{cp} = 40\text{ N}$$

La resolución de este ejemplo la hemos realizado en forma analítica, es decir, trabajando con dos direcciones perpendiculares, pero el ejemplo también se puede resolver geométricamente planteando lo siguiente:



Como la esfera se mueve con ω = cte., sobre ella no se debe presentar fuerza resultante en la dirección tangencial, por lo que la fuerza resultante está dirigida hacia el centro de la trayectoria. Haciendo uso del método del paralelogramo con $\vec{T}$ y $\vec{F}_g$, obtenemos la fuerza resultante $(\vec{F}_R)$ tal como se ha mostrado en la figura.

Del gráfico hecho tenemos que $\vec{F}_R$ es la fuerza centrípeta $(\vec{F}_{cp})$ y para determinar su módulo planteamos

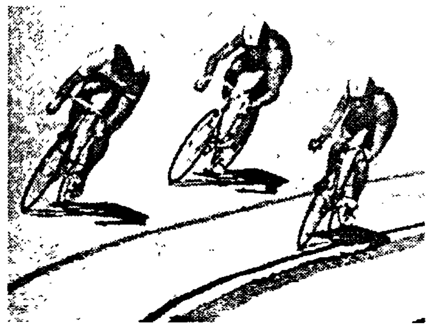
$$\tan 53° = \frac{F_R}{F_g} = \frac{F_{cp}}{mg}$$

$$\Rightarrow\ F_{cp} = mg\tan 53°$$

Reemplazando valores

$$F_{cp} = (3)(10)\left(\frac{4}{3}\right)$$

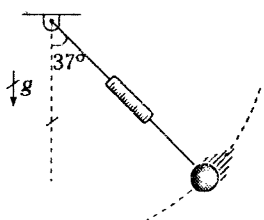
$$\therefore\ F_{cp} = 40\text{ N}$$



El peralte en los velódromos permite que los ciclistas puedan alcanzar una rapidez muy grande sin sufrir un accidente.

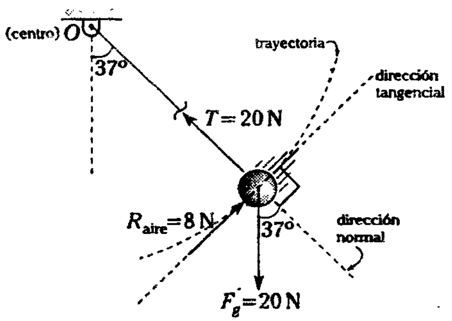
Ejemplo 9

Para el instante que se muestra sobre la esfera de 2 kg, el aire ejerce una fuerza de resistencia de módulo igual a 8 N. Si el dinamómetro indica 20 N, determine el módulo de la fuerza centrípeta y de la fuerza resultante tangencial. (g = 10 m/s^2)

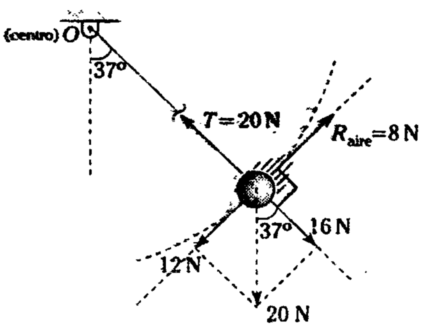


Resolución

Sabemos que el dinamómetro nos indica el módulo de la fuerza de tensión ($T = 20$ N) y que la resistencia del aire se grafica en dirección contraria a la dirección de la velocidad de la esfera; según ello, tenemos que el diagrama de fuerzas sobre la esfera, para el instante mostrado es



Como nos piden determinar el módulo de la fuerza centrípeta y la fuerza resultante en la dirección tangente, entonces, a la fuerza de gravedad la descomponemos rectangularmente en las direcciones normal y tangencial, así



A partir del gráfico, en la dirección normal, obtenemos

$$F_{cp} = F_{\substack{\text{apuntan} \\ \text{al centro}}} - F_{\substack{\text{opuestos} \\ \text{al centro}}} = 20 - 16$$

$$\Rightarrow \quad F_{cp} = 4N$$

Del mismo modo, en la dirección tangencial tendremos

$$F_{R(\tan)} = 12 - 8$$

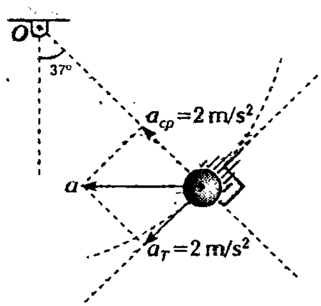
$$\Rightarrow \quad F_{R(\tan)} = 4\text{ N}$$

Estas fuerzas resultantes obtenidas en cada dirección originan aceleraciones en cada una de estas direcciones, las cuales podemos determinar mediante la segunda ley de Newton, así

$$a_{cp} = \frac{F_{cp}}{m} = \frac{4}{2} = 2\text{ m/s}^2 \quad \text{y}$$

$$a_T = \frac{F_{R(\tan)}}{m} = \frac{4}{2} = 2\text{ m/s}^2$$

Con los cálculos hechos graficamos las aceleraciones obtenidas para cada dirección, que en realidad son componentes de la aceleración instantánea de la esfera $(\vec{a})$.



a representa el módulo de la aceleración instantánea para el instante dado, el cual determinaremos de manera sencilla ya que conocemos los módulos de $\vec{a}_{cp}$ y $\vec{a}_T$, así

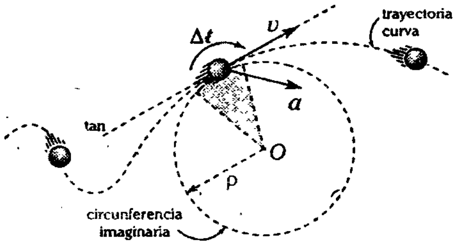
$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_T^2}$$

$$\therefore \quad a = 2\sqrt{2}\text{ m/s}^2$$

Al lector le quedaría demostrar que la aceleración calculada forma un ángulo de 8° con la horizontal.

SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA AL MOVIMIENTO CURVILÍNEO

En el capítulo de movimiento circunferencial se plantearon unos detalles relacionados con el movimiento curvilíneo de un cuerpo en dos dimensiones; por ejemplo, señalamos que para un intervalo de tiempo (Δt) pequeño el cuerpo describía un pequeño arco que podía ser considerado parte de una circunferencia, tal como lo mostramos



donde

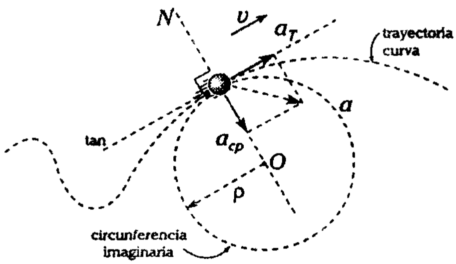
ρ : radio de curvatura.

O : centro de curvatura.

$\vec{a}$: aceleración total o instantánea.

Note que la circunferencia imaginaria, trazada en cada instante debe ser tangente a la trayectoria en dicha posición del móvil y además de todas las circunferencias tangentes que se pueden trazar, esta es la de mayor radio.

Dada la aceleración instantánea $(\vec{a})$ del cuerpo la podemos descomponer rectangularmente en la dirección tangente y normal tal como lo indicamos a continuación



Debemos tener presente que cada una de las componentes de la aceleración, $\vec{a}_T$ y $\vec{a}_{cp}$, son causadas por una fuerza resultante que hay sobre el cuerpo tanto en la dirección tangente y normal; que se obtienen considerando la Segunda Ley de Newton, así

$$\boxed{a_T = \frac{F_{R(\tan)}}{m}} \quad \text{y} \quad \boxed{a_{cp} = \frac{F_{cp}}{m}}$$

donde

$F_{R(\tan)}$: módulo de la fuerza resultante sobre el cuerpo en la dirección tangente.

F_{cp} : módulo de la fuerza resultante en la dirección normal y que apunta hacia el centro de curvatura, por ello, la denominamos fuerza centrípeta.

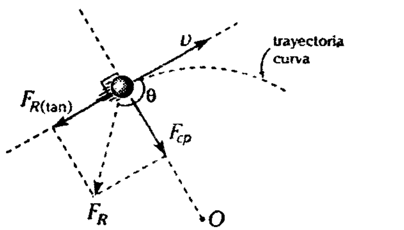
m : es la masa del cuerpo.

Debemos tener presente que

- Los módulos de la $\vec{a}_T$ y de la $\vec{a}_{cp}$ los podemos determinar usando

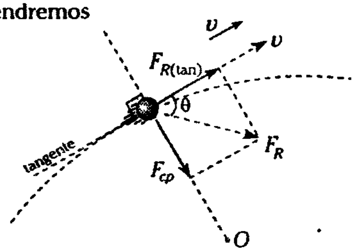
$$\boxed{a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \quad \text{y} \quad \boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{\rho} = \omega^2\rho}$$

- Si el movimiento es curvilíneo y desacelerado tendremos



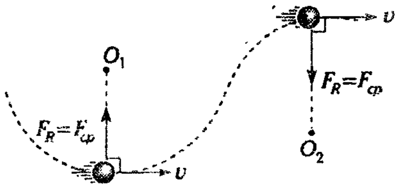
$\vec{F}_{R(\tan)}$ se opone al movimiento.

- Si el movimiento es curvilíneo y acelerado tendremos



$\vec{F}_{R(\tan)}$ favorece al movimiento.

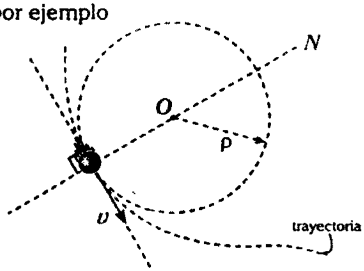
Si el ángulo θ que hace la $\vec{v}$ con la $\vec{F}_R$ es obtuso el movimiento es desacelerado, pero si θ es agudo el movimiento es acelerado, ¿qué sucede si en todo instante $\theta = 90$?



En este caso $\vec{F}_{R(\tan)} = \vec{0}$ $\therefore$ $\vec{a}_T = \vec{0}$

La rapidez es constante, $\vec{v}$ solo cambia de dirección, solo existe $\vec{F}_{cp}$ y el movimiento es curvilíneo uniforme.

- En un movimiento curvilíneo (en dos dimensiones), para cualquier posición del cuerpo, el centro de curvatura se localiza en un punto sobre la dirección normal que se encuentra en la zona cóncava a la trayectoria, por ejemplo



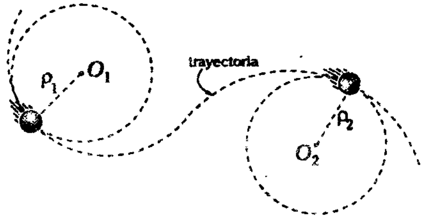
donde

O : centro de curvatura

N : dirección normal

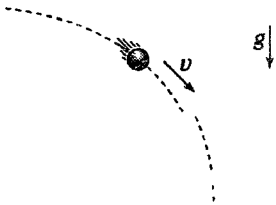
Se aprecia que $O \in N$.

- En el movimiento curvilíneo de un cuerpo para cada instante le corresponde un centro y radio de curvatura propios de ese instante, por ejemplo:



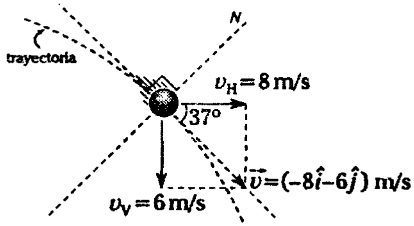
Ejemplo 10

Una esfera de 1,5 kg describe un trayecto curvilíneo. Si para un instante dado su velocidad es $\vec{v} = (8\hat{i} - 6\hat{j})$ m/s y experimenta de parte del viento una fuerza $\vec{F} = -5\hat{i}$ N, determine para dicho instante el módulo de la aceleración tangencial y el radio de curvatura. ($g = 10$ m/s^2)



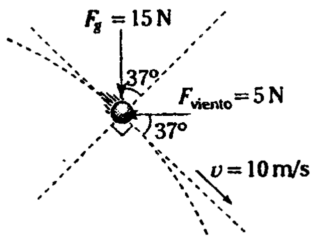
Resolución

Como para el instante dado se conoce la velocidad de la esfera y sabemos que esta es tangente a la trayectoria, tal como lo mostramos a continuación.

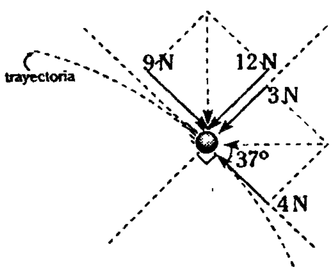


Conocidas las componentes de la velocidad $(\vec{v})$, es sencillo determinar su módulo: $v = 10$ m/s.

Nos piden el módulo de la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$, para calcularla se requiere la $\vec{F}_R^{\,tan}$ y para determinarla primero graficamos las fuerzas que actúan sobre la esfera.



Ahora descomponemos rectangularmente las dos fuerzas, a lo largo de la dirección tangencial y normal.



En la dirección tangencial, el módulo de la aceleración se puede calcular usando

$$a_T = \frac{F_{R(\tan)}}{m}$$

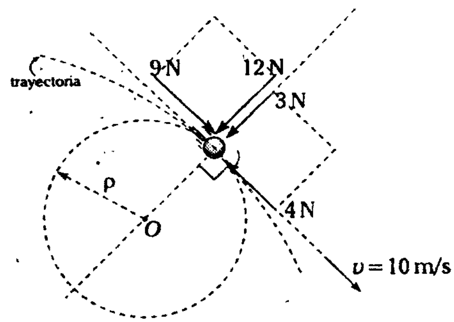
Reemplazando datos

$$a_T = \frac{9-4}{1{,}5} = \frac{10}{3}\,\text{m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad a_T = 3{,}3\,\text{m/s}^2$$

En este caso se usó la segunda ley de Newton, ya que con las condiciones dadas usando fórmulas cinemáticas no se iba a poder calcular.

Calculemos ahora el radio de curvatura (ρ) para el instante mostrado; para ello, graficamos la circunferencia imaginaria



En la dirección normal planteamos

$$a_{cp} = \frac{F_{cp}}{m}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{F_{cp}}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(10)^2}{\rho} = \frac{12+3}{1{,}5}$$

$$\therefore \quad \rho = 10\,\text{m}$$

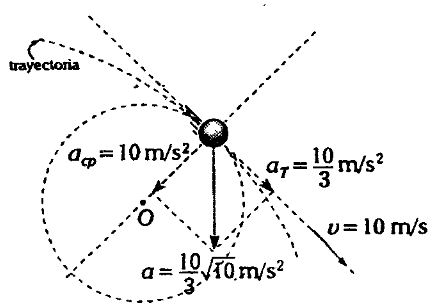
Para este ejemplo podemos además determinar la aceleración para el instante dado.

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2}$$

Como $a_T = \frac{10}{3}\,\text{m/s}^2$ y $a_{cp} = 10\,\text{m/s}^2$ tendremos

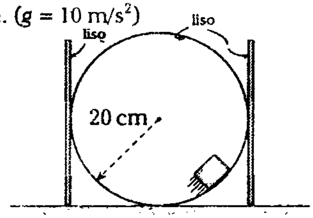
$$a = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + (10)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{10}\,\text{m/s}^2$$

Sobre la trayectoria tendríamos



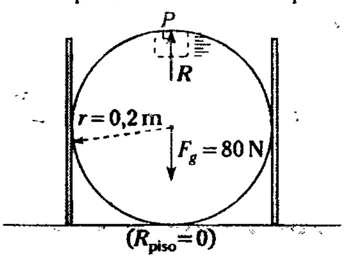
Problema 1

A partir del gráfico determine la rapidez del bloque de 2 kg en la parte más alta de su trayectoria, si en dicho instante el cilindro homogéneo de 8 kg que está apoyado en el piso, está a punto de elevarse. (g = 10 m/s^2)

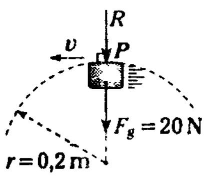


Resolución

Como el cilindro no se eleva, el bloque describe una circunferencia apoyándose en la superficie interna del cilindro y; como dicha superficie es lisa, entonces en todo instante le ejercerá una fuerza perpendicular a dicha superficie $(\vec{R})$; en el instante en que el bloque pasa por la parte más alta, $\vec{R}$ actúa verticalmente, como en dicho instante el cilindro está a punto de elevarse, significa que ha perdido prácticamente contacto con el piso (R_{piso} = 0). Cuando el bloque se encuentra en P planteamos



Del mismo modo, podemos hacer el D.C.L. del bloque, en P



Para determinar la rapidez del bloque en P, en la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$R + F_g = m.\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad R + 20 = (2)\frac{v^2}{(0,2)} = 10v^2 \qquad (1)$$

Podemos notar que para determinar v antes debemos conocer R.

Ahora, como el cilindro aún se mantiene en reposo, para el instante mostrado podemos plantear

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$R = 80 \text{ N}$$

Finalmente, reemplazamos este resultado en (1), obteniendo

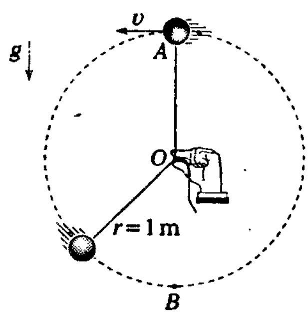
$$v = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

Problema 2

Una esfera está unida a un hilo de 1 m de longitud y se le hace describir una circunferencia en un plano vertical ¿cuál es la menor rapidez con la cual podría pasar por la parte más alta de su trayectoria? (g = 10 m/s^2)

Resolución

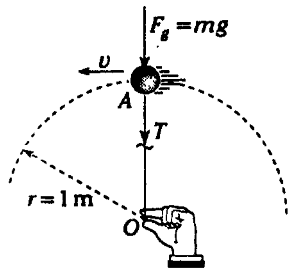
Por lo que el enunciado plantea podemos graficar



Además podemos señalar que mientras la esfera se mueva en el plano vertical de

- A hacia B : su rapidez va aumentando, entonces en todo instante la $\vec{a}_T$ y la $\vec{v}$ tienen la misma dirección.
- B hacia A : su rapidez disminuye, entonces en todo instante la $\vec{a}_T$ y la $\vec{v}$ tienen direcciones contrarias.

Ahora determinemos el menor valor de v. Para la esfera en la parte más alta tenemos



Ahora, en la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$T + F_g = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{(I)}$$

Analizando la expresión (I), la rapidez (v) será mínima si el valor de la fuerza de tensión también es mínimo, luego como $T_{mín} = 0$.

En (I) queda

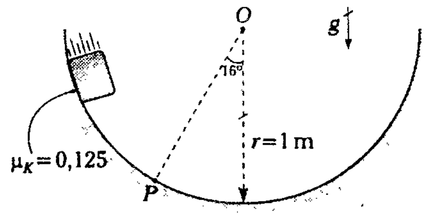
$$\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v_{mín}^2}{r}$$

$$\Rightarrow \; v_{mín} = \sqrt{gr} = \sqrt{(10)(1)}$$

$$\therefore \; v_{mín} = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

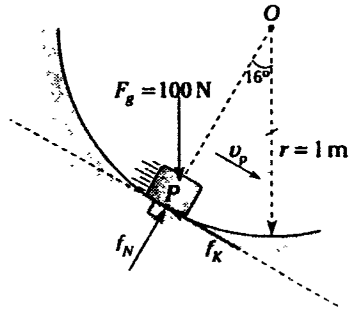
Problema 3

En la figura se muestra un bloque de 10 kg que resbala sobre una superficie semicilíndrica. Si cuando pasa por P su rapidez es 2 m/s, ¿qué módulo tiene su aceleración tangencial en dicho instante? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

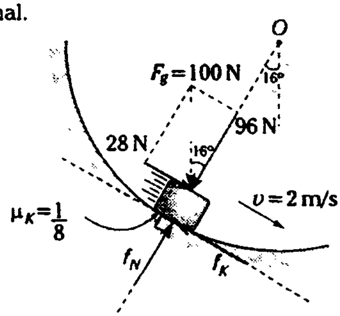
Es conveniente primero desarrollar el D.C.L. para el bloque, en el instante en que éste pasa por P.



Como piden el módulo de la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$, a lo largo de la dirección tangente usamos la Segunda Ley de Newton

$$a_T = \frac{F_{R(\tan)}}{m} = \frac{F_{R(\tan)}}{10} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere conocer el módulo de la $F_{R(\tan)}$. Para determinarla vamos a descomponer rectangularmente a la $\vec{F}_g$ a lo largo de la dirección tangente y normal.



A partir del gráfico tenemos

$$F_{R(\tan)} = 28 - f_K$$

$$F_{R(\tan)} = 28 - \mu_K f_N$$

$$F_{R(\tan)} = 28 - \frac{1}{8} f_N \qquad \text{(II)}$$

Ahora calculemos f_N; tenga presente que en la dirección normal se debe presentar una fuerza resultante dirigida al centro, con lo cual queda descartado que $f_N = 96$ N; por el contrario se debe verificar $f_N > 96$ N. En la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \; f_N - 96 = \frac{10(2)^2}{(1)}$$

$$\therefore \; f_N = 136\ \text{N}$$

En (II): $F_{R(\tan)} = 28 - \frac{1}{8}(136) = 11$ N

Finalmente, reemplazamos en (I) obteniendo

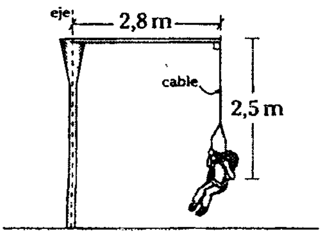
$$a_T = \frac{11}{10} = 1{,}1\ \text{m/s}^2$$

Problema 4

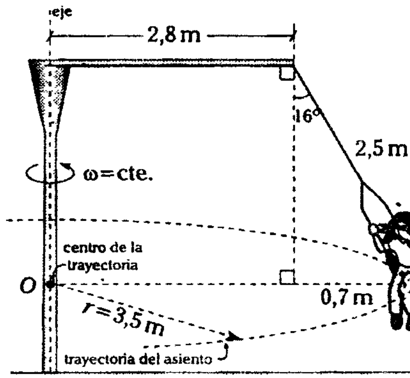
Los asientos del juego mecánico llamado la silla voladora están suspendidos de cables de 2,5 m de longitud y situados a 28 m del eje de rotación. ¿Con qué rapidez angular constante debe rotar el eje para que los cables se desvíen y formen 16° con la vertical? ($g = 10$ m/s²)

Resolución

Según el enunciado, para uno de los asientos podemos plantear el siguiente gráfico:



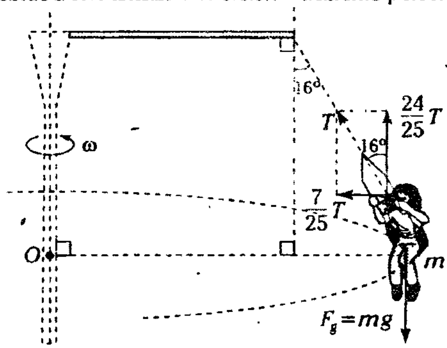
Cuando el sistema empieza a rotar lentamente, el asiento junto con la persona, debido a su inercia tienden a alejarse del eje; como consecuencia de ello los cables se desvían de la vertical y el ángulo de desviación será mayor cuando mayor sea la rapidez con que rota el sistema. Cuando el cable se ha desviado 16° el eje debe, a partir de ese instante, mantener su rapidez angular constante, para mantener dicho ángulo y a partir de dicho instante el asiento junto con la persona describen una circunferencia en un plano horizontal, tal como se muestra a continuación



Para la situación que se muestra

$$\omega_{eje} = \omega_{asiento} = \omega$$

Debido a esto analizamos el sistema asiento-persona.



En la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp} \;\Rightarrow\; \frac{7}{25}T = m(\omega^2 r) \qquad \text{(I)}$$

y sobre la vertical el sistema no se mueve, es decir, ya no sube ni baja, por lo que podemos plantear

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\frac{24}{25}T=mg \qquad \text{(II)}$$

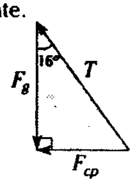
Hacemos (I) ÷ (II)

$$\frac{7}{24}=\frac{\omega^2 r}{g}=\frac{\omega^2(3,5)}{(10)}$$

$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{5}{6}}\ \text{rad/s}$$

Otro método

El problema también se puede resolver en forma geométrica, construyendo un triángulo con la $\vec{T}$, $\vec{F}_g$ y su resultante que es la $\vec{F}_{cp}$, debido a que no se presenta $\vec{a}_T$, ya que la rapidez del sistema se mantiene constante.

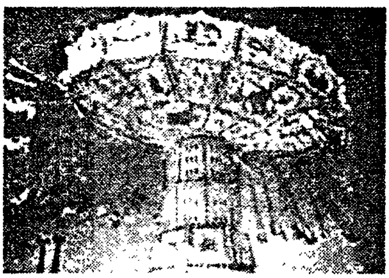


Se verifica que

$$\tan 16° = \frac{F_{cp}}{F_g} \Rightarrow \frac{7}{24}=\frac{\cancel{m}(\omega^2 r)}{\cancel{m}g}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{24}=\frac{\omega^2(3,5)}{10}$$

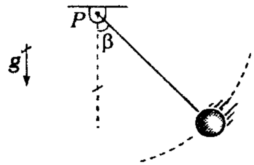
$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{5}{6}}\ \text{rad/s}$$



Uno de los logros de la Ingeniería Mecánica se ve reflejado en esta distracción mecánica llamada sillas voladoras, en donde se verifica la Segunda Ley de Newton aplicada al movimiento circunferencial.

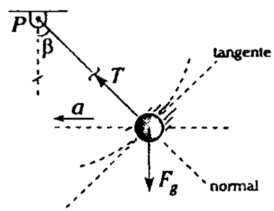
Problema 5

Para el instante mostrado, la pequeña esfera presenta una aceleración horizontal. Determine el módulo de su aceleración centrípeta.

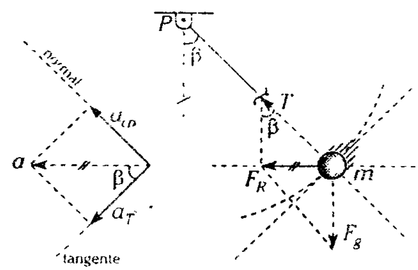


Resolución

De acuerdo con el gráfico, mientras la esfera va descendiendo, va describiendo una trayectoria circunferencial (con centro en P). Según dato, su aceleración, para el instante dado debe ser horizontal y como sabemos debe estar apuntando hacia la concavidad a la trayectoria, tal como se indica a continuación.



Conocida la dirección de la aceleración también tendremos la direccion de la $\vec{F}_R$.



Luego de descomponer rectangularmente la aceleración de la esfera, podemos determinar el módulo de su aceleración centrípeta como

$$a_{cp} = a\operatorname{sen}\beta \qquad \text{(I)}$$

Se requiere a, lo cual podemos determinar haciendo uso de la Segunda Ley de Newton, con la $\vec{T}$ y la $\vec{F}_g$, determinamos la fuerza resultante $(\vec{F}_R)$ con ayuda del método del paralelogramo, en donde se verifica

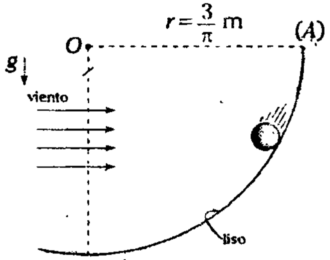
$$\tan\beta = \frac{F_R}{F_g} \Rightarrow \tan\beta = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g} \Rightarrow a = g\tan\beta$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

$$a_{cp} = g\tan\beta\operatorname{sen}\beta$$

Problema 6

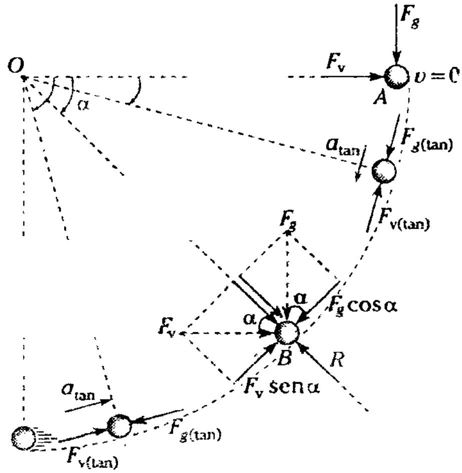
La esfera de $2\sqrt{3}$ kg que se muestra fue soltada en A; calcule su recorrido hasta el instante en que alcanza su máxima rapidez. Considere $g = 10$ m/s^2 y que el viento ejerce una fuerza constante $\vec{F}_v = 20\hat{i}$ N :



Resolución

La esfera una vez soltada en A empieza a descender debido a la atracción terrestre y describe un trayecto circunferencial con centro en O.

Ahora, para determinar la posición donde la rapidez es máxima, surge la necesidad de analizar el movimiento de la esfera en la dirección tangencial.



Las componentes tangenciales de la $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_v$ varían continuamente dependiendo de la medida del ángulo α.

En el gráfico

$F_{g(tan)}$: componente de la $\vec{F}_g$ en la dirección tan.

$F_{v(tan)}$: componente de la $\vec{F}_v$ en la dirección tan.

Analizando el movimiento de la esfera se concluye

- Si $F_{g(tan)} > F_{v(tan)}$, entonces la esfera acelera, aumenta su rapidez.
- Si $F_{g(tan)} < F_{v(tan)}$, entonces la esfera desacelera, la rapidez de la esfera disminuye.

Por lo tanto, la rapidez máxima de la esfera es donde ocurre el cambio, es decir, donde la fuerza resultante y la aceleración en la dirección tangente es nula, es decir $F_{R(tan)} = 0$, si en la posición B ocurre ello tenemos que $F_v\operatorname{sen}\alpha = F_g\cos\alpha$.

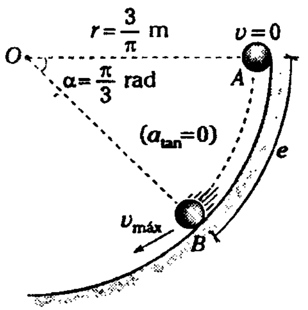
Reemplazando valores

$$(20)\operatorname{sen}\alpha = (20\sqrt{3})\cos\alpha$$

$$\tan\alpha = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

Conociendo el ángulo que descendió, se puede determinar su recorrido como



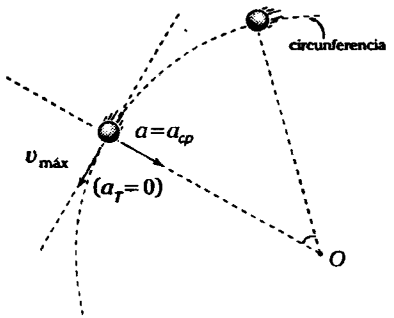
$$e=\alpha r$$

$$e=\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{3}{\pi}\right)$$

$$\therefore\ e=1\text{ m}$$

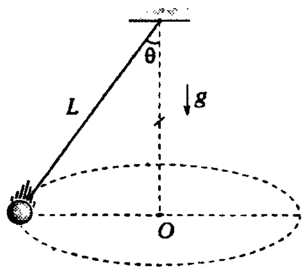
Nota

De la resolución del problema anterior, vemos que un cuerpo en movimiento con trayectoria circunferencial alcanza su máxima velocidad $\left(\vec{v}_{máx}\right)$ en el instante en que, a lo largo de la dirección tangente, la fuerza resultante es nula $\left(\vec{F}_{R(tan)}=\vec{0}\right)$ o, lo que equivale a decir, en el instante en que la aceleración tangencial es nula $\left(\vec{a}_T=\vec{0}\right)$; por ejemplo, podemos tener



Problema 7

Si la esfera que se muestra al moverse describe un M.C.U. en un plano horizontal, determine el periodo con que gira la esfera.



Resolución

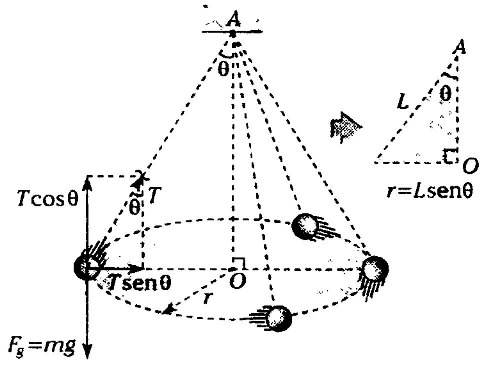
El periodo (P) es el tiempo que emplea la esfera para completar una vuelta. Como la esfera describe un M.C.U. se cumple

$$P=\frac{2\pi}{\omega} \qquad (*)$$

donde

ω : es la rapidez angular constante con que gira la esfera.

Realizando el D.C.L. de la esfera para cualquier instante tenemos



- En la dirección normal planteamos

$$F_{cp}=ma_{cp}$$

$$T\,\text{sen}\,\theta=m(\omega^2 r) \qquad \text{(I)}$$

- En la dirección vertical

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$T\cos\theta = mg \qquad \text{(II)}$$

Hacemos (I) ÷ (II)

$$\tan\theta=\frac{\omega^2 r}{g}=\frac{\omega^2(L\operatorname{sen}\theta)}{g}$$

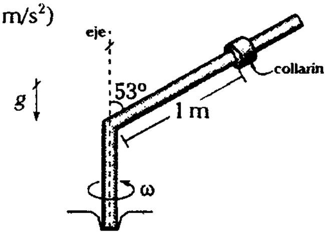
$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}}$$

Finalmente, reemplazamos en (*) y obtenemos

$$P=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

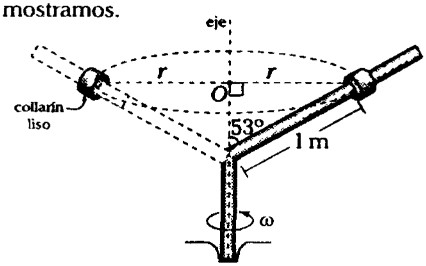
Problema 8

A partir de la figura, determine la rapidez angular con la cual debe rotar la barra doblada para que el collarín liso no se mueva respecto a ella.
(g = 10 m/s^2)



Resolución

Considerando que la barra doblada rota alrededor del eje con una rapidez angular constante y que el collarín no se mueve respecto a ella, como consecuencia el collarín describe una trayectoria circunferencial en un plano horizontal, tal como lo mostramos.

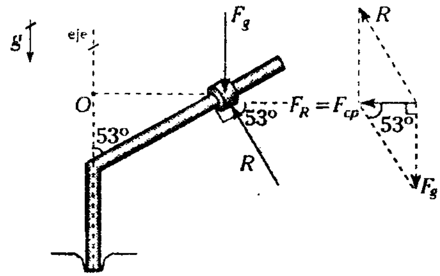


Del gráfico $r=(1)\text{sen}53° = 0{,}8$ m

Además se deduce que

$$\omega_{barra}=\omega_{collarín}=\omega$$

Calculemos ω; para ello, analizamos el movimiento circunferencial (uniforme) del collarín, sobre el cual la fuerza resultante debe actuar a lo largo del radio y dirigido hacia el centro O, tal como lo indicamos a continuación.



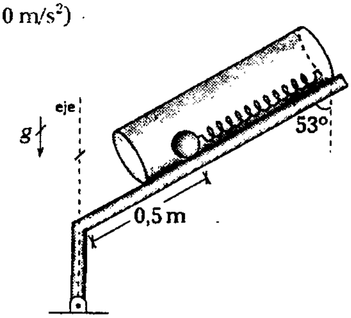
A partir del gráfico se tiene

$$\tan53°=\frac{F_g}{F_{cp}}=\frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}a_{cp}}\ \Rightarrow\ \frac{4}{3}=\frac{g}{\omega^2 r}$$

$$\Rightarrow\ \frac{4}{3}=\frac{10}{\omega^2(0{,}8)}\quad\therefore\ \omega=\frac{5}{4}\sqrt{6}\text{ rad/s}$$

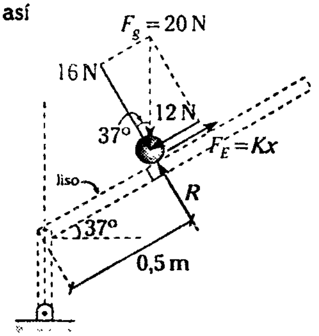
Problema 9

La esfera de 2 kg unida al resorte de rigidez K = 100 N/m está ubicada en el interior de un cilindro liso, determine la deformación del resorte cuando el sistema rota con una rapidez angular de 5 rad/s.
(g = 10 m/s^2)



Resolución

Si el sistema no rota, la esfera reposa y estira al resorte, así



De la figura

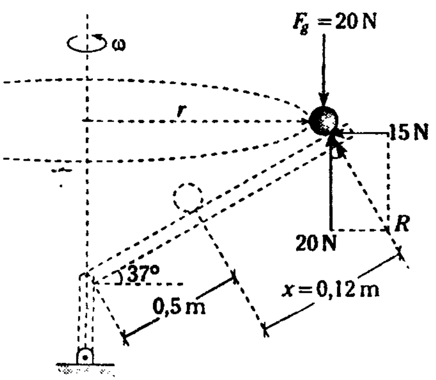
$$Kx = 12$$

$$100x = 12 \Rightarrow x = 0{,}12\,\text{m}$$

Esto es lo que inicialmente está estirado el resorte cuando el sistema no rota.

Cuando el sistema rota en torno al eje indicado la esfera realiza movimiento circunferencial. Si el sistema rota con una rapidez angular cada vez mayor, entonces la tendencia de la esfera al alejarse del eje se incrementa; como consecuencia la esfera presiona más a la plataforma y además asciende por esta haciendo que el resorte se recupere y al final podrá estar estirado o comprimido.

En primer lugar podemos determinar la rapidez angular para la cual el resorte no presenta deformación.



Note que verticalmente la esfera no se desplaza y planteamos equilibrio de fuerzas en esta dirección; de esto se deduce que el módulo de la componente vertical de $\vec{R}$ es 20 N. Valiéndonos del ángulo de 37°, podemos concluir que el módulo de la componente horizontal de $\vec{R}$ es 15 N; observe que este es el módulo de la fuerza resultante sobre la esfera.

En la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$15 = (2)(\omega^2 r) \qquad (1)$$

donde

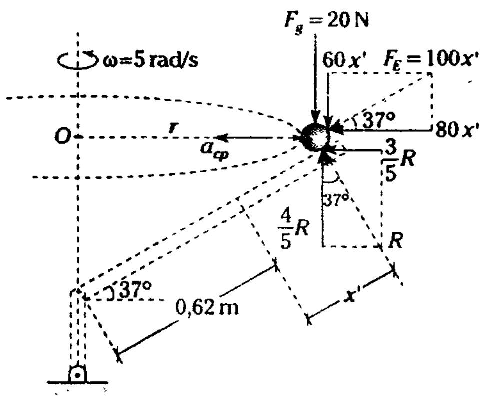
$$r = 0{,}62\cos 37° = 0{,}496$$

En (1)

$$\omega = 3{,}89\ \text{rad/s}$$

Luego, si el sistema rota con una rapidez angular mayor que 3,89 rad/s la esfera ascenderá aún más y debido a ella comprimirá al resorte. De esto podemos concluir que cuando el sistema rote con 5 rad/s el resorte se hallará comprimido y no estirado.

Haciendo el D.C.L. en estas condiciones



La esfera se mueve en un plano horizontal, realizando un movimiento circunferencial.

En la dirección normal

$$F_{cp} = ma_{cp} = m\omega^2 r$$

$$80x' + \frac{3}{5}R = (2)(5)^2(0{,}62 + x')\cos 37° \quad (1)$$

En la vertical tenemos equilibrio de fuerzas

$$\frac{4}{5}R = 20 + 60x' \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos

$$x' = 0{,}115 \text{ m}$$

Esta es la deformación del resorte, lo que está comprimido cuando el sistema rota con 5 rad/s.

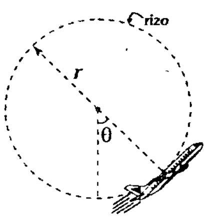
Problema 10

Un avión que vuela a razón de 360 km/h describe un rizo, ¿qué radio deberá tener el rizo para que la fuerza máxima con que el piloto presiona su asiento sea en módulo cinco veces su fuerza de gravedad? (g = 10 m/s^2)

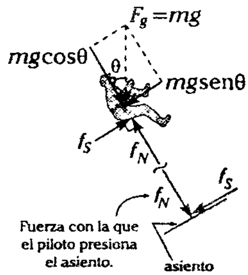
Resolución

El piloto del avión respecto de la Tierra realiza un movimiento con trayectoria circunferencial y debido a su inercia tiende a alejarse del centro de dicha trayectoria, es por ello que presiona su asiento.

Sabemos que la máxima fuerza con que el piloto presiona su asiento es 5 veces el módulo de su $\vec{F}_g$. Ahora, analizando dinámicamente la trayectoria circunferencial del avión en una posición cualquiera tenemos



Para esta posición del avión vamos a hacer el diagrama de cuerpo libre del piloto.



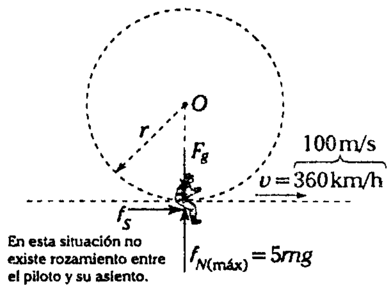
En la dirección normal existe

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$f_N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$f_N = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta$$

f_N es igual al módulo de la fuerza con la cual el piloto presiona su asiento y es máxima cuando $\theta = 0$. Luego, la situación mencionada se registra cuando el avión se encuentra en la parte más baja del rizo y por tanto también el piloto.



Analizando el movimiento circunferencial del piloto, para el instante señalado

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$f_N - F_g = \frac{mv^2}{r}$$

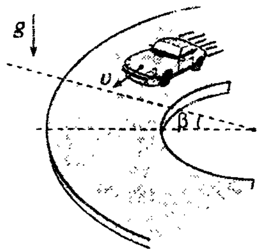
$$5mg - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{v^2}{4g} = \frac{(100)^2}{4(10)}$$

$$\therefore \; r = 250 \text{ m}$$

Problema 11

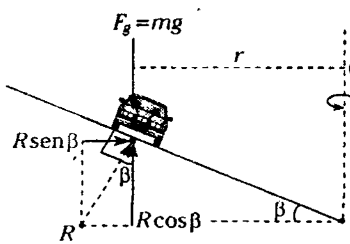
Cierto tramo de una autopista es curvilíneo y frecuentemente se encuentra cubierto de hielo. ¿Qué ángulo debe peraltarse la vía, si se desea que los automóviles puedan cruzarla con una rapidez máxima de 90 km/h? El radio de curvatura de este tramo de la pista es 250 m. ($g = 9{,}8$ m/s^2)



Resolución

En las autopistas sin peralte (pistas planas) normalmente es la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y la pista la que hace posible la trayectoria curvilínea del automóvil.

En este caso debido a las condiciones del tramo curvilíneo de la autopista (normalmente cubierta de hielo) podemos considerar que no existirá rozamiento entre ésta y los neumáticos de los automóviles que la crucen. Si la vía se encuentra peraltada es la componente horizontal de la reacción $(\vec{R})$ de la pista sobre el automóvil la que hace posible el movimiento curvilíneo de este último. Grafiquemos las fuerzas para entenderlo mejor



En la dirección normal existe

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$R\,\text{sen}\beta = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{(I)}$$

En la vertical, tenemos equilibrio de fuerzas

$$R\cos\beta = mg \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo miembro a miembro las relaciones (I) y (II)

$$\frac{\cancel{R}\,\text{sen}\beta}{\cancel{R}\cos\beta} = \frac{\frac{\cancel{m}v^2}{r}}{\cancel{m}g}$$

$$\tan\beta = \frac{v^2}{gr}$$

$$\therefore\ \beta = \arctan\left(\frac{v^2}{gr}\right)$$

Reemplazando los valores indicados inicialmente

$v = 90$ km/h equivalente a $v = 25$ m/s

$g = 9{,}8$ m/s^2

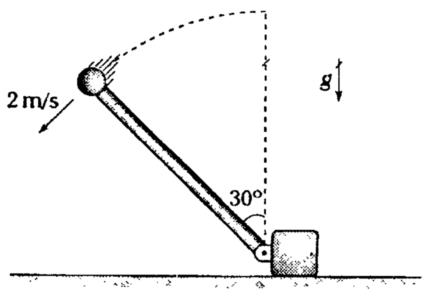
$r = 250$ m

obtenemos

$\beta = 14{,}31°$

Problema 12

El sistema mostrado está formado por una esfera de 1 kg unida a una barra de masa despreciable de $\sqrt{3}/3$ m de longitud. Si para el instante mostrado el bloque no se mueve determine el módulo de la fuerza de rozamiento sobre él. ($g = 10$ m/s^2)

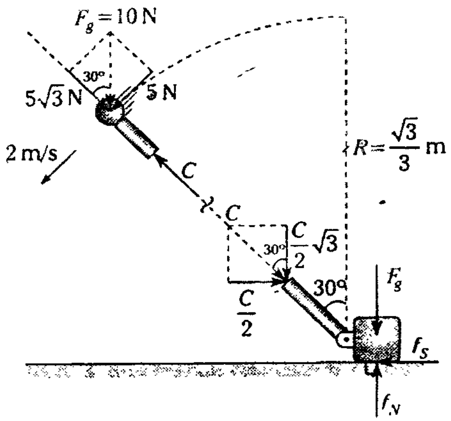


Resolución

Al describir la esfera un movimiento circunferencial, esta ejerce sobre la barra una fuerza, la cual podrá ser de tensión o compresión, la que también trata de desplazar al bloque a la izquierda (tensión) o derecha (compresión).

Para determinar de qué fuerza se trata y a la vez su módulo, analicemos a la esfera en el instante mostrado.

Consideraremos que la barra experimenta una fuerza de comprensión $(\vec{C})$, luego el resultado nos permitirá saber si lo asumido fue correcto o no.



Para que el bloque no resbale

$$\sum F(\rightarrow) = \sum F(\leftarrow)$$

$$\frac{C}{2} = f_S \qquad \text{(I)}$$

Como la esfera realiza movimiento circunferencial, para el instante mostrado podemos plantear

$$F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{R}$$

$$5\sqrt{3} - C = \frac{(1)(2)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

de donde se obtiene

$$C = \sqrt{3}\text{ N}$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

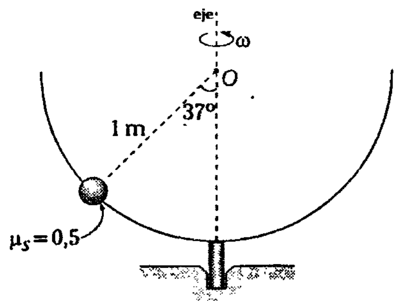
$$f_S = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ N}$$

Observación

Si en el diagrama consideramos que la barra está tensionada, en el D.C.L. se deduce que $T = (-)\sqrt{3}$ N, esto significa que con $v = 2$ m/s la barra no sufre tensión, sino compresión ya que el signo (–) indicaría que la dirección de la fuerza es contraria a la asumida.

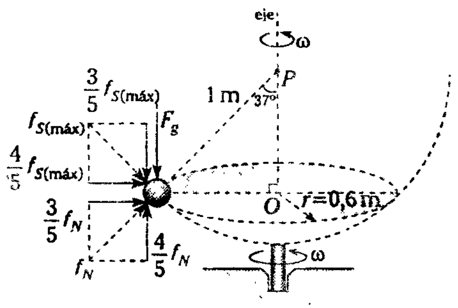
Problema 13

En la figura se muestra un alambre delgado en forma de semicircunferencia rotando y una canica incrustada que no se mueve respecto de él. Determine la máxima rapidez angular con la cual debe rotar el alambre de tal forma que la canica no resbale. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

La canica al no deslizar por el alambre se mantendrá fija a un punto de él, describiendo una circunferencia en un plano horizontal. Además al aumentar la rapidez angular por inercia la tendencia al deslizar hacia arriba aumenta, por lo tanto la máxima rapidez angular del alambre será en el instante en que la canica se encuentre a punto de deslizar hacia arriba.



En la dirección normal planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$\frac{4}{5}f_{S(\text{máx})} + \frac{3}{5}f_N = m\omega^2_{\text{máx}}r$$

Sabemos

$$f_{S(\text{máx})} = \mu_s f_N$$

$$\Rightarrow \quad f_{S(\text{max})} = \frac{1}{2}f_N \text{ ; reemplazando}$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}f_N\right) + \frac{3}{5}f_N = m\omega^2_{\text{máx}}r$$

$$f_N = m\omega^2_{\text{máx}}r \qquad \text{(I)}$$

Ahora, como la canica no se desplaza en la vertical

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$\frac{4}{5}f_N = \frac{3}{5}f_{S(\text{máx})} + F_g$$

$$\frac{4}{5}f_N = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}f_N\right) + mg$$

$$f_N = 2mg \qquad \text{(II)}$$

Igualemos las relaciones (I) y (II)

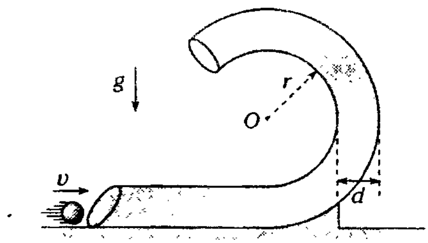
$$\cancel{m}\omega^2_{\text{máx}}r = 2\cancel{m}g$$

$$\omega^2_{\text{máx}} = \frac{2g}{r} = \frac{2(10)}{\left(\frac{6}{10}\right)}$$

$$\therefore \quad \omega_{\text{máx}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$$

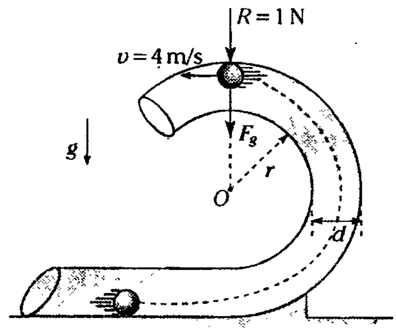
Problema 14

La esfera lisa de pequeñas dimensiones ingresa a la tubería con una rapidez υ. Cuando υ es mínima la reacción en la posición más alta es 2 N y la rapidez de la esfera 2 m/s; cuando υ es máxima la reacción en la misma posición es de 1 N y la rapidez 4 m/s. Determine la masa de la esfera.
($g = 10$ m/s^2 ; $r = 0{,}8$ m ; $d = 0{,}48$ m)



Resolución

Cuando la esfera ingresa a la tubería con una rapidez υ máxima, en virtud de su inercia, ésta se desliza presionando la superficie interna más alejada de O en el interior del tubo, así



En la parte más alta planteamos

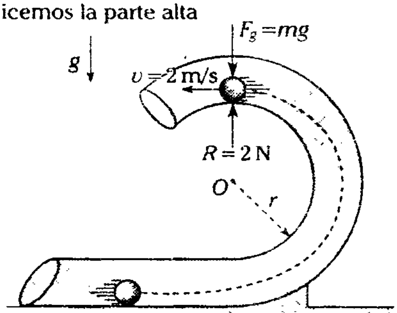
$$F_{cp} = ma_{cp} = m\left(\frac{\upsilon^2}{r+d}\right)$$

$$R + mg = \frac{m\upsilon^2}{(r+d)}$$

$$2 + m(10) = \frac{(m)(4)^2}{(1{,}28)}$$

$$\therefore \quad m = 0{,}4 \text{ kg}$$

Cuando la esfera ingresa a la tubería con v mínima, inicialmente presiona la superficie interna más alejada de O, luego presionará la superficie interna más cercana a O, es decir hay un momento que salta de una superficie a otra. Analicemos la parte alta



De igual modo en la parte más alta planteamos

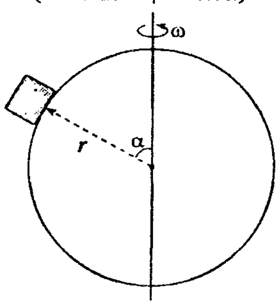
$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$mg - R = \frac{mv^2}{r}$$

Si reemplazamos valores obtenemos el mismo resultado hallado anteriormente.

Problema 15

En una superficie esférica de radio R se encuentra un bloque. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie de la esfera es μ y el ángulo entre la vertical y el radio vector del cuerpo, α. ¿Cuál será la velocidad angular máxima de rotación de la esfera para la cual el bloque sigue inmóvil en la superficie? (Considere $\mu > \tan\alpha$)



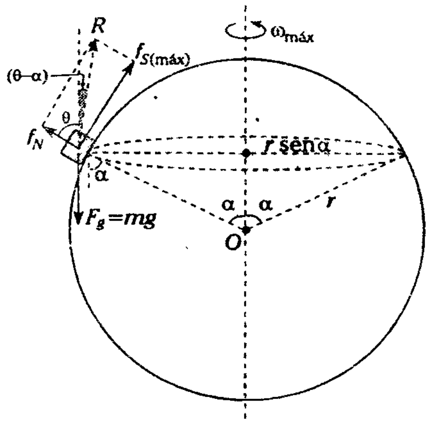
Resolución

Por condición del problema, mientras rota la superficie el bloque no se mueve respecto de ella, entonces ambos tienen la misma rapidez angular (ω) y para calcular la rapidez angular de la esfera vamos a analizar solamente al bloque.

Si la esfera está rotando con velocidad angular constante el bloque también, por lo tanto sobre él no hay fuerza resultante tangencial ($F_{R(\tan)} = 0$).

Si esta velocidad angular es máxima el bloque estará a punto de resbalar hacia abajo, ya que como sabemos tiende a alejarse de su centro de giro.

Realizando el diagrama de cuerpo libre en estas condiciones tendremos



En la figura

R : es la reacción de la superficie áspera sobre el bloque.

θ : es el ángulo que forman $\vec{R}$ con $\vec{f}_N$, es el ángulo de rozamiento estático máximo y como sabemos $\tan\theta = \mu$

Por dato

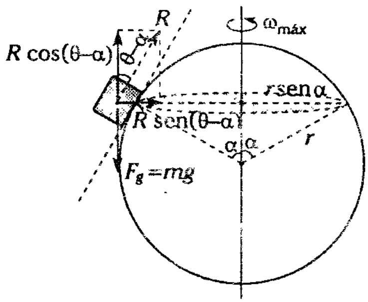
$\mu > \tan\alpha$

$\tan\theta > \tan\alpha$

$\therefore\ \theta > \alpha$

lo cual se verifica en el esquema anterior mostrado.

Para determinar la $\omega_{máx}$, en este caso es conveniente descomponer rectangularmente a la reacción $\vec{R}$, sobre la horizontal y vertical tenemos



En la dirección radial usamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$R\,\text{sen}(\theta-\alpha) = m\omega_{máx}^2 \cdot r\,\text{sen}\,\alpha \qquad (I)$$

Verticalmente, no hay desplazamiento del bloque

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$R\cos(\theta-\alpha) = mg \qquad (II)$$

Ahora dividamos (I) entre (II)

$$\tan(\theta-\alpha) = \frac{\omega_{máx}^2 r\,\text{sen}\,\alpha}{g}$$

$$\frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1+\tan\theta\tan\alpha} = \frac{\omega_{máx}^2 r\,\text{sen}\,\alpha}{g}$$

$$\frac{\mu - \tan\alpha}{1+\mu\tan\alpha} = \omega_{máx}^2\left(\frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{g}\right)$$

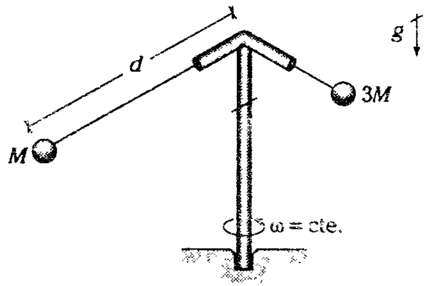
de donde despejando $\omega_{máx}$ obtenemos

$$\omega_{máx} = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{\mu\cot\alpha - 1}{\cos\alpha + \mu\,\text{sen}\,\alpha}\right)}$$

Para cualquier valor de la rapidez angular de la esfera menor que el que acabamos de calcular el bloque quedará en reposo sobre la superficie esférica.

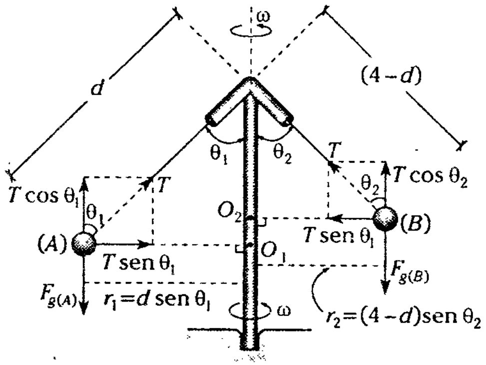
Problema 16

En la figura se muestra a dos esferas unidas por una cuerda ideal que pasa por un codo liso. Si el sistema rota con una rapidez angular constante, calcule d. Considere a la cuerda de 4 m.



Resolución

Nos piden d. Ambas esferas describen trayectorias circunferenciales sobre un plano horizontal, luego realizando los D.C.L. de cada una.



- Para A

  En la vertical hay equilibrio

  $$T\cos\theta_1 = F_{g(A)}$$

  En la dirección normal

  $$F_{cp} = Ma_{cp}$$

  $$T\,\text{sen}\,\theta_1 = M\,.\,\omega^2 r_1$$

  $$\Rightarrow\ T\,\cancel{\text{sen}\,\theta_1} = M\omega^2 d\,\cancel{\text{sen}\,\theta_1}$$

  $$\therefore\ T = M\omega^2 d \qquad (I)$$

- Para B

  En la vertical hay equilibrio

  $$T\cos\theta_2 = F_{g(B)}$$

  En la dirección normal

  $$F_{cp} = Ma_{cp}$$

  $$T\,\text{sen}\,\theta_2 = (3M).\omega^2.r_2$$

  $$\Rightarrow\ T\,\cancel{\text{sen}\,\theta_2} = (3M)\omega^2(4-d)\,\cancel{\text{sen}\,\theta_2}$$

  $$\therefore\ T = 3M\omega^2(4-d) \qquad \text{(II)}$$

Luego (I) = (II)

$$\cancel{M\omega^2}d = 3\cancel{M\omega^2}(4-d)$$

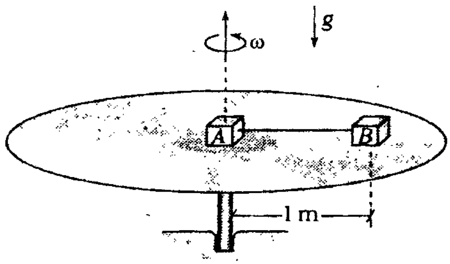
$$d = 12-3d\ \ \therefore\ \ d = 3m$$

Es importante tener presente

- La tensión en la cuerda para cada porción de ésta tiene el mismo valor, pues es de masa despreciable y lisa.
- La rapidez angular es la misma para cada esfera, giran en torno al mismo eje y con la misma rapidez con que este rota.

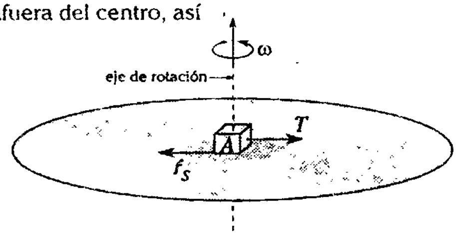
Problema 17

Se tiene dos bloques, A y B, sobre una plataforma. Determine la mayor rapidez angular que puede adquirir el sistema tal que los bloques conserven su posición respecto de la plataforma. ($m_A = 6$ kg ; $m_B = 2$ kg ; $\mu_A = 0{,}7$; $\mu_B = 0{,}4$)

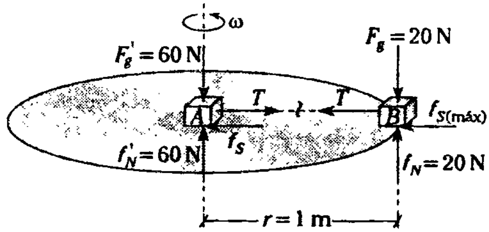


Resolución

La plataforma rota con rapidez angular constante ω. Si el bloque B mantiene su posición respecto de la plataforma, entonces su trayectoria será circunferencial. A mayor valor de ω, mayor será el valor de la velocidad del bloque B y en virtud de su inercia manifestará una mayor tendencia a alejarse del centro de la trayectoria (el bloque tiende a deslizar sobre la plataforma). Esta tendencia depende además de la distancia del cuerpo al eje de rotación; es por esta razón que el bloque A no experimenta tendencia a alejarse del centro de la plataforma cuando ésta rota, pero debe notarse que es el bloque B que mediante la cuerda jala al bloque A por lo que este último manifiesta tendencia a deslizar hacia afuera del centro, así



El eje de rotación pasa por el bloque, en estas condiciones el bloque no experimenta tendencia a alejarse del centro, independientemente del valor de ω, pero el hilo tiende a deslizarlo. ¿Cuál de los bloques, A o B, tiene mayor tendencia a deslizar? Por los valores del coeficiente de rozamiento nótese que



B tiene menos adherencia a la plataforma ($\mu_B < \mu_A$).

Por lo tanto, el bloque B es el que llegará al estado de deslizamiento inminente, entonces sobre B actúa $f_{S(máx)}$, sin embargo el deslizamiento no se producirá debido a que la cuerda lo ata al bloque A; luego puede concluirse que cuando el bloque A está a punto de deslizar, todo el conjunto estará a punto de hacerlo.

Existe un valor de ω para el cual los bloques están a punto de deslizar, es decir, a punto de moverse respecto de la plataforma. Como B realiza un movimiento circunferencial, planteamos

$$F_{cp} = m_B a_{cp}$$

$$T + f_{S(máx)} = m_B \omega^2 r$$

$$T + \mu_B f_N = m_B \omega^2 r$$

$$T + (0,4)(20) = (2)\omega^2 (1)$$

$$T + 8 = 2\omega^2 \Rightarrow T = 2\omega^2 - 8$$

Ahora, como el bloque A se mantiene aún en equilibrio (no resbala).

$$\Rightarrow \underbrace{T} = f_S$$

$$\therefore\ 2\omega^2 - 8 = f_S$$

Pero, el módulo de la fuerza de rozamiento sobre A debe cumplir la siguiente condición:

$$f_S \leq f_{S(máx)}$$

$$2\omega^2 - 8 \leq \mu_{S(A)} f_N$$

$$2\omega^2 - 8 \leq (0,7)(60)$$

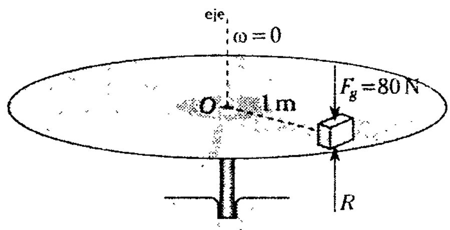
$$\therefore\ \omega \leq 5\ \text{rad/s} \Rightarrow \omega_{max} = 5\ \text{rad/s}$$

Problema 18

Sobre una plataforma horizontal está apoyado un bloque de 8 kg, dicha plataforma empieza a rotar respecto de un eje perpendicular a ella con una aceleración angular de 3 rad/s^2. Si dicho eje está a 1 m del bloque, ¿luego de qué tiempo de iniciado el movimiento de la plataforma el bloque empieza a resbalar? Considere g = 10 m/s^2 y el coeficiente de rozamiento estático, entre la plataforma y el bloque, de 0,5.

Resolución

Según las condiciones dadas por el problema podemos plantear el siguiente gráfico:

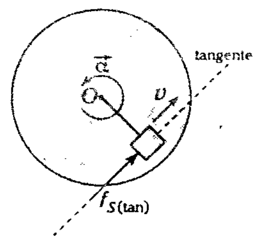


Como la plataforma está en reposo y el bloque está en equilibrio, solo actúan $\vec{F_g}$ y $\vec{R}$

$$\therefore\ R = F_g$$

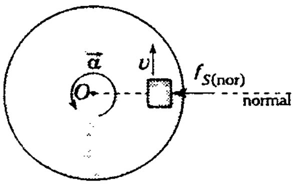
Cuando la plataforma rota con ω = cte., el bloque sobre ella, tiende a alejarse del centro de giro debido a su inercia, manifestándose así una tendencia a resbalar en dirección normal. Pero en nuestro caso la plataforma empieza a rotar con una aceleración angular $\alpha = 3\ \text{rad/s}^2$, esto trae como consecuencia que el bloque ahora manifieste una tendencia a resbalar no solo en dirección normal sino que también en dirección tangencial, es decir ¡el bloque presenta una doble tendencia a resbalar!

- En dirección tangencial



El bloque tiende a quedarse pero la plataforma rota y lo hace girar respecto al eje debido a la fuerza de rozamiento estático ($f_{S(tan)}$), pues no hay resbalamiento.

- En dirección normal



El bloque debido a la rotación tiende a alejarse del eje de la plataforma, pero se opone la fuerza de rozamiento estático $f_{S(\text{nor})}$, dirigiéndose hacia el eje.

En consecuencia, sobre el bloque actúan dos fuerzas de rozamiento estático, en las direcciones tangencial y normal, las cuales en buena cuenta son componentes de la fuerza de rozamiento estático.

Mientras el bloque no se mueva respecto a la plataforma va a tener la misma aceleración angular, esto implica que el bloque tendrá aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$, la cual en realidad es producto de la fuerza de rozamiento estático ($f_{S(\text{tan})}$). A medida que transcurra el tiempo la rapidez (v) del bloque va aumentar, esto va a traer como consecuencia que su intento de deslizar vaya aumentando en la dirección normal, mientras que en la dirección tangente no. Con esto último podemos señalar que mientras la plataforma rote $f_{S(\text{tan})}$ será constante y $f_{S(\text{nor})}$ será variable.

Luego planteamos

$$F_R = ma_T$$

$$f_{S(\text{tan})} = m(\alpha r) = (8)(3)(1)$$

$$\therefore\ f_{S(\text{tan})} = 24\text{ N} = \text{cte.}$$

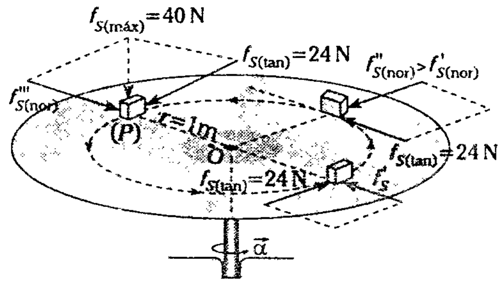
La fuerza de rozamiento estático tangencial no varía.

Pero en la dirección normal

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$f_{S(\text{nor})} = m\frac{v^2}{r} = \left(\frac{m}{r}\right)v^2$$

Entonces a mayor v aumenta $f_{S(\text{nor})}$ y aumenta la tendencia a resbalar. Esto que ocurre con el módulo de la velocidad (v) (que aumenta) la podemos graficar y deducir que $f'_{S(\text{nor})} < f''_{S(\text{nor})} < f'''_{S(\text{nor})}$, estas fuerzas aumentan debido al movimiento acelerado.



En la figura, el bloque en la posición P está a punto de resbalar y realmente intenta deslizar en dirección de la $f_{S(\text{máx})} = \mu_S f_N = 40$ N.

Se nos pide calcular el tiempo transcurrido desde el inicio hasta la posición P alcanzada por el bloque; para ello como realiza un M.C.U.V. pues $a_T = \alpha R = 3(1) = 3\text{ m/s}^2 = \text{cte.}$ utilizamos

$$v_F = v_0 + a_T t$$

$$v_P = 0 + 3t \qquad \text{(I)}$$

Sobre el bloque en la posición P planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$f'''_{S(\text{nor})} = m\frac{v_P^2}{r} = (8)\frac{v_P^2}{(1)} \qquad \text{(II)}$$

Pero, también en P usando el teorema de Pitágoras, hallamos

$$f'''_{S(\text{nor})} = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32\text{ N}$$

En (II)

$$v_P = 2\text{ m/s}$$

Finalmente, en (I)

$$t = \frac{2}{3}\text{ s}$$

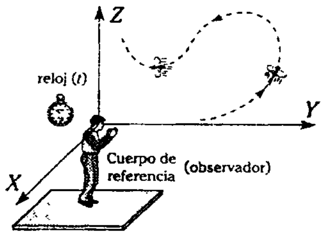
SISTEMA DE REFERENCIA

Un cuerpo realiza movimiento mecánico respecto a otro, cuando su posición, respecto a un segundo cuerpo está cambiando con el tiempo. Si esta posición relativa no cambia con el tiempo, el cuerpo se encuentra en reposo. Entonces, podemos afirmar que tanto el movimiento mecánico como el reposo son estados relativos, es decir, dependen de la condición del primer cuerpo con relación al segundo que se usa como referencia. Por ejemplo, la mayor parte de las observaciones hechas en la Tierra son con respecto a cuerpos de referencia situados en ella (un árbol, un poste o una persona), y por lo tanto, moviéndose junto con la Tierra. Cuando un ómnibus pasa por un paradero decimos que el ómnibus presenta movimiento mecánico respecto al paradero. En cambio el conductor del ómnibus bien puede decir que el paradero presenta movimiento mecánico. Es por ello que para describir o examinar el movimiento mecánico es necesario un sistema de referencia. Iniciemos su estudio.

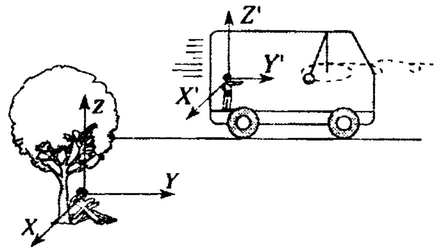
¿Qué entendemos por sistema de referencia?

Viene a ser un conjunto de elementos que nos permiten estudiar un fenómeno físico, como por ejemplo el movimiento mecánico. Estos elementos vienen a ser el cuerpo de referencia, el sistema de coordenadas para establecer las posiciones del cuerpo en análisis y un reloj para medir la duración del evento. El cuerpo de referencia puede ser un cuerpo inerte o una persona (observador); por ejemplo, cuando decimos que la Tierra describe una trayectoria elíptica, el cuerpo de referencia es el Sol y es evidente que en el Sol no puede haber un observador para que él sea el cuerpo de referencia.

Por ejemplo en la siguiente figura se muestra un sistema de referencia.



A continuación consideremos dos observadores, uno sentado junto a un árbol y el otro en un vagón de tren, como indica la figura, estudiando ambos el movimiento de una pequeña esfera que forma con un hilo el llamado péndulo cónico.



Para el observador (cuerpo de referencia) situado en el vagón, que usa el sistema de coordenadas $X'Y'Z'$, la esfera describe una trayectoria circunferencial, sin embargo para el observador situado junto al árbol, que usa el sistema XYZ, la trayectoria de la esfera no es circunferencial.

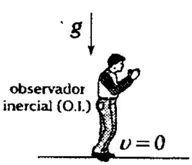
En mecánica se utilizarán de acuerdo a las circunstancias particulares los sistemas de referencia llamados **inercial** y **no inercial**, considerando el sistema de referencia en el cual la toma de datos y el análisis se realizan más fácilmente, es por ello que generalmente utilizaremos el sistema de referencia inercial tal como lo hemos venido haciendo en la resolución de los anteriores problemas, solamente que no se hizo mención a ello.

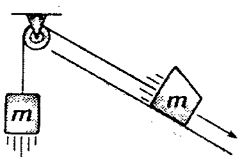
SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL (S.R.I.)

Es aquel sistema en donde el cuerpo u observador de referencia se le considera en reposo o con M.R.U., podemos afirmar también que todo S.R.I. cumple la Primera Ley de Newton (Ley de Inercia). No solo se cumple esta ley, sino que se cumplen las tres leyes de Newton.

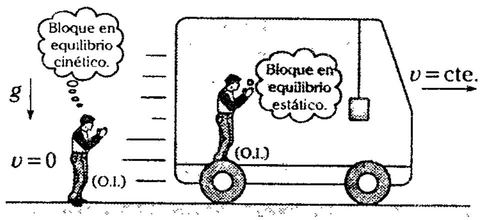
La Tierra, debido a su rotación diaria y a las fuerzas que le ejerce el Sol y los otros planetas, no es exactamente un sistema de referencia inercial. Si los efectos de rotación de nuestro planeta y las fuerzas que existen sobre ella se consideran sin importancia, los cuerpos de referencia asociados o fijos a la Tierra pueden, sin mucho error, ser considerados partes de un S.R.I. Tampoco el Sol es parte de un S.R.I., debido a las fuerzas que le ejercen otros cuerpos en la galaxia, el Sol describe una órbita curva alrededor del centro de la galaxia. Sin embargo, como el movimiento del Sol es más rectilíneo y uniforme que el de nuestro planeta (la aceleración de la Tierra es 15 millones de veces superior que la del Sol, entonces la semejanza del Sol como parte de un sistema inercial es mucho mayor.

En consecuencia, los diversos fenómenos relacionados con el movimiento mecánico serán enfocados desde tierra y la consideraremos un sistema de referencia inercial (S.R.I.) y el observador será catalogado como observador inercial (O.I.).



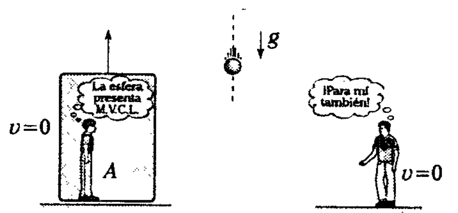


El observador inercial (O.I.) al examinar el movimiento de los cuerpos utilizará las leyes de Newton inclusive si él respecto a Tierra realizara un M.R.U. seguiría siendo O.I. y no tendría restricción en usar las leyes de Newton.

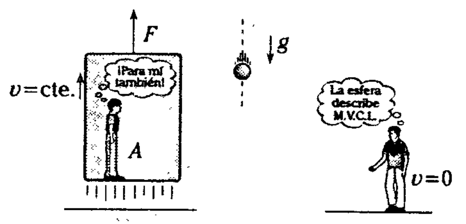


En este gráfico, ambos observadores son inerciales.

También podemos citar el siguiente caso:



Ahora la cabina es elevada con velocidad constante

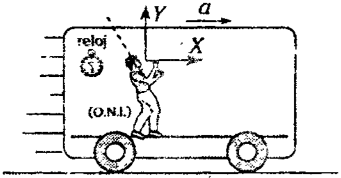


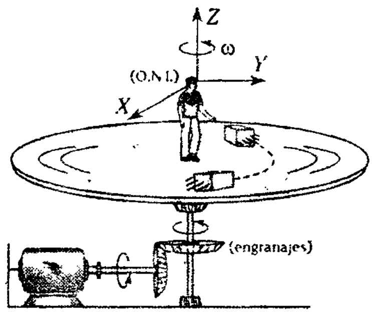
Este ejemplo nos refleja que respecto a un observador en reposo o con M.R.U. sobre un cuerpo se cumplen las mismas leyes mecánicas.

SISTEMA DE REFERENCIA NO INERCIAL (S.R.N.I.)

Es aquel que experimenta movimiento acelerado y está constituido por un observador, un sistema de coordenadas y un reloj; al observador le denominamos observador no inercial (O.N.I.).

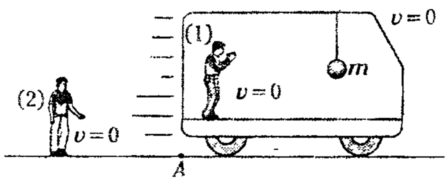
En la figura si nos situamos dentro de un sistema acelerado la postura de nuestro cuerpo experimenta cierta inclinación que marca cierta diferencia con respecto a cuando estábamos en un S.R.I.





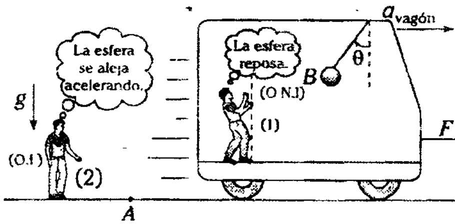
El observador no inercial (O.N.I.) puede situarse en un sistema que no se traslada, como en un sistema rotativo; esto será definido de acuerdo a cómo se presente el caso a examinar.

¿Serán válidas las leyes de Newton en este sistema? Examinemos el caso siguiente: una esfera suspendida desde el techo de un vagón de un tren en reposo tal como se muestra.

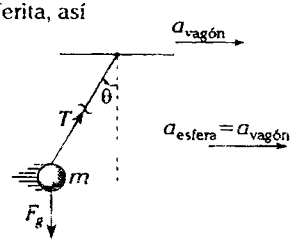


En las condiciones dadas, los observadores (1) y (2) son O.I., ya que se encuentran en reposo. Si el vagón empieza a moverse hacia la derecha lentamente hasta adquirir una aceleración constante ¿qué le ocurre a la esfera, según cada uno de los observadores?

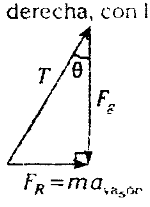
Cuando el vagón empieza a moverse, debido a una fuerza $\vec{F}$, éste acelera y al estar en su interior el observador (1), éste se convierte en un O.N.I., mientras que el observador (2) sigue siendo un O.I., tal como se muestra a continuación:



- El O.I. se mantiene erguido y puede apreciar cierta desviación de la cuerda (θ) de modo que para él la esfera se aleja acelerando, en consecuencia el O.I. realizaría un D.C.L. de la esferita, así



Con las fuerzas $\vec{F}_g$ y $\vec{T}$ deducimos la existencia de la $\vec{F}_R$ horizontal hacia la derecha, con lo cual construimos



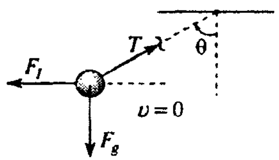
de donde planteamos

$$\tan\theta = \frac{F_R}{F_g} = \frac{m a_{esfera}}{F_g} \qquad (I)$$

- ¿Qué sucede con el O.N.I.?

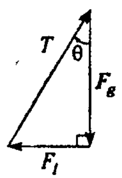
Experimentalmente se inclina respecto a su posición vertical inicial. ¿Por qué sucede esto? Note que sus pies están apoyados sobre el piso del vagón cuando este avanza, sus pies adheridos tienden a avanzar, pero sus brazos, cabeza, tronco que reposaban tienden a quedarse en reposo; entonces esta contradicción entre partes de su organismo (pies y cabeza) entre avanzar y reposar determina una inclinación, a esto se denomina **acción inercial** que físicamente experimenta el O.N.I.

Entonces para el O.N.I. sobre la esfera actúan tres fuerzas que respecto a él lo mantienen en reposo.



Donde F_I es la fuerza que percibe el O.N.I. debido a la inercia; en consecuencia a esta fuerza la denominaremos fuerza de inercia o fuerza inercial. Solo puede ser utilizada cuando enfoquemos desde un O.N.I.

Con las tres fuerzas se puede formar un triángulo para el reposo, tal como se muestra.



de donde

$$\tan\theta = \frac{F_I}{F_g} \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) y (II) se puede obtener que

$$F_I = ma_{\text{esfera}}$$

$$\therefore \quad F_I = ma_{\text{vagón}}$$

Pero, nótese que

$$a_{\text{vagón}} = a_{\text{sistema}}$$

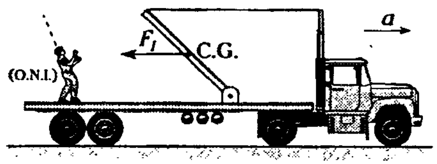
$$\boxed{F_I = ma_{\text{sistema}}}$$

(Fuerza inercial)

¿Qué es la fuerza inercial? Es aquella fuerza que se opone a la aceleración del sistema y que es percibida por los observadores no inerciales, razón por la cual estos la grafican en el centro de masa del D.C.L. que realizan, su módulo es igual al producto de la masa del cuerpo en estudio por la aceleración del sistema.

Ejemplo 11

Dado el sistema acelerado; para el O.N.I. fíjese cómo actúa la F_I en la barra.



siendo

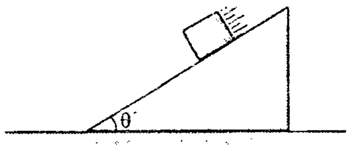
$$F_I = m_{\text{barra}} \cdot a$$

C.G. : Centro de gravedad.

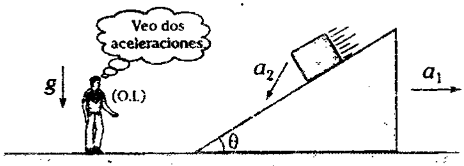
¿Cuándo haremos uso del sistema de referencia no inercial y por ende graficaremos la fuerza inercial? Es recomendable usar para facilitar la solución de ciertos problemas. Aquellos en que, desde tierra presentan 2 ó más aceleraciones simultáneas, lo que hacemos es ubicar un O.N.I. y desde allí notaremos menos aceleraciones.

Ejemplo 12

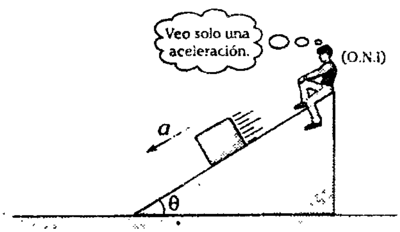
Se tiene un bloque que resbala sobre la cuña (no hay rozamiento).



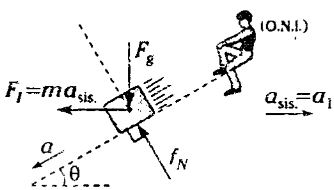
Al no existir rozamiento el bloque resbala sobre la cuña con a_2 (↙); pero al descender presiona a la cuña apoyada en el piso liso y resbala con a_1 (→).



Pero si colocamos un O.N.I. sobre la cuña sólo se observará una aceleración



Para el O.N.I. el D.C.L. del bloque es



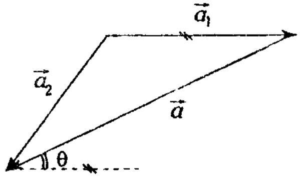
Con las tres fuerzas encontramos en la dirección de la aceleración a, la fuerza resultante y finalmente encontraremos una relación entre $\vec{a}$ y $\vec{a}_1$. Pero, y ¿cómo hallamos $\vec{a}_2$?

Bueno, $\vec{a}$ es la aceleración del bloque respecto al observador.

$$\vec{a} = \vec{a}_{B/obs} = \vec{a}_B - \vec{a}_{obs.} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

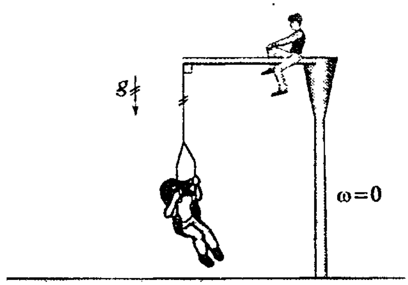
$$\therefore \ \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}$$

También podemos construir

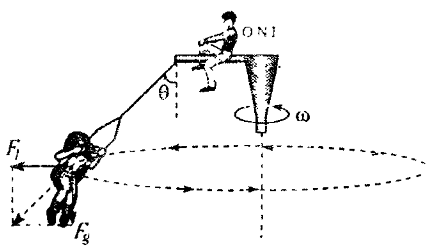


¿Cómo se manifiesta la fuerza inercial (F_I) si el O.N.I. se ubica en un sistema rotacional? Para esto examinemos el caso siguiente.

- No gira: $\omega = 0$ posición vertical de la silla.

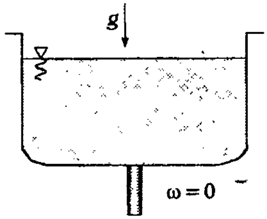


- Cuando gira: $\vec{\omega} \lessgtr 0$, la silla se desvía θ alejándose del centro de giro (eje).



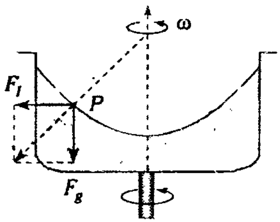
Otro caso

- El recipiente contiene líquido en reposo



No gira: $\omega = 0$, por lo tanto, la superficie del líquido se mantiene horizontal.

- Cuando se hace girar al recipiente.



Cuando gira: $\omega \neq 0$ los extremos de la superficie del agua tienden a salir y experimentalmente se forma un *hoyo* como indica la figura.

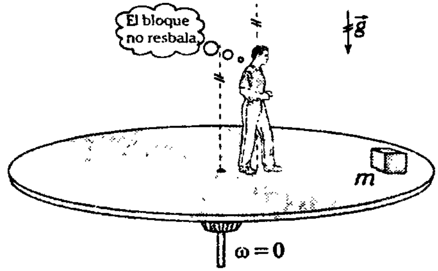
En ambos casos se aprecia la tendencia a alejarse del eje de rotación.

Conclusión

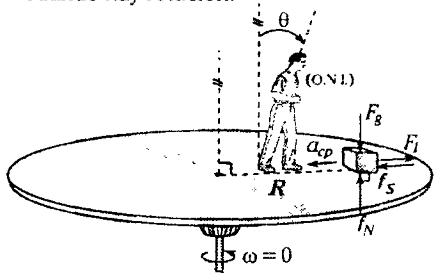
Un sistema en rotación es un sistema no inercial, los cuerpos situados sobre dicho sistema siempre tienden a salir radialmente respecto del centro de giro, debido a la fuerza inercial.
Respecto de un sistema inercial los cuerpos situados en el sistema rotatorio y que se mueven con él, tienden a mantener su velocidad constante (inercia) y por ello tienden a salir tangencialmente, sin embargo las fuerzas que se oponen a ello son radiales.

Examinemos el caso siguiente:

I. Cuando no hay rotación.



II. Cuando hay rotación.



El observador experimenta cierta inclinación θ tal que tiende a salir radialmente, en consecuencia el observador experimenta este efecto de inercia y por tal motivo al realizar el D.C.L. del bloque necesariamente debe graficar la fuerza inercial (F_I).

En este caso la F_I tiene dirección radial, pero siempre se dirige hacia afuera (opuesta a la aceleración centrípeta del bloque) razón por la cual se le denomina **fuerza centrífuga** (F_{cf}), así es su efecto físico como lo percibe el O.N.I.

La fuerza inercial o centrífuga se determina como

$$F_{cf} = ma_{cp}$$

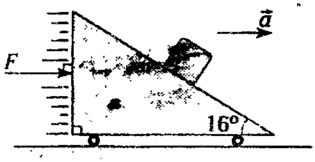
$$\boxed{F_{cf} = m\omega^2 R}$$

¿Qué es la fuerza centrífuga? Es la fuerza inercial que asigna al D.C.L. un O.N.I. situado sobre un sistema giratorio, se grafica en el centro de masa del cuerpo en estudio, opuesta a la aceleración centrípeta del cuerpo y depende del radio de giro.

Problemas Resueltos

Problema 1

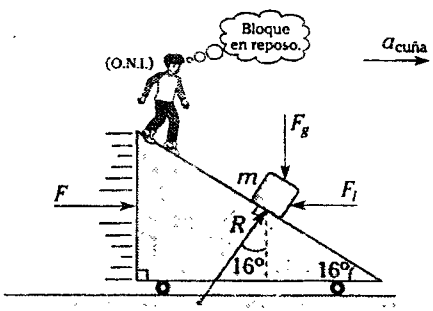
En la figura, el bloque liso no se mueve respecto a la cuña que se traslada con una aceleración constante ¿qué valor tiene dicha aceleración? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

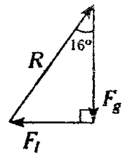
Se plantea que el bloque no se mueve respecto a la cuña, ello implica que la aceleración de la cuña es igual a la aceleración del bloque ($\vec{a}_{cuña} = \vec{a}_{bloque}$); como piden la $\vec{a}_{cuña}$ analizamos el bloque.

Al analizar al bloque se puede hacer con ayuda de un observador fijo en tierra (O.I.), pero este ejemplo lo resolveremos con ayuda de un observador sobre la cuña (O.N.I.) tal como lo mostramos a continuación.



Note que respecto del O.N.I. es necesario graficar la fuerza inercial $(\vec{F}_I)$ la cual es contraria a la aceleración del sistema $(\vec{a}_{cuña})$.

Para el O.N.I. sobre el bloque en reposo actúan tres fuerzas con las cuales se puede formar un triángulo de fuerzas, así



Se deduce que

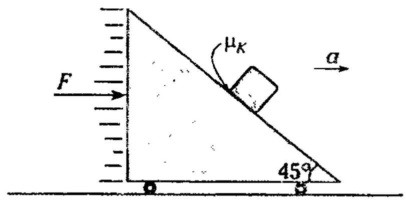
$$\tan 16° = \frac{F_I}{F_g} = \frac{\cancel{m} a_{cuña}}{\cancel{m} g}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{a_{cuña}}{10}$$

$$\Rightarrow a_{cuña} = \frac{35}{12} \text{ m/s}^2$$

Problema 2

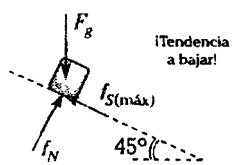
En la figura se muestra un bloque que no mueve respecto de la cuña que acelera. ¿Que valor debe tener la aceleración de la cuña para que el bloque suba respecto de la cuña con velocidad constante? ($\mu_K < 1$)



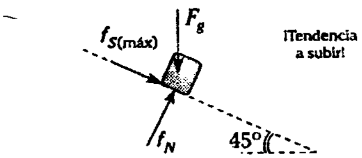
Resolución

Como no se conoce F, podemos ensayar diversos valores.

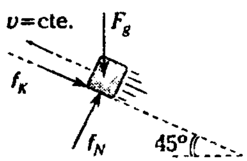
- Si $F = F_{mín}$ ¿qué sucede con el bloque? El bloque, está a punto de deslizar hacia abajo y sobre el actúa $f_{S(máx)}$ opuesto a su tendencia a deslizar, así:



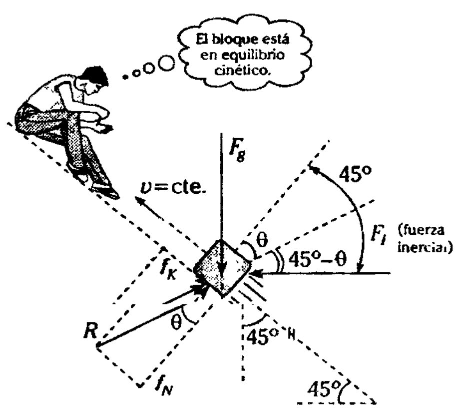
- Si $F = F_{máx}$ para que el bloque no deslice sobre la cuña actúa $f_{S(máx)}$ pero, contrario a la tendencia que ahora tiene el bloque (tiende a subir).



- Si $F > F_{máx}$ el bloque va a deslizar hacia arriba de la cuña y sobre él va a actuar ahora la f_K así



Pero como no se conoce la aceleración de la cuña, vamos a colocar sobre ella un O.N.I. y sobre el bloque ahora se considera la fuerza de inercia ($F_I = ma_{cuña} = ma$), así

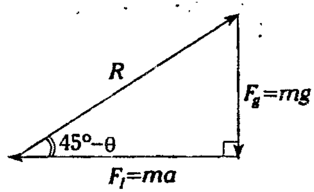


En la figura, en la zona de contacto, θ es el ángulo de rozamiento cinético; porque si consideramos

$$\tan\theta = \frac{f_K}{f_N} = \frac{\mu_K \cancel{f_N}}{\cancel{f_N}}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \mu_K$$

Por otro lado, como el O.N.I. aprecia M.R.U. del bloque, es decir contempla el equilibrio cinético del bloque, con F_g, R y F_I, puede construir el triángulo de fuerzas siguiente



De donde consideramos

$$\cot(45-\theta) = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g} = \frac{a}{g}$$

$$\therefore\ a = g\cot(45-\theta)$$

Aplicando las identidades trigonométricas para $\cot(45-\theta)$.

$$a = g\left[\frac{\cot 45^\circ \cot\theta + 1}{\cot\theta - \cot 45^\circ}\right] \qquad \text{(I)}$$

Pero $\cot 45^\circ = 1$ y $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\mu_K}$

En (I)

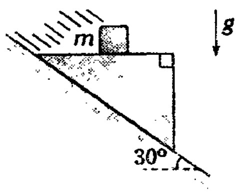
$$a = g\left[\frac{1\left(\dfrac{1}{\mu_K}\right)+1}{\left(\dfrac{1}{\mu_K}\right)-1}\right]$$

$$\therefore\ a = g\left[\frac{1+\mu_K}{1-\mu_K}\right]$$

Dada la condición $\mu_K < 1$ se asegura que el módulo de la aceleración sea positivo ($a > 0$). Además se observa que $a > g$.

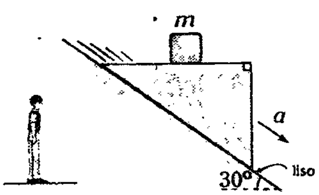
Problema 3

En la figura se muestra un bloque apoyado en una cuña que resbala sobre la superficie inclinada lisa. ¿Qué valor tiene la fuerza del bloque sobre dicha cuña? Considere que el bloque no desliza por la cuña. (m = 1 kg ; g = 10 m/s^2)



Resolución

Como el bloque no se mueve respecto a la cuña, entonces ambos descienden con una aceleración común $(\vec{a})$.



Desde tierra se observa que todo el sistema desliza hacia abajo con una aceleración $\vec{a}$.

¿Cómo determinamos la aceleración del sistema? En este caso basta recordar la solución del ejemplo (4) en el cual se demuestra que si un cuerpo resbala sobre un plano inclinado liso (debido a la $\vec{F}_g$ o por inercia) el módulo de la aceleración viene dado por $a = g\text{sen}\alpha$, donde α es la medida del ángulo de inclinación de la superficie.

Para nuestro caso. $\alpha = 30°$

$$\Rightarrow \quad a = 10\text{sen}30°$$

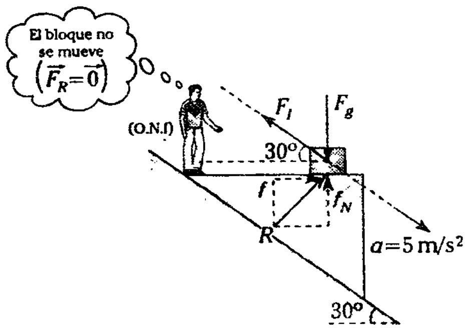
$$\Rightarrow \quad a = 5\text{ m/s}^2$$

Ahora ¿qué sucede si sobre la cuña colocamos un observador?

En este caso el observador será un observador no inercial (O.N.I.) por ubicarse sobre la cuña que presenta movimiento acelerado 5 m/s^2.

En consecuencia, para el observador colocado en la cuña (O.N.I.) el bloque no se mueve $\left(\vec{F}_R = 0\right)$, entonces por comodidad se analizará al bloque desde la cuña.

¿Cuántas fuerzas actúan sobre el bloque? La $\vec{F}_g$ y la reacción del piso $\left(\vec{R} = \vec{f}_S + \vec{f}_N\right)$, pero, además se debe colocar otra fuerza para que se cumplan las leyes de Newton, la fuerza inercial de módulo $F_I = ma$ y dirección contraria a la aceleración de la cuña.



Observe que el bloque tiende a deslizar hacia la izquierda debido a la componente horizontal de la fuerza inercial (F_I), por ello surge la fuerza de rozamiento hacia la derecha (f_S), entonces la reacción de la cuña sobre el bloque es inclinada a la derecha.

Entonces se cumple

$$\vec{F}_R = \underbrace{\vec{F}_g + \vec{F}_I + \vec{R}}_{\text{triángulo}} = \vec{0}$$

Tenga en cuenta

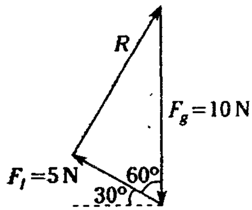
$F_g = mg$

$F_g = (1)(10) = 10$ N

$F_I = ma$

$F_I = (1)(5) = 5$ N

Construyendo el triángulo de fuerzas.



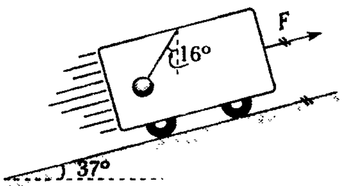
Note que necesariamente el triángulo formado es rectángulo de donde deducimos que

$R = 5\sqrt{3}$ N

El lector también puede resolver el problema calculando primero las componentes de la reacción $(\vec{R})$, es decir la $\vec{f}_S$ y la $\vec{f}_N$; para ello es conveniente descomponer rectangularmente a la aceleración en la dirección horizontal y vertical y finalmente aplicar la segunda ley de Newton en dichas direcciones. ¡Inténtelo!

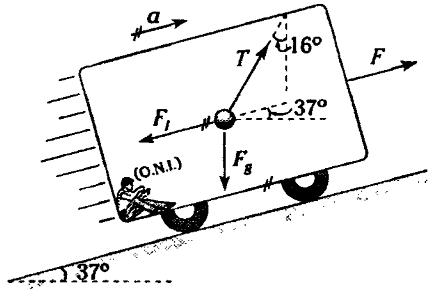
Problema 4

En la figura se muestra un coche, que por medio de la fuerza $\vec{F}$ se traslada con una aceleración constante. Si la esfera no se mueve respecto del coche ¿qué módulo tiene la aceleración del coche? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Analizamos a la esfera desde el coche el cual experimenta aceleración (O.N.I.)



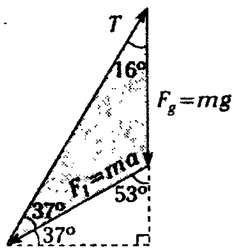
Debemos tener presente que:

Al realizar el D.C.L. de la esfera, el O.N.I. debe agregar la fuerza inercial de módulo $F_I = ma$, que es opuesta a la aceleración del coche (sistema). Para el observador no inercial (ubicado en el coche) la esfera siempre forma con la vertical un ángulo de 16°, entonces, respecto a dicho observador la esfera se encuentra en reposo.

Entonces $\vec{F}_R = 0$

$\Rightarrow \ \vec{T} + \vec{F}_g + \vec{F}_I = \vec{0}$

Construimos un triángulo de fuerzas, así



Usando Ley de senos para el triángulo

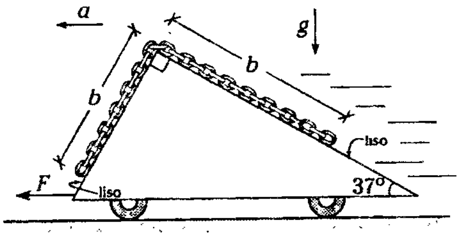
$$\frac{\cancel{m}a}{\operatorname{sen}16°} = \frac{\cancel{m}g}{\operatorname{sen}37°}$$

$$a = \frac{\operatorname{sen}16°}{\operatorname{sen}37°}g$$

$$\therefore \ a = \frac{14}{3}\ \text{m/s}^2$$

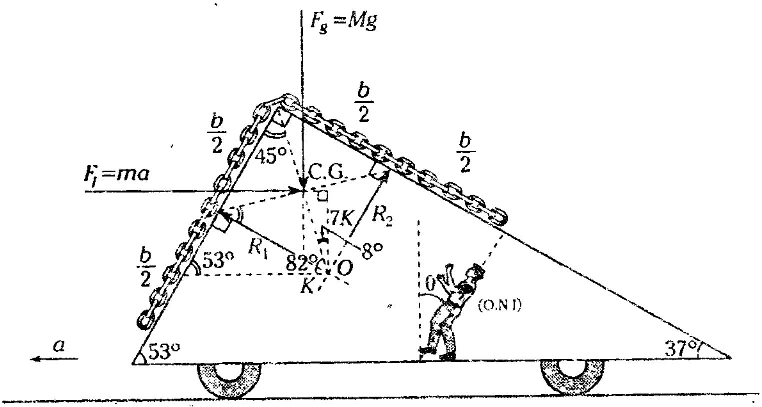
Problema 5

Se muestra una cadena homogénea que no se mueve respecto de la cuña. ¿Qué valor tiene $\vec{a}$, la aceleración constante de la cuña?



Resolución

La cadena homogénea no se mueve respecto de la cuña, por lo que un observador que se mueve con ésta (observador no inercial: O.N.I.) verá a la cadena en reposo. Graficando las fuerzas actuantes para toda la cadena, en este caso la fuerza de gravedad y la fuerza inercial se grafica en el centro de gravedad o de masa del sistema, tal como se muestra.



Respecto del O.N.I. la cadena está en equilibrio mecánico, entonces aplicando convenientemente la segunda condición de equilibrio respecto del punto O, donde concurren las reacciones R_1 y R_2 se tiene

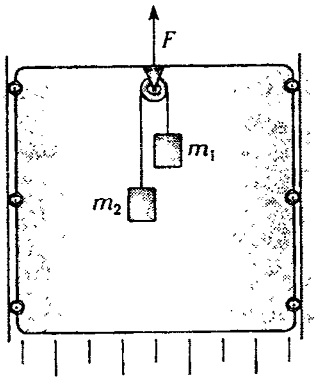
$$M_0^{F_I} \circlearrowright = \circlearrowleft M_0^{Mg}$$

$$\cancel{M}a(7\cancel{K}) = \cancel{M}g(\cancel{K})$$

$$a = \frac{g}{7}$$

Problema 6

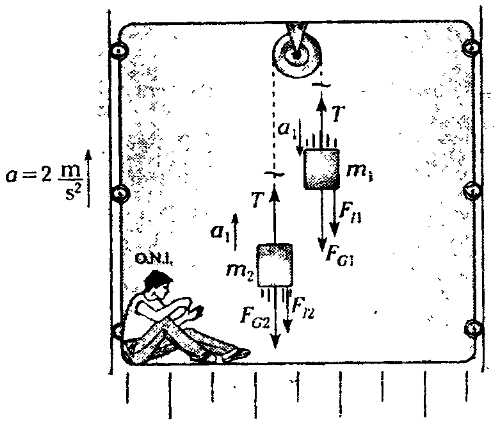
En la figura se muestra la cabina de un ascensor que se eleva con una aceleración constante de 2 m/s^2. Determine el módulo de la tensión en la cuerda. (Considere $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg y $g = 10$ m/s^2)



Resolución

Analizando el movimiento de los bloques desde el ascensor, porque desde tierra el ascensor acelera y los bloques como tienen masas diferentes también aceleran

Por lo tanto, colocamos un O.N.I. sobre el ascensor y realizamos los D.C.L., así



Tenga en cuenta

$F_{g1} = m_1 g$ $\qquad$ F_{I1} = Fuerza inercial = $m_1 a$

$F_{g2} = m_2 g$ $\qquad$ F_{I2} = Fuerza inercial = $m_2 a$

Por dato $m_1 > m_2$, entonces, para el observador no inercial m_1 acelera hacia abajo y m_2 acelera hacia arriba con módulos de aceleración iguales (a_1) (bloques unidos por la misma cuerda).

- Sobre m_1 actúa una

$$F_R(\downarrow) = ma(\downarrow)$$

$$m_1(a+g) - T = m_1 a_1 \qquad \text{(I)}$$

- Sobre m_2 actúa también

$$F_R(\uparrow) = ma(\uparrow)$$

$$T - m_2(g+a) = m_2 a_1 \qquad \text{(II)}$$

Sumemos las relaciones (I) y (II)

$$(m_1 - m_2)(g+a) = (m_1 + m_2)a_1$$

Luego $a_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}(g+a)$

En (I)

$$m_1(a+g) - T = m_1 \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)}(g+a)$$

$$T = \frac{2m_1 \cdot m_2}{(m_2 + m_1)}(g+a)$$

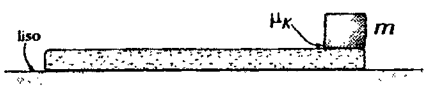
Reemplazando valores

$$T = \frac{2(1)(3)}{(1+3)}(10+2)$$

$$\Rightarrow \quad T = 18 \text{ N}$$

Problema 7

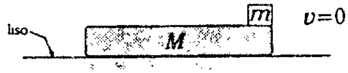
En el gráfico mostrado se tiene un tablón de masa M y longitud L en reposo. Si sobre el tablón empieza a actuar una fuerza $\vec{F}$ variable horizontal de modo que cuando adquiere un módulo F_0 el bloque empieza a deslizar ¿después de qué tiempo, desde que empezó a deslizar el bloque caerá del tablón?



Resolución

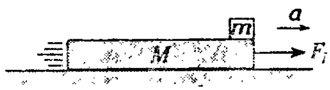
Examinemos las diversas situaciones que se presentan.

- No hay fuerza aplicada (reposo).



¡No hay tendencia a resbalar, entonces $f_S = 0$!

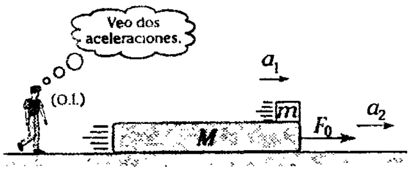
- Aplicando una fuerza F_l sobre el tablón, m tiende a resbalar; pero el sistema avanza con la aceleración $\vec{a}$ de modo que m no resbala.



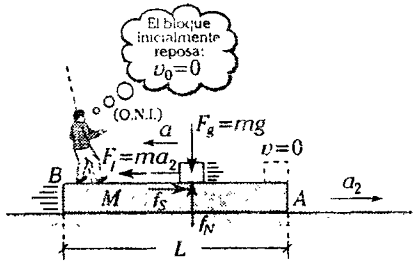
- Aplicando una fuerza límite $F_L > F_l$, m está a punto de resbalar; entonces el sistema tiene una aceleración $(\vec{a}_L)$ máxima para que m no resbale.

Sobre m está actuando la fuerza de rozamiento estático máximo $f_{S(\text{máx})}$ pues aún no hay resbalamiento de m.

- Cuando ejercemos $F = F_0 > F_L$, m comienza a resbalar sobre el tablón M y actúa f_K sobre m, porque ya se venció a la fuerza de rozamiento estático máximo, $f_{S(\text{máx})}$. Entonces, ahora m y M tendrán aceleraciones a_1 y a_2 respecto a tierra, así



Para hacer más simple el problema coloquemos sobre el tablón un O.N.I. porque sólo apreciará el recorrido de m con una aceleración $\vec{a}$ deslizando sobre M y recorriendo L, así hasta caer del tablón.



Como las fuerzas luego del deslizamiento no varían; las aceleraciones no varían tampoco. En consecuencia, el bloque realiza un M.R.U.V. y para el O.N.I. recorre

$$L = \cancel{v_0} t_{AB} + \frac{1}{2} a t_{AB}^2$$

$$\therefore \quad t_{AB} = \sqrt{\frac{2L}{a}} \qquad \text{(I)}$$

Para el O.N.I. sobre el bloque actúa una

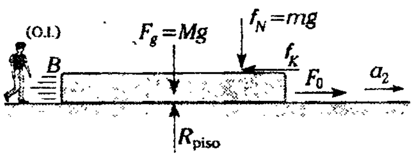
$$F_R = ma_2 - \underbrace{f_K}$$

$$ma = ma_2 - \mu_K f_N$$

$$\cancel{m}a = \cancel{m}a_2 - \mu_K(\cancel{m}g)$$

$$\therefore \quad a = a_2 - \mu_K g \qquad \text{(II)}$$

¿Cómo hallaremos a_2? Bueno, a_2 es la aceleración del tablón respecto a tierra; en consecuencia haremos un D.C.L. de M para un observador inercial (O.I.), así



Sobre el tablón existe

$$F_R(\rightarrow) = F_0 - f_K$$

$$Ma_2 = F_0 - \mu_K(mg)$$

$$\therefore \quad a_2 = \frac{F_0 - \mu_K(mg)}{M}$$

En (II)

$$a=\frac{F_0-\mu_K(mg)}{M}-\mu_K g$$

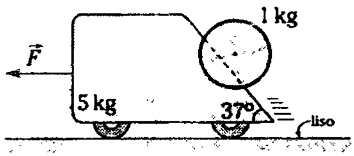
$$\therefore\ a=\frac{F_0-\mu_K g(M+m)}{M}$$

Reemplazando en (I)

$$t=\sqrt{\frac{2ML}{F_0-\mu_K g(M+m)}}$$

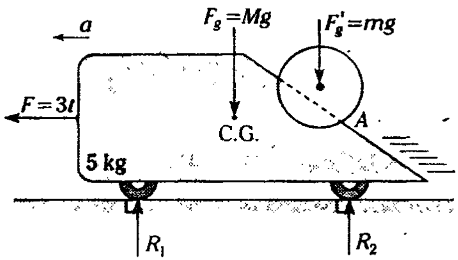
Problema 8

En la figura se muestra un cilindro homogéneo de 25 cm de radio apoyado sobre un cilindro de flecha 18 cm. Si al coche se le ejerce una fuerza $\vec{F}=-(3t)\hat{i}$ N, donde t se expresa en segundos, ¿para qué instante de tiempo el cilindro está a punto de desprenderse del coche? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Sobre el sistema, en el instante que el cilindro está a punto de salir del hoyo actúa horizontalmente solo una fuerza horizontal.



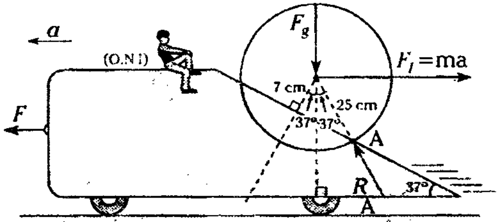
$F_R=3t$

$m_{sist.}a=3t$

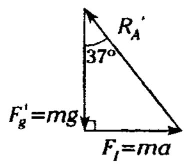
$(5+1)a=3t$

$\therefore\ t=2a$

Entonces, para hallar el tiempo t será necesario conocer el valor de la aceleración cuando el cilindro está a punto de salir del hoyo; esto ocurrirá cuando el cilindro tenga mínimo contacto con el carrito. Significa que solo se apoya en un punto del carrito, el punto A, como indica la figura, en donde se ha ubicado a un O.N.I. el cual apreciará al cilindro en equilibrio, pues aún no ha salido del hoyo.



En la figura se conoce la flecha del hoyo y el radio del cilindro con lo cual se deduce los ángulos de 37°. Por otro lado las tres fuerzas necesariamente deben ser concurrentes para que el O.N.I. contemple el equilibrio del cilindro que está a punto de salir del hoyo. Por lo tanto, con las tres fuerzas construimos el triángulo adjunto.



Entonces, planteamos

$$\tan 37°=\frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g}=\frac{a}{10}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{a}{10}$$

$$\Rightarrow\ a=7{,}5\ \text{m/s}^2$$

Reemplazamos en (I)

$t=15$ s

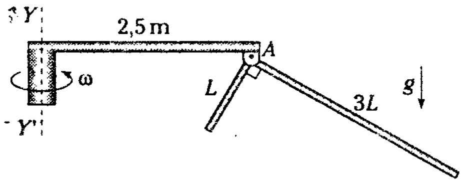
Observación

¿Qué ocurrió entre el cilindro y el hoyo en el intervalo $0<t<15$ s? Había más puntos de contacto entre el cilindro y el hoyo.

¿Qué sucede si $t>15$ s? No habrá ningún punto de contacto con el hoyo, pues el cilindro ya lo habrá abandonado.

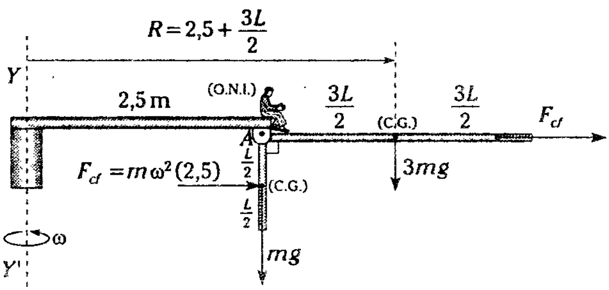
Problema 9

El sistema mostrado está en reposo y puede girar en torno al eje YY'. La barra homogénea ($4L$) doblada en ángulo recto se sostiene de una articulación lisa. ¿Con qué rapidez angular debe girar el eje para que $3L$ se sitúe horizontalmente? Considere $g = 10$ m/s^2.



Resolución

Conforme el eje vertical YY' gira la barra homogénea tiende a alejarse del centro de rotación, pues la articulación A es lisa y se manifiesta para un observador no inercial la acción de la fuerza centrífuga. Colocando un O.N.I. en A realizamos el D.C.L. de la barra en la posición que indica la condición del problema.



Para el O.N.I. la barra está en equilibrio y respecto de la articulación A se cumple que

$$\sum M_A^{\circlearrowleft} = \sum M_A^{\circlearrowright}$$

$$m\omega^2(2,5)\cdot\frac{L}{2} = 3mg\cdot\frac{3L}{2}$$

Simplificando

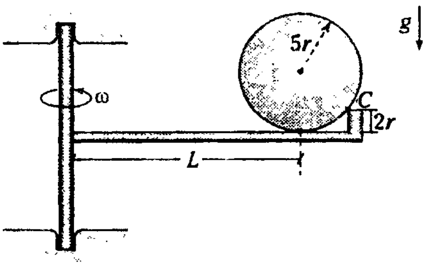
$$\omega^2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{90}{2}$$

$$\therefore\ \omega = 6 \text{ rad/s}$$

Note que la fuerza centrífuga para la parte horizontal de la barra no está aplicada en el C.G. de esa parte ya que al tener los puntos de esa parte diferentes radios de giro tienen diferentes aceleraciones centrípetas.

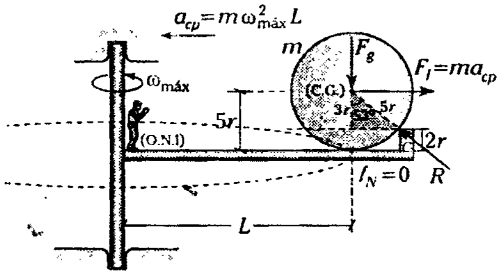
Problema 10

Determine hasta qué rapidez angular máxima puede aumentar lentamente el eje de rotación del sistema de tal manera que la esfera homogénea permanezca en reposo respecto del tope C. ($g = 10$ m/s^2)



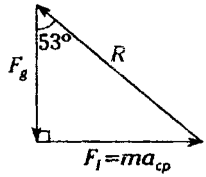
Resolución

La esfera gira con la misma velocidad angular del eje y la plataforma. Conforme aumenta la rapidez angular la esfera tiende a salir radialmente y presiona más al tope. Coloquemos un O.N.I. y grafiquemos las fuerzas sobre la esfera, así



Existe una F_l para la cual toda la esfera se apoya en C y pierde contacto con la plataforma ($f_N = 0$); en estas circunstancias la rapidez angular debe ser la máxima ($\omega_{máx}$) para que la esfera no salga radialmente.

Como la esfera no logra salir para el O.N.I. las tres fuerzas deben ser concurrentes para el equilibrio.



Del triángulo de fuerzas planteamos

$$\tan 53° = \frac{F_l}{F_g} = \frac{\cancel{m}a_{cp}}{\cancel{m}g} = \frac{\omega^2_{máx}L}{g}$$

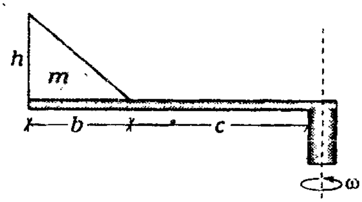
$$\frac{4}{3} = \frac{\omega^2_{máx} \cdot 0{,}3}{10}$$

$$\therefore\ \omega_{máx} = \frac{20}{3}\ \text{rad/s}$$

Si la rapidez angular con la que rota el eje fuese mayor que $\omega_{máx}$, entonces la línea de acción de la reacción del tope sobre la esfera ya no pasaría por el centro de masa de esta última provocando que rote en torno al tope y salga rápidamente.

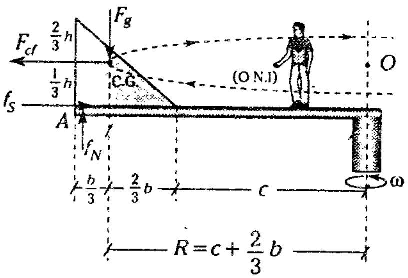
Problema 11

La cuña mostrada reposa sobre una plataforma con la cual tiene un coeficiente de rozamiento μ_S. Si hacemos girar el eje, ¿para qué valores de la rapidez angular la cuña no resbala?, ¿para qué valores de la rapidez angular la cuña no vuelca?, ¿para qué valor de μ_S la cuña estará, a la vez, a punto de deslizar y volcar?



Resolución

En este caso, para apreciar la tendencia de la cuña a resbalar y a volcar es mejor colocar un observador no inercial y realizar un D.C.L. de la cuña.



Para el O.N.I. la cuña no resbala

$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$f_S=F_{cf}$$

$$f_S=m\omega^2R$$

$$\Rightarrow\ f_S=m\omega^2\left(c+\frac{2}{3}b\right)$$

Para garantizar que no hay resbalamiento, necesariamente debe verificarse

$$f_S\leq f_{S(\text{máx})}$$

$$m\omega^2\left(c+\frac{2}{3}b\right)\leq\mu_S\cdot f_N$$

$$\cancel{m}\omega^2\left(c+\frac{2}{3}b\right)\leq\mu_S\cdot\cancel{m}g$$

$$\Rightarrow\ \omega\leq\sqrt{\frac{\mu_S g}{\left(c+\frac{2}{3}b\right)}}$$

Valores de la rapidez angular para que no resbale.

Ahora, para que la cuña no vuelque podemos apreciar que la fuerza centrífuga (F_{cf}) tiende a hacer girar a la cuña en torno a su ángulo recto (A), entonces para que esto no ocurra es necesario

$$\left(M_A^{F_{cf}}\leq M_A^{F_g}\right)$$

$$\left(F_{cf}\cdot\frac{1}{3}h\leq mg\cdot\frac{b}{3}\right)$$

$$\cancel{m}\omega^2\left(c+\frac{2}{3}b\right)h\leq\cancel{m}g\cdot b$$

$$\Rightarrow\ \omega\leq\sqrt{\left(\frac{b}{h}\right)\frac{g}{\left(c+\frac{2}{3}b\right)}}$$

Valores de la rapidez angular para que no vuelque.

De los resultados anteriores ¿qué conclusiones podemos establecer?

Podemos notar que si

$$\omega=\sqrt{\mu_S\left(\frac{g}{c+\frac{2}{3}b}\right)}$$

Con este valor la cuña está a punto de deslizar.

$$\omega\leq\sqrt{\frac{b}{h}\left(\frac{g}{c+\frac{2}{3}b}\right)}$$

Con estos valores la cuña está a punto de volcar. Entonces, para que la cuña esté, a la vez, a punto de deslizar y volcar, necesariamente estas rapideces angulares deben ser iguales entre sí, de donde deducimos

$$\mu_S=\frac{b}{h}$$

Para esa condición, inducimos que la cuña pierde el equilibrio mecánico respecto de la plataforma si

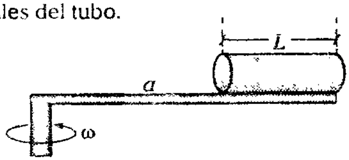
$$\mu_S>\frac{b}{h}$$

y la cuña se mantendrá en equilibrio mecánico respecto de la plataforma si

$$\mu_S\leq\frac{b}{h}$$

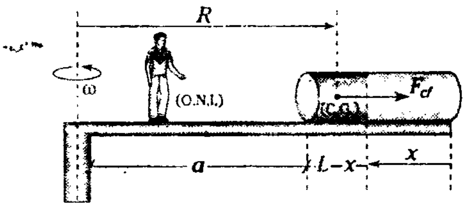
Problema 12

En la figura, el tubo mostrado es delgado y de longitud L, está adherido sobre la plataforma y en su interior contiene un líquido de densidad ρ. Halle la presión del líquido sobre las paredes verticales del tubo.



Resolución

Como el tubo es delgado la presión del líquido sobre la plataforma prácticamente es nula; sin embargo cuando la plataforma gira, el líquido tiende a salir y quien puede analizar más directamente este efecto es un observador no inercial que ubicaremos sobre la plataforma, así



Para el propósito del problema el O.N.I. deberá analizar una porción de líquido de longitud $L-x$ que tiende a salir radialmente pór acción de la fuerza centrífuga concentrada en su centro de gravedad (C.G.)

$$F_{cf}=m\omega^2R=m\omega^2\left[a+\left(\frac{L-x}{2}\right)\right] \qquad \text{(I)}$$

Pero, el líquido encerrado en el tubo posee

$$\text{densidad}=\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

Matemáticamente $\rho=\dfrac{m}{V}$

$$\therefore\ m=\rho V=\rho A(L-x)$$

En (I)

$$F_{cf}=\rho A(L-x)\omega^2\left[a+\left(\frac{L-x}{2}\right)\right] \qquad \text{(II)}$$

Esta fuerza centrífuga al actuar sobre la sección transversal del tubo origina una presión definida por

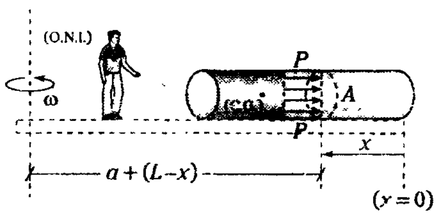
$$\text{presión}=\frac{\text{fuerza}}{\text{área}}$$

$$\Rightarrow\ P=\frac{F_{\perp}}{A}=\frac{F_{cf}}{A}$$

Reemplazando (II)

$$P=\rho\omega^2(L-x)\left[a+\left(\frac{L-x}{2}\right)\right]\left(\begin{array}{l}\text{Válido para}\\ 0\le x\le L\end{array}\right)$$

Esta es la presión que ejerce el líquido, debido a la rotación, sobre la sección transversal del tubo que está a una distancia $a+(L-x)$ respecto del eje. ¿Cómo se distribuye la presión en la sección transversal del tubo?



Entonces, como hemos calculado la presión en forma general siendo la restricción $0\le x\le L$.

Entonces, para la pared más cercana al O.N.I. cuando $x=L$

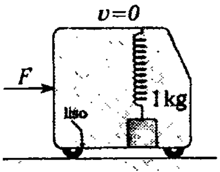
Reemplazando obtendremos $P=0$ (El líquido no ejerce presión sobre la pared vertical del tubo más cercana al observador).

¿Qué sucede sobre la pared vertical del tubo más alejado del O.N.I.? Nótese en la figura que allí $x=0$, en consecuencia reemplazando en la ecuación general anterior obtendremos

$$P=\rho\omega^2L\left(a+\frac{L}{2}\right)$$

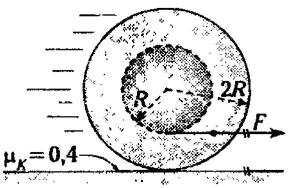
7. En la figura se muestra a un bloque unido a un resorte ($K = 1250$ N/m) sin deformar, en el interior de un coche. Si a éste se le ejerce una fuerza $\vec{F}$ que le hace incrementar su aceleración lentamente hasta que alcanza el valor de 7,5 m/s^2 ¿qué deformación presenta el resorte si en dicho instante el bloque deja de apoyarse en el piso del coche? ($g = 10$ m/s^2)

A) 5 cm
B) 4 cm
C) 3 cm
D) 2 cm
E) 1 cm

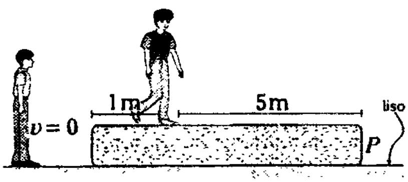


8. Si al yoyó se le jala mediante una fuerza $\vec{F}$, tal como se muestra, éste logra resbalar sin rodar. Determine el módulo de la aceleración que experimenta. ($g = 10$ m/s^2)

A) 2 m/s^2
B) 3 m/s^2
C) 4 m/s^2
D) 5 m/s^2
E) 6 m/s^2

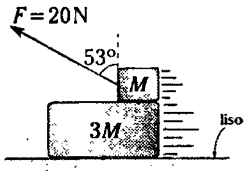


9. Se muestra a un muchacho parado sobre un tablón homogéneo en reposo. Si el muchacho empieza a caminar hacia el extremo P, para el observador, ¿cuánto avanzó el muchacho cuando llega a P?
Considere $3m_{\text{tablón}} = 2m_{\text{muchacho}}$.



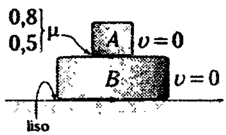
A) 5 m B) 4 m C) 3 m
D) 2 m E) 3,5 m

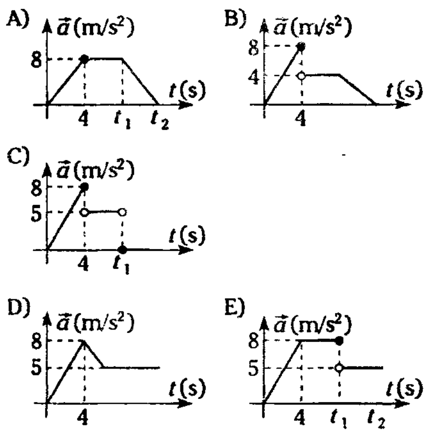
10. Se muestra a dos bloques, entre los cuales no hay movimiento relativo. ¿Qué módulo tiene la fuerza de rozamiento entre ellos?



A) 12 N B) 10 N C) 15 N
D) 16 N E) 24 N

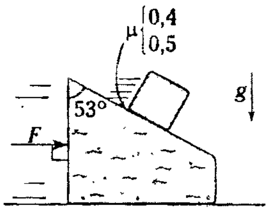
11. En el gráfico se muestra a dos bloques A y B de 1 kg y 4 kg respectivamente. Si sobre el bloque B empieza a actuar una fuerza que depende del tiempo según $\vec{F} = (10t)\hat{i}$ N, donde t es el tiempo expresado en segundos, indique cuál es la alternativa que expresa mejor la aceleración del bloque A en función del tiempo, mientras A interactúe con B.



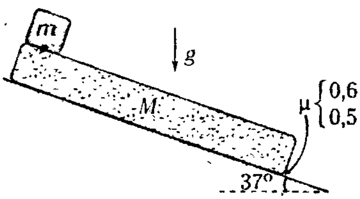


12. A partir de la figura, determine el valor de la aceleración de la cuña, para que el bloque esté a punto de subir sobre ella.

A) $g/2$
B) g
C) $2g$
D) $2{,}5g$
E) $3/4\,g$

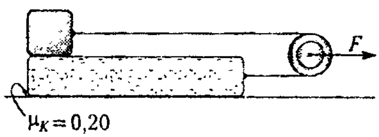


13. En la figura, se muestra el instante en que se abandona el sistema, siendo el bloque liso. ¿Qué intervalo de tiempo el bloque pequeño permaneció sobre la tabla de 2 m de longitud? ($g = 10\ m/s^2$)



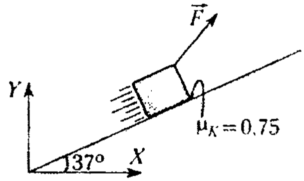
A) 0,5 s B) 1,0 s C) 1,5 s
D) 2,0 s E) 2,5 s

14. En la figura se muestra un bloque liso de 2 kg, apoyado a una tabla de 2 kg en reposo. Si a la polea ideal se le ejerce una fuerza horizontal de 20 N tal como se muestra, pasado 1 s ¿cuánto avanzó el bloque para un observador en el tablón? ($g = 10\ m/s^2$)



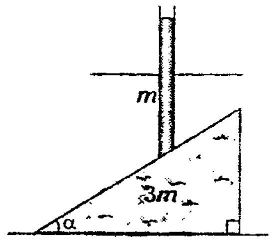
A) 0,5 m B) 1 m C) 1,5 m
D) 2 m E) 2,5 m

15. En el gráfico se muestra un bloque de 5 kg que asciende sobre la superficie inclinada áspera, siendo el módulo de la fuerza $\vec{F}$ de 60 N. ¿Qué valor tiene la máxima aceleración del bloque y qué dirección tiene la fuerza $\vec{F}$ (respecto al eje X) en dicho instante? Considere $g = 10\ m/s^2$.



A) $3\ m/s^2$ y 53° B) $4\ m/s^2$ y 74°
C) $6\ m/s^2$ y 60°
D) $3\ m/s^2$ y 74° E) $6\ m/s^2$ y 53°

16. El sistema que se muestra es abandonado y carece de rozamiento. Determine el módulo de la aceleración de la cuña.



A) $\left(\dfrac{4\tan\alpha}{3\tan^2\alpha+1}\right)g$

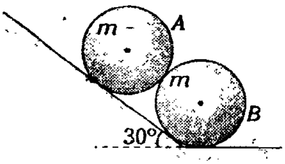
B) $\left(\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+3}\right)g$

C) $\left(\dfrac{3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}\right)g$

D) $\left(\dfrac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}\right)g$

E) $\left(\dfrac{2\tan\alpha}{3\tan^2\alpha+1}\right)g$

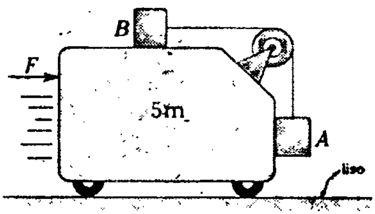
17. En el instante mostrado el sistema es abandonado, cuando la esfera B se desprende del plano inclinado la esfera A adquiere una aceleración de $1\ m/s^2$, en dicho instante, ¿qué aceleración adquiere la esfera B?
($g = 10\ m/s^2$)



A) $\sqrt{3}\ m/s^2$ B) $2\sqrt{3}\ m/s^2$ C) $\sqrt{2}\ m/s^2$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s^2$ E) $2\ m/s^2$

18. Para el sistema que se muestra, entre los bloques el coeficiente de rozamiento estático es μ_S. ¿Para qué valores de la fuerza $\vec{F}$ el bloque A asciende? Considere $m_A = m_B = m$.



A) $F > 6mg\left(\frac{2+\mu_S}{1-\mu_S}\right)$

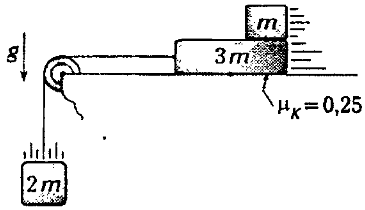
B) $F > 7mg\left(\frac{1+\mu_S}{1-\mu_S}\right)$

C) $F > 7mg\left(\frac{2-\mu_S}{1+\mu_S}\right)$

D) $F > 5mg\left(\frac{1-\mu_S}{1+\mu_S}\right)$

E) $F > 4mg\left(\frac{1+2\mu_S}{2-\mu_S}\right)$

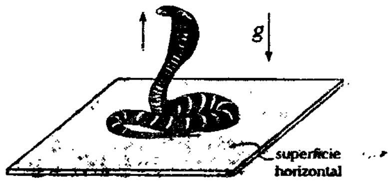
19. En el sistema mostrado el bloque m no se mueve respecto del bloque $3m$. ¿Qué valor tiene la fuerza que ejerce el bloque m al bloque $3m$?



A) $\frac{mg}{6}\sqrt{37}$ B) $\frac{mg}{3}\sqrt{17}$ C) $\frac{mg}{5}\sqrt{26}$

D) $\frac{mg}{4}\sqrt{17}$ E) $\frac{mg}{6}\sqrt{26}$

20. Una cobra de longitud L tiene una masa m distribuida uniformemente. Si empieza a elevarse con una rapidez constante v para saltar ¿qué valor tiene la fuerza con que presiona la superficie mientras intenta saltar?



A) $m\left(g+\frac{v^2}{2L}\right)$

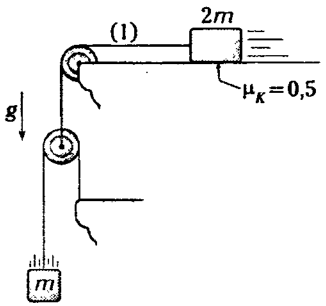
B) $\frac{m}{2}\left(2g+\frac{v^2}{L}\right)$

C) $m\left(g-\frac{v^2}{L}\right)$

D) $m\left(g+\frac{v^2}{L}\right)$

E) $m\left(2g-\frac{v^2}{2L}\right)$

21. A partir del sistema mostrado determine el módulo de la fuerza de tensión en la cuerda (1). Considere poleas ideales.



A) $\frac{2}{3}mg$ B) $\frac{mg}{2}$ C) $\frac{2mg}{5}$

D) $\frac{4}{3}mg$ E) $\frac{2mg}{7}$

22. Un cohete de masa M está suspendido cerca de la superficie de la Tierra. ¿Qué masa de combustible en unidad de tiempo debe quemar el cohete, si la rapidez de salida del gas es v? ¿Qué masa de combustible por unidad de tiempo debe quemar el cohete si se eleva con una aceleración constante a?

A) $\frac{Mg}{2v}; \frac{M(g-a)}{v}$

B) $\frac{Mg}{v}; \frac{M(g+a)}{v}$

C) $\frac{Mg}{v}; \frac{M}{v}(g+a)$

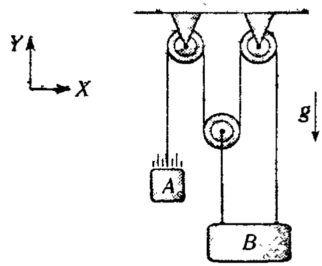
D) $\frac{Mg}{v}; \frac{M(g-a)}{2v}$

E) $\frac{Mg}{2v}; \frac{M(g+a)}{2v}$

23. A un bloque de 0,5 kg se le lanza sobre una superficie horizontal con una rapidez de 10 m/s. Si experimenta una fuerza de resistencia (total) proporcional a su rapidez $F = bv$ (b = 0,5 kg/s), ¿qué distancia cubre hasta que se detiene?

A) 5 m B) 6 m C) 7 m
D) 8 m E) 10 m

24. El sistema que se muestra es abandonado. Si las poleas son ideales, determine la aceleración del bloque A. Considere $5m_A = 3m_B$



A) $+\frac{g}{4}\hat{j}$ B) $-\frac{3g}{8}\hat{j}$ C) $+\frac{3g}{4}\hat{j}$

D) $-\frac{g}{8}\hat{j}$ E) $-\frac{3g}{4}\hat{j}$

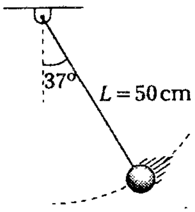
25. Una esfera de 1 kg está unida a un hilo de 1 m de longitud y está dando vueltas en un plano vertical. La rapidez de la esfera en la parte más baja y más alta de su trayectoria es 20 m/s y $6\sqrt{10}$ m/s. ¿En qué relación están los módulos de las tensiones en dichas posiciones? (g = 10 m/s^2)

A) $\frac{45}{38}$ B) $\frac{41}{37}$ C) $\frac{10}{9}$

D) $\frac{41}{35}$ E) $\frac{7}{6}$

26. Para el instante que se muestra, la esfera de 2 kg tiene una rapidez de 5 m/s y de parte del aire experimenta una resistencia de $+10\hat{i}$ N. En dicha posición determine el módulo de la fuerza de tensión y de la aceleración tangencial. ($g = 10$ m/s^2)

A) 72 N ; 4 m/s^2
B) 116 N ; 2 m/s^2
C) 122 N ; 4 m/s^2
D) 122 N ; 2 m/s^2
E) 49 N ; 6 m/s^2

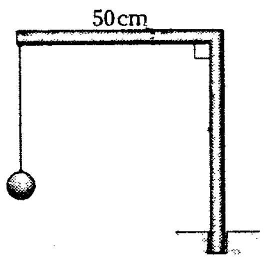


27. Una moneda pequeña está sobre una plataforma giratoria a 15 cm del eje. Si dicha plataforma rota con 60 R.P.M., ¿cuál debe ser el menor coeficiente de rozamiento estático entre la moneda y la plataforma para que la moneda no salga despedida? ($g = \pi^2$ m/s^2)

A) 0,5 B) 0,55 C) 0,6
D) 0,65 E) 0,75

28. La barra en forma de L empieza a rotar lentamente hasta que adquiere una rapidez angular constante. Si la cuerda de 5/12 m de longitud se desvía 37° respecto de la vertical ¿qué rapidez angular (en rad/s) adquirió la barra? Considere $g = 10$ m/s^2.

A) $\sqrt{5}$
B) $\sqrt{6}$
C) $\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 5



29. Un péndulo cónico de longitud L está rotando con rapidez angular constante y el hilo está desviado un ángulo θ respecto de la vertical. Determine la frecuencia (f) de su movimiento. (g aceleración de la gravedad)

A) $2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ B) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta}}$

C) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L\,\text{sen}\,\theta}}$

D) $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L\tan\theta}}$ E) $2\pi\sqrt{\dfrac{g\cos\theta}{L}}$

30. Un joven que practica parapente se encuentra a cierta altura de la superficie, describiendo una circunferencia de radio 8 m. En un plano horizontal si su rapidez es de $2\sqrt{15}$ m/s ¿qué medida tiene el ángulo que inclina respecto a la horizontal las alas de su equipo? $g = 10$ m/s^2

A) 37° B) 53° C) 60°
D) 74° E) 82°

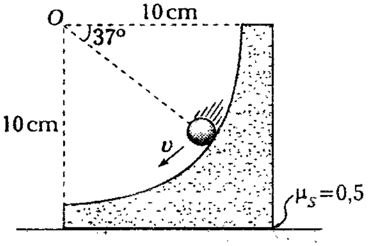
31. Un motociclista se traslada con una rapidez de 72 km/h sobre una superficie horizontal. Si ingresa a una curva cuyo radio de curvatura es 100 m, ¿qué medida tendrá el ángulo respecto a la vertical que debe inclinarse el motociclista para que pase la curva? ($g = 10$ m/s^2)

A) $\arctan\left(\dfrac{5}{2}\right)$ B) $\arctan\left(\dfrac{4}{5}\right)$

C) $\arctan\left(\dfrac{2}{5}\right)$

D) $\arctan\left(\dfrac{5}{4}\right)$ E) $\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$

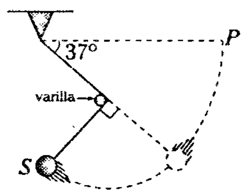
32. En la figura se muestra una pequeña esfera lisa de 2,5 kg resbalando sobre una cuña de 4 kg. Si para el instante mostrado la cuña está a punto de resbalar, determine la rapidez de la esfera (v). ($g = 10$ m/s^2)



A) 0,5 m/s B) 1 m/s C) 1,5 m/s
D) 2 m/s E) 3 m/s

33. La esfera de 1 kg que fue abandonada en P, al pasar por S experimenta una fuerza resultante de módulo 10 N para dicho instante ¿qué módulo tiene la fuerza de tensión? ($g = 10$ m/s^2)

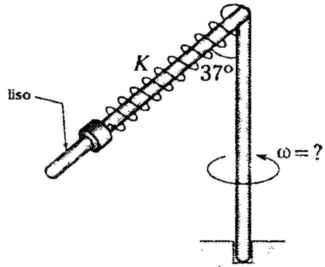
A) 18 N
B) 24 N
C) 16 N
D) 25 N
E) 28 N



34. En una región donde los efectos gravitatorios son despreciables un cuerpo de 2 kg se traslada con una velocidad $\vec{v} = 5\hat{i}$ m/s. Si repentinamente empieza a actuar una fuerza de 20 N perpendicular a la velocidad, durante $\frac{\pi}{6}$s ¿qué medida tiene el ángulo de desviación de su trayectoria?

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 90°

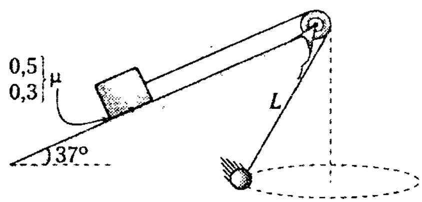
35. En la figura se muestra un collarín de 2 kg unido a un resorte de rigidez 190 N/m y de longitud natural 90 cm. Si el resorte está estirado 10 cm, ¿con qué rapidez angular constante está rotando el sistema, estando el collarín en reposo respecto a la barra?
($g = 10$ m/s^2)



A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ rad/s B) $\frac{\sqrt{6}}{5}$ rad/s C) $\sqrt{6}$ rad/s

D) $\frac{6\sqrt{6}}{5}$ rad/s E) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ rad/s

36. Para el sistema dado ¿entre qué valores debe estar la rapidez angular de la esfera de 2,5 kg para que el bloque de 2 kg no se mueva?
($g = 10$ m/s^2 y $L = 50$ cm)



A) $\sqrt{10}$ rad/s $\leq \omega \leq 5\sqrt{2}$ rad/s

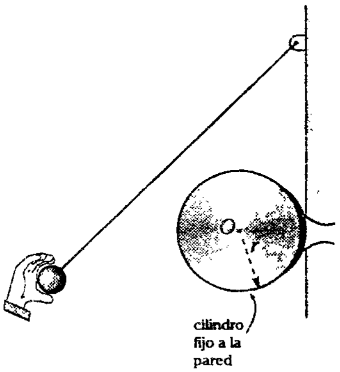
B) $2\sqrt{10}$ rad/s $\leq \omega \leq 10\sqrt{2}$ rad/s

C) $2\sqrt{10}$ rad/s $\leq \omega \leq 5\sqrt{2}$ rad/s

D) 4 rad/s $\leq \omega \leq 0,8\sqrt{5}$ rad/s

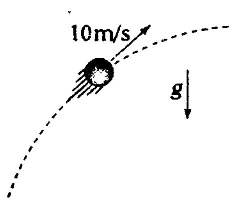
E) $\sqrt{10}$ rad/s $\leq \omega \leq 6\sqrt{2}$ rad/s

37. Se muestra el instante en que se abandona a una esfera de 2 kg unida a una cuerda ideal, si cuando está por colisionar con la pared presenta una velocidad $\vec{v} = (1{,}5\hat{i} + 2\hat{j})$ m/s determine en dicho instante el módulo de la fuerza de tensión en la cuerda. (Considere $g = 10$ m/s^2 y $r = 20$ cm).



A) 68,5 N B) 70 N C) 72 N
D) 74,5 N E) 76,5 N

38. Para el instante mostrado la esfera de 200 g tiene un radio de curvatura de 50/3 m y el aire le ejerce una fuerza de módulo 0,4 N. Determine el módulo de la aceleración tangencial (en m/s^2) para dicho instante. ($g = 10$ m/s^2)

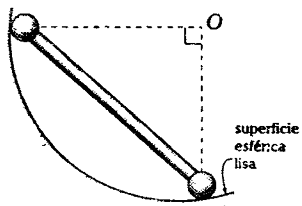


A) 6 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

39. A una esfera de 2 kg se le lanza bajo cierto ángulo con el horizonte, el aire ejerce una resistencia constante de $-5\hat{i}$ N. Determine su radio de curvatura para el instante en que su velocidad es $(6\hat{i} - 8\hat{j})$ m/s. ($g = 10$ m/s^2)

A) 12,5 m B) 17,5 m C) 22,5 m
D) 25 m E) 50 m

40. En la figura se muestra el instante en que se abandonan dos bolas idénticas unidas por una barra de masa despreciable; para dicho instante ¿en qué relación están los módulos de las reacciones sobre las bolas?



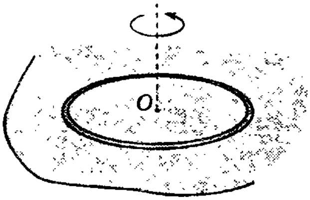
A) 2 B) 3 C) $2\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

41. Una cadena homogénea de masa M y longitud L es unida por sus extremos y encaja en la periferie de un disco. Si al disco se le sitúa sobre un plano horizontal y se le hace rotar hasta que adquiera una rapidez angular constante ω, ¿qué módulo tiene la fuerza de tensión en la cadena?

A) $\dfrac{M\omega^2 L}{2\pi}$ B) $\dfrac{M\omega^2 L}{4\pi^2}$ C) $\dfrac{2M\omega^2 L}{\pi^2}$

D) $\dfrac{M\omega^2 L}{\pi^2}$ E) $\dfrac{4M\omega^2 L}{\pi}$

42. Un aro delgado hecho de un material elástico tiene una masa m y un radio r, se hace rotar alrededor del eje mostrado hasta adquirir una rapidez angular ω, ¿cuál es el nuevo radio del aro? Considere la constante elástica del aro igual a K.



A) $\dfrac{2Kr}{2\pi^2K-m\omega^2}$

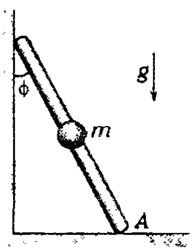
B) $\dfrac{\pi Kr}{\pi^2K-2m\omega^2}$

C) $\dfrac{\pi^3Kr}{2\pi^2K-m\omega^2}$

D) $\dfrac{4\pi^2Kr}{4\pi^2K-m\omega^2}$

E) $\dfrac{\pi^2Kr}{4\pi^2K-2m\omega^2}$

43. En la figura se muestra una pequeña esfera adherida al punto medio de una barra de longitud L. Si el extremo A se traslada con una rapidez υ para el instante en que $\phi=45°$ ¿qué valor tiene la fuerza de la barra sobre la esfera?



A) $m\left(g-\dfrac{\upsilon^2}{L\sqrt{2}}\right)$

B) $m\left(g-\dfrac{\upsilon^2}{L}\right)$

C) $m\left(g-\dfrac{2\upsilon^2}{L}\right)$

D) $m\left(g-\dfrac{\upsilon^2\sqrt{2}}{L}\right)$

E) $m\left(g-\dfrac{\upsilon^2\sqrt{2}}{2L}\right)$

44. A un anillo homogéneo de radio R se le hace rotar hasta que adquiere una rapidez angular ω. En esta circunstancia se le coloca de plano sobre una superficie horizontal, con la cual presenta un coeficiente de rozamiento cinético μ_K, luego de cuántos segundos el anillo se detiene. (g aceleración de la gravedad).

A) $\dfrac{2\omega R\mu_K}{g}$ B) $\dfrac{\omega R}{\mu_K g}$ C) $\dfrac{\omega R}{2\mu_K g}$

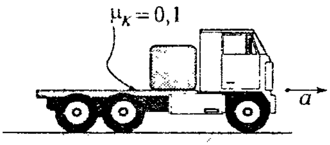
D) $\dfrac{\omega R\mu_K}{g}$ E) $\dfrac{\omega R^2\mu_K}{g}$

45. Una esferita unida a un hilo de longitud R se hace girar en un plano vertical a partir del extremo libre del hilo. Para que la cuerda siempre permanezca tensa, es necesario que la esferita gire con

A) $\omega<\sqrt{\dfrac{g}{2R}}$ B) $\omega>\sqrt{\dfrac{g}{2R}}$ C) $\omega>\sqrt{\dfrac{g}{R}}$

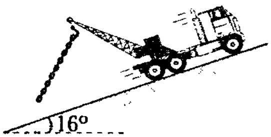
D) $\omega\geq\sqrt{\dfrac{g}{3R}}$ E) $\omega\geq\sqrt{\dfrac{2g}{R}}$

46. Una caja cúbica, de arista 1 m, descansa sobre la plataforma de 9 m de longitud en un tráiler en reposo, tal como se muestra. Si el tráiler inicia su movimiento con una aceleración constante de 2 m/s², ¿después de qué tiempo la caja llega al extremo de la plataforma del tráiler? (g = 10 m/s²)



A) 2,5 s B) 3 s C) 3,5 s
D) 4 s E) 5 s

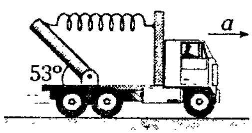
47. Se muestra una grúa que asciende con una aceleración constante de módulo 10 m/s². Si la cadena homogénea de 10 kg no se mueve respecto de la grúa, ¿qué valor tiene la fuerza de tensión en el punto medio de la cadena? (g = 10 m/s²)



A) 50 N B) 60 N C) 64 N
D) 72 N E) 80 N

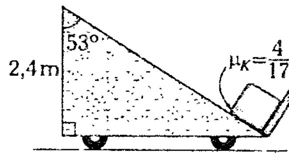
48. En la figura, se muestra un coche que se traslada con una aceleración constante de 5 m/s². ¿Qué deformación presenta el resorte de rigidez K = 250 N/m?
(Considere m_{barra} = 4 kg y g = 10 m/s²)

A) 5 cm
B) 8 cm
C) 10 cm
D) 12 cm
E) 15 cm

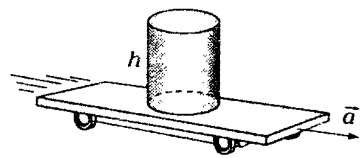


49. En la figura se muestra un bloque apoyado sobre una cuña en reposo. Si a ésta se le ejerce una fuerza horizontal dirigida hacia la derecha se observa que el bloque alcanza la parte más alta en 2 s ¿qué valor tiene la aceleración que adquirió la cuña? (g = 10 m/s²)

A) 10 m/s²
B) 12 m/s²
C) 15 m/s²
D) 18 m/s²
E) 20 m/s²



50. Un cilindro cuya base tiene radio R tiene un coeficiente de rozamiento μ_S con el carrito acelerado. ¿Para qué valores de h el cilindro no vuelca ni resbala?

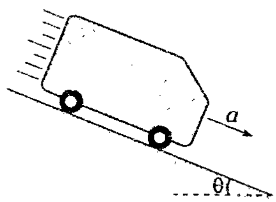


A) $h < \dfrac{R}{\mu_S}$ B) $h \leq \dfrac{2R}{\mu_S}$ C) $h \leq \dfrac{R}{2\mu_S}$

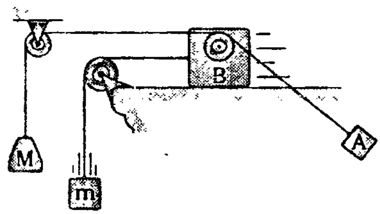
D) $h < \dfrac{2R}{3\mu_S}$ E) $h \geq \dfrac{R}{\mu_S}$

51. El carrito de 4 m de altura resbala sin fricción por el plano inclinado de 75% de pendiente. Si del techo del carrito se desprende un perno. ¿qué tiempo demora el perno en llegar al piso del carrito? (Considere g = 10 m/s²)

A) 0,5 s
B) 1,0 s
C) 1,5 s
D) 2,0 s
E) 2,5 s

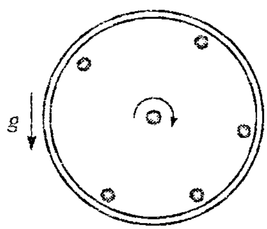


52. El bloque B tiene masa M y el bloque A tiene masa m. Despreciando el rozamiento calcule la relación M/m, de modo que A repose respecto de B. B tiene incrustada una polea ideal que solo permite el paso de la cuerda.



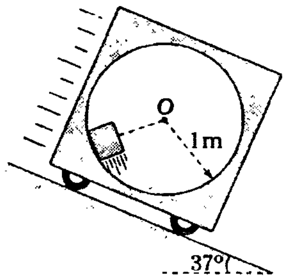
A) 2 B) $\sqrt{5}$ C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{7}$

53. ¿Con qué rapidez angular debe girar alrededor de su eje un cilindro colocado horizontalmente, para que las partículas dentro del cilindro no se desprendan de su superficie? El radio interno del cilindro es $10\sqrt{2}$ m y el coeficiente de fricción entre la superficie del cilindro y las partículas es 1. ($g = 10$ m/s^2)



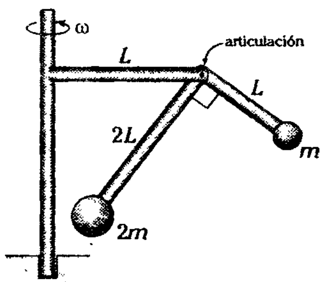
A) $\omega > 0{,}5$ rad/s
B) $\omega > 1$ rad/s
C) $\omega > 2$ rad/s
D) $\omega > 3$ rad/s
E) $\omega > 5$ rad/s

54. A partir de la figura determine el máximo valor de la reacción de la superficie esférica sobre el bloque de 4 kg, si en dicho instante la rapidez del bloque es de 5 m/s respecto del coche. (Considere superficies lisas y $g = 10$ m/s^2)



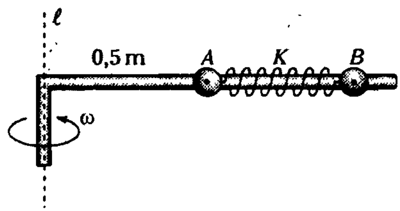
A) 124 N B) 130 N C) 132 N
D) 148 N E) 150 N

55. A partir del sistema mostrado determine la rapidez angular con la cual debe rotar el sistema para que la barra $2L$ esté en posición vertical. (Considere barras de masa despreciable, $g = 10$ m/s^2 y $L = 0{,}5$ m)



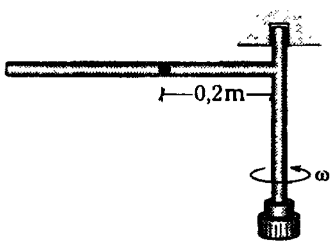
A) $\sqrt{3}$ rad/s B) $\sqrt{5}$ rad/s C) $\sqrt{6}$ rad/s
D) $\sqrt{7}$ rad/s E) $\sqrt{10}$ rad/s

56. Las esferas A y B de masas iguales a 1 kg cada una están unidas por un resorte sin deformar de 50 cm de longitud. El coeficiente de rozamiento estático en A y la barra es 0,50 y la esfera B es lisa. ¿Para qué mínima rapidez angular del eje ℓ, A estará a punto de resbalar? Considere $K=8\,\text{N/m}$ y $g=10\,\text{m/s}^2$.



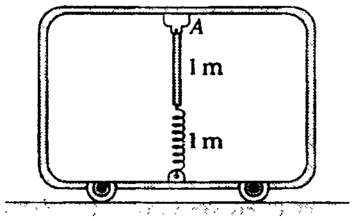
A) 1,2 rad/s B) 1,6 rad/s C) 2,1 rad/s
D) 4 rad/s E) 2,9 rad/s

57. El tubo de 1 m contiene en su interior una esfera ubicada a 20 cm del eje, inicialmente en reposo. Si el eje vertical gira con una rapidez angular constante de 3 rad/s y la esfera abandona el tubo luego de 2 s ¿con qué rapidez lo hace con respecto a un observador en tierra? Desprecie la fricción.



A) 6,70 m/s B) 8,96 m/s C) 11,20 m/s
D) 13,85 m/s E) 17,50 m/s

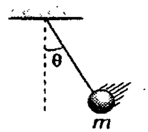
58. En la figura la barra cuya masa es $4(\sqrt{3}-1)\,\text{kg}$ es sostenida por una articulación A y en su extremo opuesto está unida a un resorte ingrávido sin deformar, de rigidez $K=20\sqrt{3}\,\text{N/m}$. Tanto la barra homogénea como el resorte tienen 1 m de longitud. ¿Con qué aceleración debe desplazarse el carrito para que la barra se sitúe en forma perpendicular al resorte?



A) $30\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$ B) $20\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$ C) $10\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$
D) $5\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$ E) $8\sqrt{3}\,\text{m/s}^2$

59. Halle la tensión del hilo cuando la aceleración del péndulo sea horizontal. Si en dicho instante el hilo forma un ángulo θ con la vertical, ¿qué aceleración centrípeta experimenta la esferita de masa m?

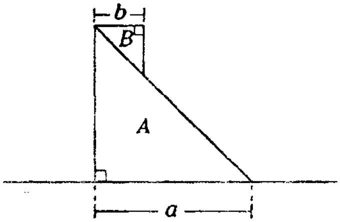
A) $mg\,\text{sen}\,\theta;\ g\sec\theta\tan\theta$
B) $mg\,\text{sen}\,\theta;\ g\,\text{sen}\,\theta\tan\theta$
C) $mg\tan\theta;\ g\cos\theta\tan\theta$
D) $mg\sec\theta;\ g\cos\theta$
E) $mg\sec\theta;\ g\,\text{sen}\,\theta\tan\theta$



60. Un automóvil se mueve con aceleración constante 0,62 m/s^2 por una superficie horizontal, describiendo una circunferencia de 40 m de radio ¿qué trayecto recorre el automóvil sin deslizar si parte del reposo? Considere el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre las ruedas del automóvil y la superficie 0,20.

A) 50 m B) 55 m C) 60 m
D) 70 m E) 85 m

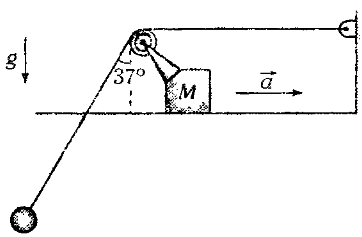
61. Sobre un prisma homogéneo A, que reposa en el piso liso, se suelta otro prisma homogéneo B liso. Si $m_A = 3m_B$ ¿cuánto habrá recorrido A cuando el prisma B descendiendo por A llega al plano horizontal?



A) $\dfrac{a-b}{2}$ B) $\dfrac{a-b}{3}$ C) $\dfrac{a-b}{4}$

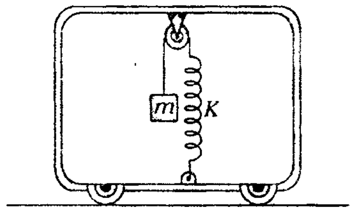
D) $\dfrac{a-b}{5}$ E) $\dfrac{a+b}{4}$

62. En la figura el bloque desliza sin fricción sobre la superficie horizontal. En el instante inicial se desvió a la esfera 37° y se le dejó libre de modo que al moverse el sistema este ángulo no varía. Halle la aceleración del bloque y la masa de la esfera. ($M = 4$ kg)



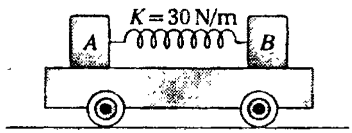
A) 7,5 m/s^2 ; 5 kg
B) 10 m/s^2 ; 3 kg
C) 7,5 m/s^2 ; 15 kg
D) 12 m/s^2 ; 10 kg
E) 5 m/s^2 ; 15 kg

63. El sistema inicialmente está en reposo y el resorte está estirado 12 cm. Si hacemos acelerar lentamente el sistema hasta que adquiera una aceleración constante $a = 7{,}5$ m/s^2 hacia la derecha ¿qué sucede con el resorte ingrávido liso?



A) Se estira 5 cm más.
B) Se comprime 12 cm.
C) Se estira 3 cm más.
D) Su longitud no se altera.
E) Se estira 15 cm adicionales.

64. Sobre la plataforma reposan los bloques A y B unidos por un resorte sin deformar. Si en forma gradual ejercemos una fuerza horizontal sobre la plataforma hasta que adquiera una aceleración $a = 3$ m/s^2 entonces, qué deformaciones longitudinales experimenta el resorte si el bloque B es liso. El bloque A de 6 kg no resbala y tiene un coeficiente de fricción estático con la plataforma $\mu_S = 0{,}40$.



A) $x \leq 15$ cm B) $x \leq 20$ cm
C) $x \leq 32$ cm
D) $x \leq 5$ cm E) $x \leq 25$ cm

CLAVES

1	D	11	C	21	D
2	C	12	C	22	B
3	E	13	B	23	E
4	B	14	D	24	B
5	D	15	D	25	D
6	B	16	B	26	D
7	E	17	B	27	C
8	C	18	B	28	C
9	D	19	A	29	B
10	A	20	D	30	B
31	C	32	B		

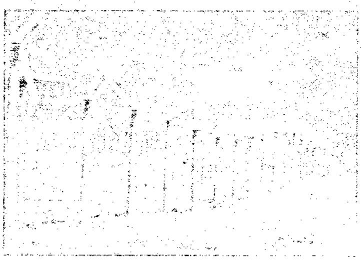
CLAVES

33	C	43	E	53	B
34	D	44	B	54	C
35	E	45	C	55	B
36	D	46	D	56	B
37	D	47	E	57	C
38	C	48	C	58	A
39	A	49	C	59	E
40	B	50	E	60	C
41	D	51	B	61	C
42	B	52	B	62	C
63	C	64	B		

X

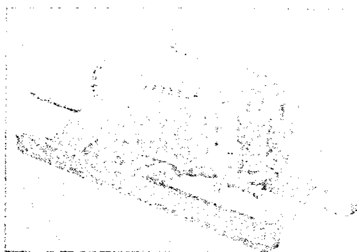
CAPÍTULO

Trabajo mecánico, energía y potencia



(a)

(b)



(c)

Fig. (a) El hombre tuvo y tiene como fuente de energía al viento el cual lo usa para mover molinos, aquí se muestra una serie de molinos que convierten la energía eólica en energía eléctrica a pequeña escala. **Fig. (b)** Se muestra un sistema de engranajes a través del cual se desarrolla trabajo. **Fig. (c)** Un motor nos permite transformar energía eléctrica o térmica en energía mecánica.

LECTURA

¿DÓNDE ESTÁ LA FUENTE DE ENERGÍA?

Para levantar un cuerpo cualquiera sobre la superficie terrestre es necesario realizar un trabajo capaz de incrementar su energía potencial. Este trabajo se realiza en diversos casos a expensas de fuentes diferentes. El motor del ascensor, por ejemplo, toma la energía de la red eléctrica; el avión se eleva a costa de la energía que se desprende durante la oxidación del combustible en su motor, etc.

¿A costa de qué energía se elevan los globos estratosféricos y los globos-sondas meteorológicos que no tienen motores?

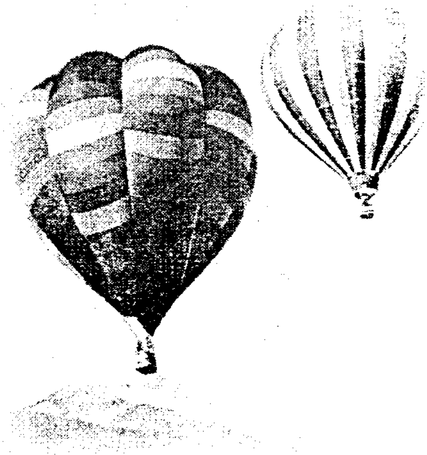
El aerostato desplaza cierto volumen de aire, cuya masa es mayor que la suya, ya que para llenar su envoltura se elige un gas de menor densidad que la del aire. Durante el ascenso del globo a la altura H, su energía potencial aumenta en $VDgH$, donde V es el volumen del globo, D su densidad media y g la aceleración de la gravedad.

A su vez, el lugar ocupado por éste, baja, desde la misma altura, el aire cuya energía potencial disminuye en $VD'gH$, donde D' es la densidad del aire.

Como resultado, la energía potencial del sistema *atmósfera-aerostato* disminuye en $VgH(D' - D) > 0$

El globo sube precisamente a expensas de dicha ganancia en energía. Por lo tanto, ésa es la misma causa por la cual suben a la superficie del agua, los tacos de madera, las burbujas de gas, etc., se expone así la tendencia del sistema al pasar a un estado de energía potencial de valor mínimo.

Al resolver el problema del aerostato, para simplificar los cálculos hemos considerado constantes las densidades del gas y el aire. En realidad, la densidad de este último disminuye con la altura, y la del gas que llega el globo también disminuye con el ascenso, ya que él mismo presiona cada vez más sobre la envoltura del globo y trata de igualar las presiones dentro de este y en el espacio circundante. No obstante, la densidad del gas disminuye no constantemente, puesto que eso es obstaculizado por la envoltura. Como resultado, la densidad del aire a cierta altura se hace igual a la densidad media del globo, y el ascenso posterior de este se interrumpe.



FUENTE: Paradojas y sofismas físicos AUTOR: V. Langue Editorial MIR. Pág.: 106

Trabajo mecánico, energía y potencia

OBJETIVOS

- Valorar el trabajo como fuente de desarrollo integral y transformador.
- Aprender a cuantificar el movimiento de los cuerpos y su forma de transferencia desde un punto de vista escalar.
- Definir en diferentes circunstancias la cantidad de trabajo mecánico realizado por un cuerpo o mediante una máquina.
- Definir y evaluar energía, además establecer los conceptos de energía cinética, potencial y mecánica.
- Aprender a relacionar el trabajo mecánico realizado con la cantidad de energía transferida de un cuerpo hacia otro.
- Conocer las condiciones básicas que se requieren para utilizar la ley de conservación de la energía mecánica.
- Definir potencia mecánica y eficiencia, ver su aplicación en las máquinas y algunos artefactos de uso cotidiano, así como también cuan eficientes son.

INTRODUCCIÓN

Cada vez que contemplamos y examinamos la naturaleza, apreciamos distintos fenómenos como la lluvia, los vientos, los eclipses, el vuelo de los pájaros, los relámpagos, el arco iris, los diversos colores y variedades de la fauna silvestre y marina, etc. En el largo proceso histórico, el hombre ha ido descubriendo las causas de los fenómenos, efectos y leyes de la naturaleza.

¿Por qué el hombre descubre estas leyes que rigen los fenómenos naturales? Por su necesidad de sobrevivencia, alimentación, vivienda, salud, comunicación, etc.

Esto implicó realizar actividades de ensayo o de pruebas llegando a obtener analogías o similitudes; vencer dificultades en medio de lucha, acertando en algunas ocasiones y en otras fracasando, producto de esto adquiere conocimientos.

Inicialmente, el hombre tuvo necesidad de sobrevivir y, para ello debió ensayar o probar diversas fuentes de alimentación para conocer las propiedades alimenticias y curativas, de algunas plantas y frutas.

Las analogías o similitudes establecidas y planteadas por el hombre implicaron un nivel de desarrollo que se refleja cuando el hombre pasó del conocimiento sensorial a la compresión o conocimiento racional. Esto se manifiesta cuando éste elabora la lanza en punta para simular las garras de los animales feroces y así defenderse de su ataque respectivo. En el campo tecnológico al estudiar el sistema auditivo de un murciélago, luego por analogía, el hombre construye el radar; el ala de un pájaro y su analogía con el perfil de ala de un avión; los grandes telescopios y su similitud con los órganos visuales de las águilas, etc.

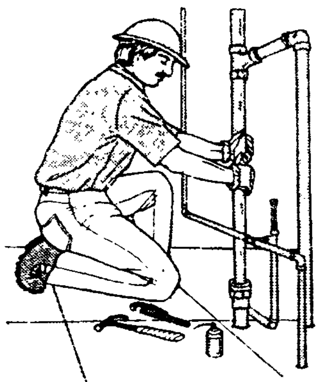
¿Fue simple plantear analogías y pruebas? Por supuesto que no, porque ensayar implica perfeccionar, mejorar, fracasar y volver a ensayar. Muchos ensayos al inicio no funcionaron por cuestiones de técnicas, materiales y condiciones sociales de existencia.

La naturaleza es importante ya que es la fuente de nuestros conocimientos para lo cual el hombre tuvo que realizar y seguirá realizando una actividad vital que caracteriza al género humano. Nos referimos **al trabajo.**

Efectivamente gracias al trabajo el hombre sobrevive, descubre leyes, establece analogías, vence dificultades, se desarrolla intelectualmente, moralmente y socialmente evoluciona.

El trabajo no solo le permite al hombre transformar lo externo, también lo desarrolla en habilidad y transformación de sus órganos musculares y nerviosos.

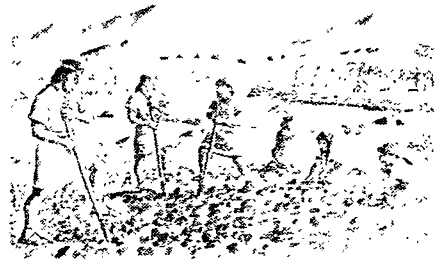
Transformación de la naturaleza inanimada y desarrollo de las capacidades del ser durante el trabajo.



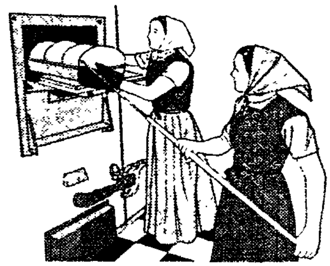
El trabajo manual desarrolla las habilidades y técnicas del hombre paleolítico, pero a su vez haya un trabajo intelectual en función a analogías vivenciales para su defensa. Sus armas terminaban en puntas pero no solo eran para defensa sino también para cortar arbustos y alimentarse.

Sus necesidades básicas eran la vivienda y alimentación que se desarrollaban y cubrían sobre la base del trabajo manual e intelectual y una continua lucha entre lo conocido y desconocido. No obstante la época, se observa el conocimiento alcanzado respecto al equilibrio mecánico, la flotación, la forma arquitectónica de sus viviendas hechas con gran habilidad, desarrollada por el trabajo y el conocimiento de la naturaleza.

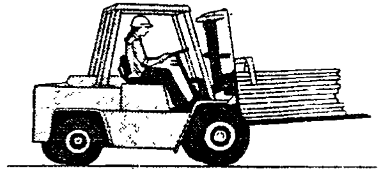
Unión de teoría y práctica, trabajo manual para labrar la tierra en función a sus necesidades y trabajo intelectual que le permite conocer la época de cosecha, diferenciar los tipos de plantaciones y sus diversas propiedades alimenticias y curativas



El trabajo le ha permitido no solamente satisfacer sus necesidades básicas inmediatas, sino también generar máquinas que lo reemplacen en actividades mecánicas o repetitivas y que incrementen la producción.



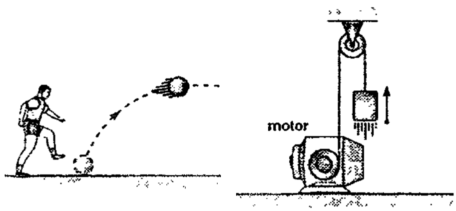
El trabajo manual e intelectual le permitió al hombre desarrollar tecnología, diseñar y fabricar máquinas que lo reemplacen donde sea necesario el predominio de la fuerza de gran intensidad para realizar un trabajo.



TRABAJO MECÁNICO

Hemos, hasta el momento hecho un enfoque acerca del trabajo de manera general. Sin embargo, nuestro interés se centrará ahora en una forma particular de trabajo: el trabajo mecánico.

Para plantear un concepto o noción respecto al trabajo mecánico vamos a recurrir a los siguientes eventos físicos:



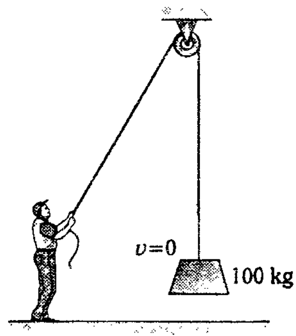
¿Qué se observa en cada uno de los casos? En el primer caso, el hombre jala la cuerda y le transfiere movimiento mecánico al bloque mediante una fuerza. En el segundo caso, el hombre impulsa con un puntapié al balón y le transfiere movimiento mecánico por medio de una fuerza. En el tercer caso, el motor eléctrico enrolla la cuerda y le transfiere movimiento mecánico al bloque, también por acción de una fuerza.

¿Qué aspectos comunes se presentaron en los casos anteriores?

- Se ejerció una fuerza (acción) de un cuerpo hacia otro.
- Se transmite movimiento mecánico de un cuerpo hacia el otro.

Ahora señalaremos que el trabajo mecánico **es un proceso en el cual un cuerpo le transmite movimiento mecánico a otro, siempre, mediante una fuerza (acción).**

Según esto entendemos que si no hay transmisión de movimiento mecánico no podemos hablar de trabajo mecánico.



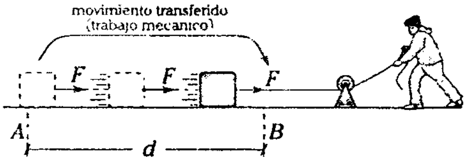
Aquí la persona al sostener el bloque, a pesar de ejercer una acción, no logra transmitir movimiento mecánico, con lo cual concluimos que no desarrolla trabajo mecánico.

¿Cómo medimos la transferencia de movimiento mecánico, es decir, el trabajo mecánico de un cuerpo hacia otro? Una forma de medirla sería en forma escalar, mediante la magnitud física denominada **cantidad de trabajo mecánico** (*W*).

¿Cómo se define matemáticamente la cantidad de trabajo mecánico (*W*)? Para saberlo, primero describiremos algunos hechos que nos son conocidos. Nosotros podemos elevar un cuerpo de 5 kg hasta un segundo piso, pero si nos tocase elevar un cuerpo de 10 kg hasta la misma altura, tendríamos que ejercer una mayor fuerza y sería como elevar dos veces a un cuerpo de 5 kg, es decir desarrollamos el doble de la cantidad de trabajo mecánico. Por lo tanto la cantidad de trabajo mecánico desarrollado es proporcional al valor de la fuerza ejercida.

Por otro lado, si al mismo cuerpo de 5 kg nos tocase elevarlo hasta un quinto piso, es cierto que ejerceríamos la misma acción (fuerza), mas el desplazamiento sería mayor. Esto sería como elevar al cuerpo cinco veces del primer piso al segundo piso, en otras palabras estaríamos desarrollando una mayor cantidad de trabajo mecánico. Por lo tanto la cantidad de trabajo mecánico es proporcional al desplazamiento.

Según todo esto en el siguiente gráfico podemos señalar que:



el hombre realiza una cantidad de trabajo (W) con una fuerza constante (F); que se evalúa como

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}=F.d}$$

donde

$W_{A\rightarrow B}$: es la cantidad de trabajo realizado sobre el bloque de A hacia B y se expresa en Joule (J).

F : es el módulo de la fuerza que actúa sobre el bloque y se expresa en Newton (N).

d : es la distancia cubierta por el bloque de A hacia B y se expresa en metros (m).

Nota

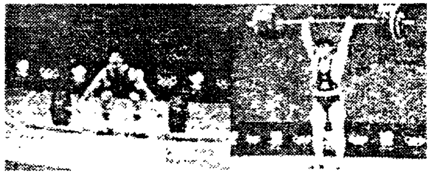
Tener en cuenta que

$$\frac{1\ \text{newton (N)}}{1\ \text{metro (m)}}=1\ \text{Joule (J)}$$

además

1 000 J = 1 kilojoule = 1 kJ

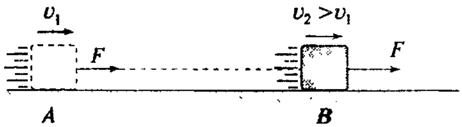
En caso que se tenga una cantidad de trabajo igual a 1 J, físicamente se puede interpretar como el trabajo que se desarrolla por medio de una fuerza de 1 N para un desplazamiento de 1 m .



El pesista al elevar las pesas desarrolla trabajo mecánico.

En las aplicaciones vistas en el capítulo de Dinámica notamos que cuando un cuerpo experimentaba movimiento mecánico y sobre él actuaban 1; 2; 3 ó más fuerzas, entre ellas podían haber fuerzas a favor del movimiento, en contra del mismo o ni a favor, ni en contra (perpendicular a la dirección del movimiento). En este capítulo veremos que sobre un cuerpo que es trasladado se tendrá lo mencionado arriba, por ello es conveniente diferenciar las cantidades de trabajo desarrollado por las fuerzas:

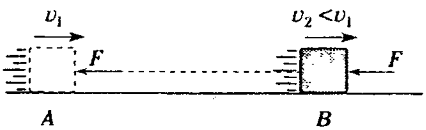
a. Cuando sobre un cuerpo se tienen fuerzas en favor del movimiento



estas incrementan la rapidez. Por este motivo, decimos que la cantidad de trabajo es positivo.

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}^{F}>0}$$

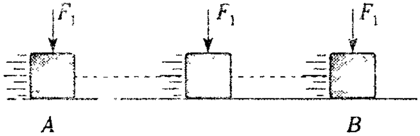
b. Para el caso en que la fuerza esté en contra del movimiento



la rapidez del cuerpo disminuye y para este caso la cantidad de trabajo la consideramos negativa.

$$\boxed{W_{A\rightarrow B}^{F}<0}$$

c. Por último las fuerzas que son perpendiculares a la dirección del movimiento, es decir a la velocidad, no incrementan ni disminuyen la rapidez del cuerpo, es por ello que decimos que su cantidad de trabajo es nula.



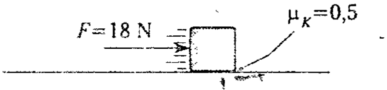
En este último caso hemos establecido cualitativamente que la cantidad de trabajo de las fuerzas perpendiculares a la dirección del movimiento es nula. A esto también se puede llegar cuantitativamente.

Podemos definir $W^{F_1}_{A\to B}=F_1.d_{AB}$, donde d_{AB} debe ser paralela a $\vec{F}$ o en todo caso tiene que estar a lo largo de la línea de acción de dicha fuerza. Pero notamos que en la dirección de dicha fuerza (en la vertical) no hay desplazamiento, entonces $d_{AB}=0$.

$\therefore\ W^{F_1}_{A\to B}=F_1(0)=0$

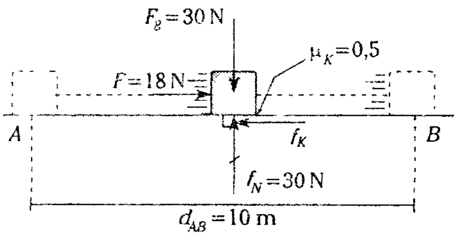
Ejemplo 1

A partir del gráfico determine la cantidad de trabajo que se desarrolla sobre el bloque de 3 kg por medio de la fuerza $\vec{F}$, la fuerza de rozamiento y de la fuerza de gravedad para un tramo de 10 m. (g = 10 m/s²)



Resolución

Según lo que señala el ejemplo planteamos



- Cálculo de $W^{F}_{A\to B}$, la fuerza $\vec{F}$ está a favor del movimiento.

$$\Rightarrow\ W^{F}_{A\to B}=+F\times d_{AB}=+18\times 10=+180\ \text{J}$$

- Cálculo de $W^{f_K}_{A\to B}$, la fuerza de rozamiento está en contra del movimiento

$$\Rightarrow\ W^{f_K}_{A\to B}=-f_K\times d_{AB}=-\mu_K f_N\times d_{AB}$$

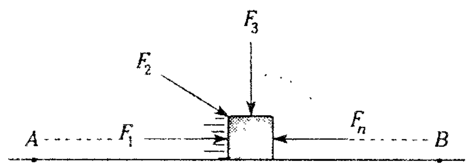
$$\Rightarrow\ W^{f_K}_{A\to B}=-(0,5)(30)(10)=-150\ \text{J}$$

Por último, como la fuerza de gravedad en todo instante es perpendicular a la dirección del movimiento del bloque

$$\Rightarrow\ W^{F_g}_{A\to B}=0$$

TRABAJO NETO (W^{neto})

Sabemos que sobre un cuerpo pueden actuar n fuerzas y cada una de ellas desarrolla una cantidad de trabajo parcial; pero en caso de querer evaluar la cantidad de trabajo total sobre el cuerpo sumamos las cantidades de trabajo parciales lo cual nos expresa el trabajo neto sobre el cuerpo; por ejemplo



De este gráfico planteamos que

$$W^{\text{neto}}_{A\to B}=W^{F_1}_{A\to B}+W^{F_2}_{A\to B}+W^{F_3}_{A\to B}+\ldots+W^{F_n}_{A\to B}$$

Como la cantidad de trabajo es una cantidad escalar, entonces la suma anterior es también escalar y se puede expresar por

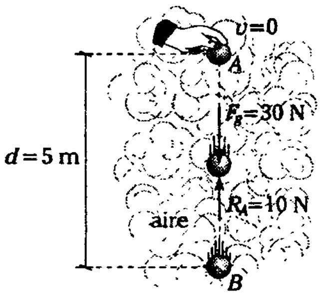
$$\boxed{W^{\text{neto}}_{A\to B}=\sum_{i=1}^{i=n}W^{F_i}_{A\to B}}$$

Ejemplo 2

Un cuerpo de 3 kg es soltado de cierta altura. Si el aire le ofrece una fuerza de resistencia de 10 N (constante), calcule el trabajo neto hasta el instante que el cuerpo desciende 5 m. (g = 10 m/s^2)

Resolución

Según el enunciado planteamos



y del gráfico tenemos que

$$W_{A\to B}^{\text{neto}}=W_{A\to B}^{F_g}+W_{A\to B}^{R_A}$$
$$=+F_g.d+(-R_A.d)$$
$$=+30\times5-10\times5$$
$$\therefore\ W_{A\to B}^{\text{neto}}=+100\ \text{J}$$

¿Significa algo que el trabajo neto sea positivo ($W^{\text{neto}}>0$)? La respuesta es afirmativa.

Vemos que mientras el cuerpo desciende la $F_g > R_A$ esto determina que la rapidez del cuerpo aumente. Entonces podemos concluir que si el $W^{\text{neto}} > 0$, entonces la rapidez aumenta ($v_F > v_0$). También podemos señalar que si sobre el cuerpo el $W^{\text{neto}} < 0$, la rapidez del cuerpo disminuye y si $W^{\text{neto}} = 0$, esta no cambia.

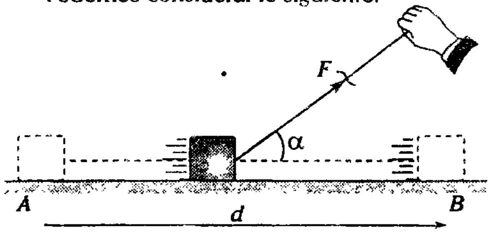
También es importante señalar que el W^{neto} se puede obtener como el trabajo desarrollado mediante la fuerza resultante $(\vec{F}_R)$.

Es decir

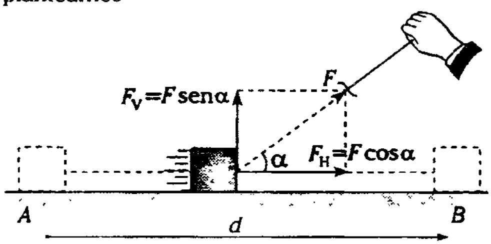
$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{neto}}=W_{A\to B}^{F_R}}$$

CANTIDAD DE TRABAJO DEBIDO A UNA FUERZA NO PARALELA AL DESPLAZAMIENTO

Podemos considerar lo siguiente:



Por medio de la fuerza $\vec{F}$ se desarrolla trabajo sobre el bloque, pero también notamos que dicha fuerza en este caso no es paralela o colineal al desplazamiento. ¿Cómo determinamos su cantidad de trabajo (W)? Recordemos que al descomponer una fuerza, sus componentes proporcionan conjuntamente el mismo efecto que la misma fuerza, entonces según esto planteamos



$$W_{A\to B}^{F}=W_{A\to B}^{F_H}+W_{A\to B}^{F_V}$$

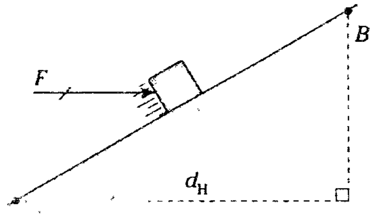
Como la componente $\vec{F}_V$ es perpendicular a la dirección del movimiento o en todo caso en la dirección vertical no hay desplazamiento, se cumple que

$$W_{A\to B}^{F_V}=0$$
$$\Rightarrow\ W_{A\to B}^{F}=W_{A\to B}^{F_H}=F_H.d=(F\cos\alpha)d$$
$$\therefore\ W_{A\to B}^{F}=Fd\cos\alpha \qquad \text{(I)}$$

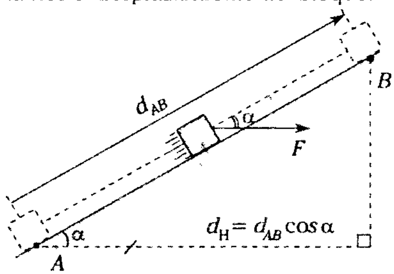
La fórmula (I) nos permite establecer que la cantidad de trabajo debido a una fuerza constante depende del módulo de fuerza (F), el módulo del desplazamiento (d) y el coseno del ángulo que forman la fuerza y el desplazamiento.

Ejemplo 3

A partir del gráfico determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza constante $\vec{F}$ de A hacia B.



Para este ejemplo vemos que la fuerza no es paralela al desplazamiento y vamos a proceder de la siguiente manera: Primero trasladamos a la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de su línea acción y resaltamos el desplazamiento del bloque.



Luego planteamos

$$W^F_{A\to B} = F.d_{AB}\cos\alpha = F\,(\overbrace{d_{AB}\cos\alpha}^{d_H})$$

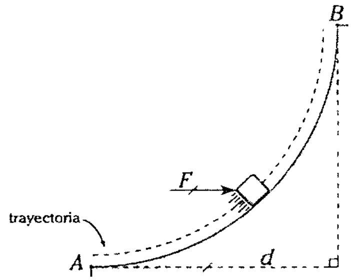
$$\therefore\ W^F_{A\to B} = F.d_H$$

El resultado de este ejemplo nos va permitir establecer una conclusión muy importante.

Conclusión

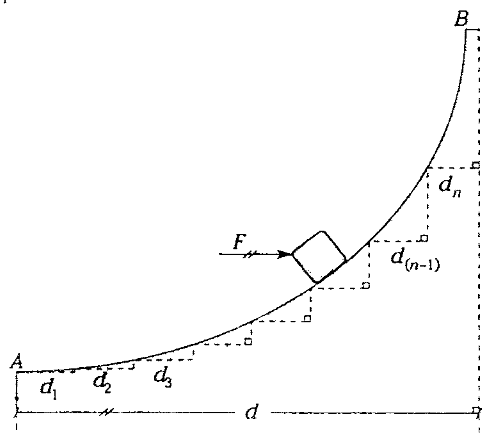
La cantidad de trabajo (W) desarrollado por medio de una fuerza constante depende del módulo de dicha fuerza y del desplazamiento paralelo a dicha fuerza, sin importar el trayecto que siga el cuerpo.

Del ejemplo anterior demuestre que el resultado también se cumple cuando la trayectoria del cuerpo es una curva.



Demostración

Considerando que la trayectoria curva está formada por pequeños segmentos rectos, tal que cada segmento viene a ser como un pequeño plano inclinado.



La fuerza F en cualquier plano conserva su módulo y dirección además, el trabajo de esta fuerza de A hacia B, se puede escribir como la suma de los trabajos que se realiza en cada plano.

$$W^F_{A\to B} = W^F_1 + W^F_2 + W^F_3 + W^F_4 + ... + W^F_{(n-1)} + W^F_n$$

donde

W^F_1 : es el trabajo de F en el primer plano.

W^F_2 : es en el segundo plano y así sucesivamente, hasta el enésimo plano.

El trabajo de la fuerza en cada uno de estos planos se determina como el producto de la fuerza por la distancia paralela a la fuerza. Entonces

$$W^F_{A\to B} = F.d_1+F.d_2+F.d_3+...+F.d_{(n-1)}+F.d_n$$

Factorizando F

$$W^F_{A\to B} = F.(d_1+d_2+d_3+...+d_{(n-1)}+d_n)$$

De la figura anterior

$$d = d_1+d_2+d_3+d_{(n-1)}+d_n$$

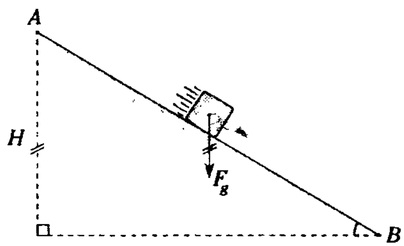
En consecuencia

$$\boxed{W^F_{A\to B} = F.d}$$

Esta demostración establece que la cantidad de trabajo de una fuerza constante no depende de la trayectoria.

Ejemplo 4

Determine la cantidad de trabajo que realiza la fuerza de gravedad sobre el bloque de la posicion A hasta la posición B.



Resolución

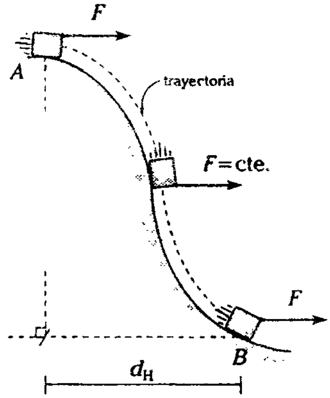
La cantidad de trabajo realizado por la fuerza de gravedad en este problema se puede determinar de dos formas. Lo primero es hallar el valor de su componente paralela al plano inclinado y multiplicándola por la distancia de A hasta B.

La segunda es más sencilla y para esto es necesario tener en cuenta que la fuerza de gravedad es una fuerza constante, entonces, conociendo la distancia H paralela a ella, se tiene

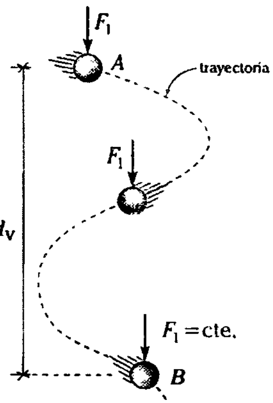
$$W^{F_g}_{A\to B} = F_g H = mgH$$

Nota

La cantidad de trabajo desarrollado por medio de una fuerza constante es independiente de la trayectoria. Para una fuerza horizontal o vertical se plantea



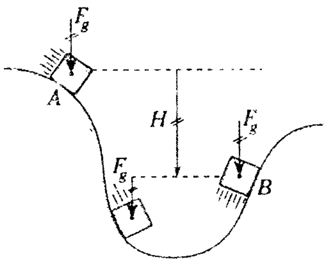
$$\boxed{W^F_{A\to B} = F.d_H}$$



$$\boxed{W^F_{A\to B} = F_1.d_V}$$

En las dos formas mencionadas llegamos al mismo resultado, sin embargo la segunda forma nos da la posibilidad de calcular de manera más directa la cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad cuando la trayectoria sea curva. Aquí los siguientes casos:

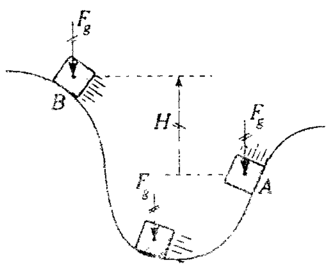
Caso I



El bloque de A hasta B desciende una altura H, en total, al descender la fuerza de gravedad se encuentra a favor del movimiento, y la cantidad de trabajo que realiza es positiva.

$$W_{A\to B}^{F_g} = +mgH$$

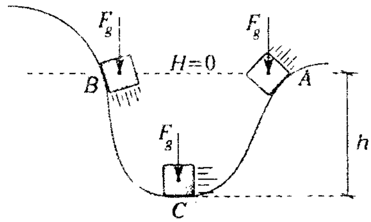
Caso II



El bloque de A hasta B asciende en total una altura H. Si al ascender la fuerza de gravedad se opone al movimiento, entonces la cantidad de trabajo que realiza es negativo.

$$W_{A\to B}^{F_g} = -mgH$$

Caso III

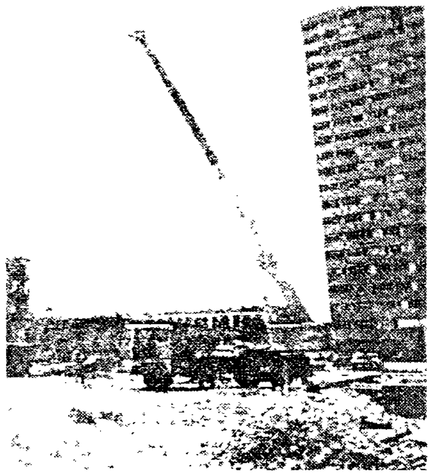


El bloque de A hasta B en total no descendió ni ascendió, se encuentra en el nivel inicial cuyo desplazamiento vertical es nulo. Por lo tanto, de A hasta B la cantidad de trabajo total realizado por la fuerza de gravedad es nula, lo cual verificamos con

$$W_{A\to B}^{F_g} = W_{A\to C}^{F_g} + W_{C\to B}^{F_g}$$

$$W_{A\to B}^{F_g} = [+mgh] + [-mgh]$$

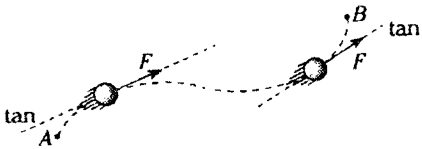
$$\therefore\ W_{A\to B}^{F_g} = 0$$



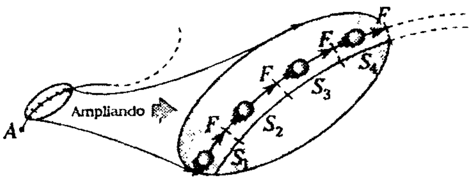
El hombre para poder elevar objetos pesados se ayuda de grúas, mediante las cuáles se desarrolla trabajo mecánico.

CANTIDAD DE TRABAJO DEBIDO A UNA FUERZA DE MÓDULO CONSTANTE Y TANGENTE A LA TRAYECTORIA EN TODO INSTANTE

A manera de ejemplo determinemos la cantidad de trabajo realizado por una fuerza de módulo constante (F) y que en todo instante es tangente a la trayectoria, desde la posición A hasta la posición B tal como se muestra.



Podemos dividir toda la trayectoria $\widehat{AB}$ en tramos muy pequeños S_1, S_2, S_3, ... S_n de tal manera que dichos tramos sean prácticamente rectilíneos y colineal a la fuerza tangente, entonces podríamos utilizar el criterio del trabajo de una fuerza constante colineal al movimiento.



La cantidad de trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$, en el tramo $\widehat{AB}$, sería la suma de los pequeños trabajos realizados en cada tramo.

$$W_{A\to B}^{F}=FS_1+FS_2+FS_3+\dots$$

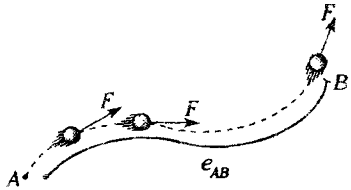
$$W_{A\to B}^{F}=F\left(S_1+S_2+S_3+\dots\right)$$

La suma de las longitudes de los tramos pequeños es la longitud total de la trayectoria de A hasta B, es decir es el recorrido (e_{AB}).

Luego

$$\boxed{W_{A\to B}^{F}=F.e_{AB}}$$

En general, la cantidad de trabajo de una fuerza de módulo constante y tangente en todo instante a la trayectoria es igual al producto del módulo de la fuerza por el recorrido.



$$\boxed{W_{A\to B}^{F}=F.e_{AB}}$$

CANTIDAD DE TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE EXPRESADO EN PRODUCTO ESCALAR

En la segunda parte de este capítulo demostramos para una fuerza no paralela al desplazamiento que

$$W_{A\to B}^{F}=F.d\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

donde

F : es el módulo de la fuerza $(\vec{F})$.

d : es el módulo del desplazamiento $(\vec{d})$.

θ : el ángulo formado por $\vec{F}$ y $\vec{d}$.

En el capítulo de vectores se estableció producto de vectores: escalar o vectorial. La expresión (I) nos hace recordar una de las formas de cómo calcular un producto escalar de cantidades vectoriales, por ejemplo

$$\underbrace{\vec{P}.\vec{M}}_{\substack{\text{producto escalar}\\ \text{entre } \vec{P} \text{ y } \vec{M}}}=P.M\cos\theta \qquad \text{(II)}$$

Si extendemos la expresión (II) al cálculo de la cantidad de trabajo dado por (I) tenemos

$$\boxed{W_{A\to B}^{F}=\vec{F}.\vec{d}=F.d\cos\theta} \qquad \text{(III)}$$

donde

$\vec{F}$: fuerza constante

$\vec{d}$: desplazamiento

También recordemos que un producto escalar se puede obtener operando con las cantidades vectoriales expresadas en componentes. Por ejemplo, si:

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = (F_x ; F_y ; F_z) \text{ y}$$

$$\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k} = (d_x ; d_y ; d_z)$$

entonces

$$\boxed{W^F_{A\to B} = \vec{F}.\vec{d} = F_xd_x + F_yd_y + F_zd_z} \qquad \text{(IV)}$$

Según la necesidad, para determinar la cantidad de trabajo de una fuerza constante no paralela al desplazamiento se puede usar la expresión (III) o (IV).

Ejemplo 5

Una partícula es trasladada de la posición $\vec{r}_0 = (-4;8)$m a la posición $\vec{r}_F = (6;-2)$m, mientras ello ocurre una de las fuerzas que actúa sobre ella viene dada por $\vec{F} = (4\hat{i} + 2\hat{j})$N. Determine la cantidad de trabajo de dicha fuerza.

Resolución

Como la fuerza $\vec{F}$ es constante, su cantidad de trabajo no depende de la trayectoria seguida por la partícula y solo nos haría falta su desplazamiento $(\vec{d})$ para hacer uso de la expresión (IV).

Sabemos

$$\vec{d} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_F - \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{d} = (6;-2) - (-4;8)$$

$$\Rightarrow \vec{d} = (10;-10)\text{m}$$

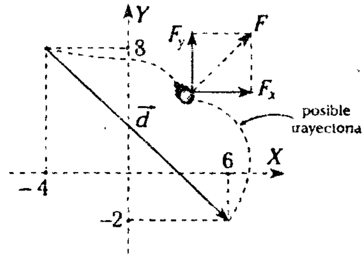
Ahora proponemos

$$W^F_{\vec{r}_0\to\vec{r}_F} = \vec{F}.\vec{d} = F_xd_x + F_yd_y + \cancel{F_zd_z}$$

$$W^F_{\vec{r}_0\to\vec{r}_F} = (4)(10) + 2(-10)$$

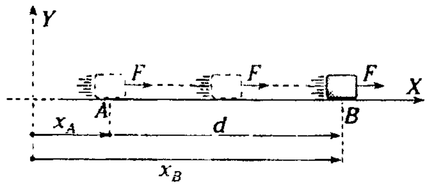
$$\therefore\ W^F_{\vec{r}_0\to\vec{r}_F} = +20 \text{ J}$$

Finalmente podemos hacer un esquema (aprox.) de lo ocurrido.



CANTIDAD DE TRABAJO DEBIDO A UNA FUERZA DE MÓDULO VARIABLE

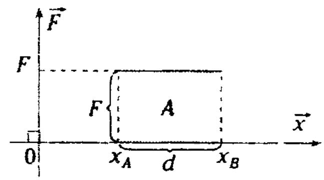
Por lo visto anteriormente cuando el módulo de la fuerza, mediante el cual se transmite movimiento, es constante, evaluar la cantidad de trabajo no es difícil. Por ejemplo podríamos plantear



Aquí se verifica

$$W^F_{A\to B} = F.d \qquad \text{(I)}$$

Al ser la fuerza constante también se puede expresar en función de la posición $(\vec{x})$ del bloque en una gráfica fuerza versus posición $(\vec{F}-\vec{x})$, tal como se indica a continuación.



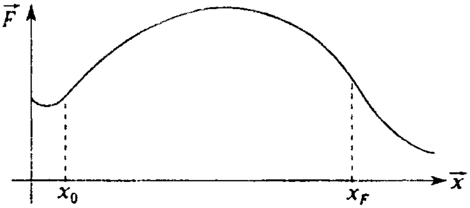
Ahora calculamos el área de la región sombreada

$$A_\square = F.d \qquad \text{(II)}$$

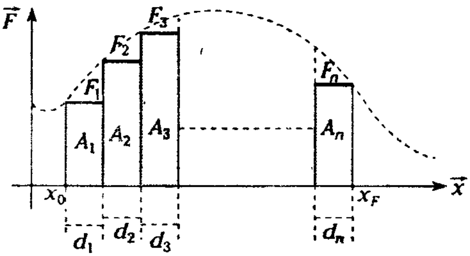
Comparando (I) y (II) tenemos que

$$\boxed{W^F_{A\to B} = A_\square}$$

¿Cómo se evaluaría la cantidad de trabajo debido a una fuerza que varía según la posición $\vec{x}$? Por ejemplo podemos tener una fuerza que se comporta de la siguiente manera:



Para calcular la cantidad de trabajo para el desplazamiento de la posición $\vec{x}_0$ a la posición $\vec{x}_F$, dividimos el tramo en pequeños desplazamientos en los cuales la fuerza $(\vec{F})$ variable se puede considerar aproximadamente constante.



Para cada uno de los pequeños desplazamientos la cantidad de trabajo viene dada por

$$W^{F_1} = F_1 \times d_1 = A_1$$

$$W^{F_2} = F_2 \times d_2 = A_2$$

$$\vdots$$

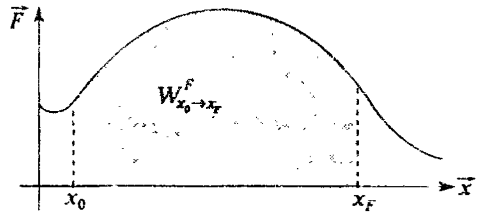
$$W^{F_n} = F_n \times d_n = A_n$$

La cantidad de trabajo para el desplazamiento total $\left(\text{de } \vec{x}_0 \text{ a } \vec{x}_F\right)$ sería la suma de los trabajos de cada uno de los pequeños desplazamientos

$$\Rightarrow \quad W^F_{x_0 \to x_F} = W^{F_1} + W^{F_2} + W^{F_3} + \ldots + W^{F_n}$$

$$= \underbrace{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}_{\substack{\text{Esto es (aprox.) el área debajo} \\ \text{de la gráfica comprendida} \\ \text{entre } \vec{x}_0 \text{ y } \vec{x}_F}}$$

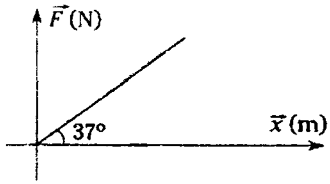
Luego se concluye que



$$\boxed{W^{F_{\text{variable}}}_{x_0 \to x_F} = A_{\triangle}}$$

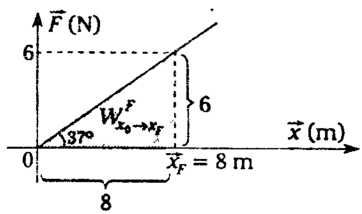
Ejemplo 6

Sobre un bloque actúa una fuerza, cuyo módulo depende de la posición según la gráfica adjunta ¿Cuánto trabajo se desarrolla desde $\vec{x}_0 = 0$ hasta $\vec{x}_F = +8\text{ m}$?



Resolución

Al ser la fuerza de módulo variable, calculamos el área debajo de la gráfica comprendida entre $\vec{x}_0 = 0$ hasta $\vec{x}_F = +8\text{ m}$.



Se verifica

$$W^F_{x_0 \to x_F} = A_{\triangle} = \frac{6 \times 8}{2}$$

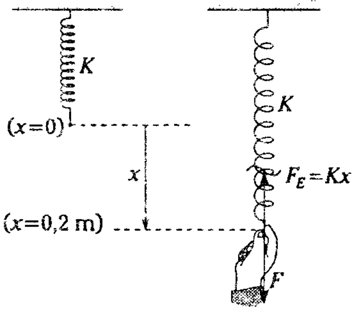
$$\therefore \quad W^F_{x_0 \to x_F} = 24\text{ J}$$

Ejemplo 7

¿Qué cantidad de trabajo se realiza al estirar lentamente 0,2 m a un resorte de rigidez $K = 100$ N/m?

Resolución

Veamos cómo sucede el fenómeno.



Vemos que

- Cuando no se jala el resorte $F = 0$

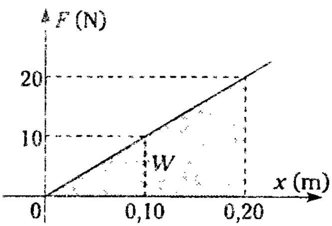
  $\therefore$ El resorte no se deforma $x = 0$
- Cuando se jala lentamente al resorte con $\vec{F}$ el resorte se deforma x y ofrece una resistencia ($F_E = Kx$) que en todo instante es igual en valor a $\vec{F}$.

  $\therefore$ $F = Kx = (100x)$ N

Entonces, dando valores a x construimos la siguiente tabla:

x (m)	0	0,10	0,20	0,30	...
F (N)	0	10	20	30	...

Con los datos de la tabla construimos la gráfica



en donde se debe cumplir que

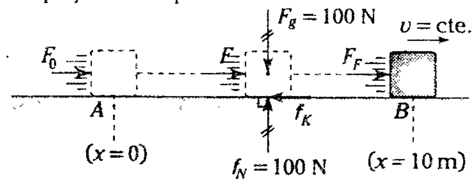
$$W^F = A_{\triangle} = \frac{(0,20)(20)}{2} = 2 \text{ J}$$

Ejemplo 8

Un bloque de 10 kg reposa en $x = 0$ sobre una superficie horizontal áspera cuyo coeficiente de fricción con el piso es $\mu = 0,02\,x$, donde x es posición. Si le aplicamos una fuerza horizontal y lo desplazamos 10 m a velocidad constante, ¿qué cantidad de trabajo se habrá realizado con dicha fuerza?

Resolución

Bosquejemos lo que sucede



Por condición del problema, el bloque se desplaza con velocidad constante (equilibrio cinético), es decir, experimenta aceleración nula ($a = 0$). Esto implica que sobre el bloque la fuerza resultante es nula y se cumple para todo instante que

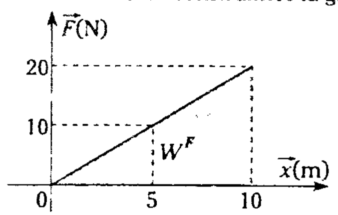
$$\underbrace{\sum F(\rightarrow)}_{F} = \underbrace{\sum F(\leftarrow)}_{f_K = \mu_K f_N = (0,02x)(100)}$$

$$\therefore\ F = (2x) \qquad \text{(I)}$$

La fuerza horizontal varía con la posición $(\vec{x})$ y para hallar el trabajo realizado por $\vec{F}$, debemos construir una gráfica fuerza vs. posición dándole valores a x en (I) y obtener así la siguiente tabla:

x (m)	0	1	2	3	....	10	
F (N)	0	2	4	6	....	20	

Ahora con estos valores construimos la gráfica



$$W^F = A_{\triangle} = \frac{10 \times 20}{2}$$

$$\therefore\ W^F = 100 \text{ J}$$

TRABAJO

Según un especialista en Economía Política, el trabajo es fuente de toda riqueza. Para un psicólogo es fuente de desarrollo intelectual, conductual, moral, lingüístico, etc. Según un especialista en Ciencias Sociales considera que es aquella actividad que ha ido creando y desarrollando a los seres humanos en todas sus potencialidades (social, artístico, científico, moral, etc.) Dada la variedad de desarrollo en el campo del conocimiento y la cultura, hoy en día apreciamos tareas o trabajos específicos y cualitativamente diferentes. Sin embargo, uno y otro no están desligados, esto es, el trabajo manual e intelectual según sea su predominio podemos establecerlo en

- Trabajo económico (en entidades financieras).
- Trabajo psicosocial (en los medios de comunicación).
- Trabajo científico (en el proceso de investigación y solución de problemas técnicos y sociales).
- Trabajo mecánico (el proceso desarrollado por mecanismos y máquinas diseñadas y elaboradas por los científicos y obreros)

¿Qué entendemos por trabajo? A manera de síntesis, el trabajo es la actividad consciente que desarrolla el hombre a fin de satisfacer sus necesidades. A su vez, es condición básica y fundamental de toda vida humana y todo lo que nos rodea hoy en día (parque automotriz, telefonía celular, edificaciones arquitectónicas, puentes, antenas, radios, televisores, ventiladores, motores, computadoras, turbinas, libros, lapiceros, borradores, etc) es producto del trabajo mancomunado realizado por la comunidad científica y obrera; esta herencia social se seguirá perfeccionando e innovando al margen de voluntades o sistemas imperativos vigentes.

IMPORTANCIA HISTÓRICA DEL TRABAJO

Para el hombre

- El trabajo le permite desarrollar sus diversos órganos: manual, visual, auditivo, psíquicos, etc.
- El trabajo le permite cultivar y desarrollar habilidades y destrezas psicomotoras.
- El trabajo desarrolla las capacidades y habilidades del pensamiento, producto de su interacción con la naturaleza.
- Dignifica y desarrolla su conciencia como ser social.

Respecto de la naturaleza

- Gracias al trabajo se descubre y conoce sobre las causas de los fenómenos, efectos y leyes de la naturaleza.
- Con su trabajo el hombre transforma la naturaleza en función a sus necesidades: alimentación, salud, vivienda, etc.
- Gracias al trabajo el hombre hereda y desarrolla conocimientos en el ámbito científico, artístico y tecnológico.

Respecto de lo social

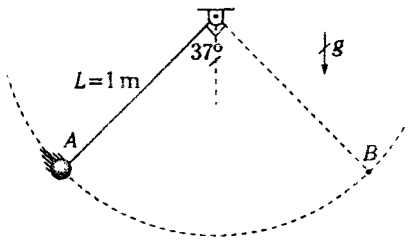
- Históricamente el trabajo es mancomunado y posee un carácter social.
- El trabajo ayuda a unir a los miembros de una sociedad ya que desarrollan sus formas de comunicación: lingüística y grafológica, e intercambia sus productos.
- Todo trabajo innovado eleva la dignidad de una sociedad y refuerza sus nobles aspiraciones.

En Física, nos hemos limitado a estudiar el trabajo mecánico.

Problemas Resueltos

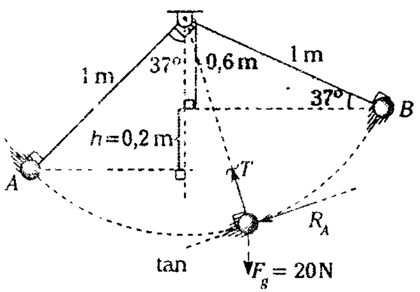
Problema 1

Una esfera de 2 kg atada a un hilo describe un movimiento de trayectoria circunferencial. Si el aire le ejerce una fuerza de resistencia de módulo constante igual a ($10/\pi$) N; determine la cantidad de trabajo neto realizado sobre la esfera desde la posición A hasta la posición B. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

La cantidad de trabajo neto (W^{neto}) sobre la esfera será igual a la suma algebraica de las cantidades de trabajo realizado por cada una de la fuerzas que actúan sobre la esfera. Así tenemos en el siguiente gráfico:



que

$$W^{neto}_{A\to B}=W^{T}_{A\to B}+W^{F_g}_{A\to B}+W^{R_A}_{A\to B} \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico, notamos que la fuerza de tensión es perpendicular a la dirección del movimiento en todo instante.

$$\Rightarrow\ W^{T}_{A\to B}=0 \qquad \text{(II)}$$

Luego para determinar la cantidad de trabajo de la $\vec{F}_g$, planteamos

$$W^{F_g}_{A\to B}=-mgh$$

$$=-(2)(10)(0{,}2)$$

$$W^{F_g}_{A\to B}=-4\ \text{J} \qquad \text{(III)}$$

Finalmente calculamos $W^{R_A}_{A\to B}$. Cuando se manifiesta la resistencia del aire $\left(\vec{R}_A\right)$ se considera en todo instante contrario a la velocidad, con esto la $\vec{R}_A$ sera tangente en todo instante a la trayectoria. Como es de módulo constante planteamos.

$W^{R_A}_{A\to B}=-R_A.e_{AB}$; e_{AB}: recorrido de A hacia B

$$\Rightarrow\ W^{R_A}_{A\to B}=\left(\frac{10}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)$$

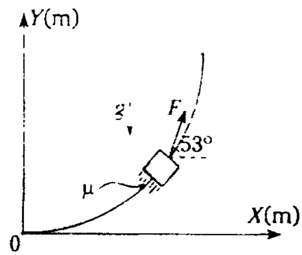
$$\Rightarrow\ W^{R_A}_{A\to B}=-5\ \text{J} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (II), (III) y (IV) en (I)

$$\therefore\ W^{neto}_{A\to B}=-9$$

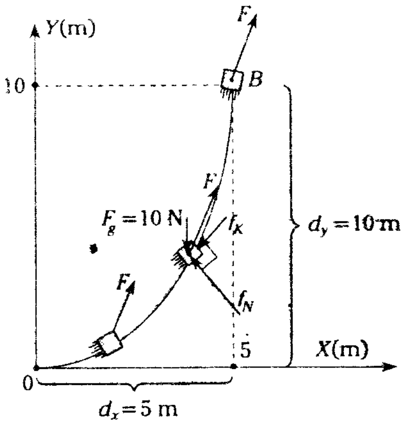
Problema 2

Un collarín de 1 kg se traslada lentamente por un alambre rugoso, mediante una fuerza constante, de módulo 50 N tal como se indica. Determine la cantidad de trabajo realizado por la fuerza de rozamiento desde la posición (0;0) m hasta la posición (5;10) m. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

Para determinar el trabajo mecánico realizado por la fuerza de rozamiento primero realizamos el D.C.L. del collarín en diversas posiciones. Notamos que la fuerza $\vec{F}$ al transferir movimiento al collarín realiza trabajo positivo, mientras que la fuerza de gravedad y la fuerza de rozamiento cinético se oponen al movimiento. De esta manera se realiza así un trabajo negativo.



Observamos que la fuerza de rozamiento es variable, tanto en módulo como en dirección. El módulo $(f_K = \mu f_N)$ varía, porque en todo instante la fuerza normal también varía, además no conocemos μ_K, por lo que determinar la cantidad de trabajo directamente es muy complicado y por ende, la calcularemos en forma indirecta, con la condición: el movimiento es lento.

¿Qué significa ello? Si el movimiento es lento el collarín se considera que está en equilibrio cinético, entonces la fuerza resultante es considerada prácticamente nula $\left(\vec{F}_R = \vec{0}\right)$.

Sabemos que

$$W^{neto}_{0\to B} = W^{F_R}_{0\to B}$$

Por lo tanto el trabajo neto sobre el collarín es nulo

A partir del gráfico planteamos

$$W^{neto}_{0\to B} = W^{F}_{0\to B} + W^{F_g}_{0\to B} + W^{f_N}_{0\to B} + W^{f_K}_{0\to B} = 0 \quad \text{(I)}$$

Como en todo instante la $\vec{f}_N$ es perpendicular a la velocidad, es decir perpendicular a la dirección del movimiento.

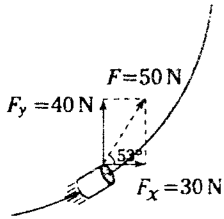
$$\Rightarrow \quad W^{f_N}_{0\to B} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Para la fuerza de gravedad

$$W^{F_g}_{0\to B} = -F_g d_y = -(10)(10)$$

$$W^{F_g}_{0\to B} = -100\ \text{J} \qquad \text{(III)}$$

Para el cálculo del $W^{F}_{0\to B}$, es conveniente descomponer a $\vec{F}$ y evaluar la cantidad de trabajo de sus componentes.



Según esto planteamos

$$W^{F}_{0\to B} = W^{F_x}_{0\to B} + W^{F_y}_{0\to B}$$

$$= F_x d_x + F_y d_y$$

$$= (30)(5) + (40)(10)$$

$$\Rightarrow \quad W^{F}_{0\to B} = 550\ \text{J} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente reemplazamos (II), (III) y (IV) en (I)

$$550 + (-100\ \text{J}) + 0 + W^{f_K}_{0\to B} = 0$$

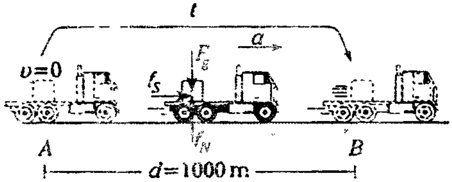
$$\therefore \quad W^{f_K}_{0\to B} = -450\ \text{J}$$

Problema 3

Una camioneta inicialmente en reposo, debe transportar en el menor tiempo una caja de 200 kg entre dos lugares que se encuentran separados en línea recta una distancia de 1 km. Determine la cantidad de trabajo realizado sobre la caja, sabiendo que los coeficientes de rozamiento entre la caja y la camioneta son 0.4 y 0.5. Considere que la caja en ningún momento desliza por la plataforma de la camioneta.

Resolución

Cuando la camioneta inicia su movimiento, el rozamiento entre la caja y la camioneta impide que la caja deslice, y de esta manera la caja se mantendrá fija a la plataforma, adquiriendo la misma aceleración que la camioneta. Nótese que la aceleración que adquiere la caja se debe a la fuerza de rozamiento estático sobre ésta.



Como vemos la camioneta desarrolla trabajo sobre la caja por medio de la fuerza de rozamiento $(\vec{f}_S)$ y por lo cual planteamos

$$W_{A\to B}^{\text{sobre la caja}} = f_S . d \qquad \text{(I)}$$

La caja se transportará en el menor tiempo cuando la aceleración de la camioneta sea máxima y como la caja no se mueve respecto de la camioneta, su aceleración será la misma de la camioneta la cual también es máxima

Considerando la Segunda ley de Newton para la caja

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{f_S}{m}$$

Para una aceleración máxima, la fuerza de rozamiento estático debe ser máxima, $(f_{S(\text{máx})})$, esto significa que la caja debe estar a punto de resbalar.

Entonces en (I) debemos reemplazar f_S por $f_{S(\text{máx})}$

$$f_{S(\text{máx})} = \mu_S f_N \; ; \text{ pero } f_N = mg$$

$$\Rightarrow f_{S(\text{máx})} = (0,5)(mg) = (0,5)(2\,000) = 1000\text{ N}$$

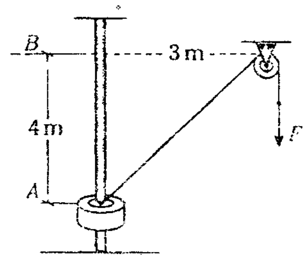
En (I)

$$W_{A\to B}^{\text{sobre la caja}} = (1000)(1000)$$

$$\therefore \; W_{A\to B}^{\text{sobre la caja}} = 10^6\text{ J} = \underbrace{1\text{ MJ}}_{\text{megajoule}}$$

Problema 4

Determine la cantidad de trabajo realizado mediante la fuerza $\vec{F}$ constante; de módulo 20 N, al trasladar al collarín de la posición A hasta B.

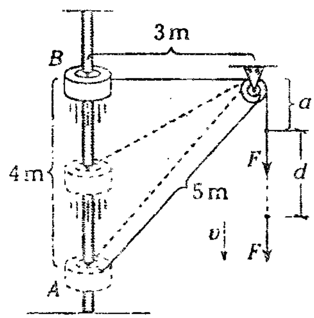


Resolución

Para determinar la cantidad de trabajo de una fuerza constante se debe multiplicar el módulo de la fuerza por el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza paralela a ella.

Al desplazar $\vec{F}$ al extremo de la cuerda, esta desplaza al collarín de A a B en 4 m, pero éste no es desplazamiento del punto de aplicación de $\vec{F}$

Para ello observemos el siguiente gráfico.



El desplazamiento del punto de aplicación es d, luego planteamos

$$W^F = +F.d \qquad \text{(I)}$$

Para determinar d, consideramos que la cuerda es inextensible. Así su longitud resulta constante.

$$L_0 = L_F$$

Del gráfico

$$5 + a = 3 + a + d$$

$$\therefore\ d = 2\ m$$

En (I)

$$W^F = +(20)(2)$$

$$W^F = +20\ \text{J}$$

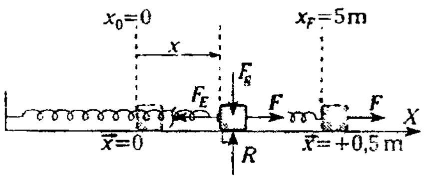
La cantidad de trabajo realizado por $\vec{F}$ es positivo debido que $\vec{F}$ **y la velocidad** $(\vec{v})$ tienen la misma dirección.

Problema 5

El bloque mostrado **se encuentra en reposo**, unido a un resorte de **rigidez** $K = 200$ N/m. Determine **la cantidad de trabajo que debe realizar** una fuerza horizontal aplicada al bloque para trasladarlo **lentamente 50 cm hacia la derecha.**

Resolución

Al aplicar una fuerza hacia la derecha sobre el bloque, se estira el resorte unido al bloque, con lo cual se manifiesta la fuerza elástica $(\vec{F}_E)$ que en este caso se opone al movimiento del bloque. Realizando el D.C.L. del bloque y al trasladarlo tenemos



Si al trasladar al bloque lentamente no experimenta aceleración, entonces la fuerza resultante sobre el bloque debe ser nula para todo instante.

$$\Rightarrow\ \sum F(\rightarrow) = \sum F(\leftarrow)$$

$$F = F_E$$

$$F = Kx \qquad \text{(I)}$$

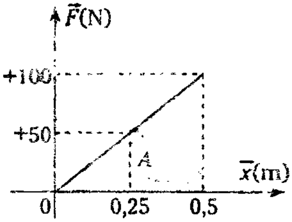
Observe que F depende de la deformación del resorte x, la cual representa la posición $(\vec{x})$ del bloque. Con esto concluimos que $\vec{F}$ es de módulo variable.

Para determinar la cantidad de trabajo que realiza $\vec{F}$, realizamos la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$, el área bajo la gráfica desde $\vec{x} = 0$ hasta $\vec{x} = +0,5$ m determinará dicho trabajo.

Como $K = 200$ N/m, en (I)

$$\vec{F} = 200\,\vec{x}$$

$\vec{x}$ (m)	$\vec{F}$ (N)
0	0
+0,25	+50
+0,5	+100



$$W^F = A_{\triangle} = \frac{1}{2}(0,5)(100)$$

$$\therefore\ W^F = +25\ \text{J}$$

Otro método

Como la fuerza sobre el bloque varía linealmente con respecto a la posición, la cantidad de trabajo de dicha fuerza lo podemos evaluar por medio de

$$W^F = F_m\,d \qquad \text{(II)}$$

donde

d : distancia del punto de aplicación de $\vec{F}$.

F_m : módulo de la fuerza media de F que verifica por depender linealmente de $\vec{x}$.

$$F_m = \frac{F_{mín} + F_{máx}}{2}$$

Del gráfico se deduce que $d = 0,5$ m y de la tabla

$$F_{mín} = 0 \quad \text{y} \quad F_{máx} = 100\ \text{N}$$

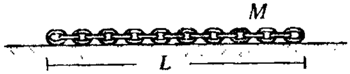
$$\Rightarrow\ F_m = \frac{0 + 100\ \text{N}}{2} = 50\ \text{N}$$

Reemplazando en (II)

$$W^F = (50)(0,5) = 25\ \text{J}$$

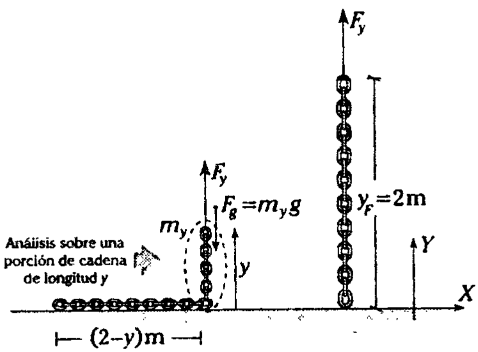
Problema 6

Una cadena homogénea de 10 kg y 2 m de longitud reposa sobre una superficie horizontal. ¿Cuál será la cantidad de trabajo necesario que se debe realizar para colocar la cadena en forma vertical? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Al levantar la cadena, se observa que el número de eslabones que se ubican en forma vertical aumenta, esto significa que la fuerza de gravedad sobre los eslabones que van siendo elevados, varía con $\vec{y}$. La cantidad de trabajo será la necesaria cuando la cadena se traslade lentamente, es decir en equilibrio cinético, hasta quedar en posición vertical, tal como se muestra.



Para determinar la cantidad de trabajo necesario (W^{nec}), primero tenemos que establecer si la fuerza $\vec{F}_y$ es constante o variable. La parte que se va elevando está en equilibrio

$$\Rightarrow \quad F_y = F_g = m_y g = m_y(10) \qquad \text{(I)}$$

La cadena es homogénea, por lo que

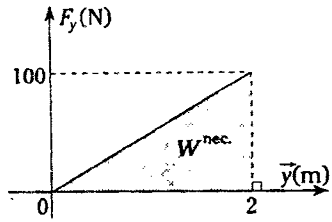
$$\frac{M}{L} = \frac{m_y}{y} = \text{cte.}$$

$$\Rightarrow \quad m_y = \frac{M}{L}y = \frac{(10)}{2}y = 5y$$

En (I)

$F_y = 50y$ (fuerza variable)

En este caso podemos hacer una gráfica $\vec{F}_y$ vs. $\vec{y}$, luego evaluar el área de la región comprendida de $\vec{y}_0 = \vec{0}$ a $\vec{y}_F = +2$ m



Luego de la gráfica

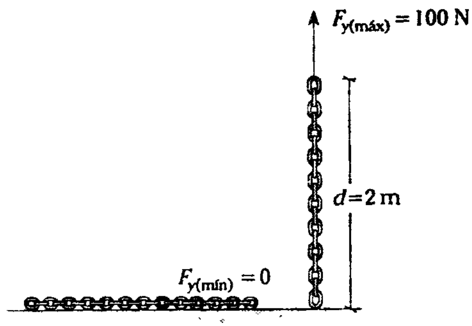
$$W^{nec.} = A_{\triangle} = \frac{(100)(2)}{2}$$

$$\therefore \quad W^{nec.} = 100 \text{ J}$$

Otro método

Como en el problema anterior, la fuerza que eleva a la cadena $\left(\vec{F}_y\right)$ depende linealmente de la posición $\left(\vec{y}\right)$, así planteamos

$$W^{nec.} = F_m \cdot d \qquad \text{(I)}$$



Como d es lo que se desplaza el punto de aplicación de $\vec{F}_y$, entonces $d = 2$ m, además como $\vec{F}$ varía linealmente con $\vec{y}$

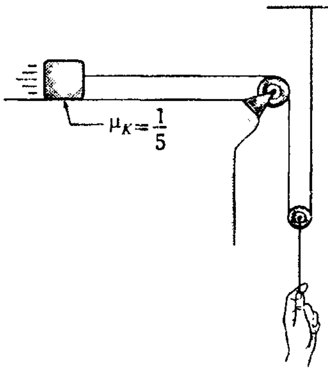
$$F_m = \frac{F_{y(mín)} + F_{y(máx)}}{2} = \frac{0+100}{2} = 50 \text{ N}$$

Reemplazando en (I)

$$W^{nec.} = 50 \times 2 = 100 \text{ J}$$

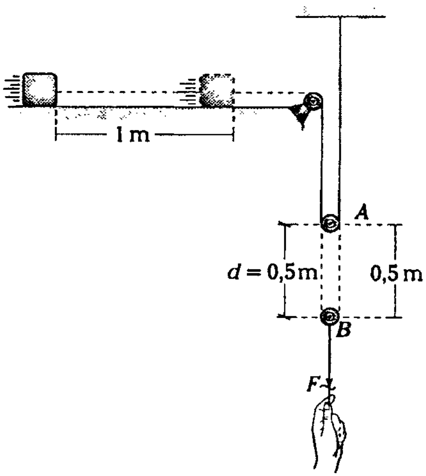
Problema 7

En la figura, el bloque de 4 kg acelera con 2 m/s^2. Determine la cantidad de trabajo realizado por el joven cuando el bloque se ha desplazado 1 m. Considere el coeficiente de rozamiento entre las superficies igual a 0,2 y poleas ideales. (g = 10 m/s^2)



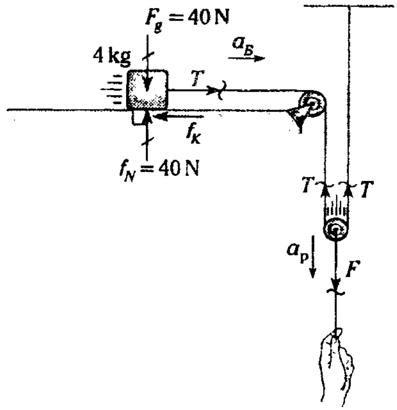
Resolución

La cantidad de trabajo realizado por el joven dependerá de la fuerza ejercida sobre la cuerda y el desplazamiento que experimenta su punto de aplicación. Calcularemos la distancia analizando los desplazamientos y la fuerza mediante un análisis dinámico del movimiento de cada cuerpo.



Cuando el bloque recorre 1 m, la longitud de cuerda en la horizontal disminuye en 1 m. No obstante, tal disminución pasó a la polea esta se dividió en dos partes de 0,5 m cada una, tal como se ha mostrado.

- De la figura anterior se puede deducir que el punto de aplicación de la fuerza, ejercida por el joven, recorre $d = 0{,}5$ m.
- Ahora para determinar el módulo de la fuerza aplicada por el joven, realizaremos el D.C.L. del bloque y la polea.



Al determinar F para la polea se puede plantear que

$$F_R = m_p a_p$$

Como la polea es ideal $m_p = 0$

$$\Rightarrow \quad F_R = 0$$

con lo cual para la polea se debe cumplir

$$F = 2T \qquad \text{(I)}$$

Se requiere el módulo de la $\vec{T}$, para el bloque, también planteamos

$$F_R = m_B \cdot a_B$$

$$T - f_K = m_B \cdot a_B$$

$$T - \mu_K f_N = m_B \cdot a_B$$

$$\Rightarrow \quad T - \frac{1}{5}(40) = (4)(2)$$

$$\therefore \quad T = 16 \text{ N}$$

En (I)

$F = 32$ N

Finalmente planteamos

$$W_{A \to B}^{\text{joven}} = F \cdot d$$

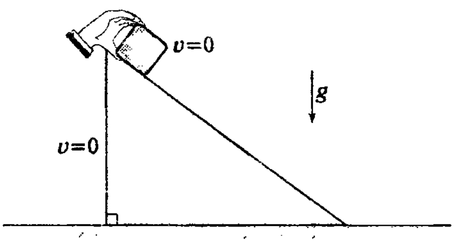
$$= (32)\,(0{,}5)$$

$$= 16 \text{ J}$$

Problema 8

En la figura un bloque pequeño se suelta sobre una cuña lisa. Indique las proposiciones verdaderas (V) o falsas (F).

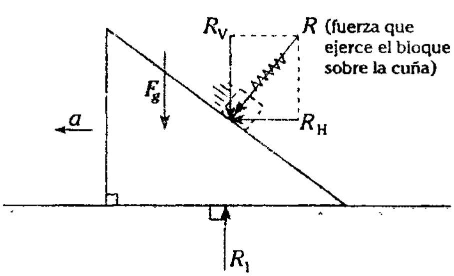
I. El bloque no realiza trabajo mecánico.
II. La cuña realiza trabajo mecánico.
III. El trabajo neto realizado sobre el sistema cuña - bloque es nulo.



Resolución

I. **FALSA**

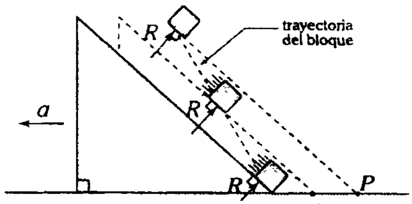
Al soltar el bloque, éste resbala por la superficie lisa de la cuña y al apoyarse en ella le ejerce una fuerza $\vec{R}$ tal como le mostramos a continuación.



Del D.C.L. de la cuña, notamos que:
Debido a la componente horizontal (R_H), ella adquiere movimiento. Podemos establecer de esta manera que el bloque realiza trabajo mecánico sobre la cuña.

II. **VERDADERA**

Para analizar la segunda proposición ampliamos el gráfico.



La fuerza de la cuña sobre el bloque $(\vec{R})$ es perpendicular a las superficies en contacto pero no es perpendicular a la trayectoria que sigue el bloque, así la cuña realiza trabajo mecánico sobre el bloque.

III. **FALSA**

Para la tercera proposición, tendríamos que tener en cuenta, que el trabajo neto está ligado con el cambio de la rapidez, por tanto para el sistema (cuña-bloque) notamos que la rapidez para ambas se incrementa y por lo tanto sobre el sistema sí se desarrolla trabajo. ¿Por parte de quién?... Si analizamos al sistema, notaremos que es por parte de la $\vec{F_g}$ del bloque.

Como una cuestión final podemos señalar que mientras la cantidad de trabajo del bloque sobre la cuña es positivo, la cantidad de trabajo de la cuña sobre el bloque es negativo.

RELACIÓN ENTRE EL TRABAJO Y LA ENERGÍA

En el tema anterior hablamos de la transferencia de movimiento mecánico de un cuerpo sobre otro, es decir del trabajo mecánico que podemos sintetizarlo así:

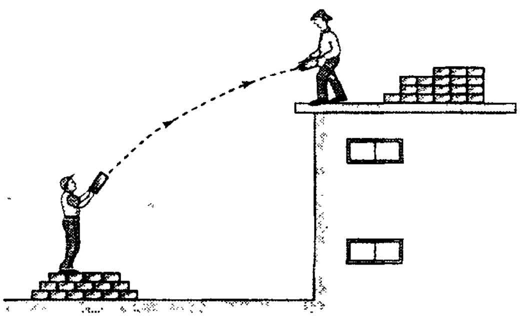
Trabajo mecánico →
- Cualitativamente → Es un proceso de transferencia de movimiento mecánico de un cuerpo hacia otro mediante la aplicación de una fuerza.
- Cuantitativamente → $W^F = F.d$; si $\vec{F} =$ cte.
  W^F=Área debajo de la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$

¿Será la única forma de interpretar cualitativa y cuantitativamente el trabajo mecánico? Es una forma útil y necesaria para ciertos casos, pero no para todos ya que en la práctica nos encontraremos con situaciones físicas en donde el aspecto cualitativo y cuantitativo del trabajo mecánico tiene limitaciones. Esto implica que

- Debemos conocer otra manera o método de interpretar el trabajo mecánico desarrollado por un cuerpo sobre otro.
- Además, si no podemos evaluar la cantidad de trabajo con los procedimientos señalados, entonces debemos de tener otra herramienta matemática (fórmulas) que nos permitirá evaluar la cantidad de trabajo mecánico realizado.

Ahora, para salir de este problema introducimos el concepto Energía que dentro de la Física, inclusive en todas las ciencias naturales, tiene una gran importancia, ya que nos permite hacer una buena descripción de los diferentes procesos que se desarrollan en nuestro entorno. Por ahora, pasemos a ver cómo se entiende este concepto en nuestro quehacer cotidiano y luego lo elevaremos a otro nivel conceptual.

En el gráfico que damos a continuación se analizará lo que acontece.



¿Qué actividad física realizan las personas? Una de ellas está realizando trabajo mecánico sobre los ladrillos ya que le transfiere movimiento mecánico a cada uno de ellos durante el levantamiento y lanzamiento con las manos, lo cual le cambia de posición a cada ladrillo desde el nivel bajo hacia el nivel alto.

Continuemos analizando el proceso ¿qué sucede conforme las personas lanzan y colocan más y más ladrillos en el nivel alto? Las personas realizan una mayor cantidad de trabajo ¿cómo verificar esto?

Experimentalmente las personas experimentan un mayor desgaste físico, ¿qué efecto experimentan las personas al lanzar más y más ladrillos? Estas, conforme transcurre el tiempo van perdiendo agilidad, dinámica y algunos ladrillos inclusive se les caen; sus músculos se fatigan, van perdiendo capacidad para realizar más trabajo vemos pues en la práctica esto como un agotamiento físico y según esto podemos asumir que mientras las personas tengan cierta capacidad, pueden sin ningún problema transmitir movimiento a los ladrillos. En un nivel básico, se denomina energía a la capacidad que tiene un cuerpo para transmitir movimiento.

Conclusión

A mayor cantidad de trabajo realizado por las personas, mayor energía perdida o entregada por ellas a los ladrillos. En consecuencia, realizar trabajo mecánico implica transferir energía mecánica o también decimos variar la energía mecánica. Por lo tanto, podemos plantear cuantitativamente lo siguiente:

$$W_{\substack{\text{realizado por}\\ \text{las personas}}} = \left[\begin{array}{c}\text{cantidad de energía}\\ \text{ganada por los ladrillos}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{variación de energía}\\ \text{mecánica de los ladrillos}\end{array}\right] = \Delta E_{M(\text{ladrillos})}$$

A partir de estas conclusiones, otro criterio adicional para conceptuar el trabajo mecánico, es la transferencia de energía de un cuerpo hacia otro, sin embargo, nos preguntamos **qué es la energía** En forma básica responderíamos que es aquello que nos expresa la capacidad de un cuerpo o sistema para realizar trabajo.

No es la única forma de dar un concepto de energía, continuemos analizando la secuencia de nuestros conceptos establecidos:

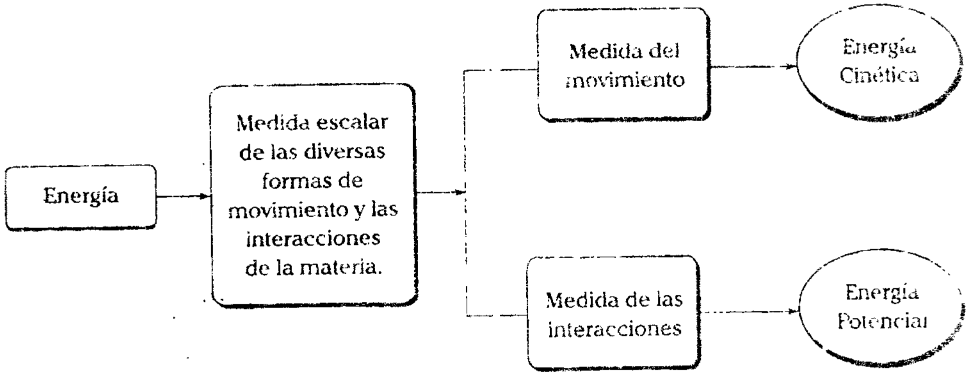
- **Trabajo mecánico**
  - En lo cualitativo
    - Proceso de transferencia de movimiento mecánico mediante una fuerza
    - Proceso de transferencia de energía o variación de energía.
  - En lo cuantitativo
    - $W^F = F.d$; si F=cte. W^F = área debajo de la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$
    - $W^F = \Delta E = E_F - E_0$

Nótese que en lo cualitativo

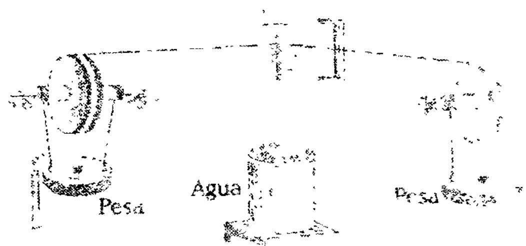
- Trabajo mecánico: transferencia de movimiento mediante una fuerza (interacción)
- Trabajo mecánico: transferencia de energía o una variación de energía.

A partir de esta relación vemos cómo la energía está ligada con el movimiento y las interacciones. Al igualar los contenidos siguientes podemos afirmar que **la energía es la medida escalar del movimiento y las interacciones**, entendiendo aquí como medida de las diversas formas de movimiento e interacciones de la materia.

Podemos así resumir para nuestro propósito



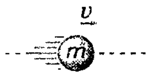
James P. Joule (1818-1889), destacado científico inglés cuyos trabajos contribuyó a establecer el principio de la conservación de la energía.



Equipo que utilizó Joule para determinar el equivalente mecanico del calor A medida que caían las pesas, su energía potencial se iba transformando en calor. Esto se veía reflejado después en un aumento en la temperatura del agua.

ENERGÍA CINÉTICA (E_C)

De la práctica sabemos que cuando un cuerpo se traslada tiene capacidad de transmitir movimiento (desarrollar trabajo); por ejemplo tenemos un bloque que es lanzado sobre un resorte. Según esto a un cuerpo en virtud a su movimiento le asociamos energía a la cual denominamos energía cinética (E_C). La energía cinética es una magnitud física que nos expresa la medida escalar del movimiento de un cuerpo o partícula. Matemáticamente se define por



$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}mv^2} \qquad \text{(I)}$$

Unidades

m : en kilogramos (kg)

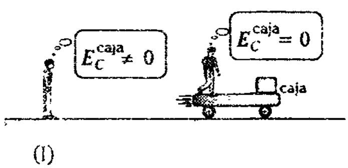
v : en m/s

E_C : en Joule (J)

Observación

La energía cinética, evaluada por (I), es útil cuando un cuerpo o partícula presenta movimiento de traslación.

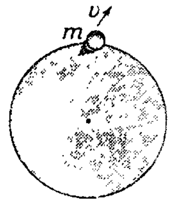
La energía cinética de un cuerpo es relativa.



Ejemplo 9

Se sabe que a un cuerpo para que pueda escapar de la atracción terrestre y alejarse definitivamente de nuestro planeta se le debe comunicar una rapidez de 11,2 km/s (segunda rapidez cósmica). Si el cuerpo es de 5 kg, ¿cuánta energía cinética se le debe comunicar?

Resolución



Planteamos

$$E_C = \frac{mv^2}{2}$$

Como $m = 5$ kg y $v = 11{,}2$ km/s $= 11{,}2\times10^3$ m/s

Reemplazamos valores

$$E_C = \frac{(5)(11{,}2\times10^3)^2}{2} = 313{,}6\times10^6 \text{ J}$$

$$\therefore\ E_C = 3{,}136\times10^8 \text{ J}$$

Con respecto a este resultado, habría que reflexionar un poco. Un cuerpo de solo 5 kg requiere una cantidad de energía de $3{,}136\times10^8$ J para escapar de la atracción terrestre. A continuación nos preguntamos cuánta energía requiere una nave espacial que es de 100 toneladas.

Ejemplo 10

Un niño tiene entre sus manos una naranja de 0,4 kg y si la lanza sobre una mesa con una rapidez de 1,5 m/s; ¿qué cantidad de trabajo realizó el niño?

Resolución

El niño al lanzar la naranja, le transmite movimiento a ella y realiza trabajo. Con esto la naranja adquiere energía cinética, pues la naranja empieza a trasladarse.

La naranja gana energía cinética debido al trabajo realizado por el niño.

$$W^{\text{niño}} = E_C^{\text{naranja}}$$

$$\Rightarrow \ W^{\text{niño}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0,4)(1,5)^2$$

$$W^{\text{niño}} = 0,45 \text{ J}$$

A esta misma respuesta podemos llegar si señalamos que el trabajo del niño varía o cambia la energía cinética de la naranja. De ahí que planteamos

$$W^{\text{niño}} = \Delta E_C^{\text{naranja}}$$

$$= E_{C_F} - \cancel{E_{C_0}}$$

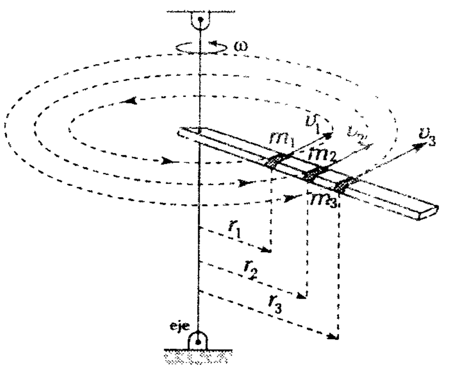
$$= \frac{mv_F^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$= \frac{(0,4)(1,5)^2}{2}$$

$$W^{\text{niño}} = 0,45 \text{ J}$$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Este tipo de energía mide escalarmente el movimiento de rotación de un cuerpo físico (barra, disco, lámina, etc.). Examinemos el caso siguiente: una barra rota uniformemente alrededor de un eje pasa por uno de sus extremos.



Para determinar la energía cinética de la barra que está rotando no podemos usar directamente la ecuación (I) válida para la traslación de un cuerpo o partícula; lo que se puede hacer es dividir a la barra en pequeñas porciones, las cuales sí experimentan traslación, y mientras que la energía cinética de la barra vendría expresada por la suma de la energía cinética de todas las porciones.

En la figura la energía cinética de la barra se expresa [illegible]

$$E_{C(n)} \ [illegible]$$

$$[illegible] \frac{m_n v_n^2}{2}$$

Par[illegible] $v = \omega r$, entonces

$$[illegible] + \frac{m_n(\omega r_n)^2}{2}$$

$$E_C = [illegible] m_n r_n^2)\omega^2$$

donde

$$m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 [illegible] = I$$

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} I\omega^2}$$

Esta expresión nos permite calcular la energía de rotación de la barra y de cualquier otro cuerpo.

donde

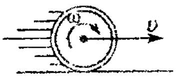
- ω : rapidez angular con la cual rota la barra (en rad/s)
- I : momento de inercia de la barra respecto del eje (en kg . m^2)
- E_C : energía cinética de rotación (en J)

Nota

El momento de inercia (I) en la rotación es análogo a la masa (m) en la traslación, es decir nos mide la inercia de rotación de un cuerpo. El momento de inercia es una magnitud escalar que depende de la masa del cuerpo y de cómo ella está distribuida, la geometría del cuerpo y del eje respecto del cual se dé la rotación.

¿Qué hacer cuando hay movimiento compuesto de un cuerpo, es decir que simultáneamente el cuerpo presente traslación y rotación? Para plantear este caso, tomemos como referencia el caso de la llanta de un automóvil que realiza un movimiento compuesto. La llanta avanza y realiza movimiento de traslación; pero además la llanta rota alrededor de un eje que pasa por su centro y realiza movimiento de rotación.

Por lo tanto, la llanta de un automóvil se traslada sin deslizar y rota a la vez, motivo por el cual posee energía cinética de traslación y energía cinética de rotación (respecto del centro de masa), con lo cual se demuestra que



$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2}$$

donde

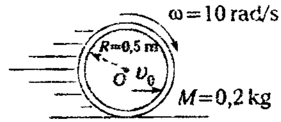
- υ : es la rapidez de traslación del centro de masa de la llanta (m/s).
- ω : es la rapidez angular de la llanta (rad/s).
- I : momento de inercia de la llanta con respecto a su centro de masa (kg . m^2).
- E_C : energía cinética total (J).

Ejemplo 1:

Un aro homogéneo de 200 g y 50 cm de radio rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. Si para un determinado instante su rapidez angular es 10 rad/s, en dicho instante calcule su energía cinética.

Resolución

Según el enunciado planteamos



La energía cinética del aro vendría dada por

$$E_C = E_{C(\text{traslac})} + E_{C(\text{rotac})}$$

$$E_C = \frac{M\upsilon_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Para el aro que rueda sin deslizar se verifica que $\upsilon_0 = \omega R$, además su momento de inercia (I) respecto de O viene dado por $I = MR^2$, entonces en (I).

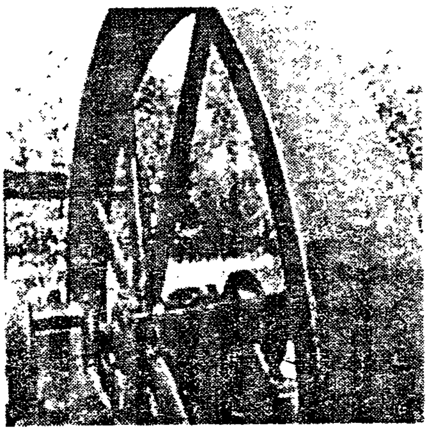
$$E_C = \frac{M(\omega R)^2}{2} + \frac{(MR^2)}{2}\omega^2$$

$$E_C = M\omega^2 R^2$$

Reemplazando datos

$$E_C = (0{,}2)(10)^2(0{,}5)$$

$$\therefore \; E_C = 10 \text{ J}$$

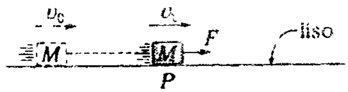


Mientras el volante va rotando respecto al eje le asociamos energía cinética de rotación

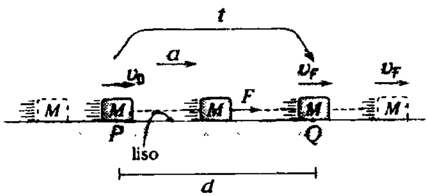
TEOREMA DEL TRABAJO NETO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Por lo señalado líneas arriba, notamos que la cantidad de trabajo está ligada con los cambios de energía. El teorema que vamos a demostrar representa una de las generalizaciones más importantes que tratan cuantitativamente los procesos de trabajo con variación de la energía.

Para la demostración vamos a considerar un caso muy particular, pero cuyo resultado tiene un carácter general. Pensemos que se tiene un bloque de masa M que desliza por inercia sobre una superficie horizontal lisa.



Cuando el bloque pasa por P, sobre él empieza a actuar una fuerza horizontal $\vec{F}$ constante durante un intervalo de tiempo t.



Determinemos el trabajo neto sobre el bloque de P hacia Q.

$$W_{P\to Q}^{\text{neto}} = W_{P\to Q}^{F_R} = F_R\,.d = F\,.d$$

como $F = F_R = ma$, reemplazando

$$W_{P\to Q}^{\text{neto}} = (ma)d = m(a\,.d) \qquad \text{(I)}$$

El bloque de P hacia Q debido a la fuerza $\vec{F}$ experimenta un M.R.U.V. por lo cual podemos usar

$$v_F^2 = v_0^2 + 2ad$$

$$\Rightarrow \quad ad = \frac{v_F^2 - v_0^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Al reemplazar (II) en (I) tenemos

$$W_{P\to Q}^{\text{neto}} = m\left(\frac{v_F^2 - v_0^2}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{mv_F^2}{2}}_{E_{C_f}} - \underbrace{\frac{mv_0^2}{2}}_{E_{C_0}}$$

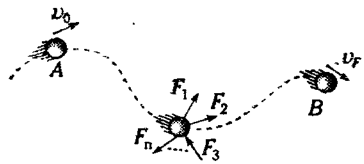
$$\boxed{W_{P\to Q}^{\text{neto}} = E_{C_F} - E_{C_0}}$$

donde

E_{C_F} : energía cinetica final.

E_{C_0} : energía cinética inicial.

De la relación anterior, hemos deducido para el caso que sobre el cuerpo actuen fuerzas constantes y trayectoria rectilínea, pero dicha fórmula tiene un carácter general ya que es aplicable al caso que se manifiesten fuerzas variables (en valor y/o dirección) e inclusive sobre una trayectoria curvilínea, es decir



$$W_{A\to B}^{\text{neto}} = \sum W_{A\to B} = W^{F_R} = \underbrace{E_{C_f} - E_{C_0}}_{\substack{\text{variación}\\ \text{de } E_C}}$$

$$\boxed{W_{A\to B}^{\text{neto}} = \Delta E_C}$$

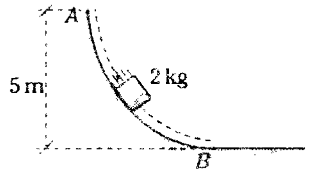
Teorema del trabajo neto
y la energía cinética

Esta expresión nos permite ver cuantitativamente la relación entre el trabajo total sobre un cuerpo y la transmisión de energía. Por ejemplo: si $W^{\text{neto}} > 0 \Rightarrow \Delta E_C > 0$, esto significaría que la energía cinética aumentó y por tanto se transmitió energía.

Si $W^{\text{neto}} < 0 \Rightarrow \Delta E_C < 0$, esto significa que la energía cinética disminuyó y para este caso, significa que el cuerpo sobre el cual se desarrolló trabajo entrega parte de su energía cinética a los cuerpos que le hayan desarrollado trabajo.

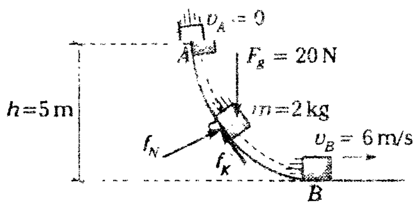
Ejemplo 12

La esfera después de haber sido soltada en A pasa por B con 6 m/s. ¿Cuánto trabajo se desarrolló por medio de la fuerza de rozamiento? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Para este caso la fuerza de rozamiento cinético es variable en dirección y en valor y no convendría plantear su cantidad de trabajo directamente.



Para el cálculo de $W^{f_k}_{A\to B}$ podemos usar el teorema del trabajo neto y la energía cinética.

$$W^{\text{neto}}_{A\to B} = \Delta E_C$$

$$W^{F_g}_{A\to B} + W^{f_k}_{A\to B} + \cancel{W^{f_N}_{A\to B}} = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$+F_g h + W^{f_k}_{A\to B} = \frac{mv_f^2}{2} - \cancel{\frac{mv_0^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 20(5) + W^{f_k}_{A\to B} = \frac{2(6)^2}{2}$$

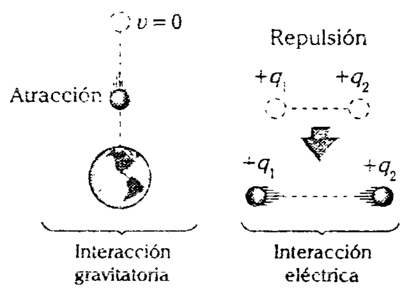
$$\therefore \quad W^{f_k}_{A\to B} = -64 \text{ J}$$

Nota

A partir del teorema del trabajo neto y la energía cinética podemos justificar la convención señalada para las cantidades de trabajo. Cuando una fuerza está a favor del movimiento incrementa la rapidez entonces la variación de energía cinética es positiva, por tanto el trabajo de la fuerza es positivo. Asimismo si la fuerza está en contra del movimiento, disminuye la rapidez del cuerpo y la variación de la energía cinética es negativa. Por tanto, el trabajo de la fuerza es negativa.

ENERGÍA POTENCIAL

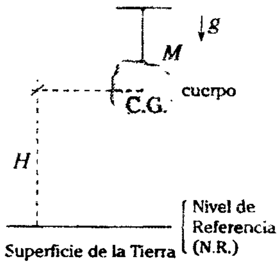
En la naturaleza encontramos diversas formas de movimiento (mecánico, térmico, químico, etc.) y también diversas interacciones, entre las más conocidas tenemos a las interacciones gravitacionales y eléctricas. El ejemplo más común de interacción gravitatoria es la caída de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra y podemos deducir que producto de la interacción, en este caso atracción, hay transmisión de movimiento. Con ello establecemos que en toda interacción podemos asociarle energía, a la cual la denominamos energía potencial.



Nosotros podemos asociarle energía potencial a un sistema de cuerpos (partículas) o a un cuerpo. A este último es debido a la interacción de sus partes (las partículas que lo conforman). La energía potencial de un sistema de cuerpos depende de la disposición o configuración de sus componentes.

Energía potencial gravitatoria (E_{PG})

Es la medida escalar de la interacción entre un cuerpo y la gran masa terrestre. Matemáticamente se le evalúa así



$$\boxed{E_{PG} = MgH} \qquad \text{(I)}$$

Unidades

M : kilogramo (kg)

H : metros (m)

E_{PG} : Joule (J)

La fórmula dada por (I) nos expresa la energía asociada al sistema Tierra-cuerpo, pero dicha energía se la vamos a asociar al cuerpo.

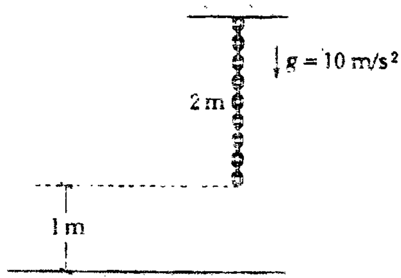
Tener presente

1. La energía potencial gravitatoria de un cuerpo depende del nivel de referencia (N.R.). Esto determina que dicha energía es relativa.
2. En la fórmula (I), H es la distancia que se mide desde el nivel de referencia (N.R.) hacia donde esta concentrada la fuerza de gravedad del cuerpo (C.G.)

Ejemplo 13

Una cadena homogénea de 4 kg cuelga de un techo, tal como se muestra. Calcule su energía potencial gravitatoria con respecto al:

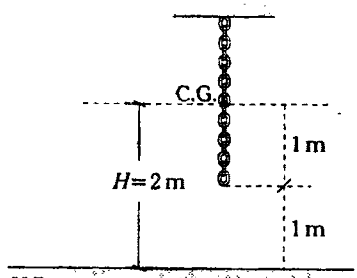
- piso.
- extremo inferior de la cadena.
- centro de gravedad de la cadena homogénea.
- techo del cual cuelga.



Resolución

- **Con respecto al piso**

  Definimos la posición del centro de gravedad de la cadena así



Definimos su energía potencial

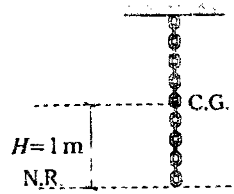
$E_{PG} = mgH$

En la figura $H = 2$ m

$\therefore\ E_{PG} = 4(10)(2)$

$\Rightarrow\ E_{PG} = 80$ J

- **Con respecto al extremo inferior de la cadena**
En la figura la posición del centro de gravedad está a $H = 1$ m.



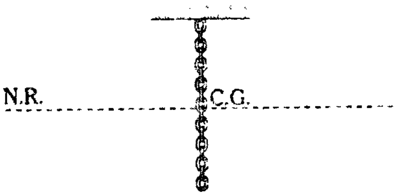
En la figura

$E'_{PG} = MgH'$

$\Rightarrow\ E'_{PG} = (4)(10)(1)$

$\Rightarrow\ E'_{PG} = 40$ J

- **Con respecto al centro de gravedad (C.G.) de la cadena**

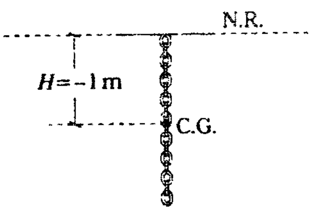


En este caso, el centro de gravedad (C.G.) está sobre el nivel de referencia $H = 0$.

$E_{PG} = mgH = 4(10)(0)$

$\therefore\ E_{PG} = 0$ J

- **Con respecto al techo**
Para este caso el centro de gravedad (C.G.) está por debajo del nivel de referencia y la distancia hacia el C.G. se indica con signo negativo.



$E_{PG} = mgH = 4(10)(-1)$

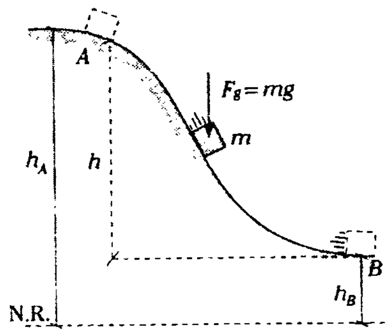
$\therefore\ E_{PG} = -40$ J

Después de haber resuelto el ejemplo debemos tener presente lo siguiente:

- La E_{PG} tiene un valor relativo porque depende por dónde tracemos el nivel de referencia.
- La E_{PG} puede ser (+), (-) o cero.

Relación entre la cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad y la energía potencial gravitatoria

Consideremos a un bloque que desciende sobre una superficie tal como se muestra.



De A hacia B la cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad viene dada por

$W^{F_g}_{A\to B} = mgh$

pero $h = h_A - h_B$

$$\Rightarrow\ W^{F_g}_{A\to B} = mg(h_A - h_B)$$

$$= mgh_A - mgh_B$$

$$= \underbrace{E_{PG(A)}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{potencial}\\ \text{en } A\\ \text{(inicial)}}} - \underbrace{E_{PG(B)}}_{\substack{\text{energía}\\ \text{potencial}\\ \text{en } B\\ \text{(final)}}}$$

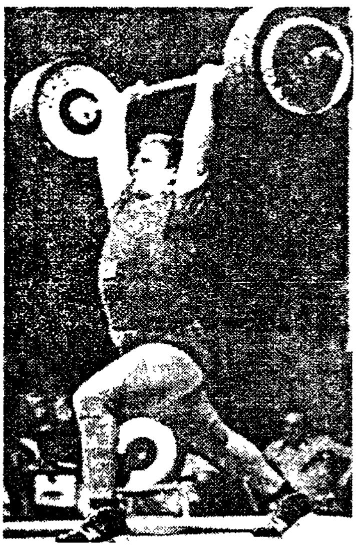
$$= -\underbrace{\left(E_{PG(B)} - E_{PG(A)}\right)}_{\substack{\text{esto expresa variación}\\ \text{de la energía potencial}}}$$

$$\boxed{W^{F_g}_{A\to B} = -\Delta E_{PG}} \qquad \text{(I)}$$

Según esta formula si el trabajo de la fuerza de gravedad es positivo, la ΔE_{PG} es negativa. Esto implica que la energía potencial gravitatoria disminuye y cuando el trabajo de la fuerza de gravedad es negativo, la ΔE_{PG} es positiva. Aquí se refleja un aumento en la energía potencial gravitatoria y también podemos establecer que la cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad depende de la energía potencial gravitatoria inicial y final, ello significa que dicha cantidad de trabajo es *independiente de la trayectoria*.

Conclusión

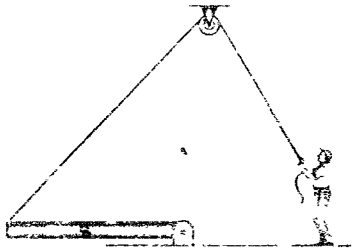
- La cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad es numéricamente igual al valor absoluto de la variación de la energía potencial gravitatoria.
- La cantidad de trabajo de la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria y para un trayecto cerrado es nulo dicho trabajo, debido a esta característica la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa.



Las pesas respecto del piso tienen asociada energía potencial gravitatoria.

Ejemplo 14

En la figura, la barra es homogénea de 3 kg y 2 m de longitud. Si la barra debe ser colocada en posición vertical en forma lenta, ¿qué cantidad de trabajo debe realizar el hombre? ($g = 10$ m/s^2)

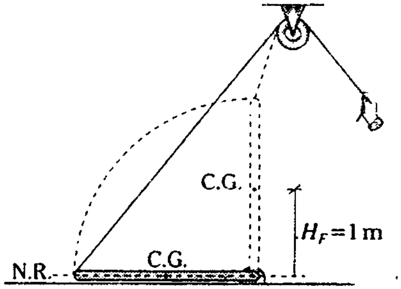


Resolución

En la figura, el hombre va a llevar de la posición horizontal a la posición vertical a la barra homogénea y de esta manera realiza un trabajo que lo lleva a perder energía, mientras que la barra gana dicha energía. También podemos plantear en base al trabajo del hombre se logra variar la energía potencial gravitatoria de la barra

$$W_{\substack{\text{realizado por}\\ \text{el hombre}}} = E_{\substack{\text{perdida por}\\ \text{el hombre}}} = \Delta E_{PG} \qquad (1)$$

Ahora determinemos la E_{PG} de la barra en su posición inicial (horizontal) y en su posición final (vertical) respecto de un nivel de referencia que elegimos convenientemente.



Del gráfico se tiene que

$E_{PG_0}=mgH_0$, pero $H_0=0$

$\Rightarrow\ E_{PG_0}=0$

además

$E_{PG_F}=mgH_F$, pero $H_F=1$ m

$\Rightarrow\ E_{PG_f}=(3)(10)(1)=30$ J

En (I)

$W^{\text{hombre}}=E_{PG_F}-E_{PG_0}$

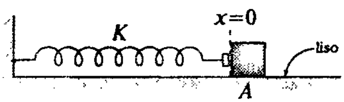
$\therefore\ W^{\text{hombre}}=30$ J

Esta cantidad expresa la cantidad de energía potencial que adquiere la barra. Además sobre la barra no se ha considerado cambios en la energía cinética ya que el proceso ha sido llevado a cabo en forma lenta.

Energía potencial elástica (E_{PE})

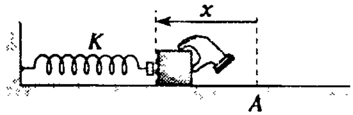
Cuando hablamos de energía potencial inmediatamente debemos tener presente que es una energía asociada a un sistema (de dos o más cuerpos) en interacción. Tal es el caso de la energía potencial elástica, la cual se toma en cuenta cuando a un cuerpo lo deformamos, sobre todo aquellos cuerpos elásticos que después de haber sido deformados recobran (aproximadamente) su forma inicial. A un resorte o una liga al deformarlos hacemos que sus partes, partículas que las componen, interactúen y sobre la base de esto al resorte o la liga, o a cualquier otro cuerpo que se pueda deformar, le asociemos energía potencial elástica (E_{PE}). Esto se refleja en el hecho de que un cuerpo elástico deformado tiene capacidad de transmitir movimiento, es decir desarrollar trabajo.

Por ejemplo, revisemos lo siguiente

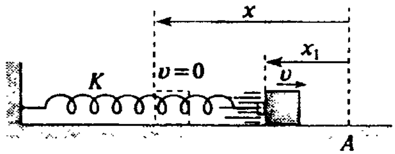


Estando el resorte sin deformar ($x=0$) no tiene capacidad de transmitir movimiento al bloque entendemos así que al resorte sin deformar no le asociamos energía potencial elástica.

Ahora si al bloque lo vamos empujando hacia la izquierda se irá comprimiendo el resorte.

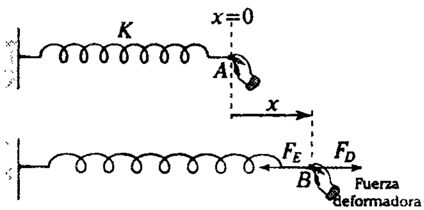


Al soltar al bloque se manifestará lo que hemos mencionado líneas arriba.



El resorte le transmite movimiento al bloque, por ello decimos que el resorte tiene energía. Los experimentos muestran que mientras mayor sea la deformación, el resorte tiene mayor capacidad de transmitir movimiento, así también ocurre para una mayor rigidez (K) del resorte. Esto nos advierte que la energía potencial elástica asociada al resorte depende de la rigidez (K) y de la deformación (x). Ahora pasemos a demostrar la forma que nos permitirá calcular la E_{PE} de un resorte.

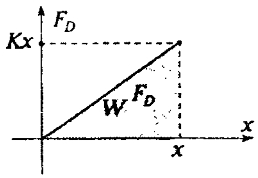
Consideremos lo siguiente



Cuando se estira lentamente al resorte, se desarrolla trabajo y al resorte le transmitimos energía (E_{PE}), de ahí que se debe verificar

$$E_{PE}=W_{A\to B}^{\text{debido a la } \vec{F}_D} \qquad \text{(I)}$$

Como el proceso es lento, entonces el extremo del resorte es trasladado en equilibrio $F_D = F_E = Kx$. Observamos entonces que tenemos una fuerza variable y su cantidad de trabajo la podemos calcular mediante las áreas.



Se debe cumplir

$$W_{A\to B}^{F_D} = A_{\triangle} = \frac{(Kx)x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B}^{F_D} = \frac{Kx^2}{2}$$

En (I)

$$\boxed{E_{PE} = \frac{Kx^2}{2}}$$

Unidades

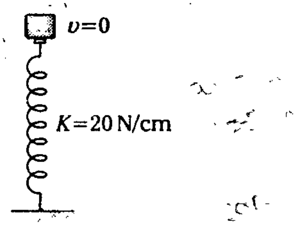
x : en metros (m)

K : en newton/metro (N/m)

E_{PE} : en Joule (J)

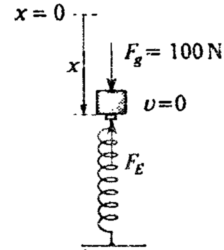
Ejemplo 15

El bloque que se muestra es de 10 kg y está en reposo. ¿Cuánta energía potencial elástica le asociamos al resorte? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Tenemos la rigidez $K = 20$ N/cm $= 2\,000$ N/m y para calcular la energía potencial elástica del resorte hace falta saber cuánto está comprimido, ello lo podemos calcular analizando el equilibrio del bloque.



Se debe verificar

$F_E = F_g$

$Kx = 100$ N

$(20$ N/cm$)\,x = 100$ N

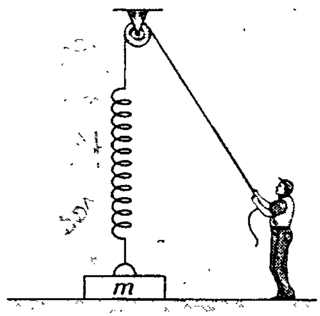
$x = 5$ cm $= \frac{1}{20}$ m

Finalmente planteamos para el resorte

$$E_{PE} = \frac{Kx^2}{2} = \frac{2\,000}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2 = 2{,}5 \text{ J}$$

Ejemplo 16

En la figura el bloque de 5 kg reposa sobre el piso unido a un resorte, sin deformar, de constante de rigidez $K = 100$ N/m. ¿Qué cantidad de trabajo realizará el hombre para elevar lentamente 1 m al bloque sobre el piso? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Cuando el hombre jala la cuerda

- El resorte se estira, gana energía potencial elástica y empieza a actuar sobre el bloque. Éste se eleva respecto al piso y gana energía potencial gravitatoria.
- El hombre al realizar trabajo, le transmitió energía al bloque y al resorte, de ahí se debe verificar que

$$W_{\substack{\text{realizado por}\\\text{el hombre}}} = \underbrace{E_{\substack{\text{ganada por}\\\text{bloque}}}}_{} + \underbrace{E_{PE\,\substack{\text{ganada por}\\\text{resorte}}}}_{}$$

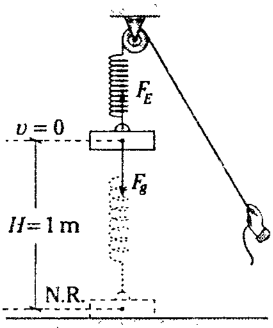
$$W_{\substack{\text{realizado por}\\\text{el hombre}}} = E_{PG} + E_{PE}$$

$$= mgH + \frac{Kx^2}{2}$$

$$= 5(10)(1) + \frac{100}{2}x^2$$

$$= 50 + 50x^2 \qquad \text{(I)}$$

Ahora se requiere x, la cual se puede obtener a partir de la posición final del bloque.



En la posición más alta, el bloque reposa

$$\Rightarrow \underbrace{\sum F(\uparrow)}_{Kx} = \underbrace{\sum F(\downarrow)}_{mg}$$

$$100x = 5(10)$$

$$\therefore\ x = 0{,}5\,\text{m}$$

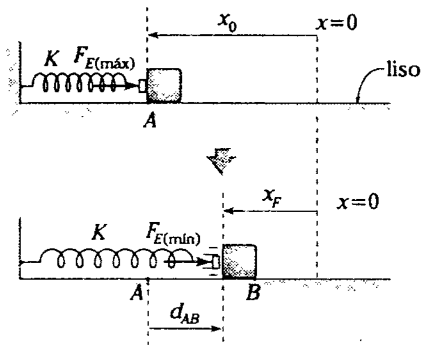
Reemplazando en (I)

$$W_{\substack{\text{realizado por}\\\text{el hombre}}} = 50 + 50(0{,}5)^2$$

$$\therefore\ W_{\substack{\text{realizado por}\\\text{el hombre}}} = 62{,}5\ \text{J}$$

Relación entre la cantidad de trabajo de la fuerza elástica y la energía potencial elástica

Mediante un bloque comprimamos un resorte y luego soltemos al bloque



Determinemos la cantidad de trabajo del resorte sobre el bloque de A hacia B, es decir el trabajo de la fuerza elástica. Al ser esta fuerza elástica variable, podemos usar

$$W^{F_E}_{A\to B} = \left(\frac{F_{E(máx)} + F_{E(mín)}}{2}\right)d_{AB}$$

$$= \left(\frac{Kx_0 + Kx_F}{2}\right)(x_0 - x_F)$$

$$= \frac{K}{2}(x_0 + x_F)(x_0 - x_F)$$

$$= \frac{K}{2}\left(x_0^2 - x_F^2\right) = \underbrace{\frac{Kx_0^2}{2}}_{E_{PE_0}} - \underbrace{\frac{Kx_F^2}{2}}_{E_{PE_F}}$$

$$W^{F_E}_{A\to B} = -\underbrace{\left(E_{PE_f} - E_{PE_0}\right)}_{\text{variación de } E_{PE}}$$

$$\boxed{W^{F_E}_{A\to B} = -\Delta E_{PE}}$$

Esta relacion nos permite establecer que el trabajo de la fuerza elástica depende de la energía potencial elástica final e inicial y con esto podemos entender que no dependerá de la trayectoria del bloque y si el bloque retornara a la posición A, la energía potencial elástica al inicio y al final se hace igual; la variación de la energía potencial elástica se hace nula y el trabajo de la fuerza elástica se vuelve nulo. Esto implica que la fuerza elástica también es una fuerza conservativa.

La garrocha o la pértiga que se dobla almacena energía potencial elástica que luego será transmitida al atleta cuando alcance su posición más alta

ENERGÍA MECÁNICA (E_M)

Cuando analizamos a un cuerpo o a un sistema, le asociamos energía cinética o energía potencial. Se va a considerar desde ahora una energía total, la cual es consecuencia del movimiento mecánico y de las interacciones. A dicha energía total la denominaremos energía mecánica (E_M) La cual se define como la suma de la energía cinética y potencial, así

$$\boxed{E_M = E_C + E_P}$$

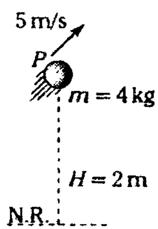
donde

E_C : energía cinética total $\left(E_C^{\text{traslac.}} \text{ y/o } E_C^{\text{rotac}}\right)$

E_P : energía potencial total (E_{PG} y/o E_{PE})

A partir de ahora tener en cuenta que la energía cinética (traslación o rotación) y la energía potencial (gravitatoria o elástica) son formas de energía mecánica.

Al hacer el cálculo de la energía mecánica, debemos definir el nivel de referencia (N.R.) previamente, de ahí que la energía mecánica tenga carácter relativo. Por ejemplo



Para la esfera, en la posición P tiene

$$E_M = E_C + E_{PG}$$

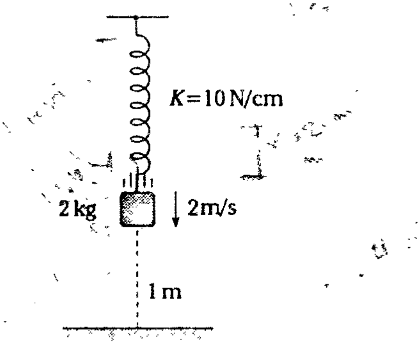
$$= \frac{mv^2}{2} + mgH$$

$$= \frac{(4)(5)^2}{2} + (4)(10)(2)$$

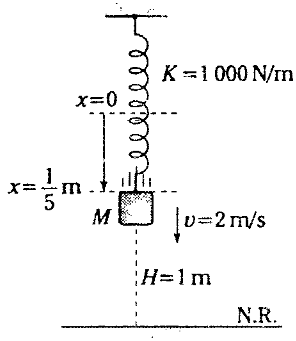
$$\therefore\ E_M = 130\ \text{J}$$

Ejemplo 17

Para el instante mostrado en el gráfico, el resorte esta estirado 20 cm. Calcule la energía mecánica del sistema bloque-resorte respecto del piso. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución



A partir de la figura para el sistema bloque-resorte tenemos que su energía mecánica

$$E_M = E^{\text{bloque}} + E^{\text{resorte}}$$

$$E_M = (E_C + E_{PG}) + E_{PE}$$

$$E_M = \left(\frac{Mv^2}{2} + MgH\right) + \frac{Kx^2}{2}$$

Reemplazando datos

$$E_M = \frac{2}{2}(2)^2 + 2(10)(1) + \frac{1000}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

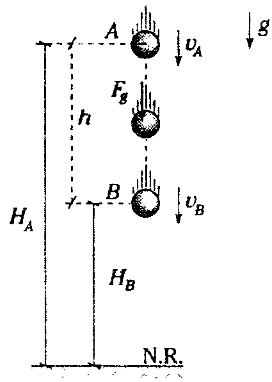
$$\therefore\ E_M = 44\ \text{J}$$

Ley de conservación de la energía mecánica

En ciertos procesos mecánicos, bajo ciertas condiciones, se comprueba que la energía mecánica de un cuerpo o sistema se mantiene constante, es decir se conserva.

Esto lo podemos verificar en la caída libre vertical de una esfera.

Determinemos el trabajo neto sobre la esfera de A hacia B.



$$W_{A\to B}^{\text{neto}} = \Delta E_C^{\text{esfera}}$$

$$mgh = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$mgH_A - mgH_B = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$\underbrace{mgH_A}_{E_{PG(A)}} - \underbrace{mgH_B}_{E_{PG(B)}} = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$\Rightarrow\ E_{C(A)} + E_{PG(A)} = E_{C(B)} + E_{PG(B)}$$

$$\boxed{E_{M(A)} = E_{M(B)}}$$

Esta igualdad expresa que la energía mecánica de la esfera en la posición A y en la posición B es igual. Esto permite establecer que no ha cambiado o no ha variado su energía mecánica, por el contrario esta se ha conservado.

Conclusión

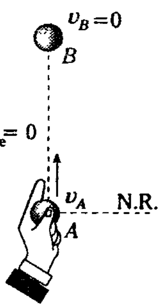
En los M.V.C.L. la energía mecánica se conserva. Esta conclusión se extiende también para los M.P.C.L.

En los movimientos de caída libre tener en cuenta que

$$E_M = E_C + E_{PG} = \text{cte.}$$

Como la suma de la energía cinética y potencial gravitatoria es constante, se señala que un aumento en la energía cinética implica una disminución de la energía potencial gravitatoria y viceversa. Para las cuestiones prácticas solemos decir que si la energía cinética disminuye, es porque se ha transformado en potencial gravitatoria o viceversa.

Por ejemplo, en el siguiente caso la esfera de A hacia B conserva su energía mecánica, es decir

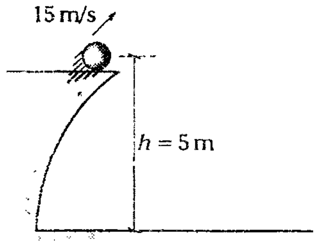


$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

y a partir del nivel de referencia se establece que la energía cinética que tiene la esfera en A se transforma en energía potencial gravitatoria en B.

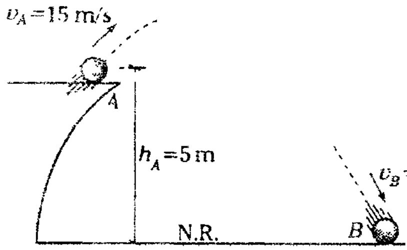
Ejemplo 18

Se indica el lanzamiento de una esfera, ¿con qué rapidez impacta en el piso? ($g = 10\ \text{m/s}^2$)



Resolución

Una vez lanzada la esfera inicia un M.P.C.L. y lo manifiesta hasta el instante en que está por impactar en el piso.



Para calcular v_B, deberíamos usar las nociones del M.P.C.L., pero las condiciones dadas harían que la resolución sea más laboriosa. Entonces debemos buscar otro criterio. Este sería el de la conservación de la energía mecánica.

Tomando como nivel de referencia el piso de A hacia B planteamos que

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$(E_C + E_{PG})_A = (E_C + \cancel{E_{PG}})_B$$

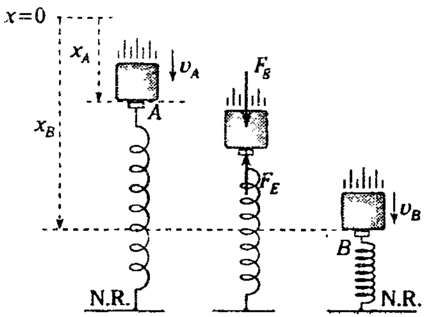
$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}v_A^2}{2} + \cancel{m}gh_A = \frac{\cancel{m}v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{15^2}{2} + 10(5) = \frac{v_B^2}{2}$$

$$\therefore\ v_B = 5\sqrt{13}\ \text{m/s}$$

Después de haber visto los casos de caída libre en donde la energía mecánica se conserva, nos preguntamos si es el único caso en donde se puede dar o que otros casos hay y en qué condiciones se dan.

Revisemos lo siguiente



Determinemos de A hacia B el trabajo neto sobre el bloque.

$$W_{A\to B}^{\text{neto}} = \Delta E_C^{\text{bloque}}$$

$$\underbrace{W_{A\to B}^{F_g}} + \underbrace{W_{A\to B}^{F_E}} = \Delta E_C^{\text{bloque}}$$

$$\left(-\Delta E_{PG}^{\text{bloque}}\right) + \left(-\Delta E_{PE}^{\text{resorte}}\right) = \Delta E_C^{\text{bloque}}$$

$$-\left(E_{PG(B)} - E_{PG(A)}\right) - \left(E_{PE(B)} - E_{PE(A)}\right) = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_{C(A)} + E_{PG(A)} + E_{PG(A)}}_{\substack{\text{expresa la } E_M \text{ del sistema} \\ \text{(bloque-resorte)} \\ \text{en la posición } A}} = \underbrace{E_{C(B)} + E_{PG(B)} + E_{PG(B)}}_{\substack{\text{Expresa la } E_M \text{ del sistema} \\ \text{(bloque-resorte)} \\ \text{en la posición } B}}$$

$\therefore$ Para el sistema bloque-resorte se establece que

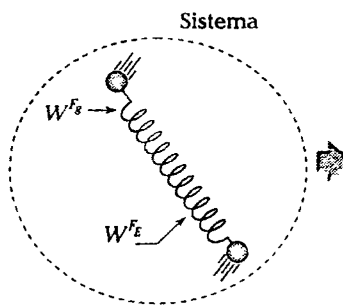
$$\boxed{E_{M(A)} = E_{M(B)}}$$

Esto quiere decirnos que la energía mecánica del sistema bloque-resorte se conserva cuando el bloque pasa de la posición A hacia la posición B.

Conclusión

Un sistema bloque-resorte, o en todo caso cuerpo-cuerpo elástico, conservará su energía mecánica para cualquier cambio de posición, cuando sobre el sistema solo se aprecie trabajo debido a la fuerza de gravedad $\left(\vec{F}_g\right)$ y a la fuerza elástica $\left(\vec{F}_E\right)$.

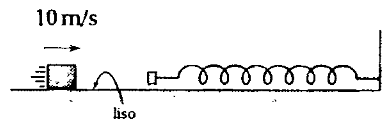
Entonces recordar



La E_m del sistema se conserva

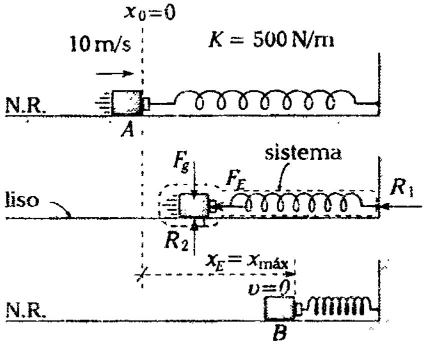
Ejemplo 19

Un bloque de 5 kg se lanza contra un resorte tal como se indica. Determine la máxima deformación del resorte de rigidez. (K = 500 N/m)



Resolución

Después de lanzado, el bloque desliza por inercia hasta que inicia contacto con el extremo del resorte que está sin deformar. A partir de dicho instante, el bloque debido a su inercia continúa en su avance comprimiendo al resorte.



El resorte mediante la $\vec{F}_E$ va frenando al bloque hasta que lo detiene y en dicho instante, al no poder el bloque continuar en su avance se alcanza la máxima deformación del resorte ($x_{máx}$).

Ahora para calcular $x_{máx}$ podemos considerar las nociones de energía; pero sobre el sistema (bloque-resorte). Del diagrama podemos notar que $W^{R_1} = W^{R_2} = 0$ y solo tenemos W^{F_E} ($W^{F_g} = 0$) entonces de A hacia B el sistema conserva su energía mecánica.

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$E_{C(A)}^{\text{bloq}} + \cancel{E_{PG(A)}^{\text{bloq}}} + \cancel{E_{PE(B)}^{\text{resorte}}} = \cancel{E_{C(B)}^{\text{bloq}}} + \cancel{E_{PG(B)}^{\text{bloq}}} + E_{PE(B)}^{\text{resorte}}$$

$$E_{C(A)}^{\text{bloq}} = E_{PE(B)}^{\text{resorte}} \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{mv_A^2}{\cancel{2}} = \frac{Kx_{máx}^2}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 5(10)^2 = 500x_{máx}^2$$

$$\therefore \quad x_{máx} = 1 \text{ m}$$

Después de haber planteado la conservación de la energía mecánica del sistema (bloque-resorte), llegamos a la relación (I), la cual nos permite hacer una interpretación más sencilla y directa de lo que acontece, que la energía cinética del bloque en A es numéricamente igual a la energía potencial elástica del resorte en B. Esto nos permite indicar que cuando el bloque se ha trasladado de A hacia B su energía cinética se ha transformado íntegramente en energía potencial elástica o también podemos decir que toda la energía (cinética) del bloque fue transferida al resorte (en forma potencial elástica).

Ahora para continuar en un caso general, ya sea para un cuerpo o sistema.

¿Cuáles son los requisitos para que la energía mecánica se conserve? Podemos plantear dos requisitos:

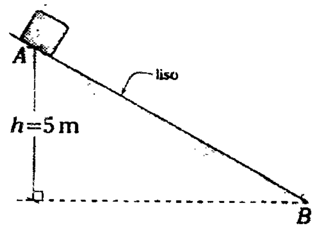
1. No debe haber rozamiento, (fuerzas de resistencia del aire, viento o cualquier fluido) tanto internamente como externamente.
2. En el sistema desarrollan trabajo la fuerza de gravedad, la fuerza elástica y/o fuerzas internas al sistema que no disipen energía.

¿Cómo se denomina a la fuerza de gravedad y fuerza elástica? Se le denomina, para propósitos de este análisis **fuerza conservativa** porque pese a realizar trabajo no altera la energía mecánica del sistema. Aquí debemos recordar que la denominación de fuerzas conservativas está ligada a la cantidad de trabajo independiente de la trayectoria y que para un trayecto cerrado es cero.

¿Cómo se les denomina a la fuerza de rozamiento, fuerza de resistencia del aire y las fuerzas externas que hacen trabajo? Se les denomina **fuerzas no conservativas** porque alteran la energía mecánica del sistema, es decir, la transforman en otro tipo de energía.

Ejemplo 20

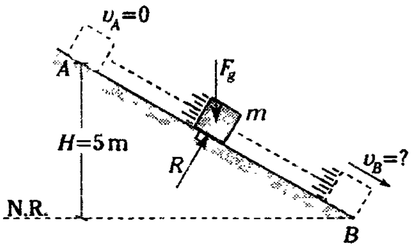
Un bloque es soltado desde A. ¿Con qué rapidez pasará por B, si H=5 m? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Después de soltar al bloque ($v_A = 0$) debido a la atracción terrestre resbalará hacia abajo.

Por lo tanto, como no hay rozamiento ni fuerza del viento que actúe sobre el bloque, entonces su energía mecánica se conservará y podemos plantear



$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\left(\cancel{E_C} + E_{PG}\right)_A = \left(E_C + \cancel{E_{PG}}\right)_B \qquad (I)$$

$$\cancel{m}gH = \frac{\cancel{m}v_B^2}{2}$$

$$10(5) = \frac{v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow \; v_B = 10 \text{ m/s}$$

El ejemplo anterior nos permite concluir que un cuerpo mientras resbala por efecto de la atracción terrestre sobre una superficie lisa su energía mecánica se conserva (E_M = cte.); pero la relación (I) de manera más sencilla y directa nos advierte que de A hacia B la energía potencial gravitatoria se transforma íntegramente en energía cinética.

Concluyendo esta parte, donde se tenga la conservación de la energía mecánica de un cuerpo o sistema, al recorrer un determinado camino (rapidez, altura, etc.) planteamos que la energía mecánica al inicio y al final son numéricamente iguales.

$$\boxed{\text{Conservación de la } E_M} \Rightarrow \boxed{E_{M_0} = E_{M_F}}$$

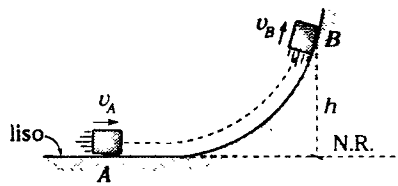
Esto representa el aspecto formal de la conservación de la energía mecánica. Mas nosotros de manera práctica y directa, en caso que haya conservación de E_M, de una posición a otra pasamos un balance de las formas de energía mecánica del cuerpo al sistema que estudiemos es decir

$$\boxed{\text{Conservación de la } E_M} \Rightarrow \boxed{\left[\begin{array}{c}\text{Formas de}\\ \text{energía}\\ \text{mecánica}\\ \text{al inicio}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{Formas de}\\ \text{energía}\\ \text{mecánica}\\ \text{al final}\end{array}\right]}$$

Con respecto a esto último podemos revisar los siguientes casos, donde hay conservación de la energía mecánica.

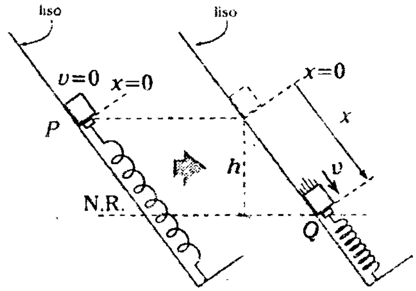
En este caso, para el bloque A hacia B se verifica

$$E_{C(A)} = E_{C(B)} + E_{PG(B)}$$



Para el sistema (bloque-resorte) en las condiciones dadas se conserva su E_M (ver siguiente página), pero podemos hacer un balance de las formas de energía mecánica de P hacia Q.

$$E_{PG}^{\text{bloque}} = E_C^{\text{bloque}} + E_{PE}^{\text{resorte}}$$



Como podemos ver la conservación de la energía mecanica y un balance de sus formas de energía resultan práctico y directo para efectuar determinados cálculos. ¿En todos los procesos mecanicos solo pasaremos un balance de las formas de energía mecánica? La respuesta es negativa ya que esos casos en realidad son ideales y los casos a los cuales nosotros nos debemos aproximar son aquellos donde participa el rozamiento, agentes externos que desarrollan trabajo, etc, los cuales traen como consecuencia cambios o variaciones en la energía mecanica de un cuerpo o sistema.

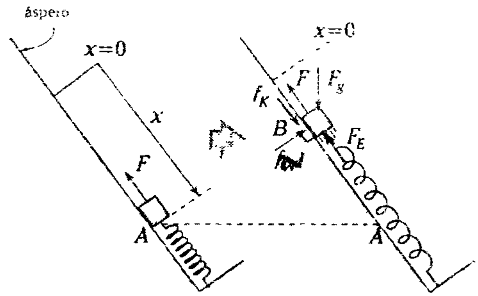
En la conocida montaña rusa si se desprecian las resistencias, la energía mecánica de los coches se conserva y se observa transformación de energía potencial en energía cinética y viceversa.

Variación de la energía mecánica (teorema del trabajo y la energía mecánica)

En el apartado anterior, vimos como en ciertas condiciones un cuerpo o un sistema puede conservar su energía mecánica. En los procesos mecánicos reales puede haber un aumento en la energía mecanica debido a una transferencia de energía mediante el trabajo de un agente externo aunque pero también puede haber disminución en la energía mecánica cuando hay participación del rozamiento, el cual es en realidad imposible de separar de los procesos mecanicos.

Ahora pasemos a demostrar la relación entre el trabajo mecánico y la energía mecánica ya que podemos hacer uso de un sinnúmero de ejemplos con ayuda del trabajo neto

Revisemos lo siguiente



De A hacia B determinemos el trabajo neto sobre el bloque.

$$W_{A\to B}^{\text{neto}} = \Delta E_C^{\text{bloq}}$$

Del gráfico se tiene

$$W_{A\to B}^{\text{neto}} = W^F + W^{f_K} + W^{f_N} + W^{F_g} + W^{F_E}$$

$$W_{A\to B}^{F} + W_{A\to B}^{f_K} + W_{A\to B}^{f_N} + \underbrace{W_{A\to B}^{F_g}}_{-\Delta E_{PG}^{\text{bloq.}}} + \underbrace{W_{A\to B}^{F_E}}_{-\Delta E_{PE}^{\text{res.}}} = \Delta E_C^{\text{bloq}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{W^{f}_{A\to B}+W^{f_K}_{A\to B}+W^{f_N}_{A\to B}}_{\substack{\text{Representa la suma de los}\\ \text{trabajos de las fuerzas que}\\ \text{son diferentes a la } \vec{F}_g\\ \text{y la } \vec{F}_E}} = \Delta\underbrace{\left(E_C^{\text{bloq.}}+E_{PG}^{\text{bloq}}+E_{PE}^{\text{res}}\right)}_{\substack{\text{Esto expresa la } E_M\\ \text{del sistema}\\ \text{bloque-resorte}}}$$

$\therefore$ Para el sistema bloque-resorte se llega a establecer

$$\boxed{\sum W^{F\neq\{F_g,\,F_E\}} = \Delta E_M^{\text{sistema}}} \qquad \text{(I)}$$

Teorema del trabajo y la E_M

A partir de la relación (I) entendemos que $\sum W^{F\neq\{F_g,\,F_E\}}$ representa la suma de trabajos de todas las formas excepto de la $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_E$.

Además si

- $\sum W^{F\neq\{F_g,\,F_E\}} > 0$, implicará una transferencia neta de energía al cuerpo, sistema y la E_M aumentará.
- $\sum W^{F\neq\{F_g,\,F_E\}} < 0$, trae como consecuencia quitarle energía al cuerpo o al sistema y la E_M disminuye.
- $\sum W^{F\neq\{F_g,\,F_E\}} = 0$, implica que la energía mecánica inicial y final numéricamente son iguales.

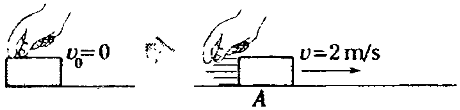
Ejemplo 21

Un albañil tiene entre sus manos un ladrillo de 3 kg y lo lanza a ras del piso horizontal con una rapidez 2 m/s y luego de resbalar el ladrillo se detiene. ¿Qué cantidad de trabajo realiza la fuerza de rozamiento sobre el ladrillo hasta detenerlo? ¿En qué se transformó la energía cinética del ladrillo?

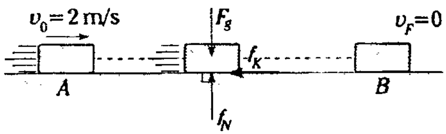
Resolución

Grafiquemos lo que sucede

- El albañil realiza trabajo, pues al lanzar el ladrillo transmite movimiento, así



Luego del lanzamiento del ladrillo, este adquiere energía cinética dada por $E_C=\dfrac{mv^2}{2}=6$ J y resbala sobre el piso áspero de modo que experimenta una resistencia, que es la fuerza de rozamiento cinético, esta fuerza realiza un trabajo de oposición hasta detenerlo por completo, así tenemos



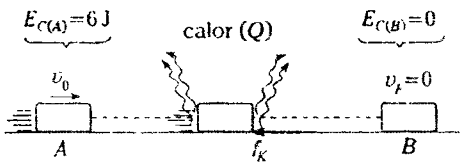
A partir del gráfico entendemos que

$$W^{f_K}_{A\to B}=\Delta E_M^{\text{ladrillo}}=\Delta E_C^{\text{ladrillo}}$$

$$W^{f_K}_{A\to B}=\cancel{E_{C(B)}}-E_{C(A)}$$

$$W^{f_K}_{A\to B}=-\frac{mv^2}{2}=-6\text{ J}$$

Ahora para responder a la otra pregunta planteamos que mientras el ladrillo desliza, las partes que hace contacto van incrementando su temperatura, según nuestra práctica entendemos que esto es posible si dichas partes van absorbiendo calor (Q). Con esto nos preguntamos ¿De dónde sale el calor que absorben las superficies? El calor es considerado una forma de energía, luego podemos señalar que mientras el ladrillo desliza su energía cinética se va transformando en calor y esto se refleja en un incremento de la temperatura de las superficies en contacto.



Según el comentario anterior

$$E_C^{\text{ladrillo}} \xrightarrow[\text{integramente en}]{\text{se transformo}} \text{calor}(Q)$$

$$\Rightarrow \quad Q = E_{C(A)} = 6 \text{ J}$$

Importante

Después de resolver el ejemplo anterior podemos notar que la cantidad de calor obtenido (Q) es igual al valor de la cantidad de trabajo de la fuerza de rozamiento cinético.

$$\boxed{Q = |W^{f_K}|}$$

Este resultado también es aplicable para cualquier otra fuerza de resistencia de un fluido (por ejemplo del aire)

FORMAS DE ENERGÍA EN LA NATURALEZA Y SU ASPECTO CUALITATIVO

En el capítulo I, se planteó que la materia es toda realidad objetiva, es decir que, existe fuera e independiente de nuestra conciencia y su forma de existencia es el movimiento en cualquiera de sus formas. En base a los hechos y observaciones se ha logrado demostrar que el movimiento de la materia es continuo y solo las formas de movimiento de la materia son diversas. En nuestro entorno, ya sea en el pasado, presente e incluso en el futuro continuamente se tienen y tendrán fenómenos que reflejan la transformación de una forma de movimiento de la materia en otro, el ejemplo que para nosotros por ahora no es familiar es el cambio de movimiento mecánico a movimiento térmico (fenómeno físico).

Con respecto a lo que venimos señalando podemos citar el caso de una bala que se incrusta en una pared y se queda incrustada en ella.

A todo cuerpo o sistema de cuerpos le atribuimos reservas de energía. En todos los procesos y fenómenos se da la transferencia de energía de un cuerpo a otro o de una parte de un cuerpo a otra parte del mismo. Como lo hemos planteado las formas de movimiento son diversas (mecánico, térmico, químico, biológico, etc.) pero a pesar de ello asumimos.

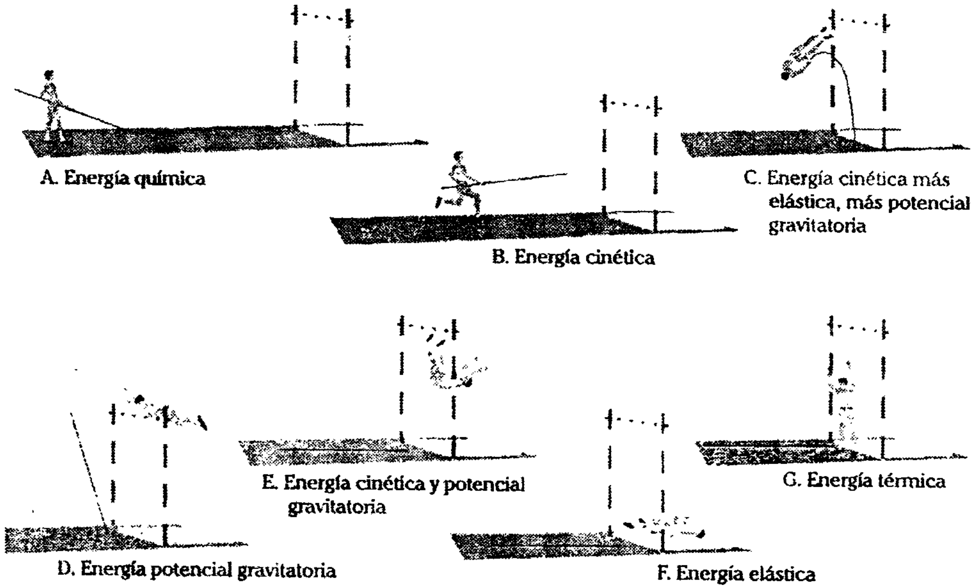
La energía nos mide cuantitativamente y de manera única las diversas formas de movimiento que se manifiesta en la naturaleza.

Nos hemos acostumbrado a utilizar las denominaciones **energía mecánica, energía térmica, energía electromagnética**, etc. Estas expresiones muchas veces dan a entender que existen varias formas de energía, mas lo que realmente existe son las diversas formas de movimiento de la materia.

La energía representa la única manera de medir las diversas formas de movimientos de la materia y solo por razones didácticas y prácticas utilizamos los conceptos de energía mecánica, energía térmica, etc. Esto lo hacemos para poder hacer mejor las descripciones de los diferentes procesos y fenómenos que se desarrollan en la naturaleza.

Ahora podemos entender y ver con mayor claridad que uno de los aspectos más notables y resaltantes de nuestra civilización es que hemos adquirido la habilidad para poder analizar, manipular y predecir diferentes fenómenos y procesos que se dan en nuestro entorno en términos de la energía.

Por este motivo, el concepto de energía es uno de los más importante en la física y por que no decirlo además en todas las ciencias naturales.



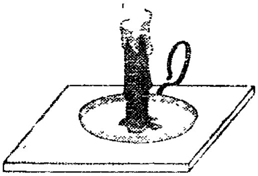
El gráfico nos muestra la transformación de la energía en distintas formas mientras se lleva a cabo el salto con garrocha

Cuando observamos y analizamos el medio que nos rodea nos damos cuenta de que la energía se presenta en diferentes formas, así por ejemplo: la energía mecánica que despliegan los autos y aviones durante su desplazamiento; la energía térmica que proporcionan los diferentes combustibles sólidos, líquidos o gaseosos; la energía eléctrica que se transporta de un lugar a otro mediante líneas y torres de alta tensión; la energía nuclear que se consigue en las centrales nucleares; la energía electromagnética que se propaga de un teléfono celular hacia otro; la energía química que almacenan las pilas y baterías, etc. Notamos la diversidad de formas de energía o movimiento en la naturaleza.

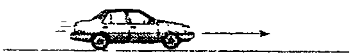
Los procesos mecánicos que nosotros en esta parte vamos a analizar solo nos permitirá por ahora tomar en cuenta dos formas de energía: la mecánica y la calorífica. Entre ellas pasaremos el balance correspondiente y con el desarrollo de otros temas del curso , por ejemplo: termodinámica, ampliaremos nuestra ley de conservación de la energía a los procesos térmicos y todos los procesos de la naturaleza. Ello elevará a la ley de conservación de la energía a una categoría de las leyes fundamentales de la naturaleza.

La forma principal de existencia de la materia es el movimiento, lo cual implica que necesariamente en cualquier proceso o fenómeno estará presente la energía (movimiento) y esta puede pasar de un cuerpo a otro o transformarse en otra forma de energía, efectivamente.

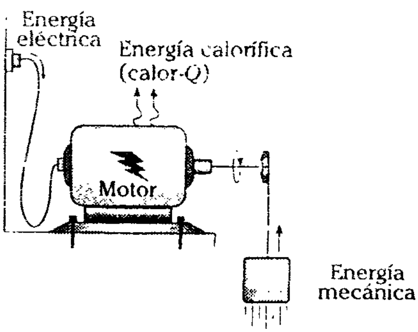
Ahora analicemos e interpretemos lo siguientes casos:



La energía química de la vela es liberada durante el proceso de combustión esta se transforma en energía luminosa y en energía térmica.



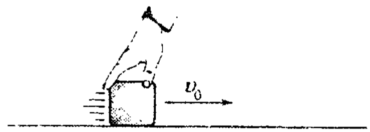
La energía química del petróleo, gasolina o gas, es liberada durante el proceso de combustión en el motor la cual se transforma en energía térmica y esta a su vez en energía mecánica con la cual el automóvil se desplaza



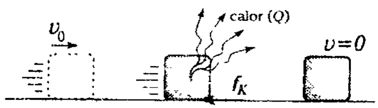
El motor eléctrico al recibir energía eléctrica internamente, debido a la interacción de sus partes por fricción disipa calor y también transforma la energía que reciben en energía mecánica de rotación que entrega en su eje.

$$\therefore \left(\begin{array}{c}\text{Energía}\\ \text{eléctrica}\end{array}\right) \text{ se transforma en } \left(\begin{array}{c}\text{Energía mecánica}\\ \text{y energía calorífica}\end{array}\right)$$

El ladrillo recibe energía cinética.



Durante el deslizamiento las rugosidades chocan y aumentan las vibraciones moleculares en el ladrillo, su temperatura aumenta y va a disipar energía calorífica hacia el medio ambiente.

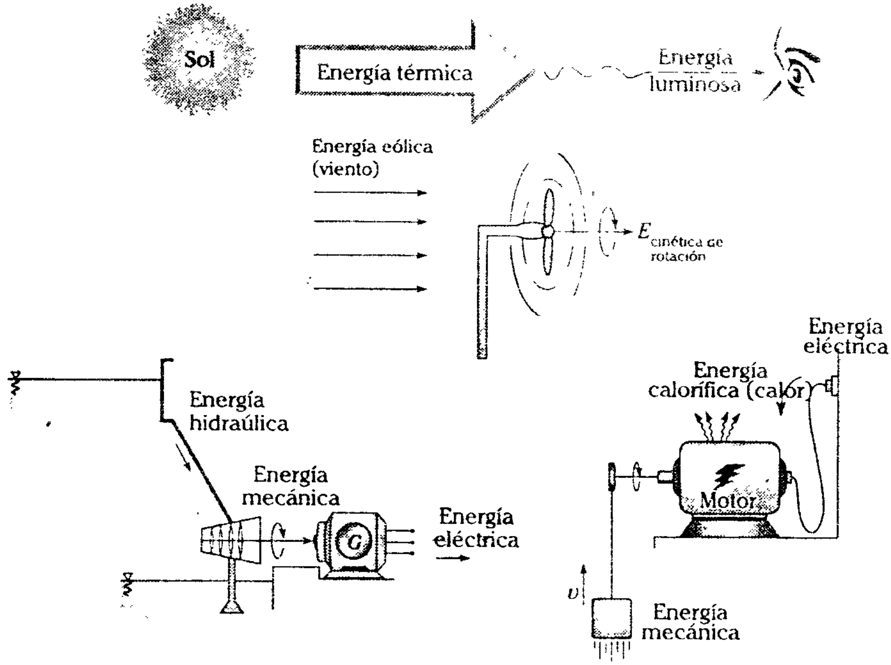


En este caso vemos como la energía cinética se va transformando en energía calorífica.

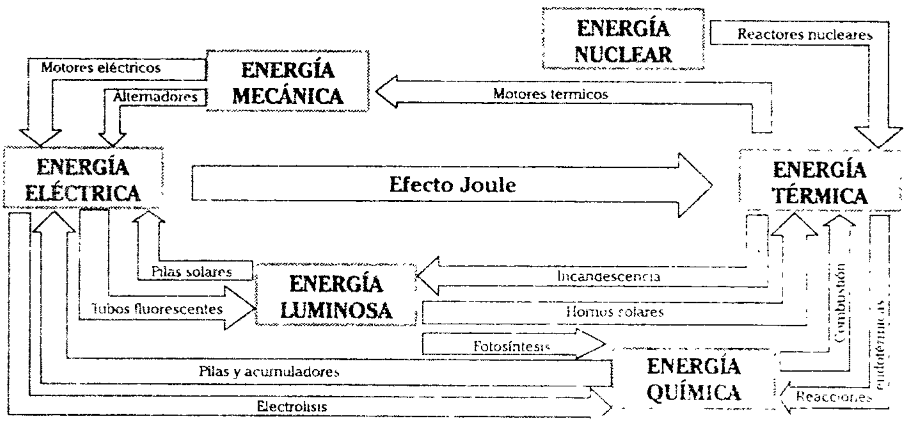
¿Qué está sucediendo en cada uno de los casos mostrados? La energía o movimiento siempre está presente en la naturaleza y tiene la propiedad de transformarse.

¿Qué conclusión podemos plantear? A nivel básico, **la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma** (el movimiento está asociado y es la forma principal de existencia de la materia)

A continuación se esquematizan algunos procesos que tienen que ver con las diferentes transformaciones que experimenta la energía.

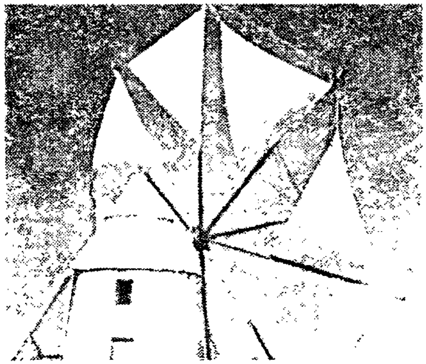


TRANSFORMACIONES DE LA ENERGÍA

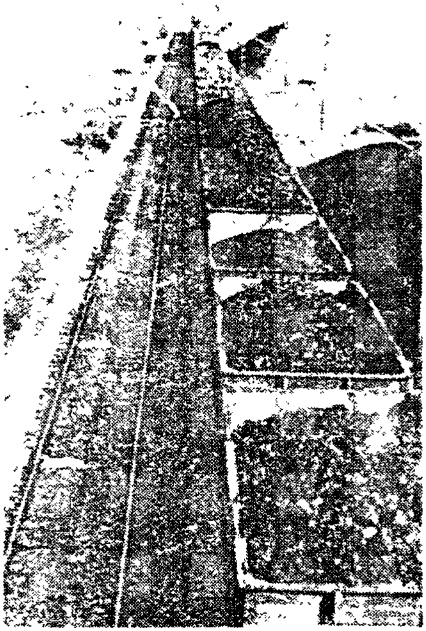


Este cuadro sinóptico nos muestra las denominaciones que damos y los dispositivos que suelen participar en las diversas transformaciones de la energía.

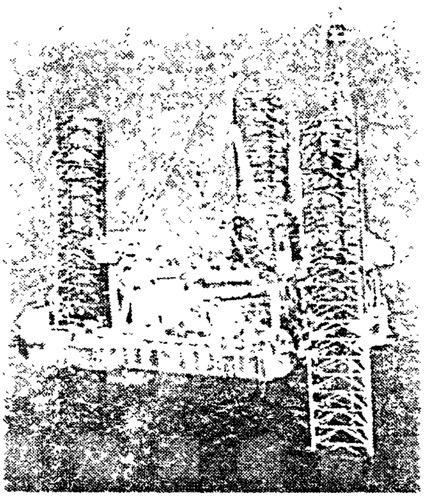
El Sol es la principal fuente natural de energía sobre la Tierra, sin él sería imposible la vida misma



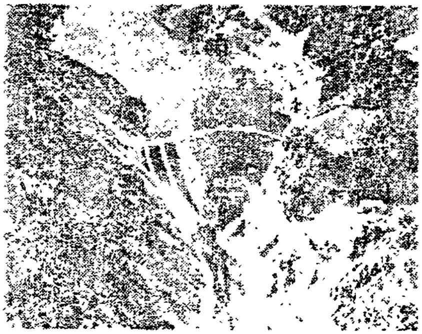
El viento fue usado como una de las primeras fuentes de energía. Los chinos lo utilizaban hace 4000 años para la navegación, también para hacer funcionar los molinos



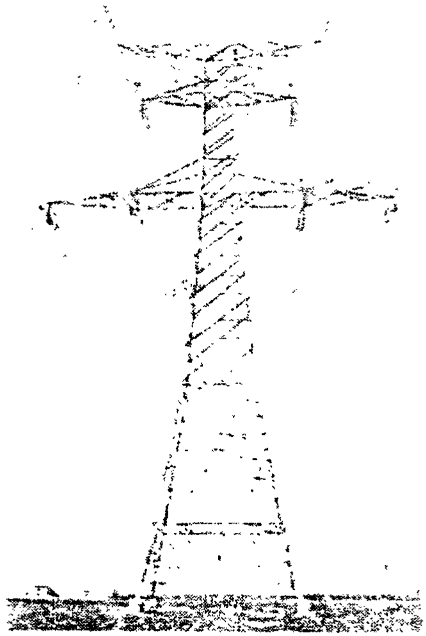
El carbón fue también una de las fuentes de energía que se usó a gran escala, por ejemplo como combustible para las locomotoras



La mayoría de medios de transporte usa al petróleo y sus derivados como combustible. Se ha estimado que el 60% de esta fuente de energía se encuentra bajo el mar y para su extracción se diseña y construyen plataformas marinas



Un elemento principal de la central hidráulica es la represa como elemento almacenador de energía potencial del agua que luego será transformada en energía eléctrica.



La energía eléctrica es la forma de energía más difundida y de uso general en todas las naciones por su fácil transformación y distribución.

Los paneles solares son elementos que aprovechan la energía solar y así transforman en energía eléctrica principalmente.

La energía nuclear [illegible] una fuente de energía [illegible] fotografía [illegible] energía [illegible]

LA MONTAÑA RUSA

Consideremos un pequeño coche que se le eleva hasta el punto más alto de una vía. Al dejarlo libre, empieza a descender hacia abajo, y sigue después subiendo y bajando por un fantástico camino curvo, lo cual produce en los viajeros la emoción debida a los cambios bruscos de velocidad. Una descripción completa del movimiento sería muy complicada, ya que por una parte, tenemos el problema mecánico de los cambios de posición y velocidad en función del tiempo; por otra parte, la cuestión del rozamiento y por ende la generacion de calor en los rieles y las ruedas. La única razon válida para dividir aquel proceso físico en estos dos aspectos está en que así se hace posible el uso de conceptos conocidos.

Con relación al experimento imaginemos eliminar el rozamiento que acompaña siempre al movimiento y que se decidiera a usar tal idealización para la construcción de una *montaña rusa*, la cual debe arreglarse debiendo encontrar solo la manera de construirla. El coche después de elevado ha de descender y ascender repetidas veces: su punto de partida estará a 25 m de altura, por ejemplo. Al final de varias tentativas, descubriría la sencilla regla siguiente: puede darle a la trayectoria la forma que le plazca (Fig. 1) con tal de que la elevación no exceda la de la posición inicial. Si el coche debe efectuar todo el recorrido libremente, entonces la altura de la montaña puede alcanzar los 25 m todas las veces que quiera, pero nunca excederla. La altura primera no puede recuperarse jamás si el vehículo marcha sobre rieles verdaderos a causa del rozamiento.

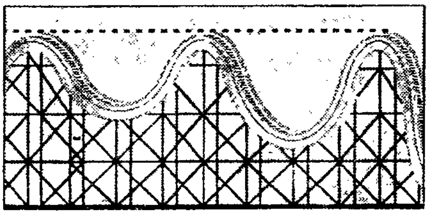


Fig. 1

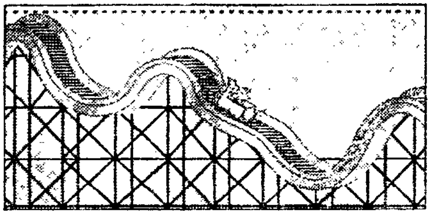


Fig. 2

En el punto más elevado, el coche tiene una rapidez nula y está a 25 m del suelo. En la posición más baja, su altura es nula, siendo, en cambio, máxima su rapidez. Estos hechos pueden ser expresados en otros términos. En la posición más elevada, el vehículo tiene energía potencial pero no energía cinética. En el punto más bajo posee la máxima energía cinética, pero ninguna energía potencial en toda posición intermedia, donde hay determinada rapidez y tiene ambas energías.

La suma de las dos magnitudes no cambia y constituye una constante durante el movimiento. En una verdadera montaña rusa (Fig. 2), donde el rozamiento impide al coche alcanzar nuevamente un nivel igual al de su punto de partida, se verifica todavía un cambio continuo entre su energía potencial y cinética; mas su suma ya no permanece constante, sino que va disminuyendo.

En efecto, ademas de las energías cinética y potencial involucradas en el movimiento, nos encontramos también con el calor creado por el rozamiento. Es evidente aquí hacer una conjetura. Si el calor puede considerarse como una forma de energía, podría ser que la suma del calor, la energía cinética y la potencial, permaneciera constante. No solo el calor, sino que este y otras formas de energía tomadas en conjunto se comportan como una sustancia, resultando invariable su suma.

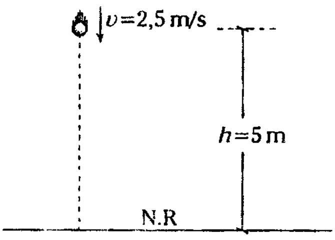
El progreso ha destruido el antiguo concepto del calor como sustancia pero ahora tratamos de introducir algo nuevo: la energía, con el calor como una de sus formas.

Problemas Resueltos

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Problema 1

Se lanza una esfera como muestra la figura. ¿A qué altura respecto del N. R. su rapidez inicial se triplicará? (Desprecie la resistencia del aire y $g = 10$ m/s^2)

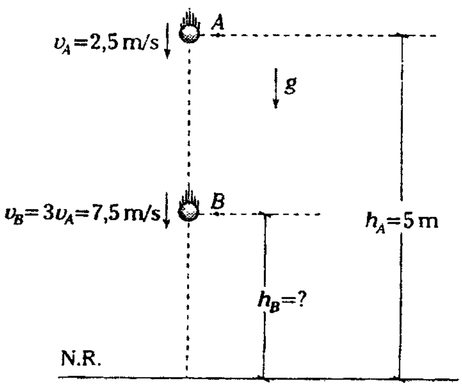


Resolución

El problema puede resolverse cinemáticamente (M.V.C.L). Otro modo de resolver el problema se basa en consideraciones energéticas.

La única fuerza que realiza trabajo sobre la esfera es la fuerza de gravedad $\left(\vec{F}_g\right)$ y al ser esta una fuerza conservativa, la energía mecánica de la esfera, mientras desciende, debe permanecer constante, es decir $E_M = \text{cte}$.

Ahora bosquejamos lo que señala el enunciado.



Para calcular h_B, haremos uso de

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 + \cancel{m}gh_A = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \cancel{m}gh_B$$

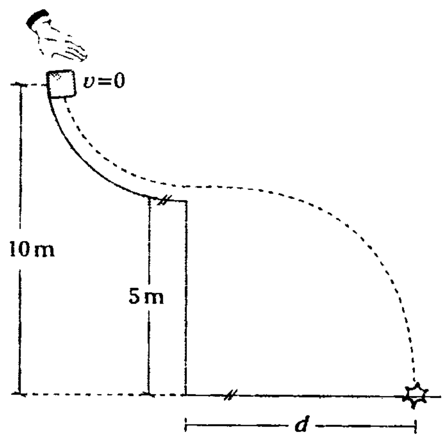
Reemplazando valores

$$\frac{1}{2}(2,5)^2 + 10(5) = \frac{1}{2}(1,5)^2 + 10.h_B$$

$$h_B = 2,5 \text{ m}$$

Problema 2

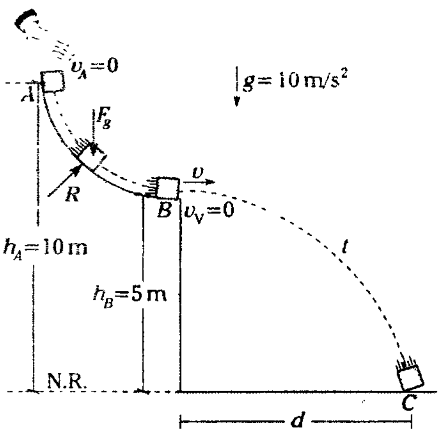
Se suelta el pequeño bloque sobre la superficie curva. Determine d. (Desprecie todo tipo de resistencia y $g = 10$ m/s^2).



Resolución

Conforme el bloque desciende el valor de su velocidad se incrementa. Cuando el bloque está por abandonar la superficie su velocidad es horizontal y a partir de dicho instante, despreciando la resistencia del aire, el bloque empezará a realizar un M.P.C.L.

Ahora para calcular d, analizamos el M.P.C.L. del bloque de B hacia C.



En la horizontal se verifica

$$d = v.t \qquad \text{(I)}$$

Note que t es el tiempo que emplea el bloque en llegar al suelo a partir de B. En ese mismo intervalo de tiempo el bloque ha descendido 5 m.

En la vertical

$$h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}gt^2$$

$$5 = \frac{1}{2}(10)t^2$$

$$\therefore \quad t = 1\ \text{s}$$

En (I)

$$d = v \qquad \text{(II)}$$

Este valor de la velocidad está relacionado con la energía cinética del bloque en ese mismo punto. Dado que la energía mecánica del bloque permanece constante mientras se desliza sobre la superficie lisa (no hay resistencia), entonces planteamos

$$E_{M(B)} = E_{M(A)}$$

Respecto del N.R. tenemos

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \cancel{m}gh_B = \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{v_A^2} + \cancel{m}gh_A$$

$$\frac{1}{2}v^2 + 10\times5 = 10\times10$$

$$v = 10\ \text{m/s}$$

En (II)

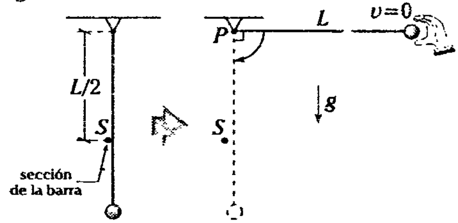
$$d = 10\ \text{m}$$

Problema 3

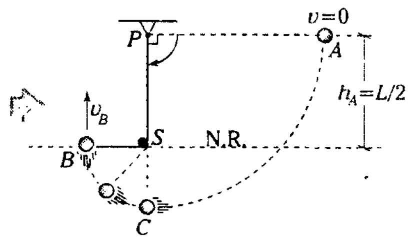
Una esfera de masa m está suspendida en un hilo ideal y de longitud L. A la esfera con el hilo se le desvía 90° y se le suelta. Y debajo del punto de suspensión del hilo, exactamente a $L/2$, hay una barra delgada fija y perpendicular al plano donde se mueve la esfera. ¿Qué módulo tendrá la aceleración de la esfera, cuando parte del hilo se coloque en posición horizontal?

Resolución

Según el enunciado tenemos



Una vez soltada la esfera, debido a la atracción terrestre, comienza a descender y debido a la fuerza que ejerce el hilo (la tensión) describe parte de una circunferencia de centro P y radio L hasta que el hilo se coloca verticalmente. A continuación sigue describiendo una circunferencia con centro S y radio $L/2$ hasta que la parte del hilo se coloque horizontalmente, tal como se muestra.

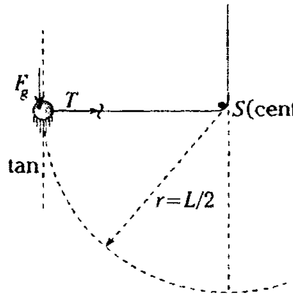


Como nos piden la aceleración de la esfera en la posición B se están refiriéndo a la aceleración instantánea o total, la cual viene dada por

$$a_B = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2} \qquad \text{(I)}$$

donde a_T y a_{cp} son la aceleración tangencial y centrípeta de la esfera en la posición B.

Calculemos a_T consideremos sobre la esfera la Segunda Ley de Newton en la dirección tangente.



Usamos $a_T = \dfrac{F_R^{\tan}}{m}$

Del gráfico

$$F_{R(\tan)} = F_g = mg$$

$$\Rightarrow \quad a_t = g \qquad \text{(II)}$$

Calculemos a_{cp}, para la esfera en la posición B usamos

$$a_{cp} = \frac{v_B^2}{r}, \text{ como } r = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a_{cp} = \frac{2v_B^2}{L} \qquad \text{(III)}$$

Se requiere v_B^2 y para determinarlo podemos hacer un balance de energía mecanica para la esfera de A hacia B, ya que no hay ninguna resistencia, tomando a B como nivel de referencia tenemos:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{PG(A)} = E_{C(B)}$$

$$\cancel{m}gh_A = \frac{\cancel{m}v_B^2}{2} \quad ; \quad \text{como } h_A = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v_B^2 = gL \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III)

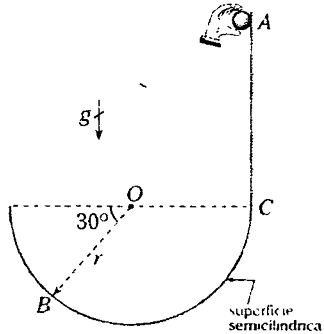
$$a_{cp} = 2g \qquad \text{(V)}$$

Finalmente reemplazamos (II) y (V) en (I)

$$a_B = g\sqrt{5}$$

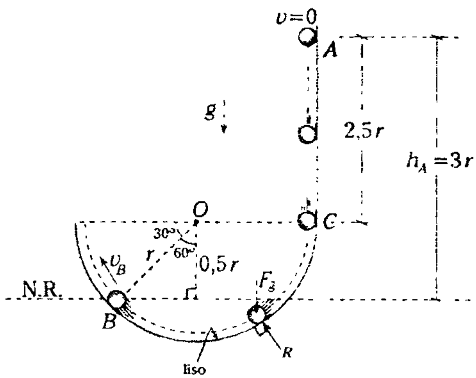
Problema 4

Se muestra el instante en que se abandona a una esfera de masa m, despreciando toda resistencia. ¿Qué rapidez tendrá la esfera cuando pase por B y qué valor tiene la reacción de la superficie? ($g = 10$ m/s^2 y $AC = 2{,}5r$)



Resolución

Una vez abandonada, la pequeña esfera empieza a descender debido a la atracción terrestre y mientras va de A hacia C experimenta un M.V.C.L. ya que no hace contacto con la pared vertical. Una vez que pasa por C comienza a describir un trayecto circunferencial como consecuencia de la reacción de la superficie semicilíndrica, tal como lo mostramos a continuacion.



Si se desea determinar v_B, es recomendable un balance de energía mecánica (E_M) para la esfera de A hacia B, ya que no hay ningún tipo de resistencia. Considerando a B como nivel de referencia tenemos que

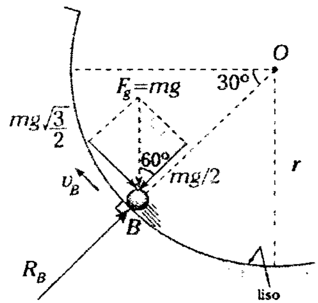
$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{PG(A)} = E_{C(B)}$$

$$\Rightarrow \quad mg(h_A) = \frac{m}{2}v_B^2 \quad \text{y como } h_A = 3r$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \sqrt{6gr} \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos la reacción de la superficie semicilíndrica sobre la esfera cuando pasa por B; para ello utilizamos en dicha posición la Segunda Ley de Newton a lo largo del radio



En B usamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$\Rightarrow \quad R_B - \frac{mg}{2} = \frac{mv_B^2}{r} \qquad \text{(II)}$$

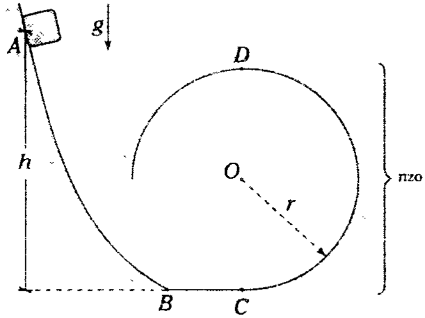
Finalmente reemplazamos (I) en (II)

$$\Rightarrow \quad R_B - \frac{mg}{2} = \frac{m}{r}\left(\sqrt{6gr}\right)^2$$

$$\therefore \quad R_B = 6{,}5\ \text{mg}$$

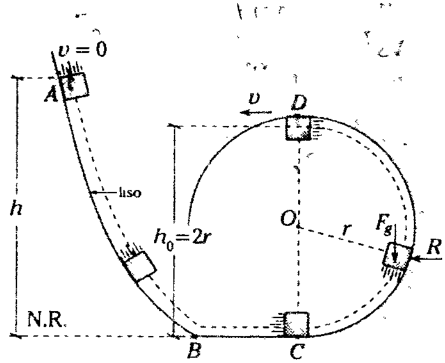
Problema 5

Un pequeño bloque es dejado en libertad en la posición que se muestra. Determine el menor valor de h de tal manera que el bloque pueda completar una vuelta en el rizo (desprecie todo tipo de resistencia).



Resolución

El bloque una vez abandonado empieza a descender debido a la atracción terrestre y a partir de B todo su movimiento es debido a su inercia, siendo su movimiento M.R.U. de B hacia C y desde C desarrolla un movimiento circunferencial, tal como mostramos.



El bloque puede completar el rizo, si al menos pasa por la parte más alta (D) y para determinar h podemos considerar un balance energía mecánica para el bloque, como no hay rozamiento la energía mecánica del bloque se conserva de A hacia D. Respecto del nivel de referencia tenemos

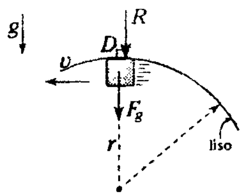
$$E_{M(A)} = E_{M(D)}$$

$$\cancel{E_{C(A)}} + E_{PG(A)} = E_{C(D)} + E_{PG(D)}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}v^2}{2} + \cancel{m}g\underbrace{(h_D)}_{2r}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} + 2r \qquad \text{(I)}$$

Como piden el menor valor de h de (I) notamos que h sera mínimo si v_D es mínima. Al requerirse $v_{D(\text{mín})}$, calculemos v_D y para ello analicemos al bloque en D y consideremos la Segunda Ley de Newton.



R: reacción del rizo sobre el bloque

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$\Rightarrow mg + R = m\left(\frac{v^2}{T}\right)$$

$$\Rightarrow v^2 = gr + R \qquad \text{(II)}$$

Ahora en (II), para que v_D sea mínima, R debe ser mínima y lo mínimo que puede ser en las condiciones dadas es $R \approx 0$, esto implica que cuando el bloque pasa por D no se apoya sobre el rizo, es decir en dicho instante no toca a la superficie.

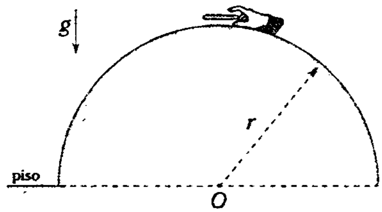
$$\Rightarrow v^2_{\text{mín}} = gr$$

Finalmente en (I)

$$h_{\text{mín}} = \frac{gr}{2g} + 2r = 2,5r$$

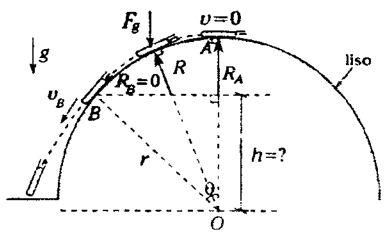
Problema 6

En la figura se muestra el instante en que una moneda es soltada sobre la parte más alta de un casquete esférico fijo y liso ¿a qué altura respecto del piso la moneda abandona el casquete?



Resolución

La moneda una vez soltada comienza a resbalar sobre el casquete liso y mientras va descendiendo va aumentando su rapidez, lo cual determina que la esfera presenta mayor tendencia a salirse horizontalmente de la superficie. Esto a su vez determino que la reacción del casquete vaya disminuyendo hasta el instante en que la moneda deja de hacer contacto con el casquete, e inicia un M.P.C.L tal como se muestra.



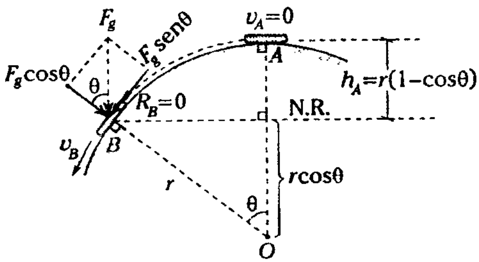
La moneda abandona el casquete en B.

$$\Rightarrow R_B = 0 \text{ (Reacción del casquete en } B)$$

Como piden la altura a la cual la moneda abandona el casquete se verifica que

$$\Rightarrow h = r\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

Se requiere $\cos\theta$ y esto lo podemos determinar al analizar el bloque de A hacia B se debe considerar un balance de energía mecánica, ya que, como no hay asperezas de A hacia B, la energía mecánica del bloque se conserva.



Respecto del nivel de referencia tenemos

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\Rightarrow \cancel{E_{C(A)}} + E_{PG(A)} = E_{C(B)} + \cancel{E_{PG(B)}}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}gh_A = \frac{\cancel{m}v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow gr(1-\cos\theta) = \frac{v_B^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Ahora se requiere v_B^2, en la posición B para la moneda usamos la Segunda Ley de Newton, es decir

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$mg\cos\theta = m\frac{v_B^2}{r}$$

$$\Rightarrow v_B^2 = gr\cos\theta \qquad \text{(III)}$$

Reemplacemos (III) en (II)

$$gr(1-\cos\theta) = \frac{gr\cos\theta}{2}$$

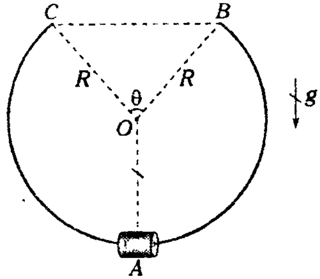
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

Finalmente, en (I)

$$h = \frac{2}{3}r$$

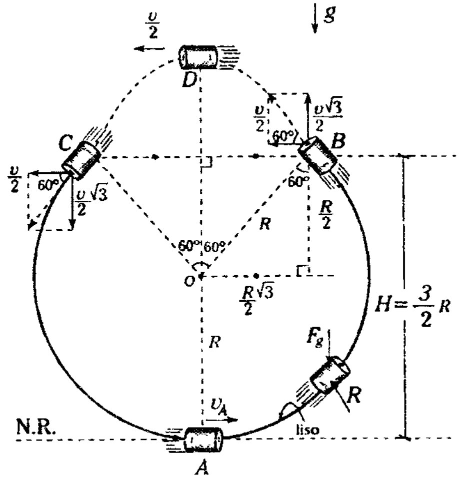
Problema 7

Con un alambre liso se forma parte de una circunferencia y se coloca verticalmente tal como se muestra. ¿Qué rapidez horizontal se necesita comunicarle al collarín que descansa en A, de tal manera que luego de salir por B llegue a C y complete la circunferencia? (Desprecie la resistencia del aire y considere $\theta = 120°$)



Resolución

Cuando al collarín se le comunica la rapidez necesaria (v_A), éste por inercia empieza a describir parte de un trayecto circunferencial (de A a B) al salir por B y de ahí empezar ahora a describir un M.P.C.L. hasta ingresar por C tal como se muestra en la figura.



...nte el deslizamiento del collarín, este no ...rimenta ninguna resistencia y su energía ...ánica tampoco varía. Por lo tanto planteamos

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

...pecto del nivel [illegible]

$$E_{C(A)} + E_{PG(A)} = E_{C(B)}$$

$$\frac{\cancel{m}v_A^2}{2} = \frac{\cancel{m}v^2}{2} + \cancel{m}gH$$

$$v_A^2 = v^2 + 2g\left(\frac{3R}{2}\right) \qquad \text{(I)}$$

Para calcular ahora a v se debe analizar el movimiento parabólico de caída libre de B a C (previa descomposición de las velocidades).
En la dirección horizontal planteamos

$$d_{BC} = v_A t_{BC}$$

$$R\sqrt{3} = \frac{v}{2} t_{BC}$$

$$\therefore \quad t_{BC} = \frac{2R\sqrt{3}}{v} \qquad \text{(II)}$$

Ahora en la dirección vertical, usamos

$$\vec{v}_F = \vec{v}_0 + \vec{g}t_{BC}$$

$$-\frac{v}{2}\sqrt{3} = +\frac{v\sqrt{3}}{2}(-g)t_{BC}$$

$$\Rightarrow \quad t_{BC} = \frac{v\sqrt{3}}{g} \qquad \text{(III)}$$

Igualando (II) con (III)

$$\frac{2R\sqrt{3}}{v} = \frac{v\sqrt{3}}{g}$$

$$\therefore \quad v^2 = 2Rg$$

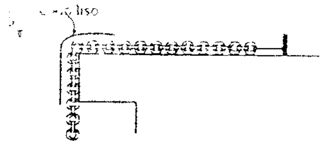
En (I)

$$v_A^2 = 2gR + 3gR = 5gR$$

$$\therefore \quad v_A = \sqrt{5gR}$$

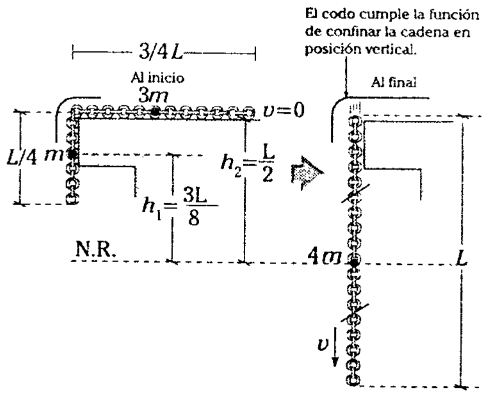
Problema 8

Se muestra una cadena homogénea de longitud L. Si ... sobresale de la mesa lisa al cortar ... adquiere la cadena en el ... posición vertical?



Resolución

Cuando se corta la cuerda, ya no habrá fuerza de tensión que equilibre a la fuerza de gravedad sobre la parte de la cadena que sobresale, al no haber asperezas, inmediatamente la cadena inicia su movimiento hasta que se coloque completamente sobre la vertical.



A la parte que sobresale le asociamos una masa m; a la que está sobre la superficie, $3m$ y a toda la cadena, $4m$.
Para calcular v, podemos proceder de dos formas: una usando la Segunda Ley de Newton con cinemática, lo cual determinaría que utilicemos el calculo integral y la otra opción es empleando un balance de energía. Debido a que no hay rozamiento, tomaremos esta última opción para determinar v.

Notamos que la cadena no es una partícula, sino un cuerpo con ciertas dimensiones que se traslada. En este caso, se sugiere trabajar con el centro de gravedad de la cadena.

Para hacer el balance de energía, tomaremos como referencia el centro de gravedad de la cadena en la situación final y además en la situación inicial pensaremos que la cadena está dividida en dos porciones $L/4$ y $3L/4$.

Se deduce que

$$\underbrace{E_{PG}^{\text{inicial}}}_{\substack{\text{Es la } E_{PG} \text{ de}\\ \text{las partes de}\\ \text{la cadena.}}} = \underbrace{E_{C}^{\text{final}}}_{\substack{\text{Es la } E_{C} \text{ de}\\ \text{toda la}\\ \text{cadena.}}}$$

Entonces de la figura tenemos

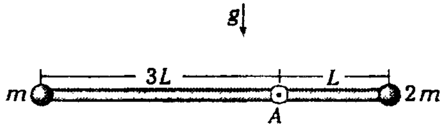
$$\cancel{m}gh_1+(3\cancel{m})gh_2=\frac{(4m)v^2}{2}$$

$$g\left(\frac{3L}{8}\right)+3g\left(\frac{L}{2}\right)=2v^2$$

de donde $v=\frac{1}{4}\sqrt{15gL}$

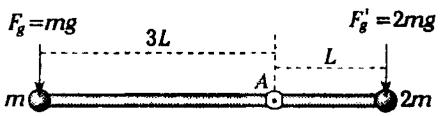
Problema 9

Dos pequeñas esferas que están fijas a una barra rígida de masa despreciable son abandonadas tal como se muestra. Determine la maxima rapidez de cada esfera (desprecie todo tipo de rozamiento).

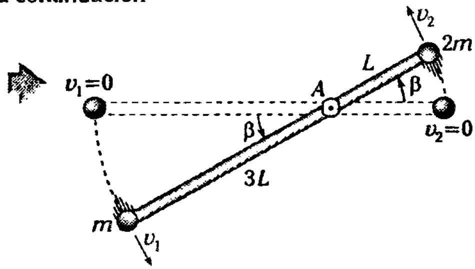


Resolución

Al abandonar el sistema, la Tierra atrae a cada una de las esferas, debido a ello hay un momento resultante respecto de A.



Como $M_A^{F_g'}>M_A^{F_g}$ la barra empezará a rotar en sentido horario, respecto de A tal como se muestra a continuación



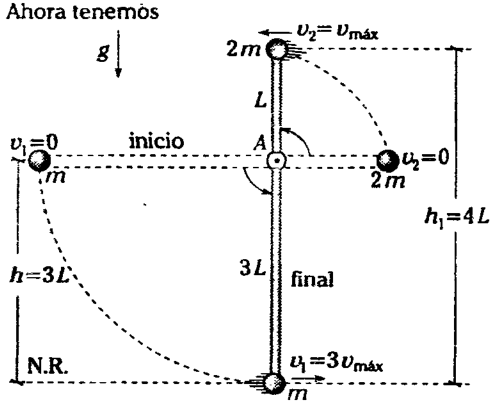
A partir de la figura, en función de los recorridos de las esferas, se tiene que el recorrido de m es el triple de $2m$ en el mismo intervalo de tiempo

$$\Rightarrow \quad v_1=3v_2\,\text{s} \qquad \text{(I)}$$

Ahora de la relación (I) notamos que las esferas alcanzarán su rapidez máxima en el mismo instante. Para determinar la máxima rapidez de cualquiera de las esferas, tendríamos que recordar que ella se alcanza cuando la aceleración tangencial de las esferas tendría que ser nula ($a_T=0$).

Según el sistema que tenemos, cada una de las esferas tendrá una aceleración tangencial nula, cuando la barra de masa despreciable se coloque en posición vertical ya que para esta posición sobre cada esfera la fuerza resultante en la dirección tangencial es nula $\left(F_R^{\tan}=0 \;\Rightarrow\; a_T=0\right)$.

Ahora tenemos



Al calcular $v_{máx}$ podemos considerar un balance de energía mecánica para el sistema ya que no hay ningún tipo de resistencia. Planteamos asi:

$$E_{M_0}=E_{M_F}$$

Respecto del nivel de referencia tenemos

$$(\cancel{m}gh)+(2\cancel{m}gh)=(2\cancel{m}gh_1)+\frac{\cancel{m}v_1^2}{2}+\frac{(2\cancel{m})v_2^2}{\cancel{2}}$$

$$3g(3L)=2g(4L)+\frac{(3v_{máx})^2}{2}+(v_{máx})^2$$

$$gL=\frac{11}{2}v_{máx}^2$$

$$\Rightarrow\ v_{máx}=\sqrt{\frac{2gL}{11}}\ \text{m/s}$$

Por lo tanto, la rapidez máxima de cada esfera es

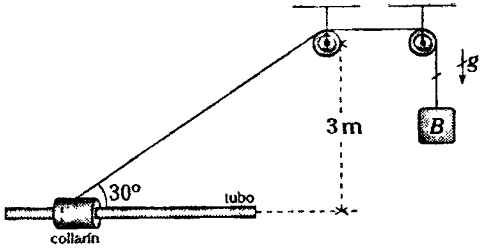
$$v_1=3v_{máx}=3\sqrt{\frac{2gL}{11}}$$

$$v_2=v_{máx}=\sqrt{\frac{2gL}{11}}$$

Tener en cuenta que al hacer el balance de energía no se ha tomado en cuenta a la barra debido a que es de masa despreciable y por ende la energía que le podamos asociar.

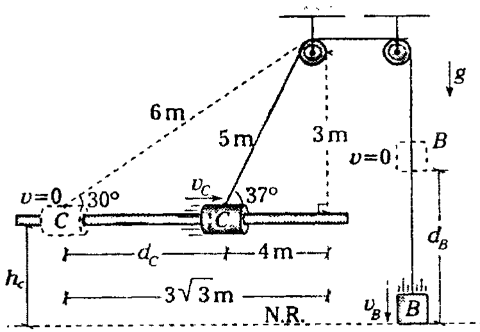
Problema 10

El sistema que se muestra es dejado en libertad. Si se desprecia todo rozamiento y la cuerda es ideal, ¿qué rapidez adquiere el bloque B en el instante en que la cuerda forme 37° con el tubo? ($m_A=m_B$ y $g=10$ m/s²).



Resolución

Una vez abandonado el sistema, el bloque B comienza a descender debido a la atracción terrestre, lo cual trae como consecuencia jalar al collarín por medio de la cuerda cuando esta forme 37° con el tubo se tendría



A partir del gráfico podemos establecer que

$$d_B=1\,\text{m}\ \text{y}\ d_C=(3\sqrt{3}-4)\text{m}$$

lo cual permite señalar que el bloque (B) y el collarín (C) recorren longitudes diferentes en tiempos iguales.

Por lo tanto, en el instante dado $v_B\neq v_C$.

Al calcular v_B, consideramos un balance de energía mecánica para el sistema, ya que no hay ningún tipo de rozamiento.

$$E_{M_0}=E_{M_F}$$

A partir del nivel de referencia se tiene

$$E_{PG(C)}+E_{PG(B)}=E_{PG(C)}+E_{C(C)}+E_{C(B)}$$

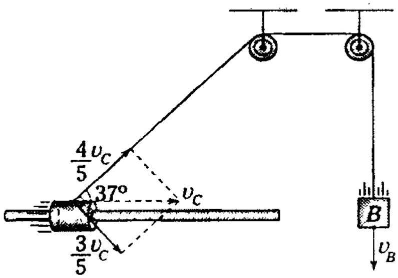
$$\Rightarrow\ \cancel{mgh_C}+m_Bgd_B=\cancel{mgh_C}+\frac{mv_C^2}{2}+\frac{m_Bv_B^2}{2}$$

Reemplazando datos

$$2(10)(1)=\frac{4}{2}v_C^2+\frac{(2)v_B^2}{2}$$

$$20=2v_C^2+v_B^2 \qquad \text{(I)}$$

Se requiere una relación entre v_B y v_C. Y para ello utilizamos elementos de Cinemática. Como la cuerda es ideal, entonces es inextensible, ello significa que la rapidez de todos sus puntos a lo largo de la cuerda es la misma.



La rapidez de los extremos de la cuerda son v_B y $\frac{4}{5}v_C$ los cuales deben ser iguales por condición de cuerda inextensible

$$\Rightarrow \quad v_B=\frac{4}{5}v_C \quad \Rightarrow \quad v_C=\frac{5}{4}v_B \qquad \text{(II)}$$

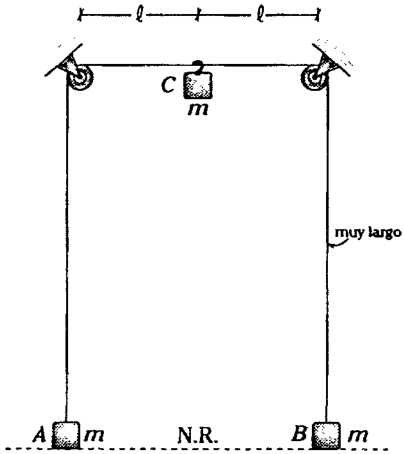
Finalmente reemplazando (II) en (I)

$$20=2\left(\frac{5}{4}v_B\right)^2+v_B^2$$

$$\therefore \quad v_B=\frac{4}{33}\sqrt{330}\ \text{m/s}$$

Problema 11

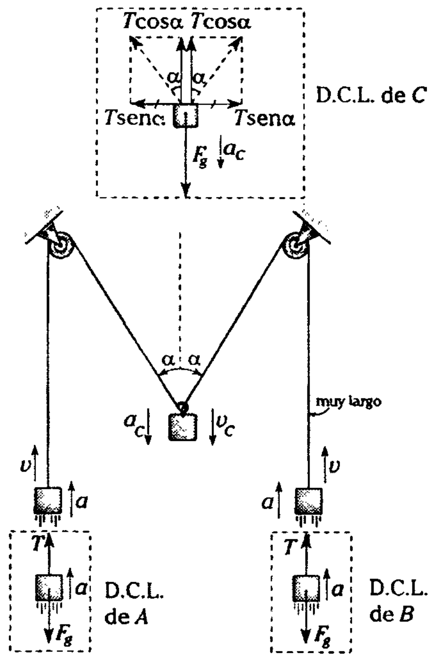
Al colocar el bloque en la forma que se indica, el sistema empieza a moverse. Determine el máximo valor de la velocidad del bloque mencionado. (Desprecie todo rozamiento)



Resolución

Antes de calcular la rapidez máxima del bloque C, primero debemos de saber en qué condiciones la presenta y para ello primero pasemos a ver un análisis dinámico de los bloques.

Los bloques A y B inicialmente están en reposo; luego de colocar el bloque central, todos los bloques empiezan a moverse y los valores de su respectiva rapidez se incrementan, es decir aceleran.



Para cualquier intervalo de tiempo, los bloques A y B presentarán igual desplazamiento, ello determina que tengan igual velocidad y aceleración, además se encuentran a la misma altura respecto al N.R. en todo instante.

Como el bloque A o B tienen aceleración dirigida hacia arriba, se debe verificar

$$\Rightarrow \quad T>Fg=mg \qquad \text{(I)}$$

El bloque C tiene su aceleración dirigida hacia abajo

$$\Rightarrow \quad F_g > 2T\cos\alpha$$

$$mg > 2T\cos\alpha \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) concluimos

$$T > 2T\cos\alpha$$

$$\therefore \quad \cos\alpha < \frac{1}{2}$$

es decir $\alpha < 60°$

Esta es la condición para que los bloques laterales aceleren hacia arriba y el central acelere hacia abajo.

¿Qué sucede si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$?

Si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha = 60°$.

Al analizar a los bloques dinámicamente, suponemos que el bloque C aún tiene aceleración. Usando la Segunda Ley de Newton tenemos

$$F_g - 2T\cos 60° = ma_C$$

$$\Rightarrow \quad mg - T = ma_C \qquad \text{(III)}$$

Imaginemos que el bloque A y B aún tienen aceleración así que planteamos

$$T - F_g = ma$$

$$T - mg = ma \qquad \text{(IV)}$$

De (III) en (V)

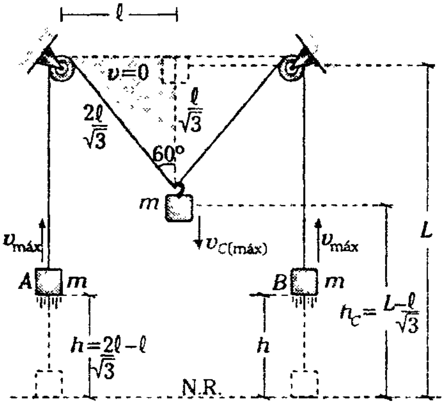
$$a_C = -a \qquad \text{(V)}$$

Recuerde que a_C y a son valores de aceleración, por lo tanto son positivos. La relación (V) sólo es verificable si

$$a_C = a = 0$$

Esto significa que cuando $\alpha = 60°$ todos los bloques dejan de acelerar, es decir, el valor de sus velocidades deja de incrementarse, por lo tanto en este instante todos los bloques presentan su máxima rapidez.

Ahora para calcular la rapidez máxima de $C(v_{C(\text{máx})})$ podemos plantear un balance de energía mecánica sobre el sistema, ya que no se manifiesta ningún tipo de resistencia.



A partir de este gráfico, para el sistema respecto del N.R. planteamos

$$E_{M_F} = E_{M_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_{PG(C)} = E'_{PG(C)} + E_{C(C)} + E_{PG(A)} + E_{C(A)} + E_{PG(B)} + E_{C(B)}$$

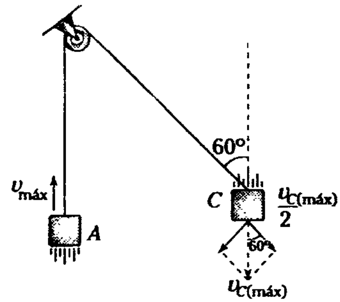
$$\Rightarrow \quad \cancel{m}gL = \cancel{m}gh_C + \frac{\cancel{m}v^2_{C(\text{máx})}}{2} + \cancel{m}gh + \frac{\cancel{m}v^2_{\text{máx}}}{2} + \cancel{m}gh + \frac{\cancel{m}v^2_{\text{máx}}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad gL = g\left(L - \frac{\ell}{\sqrt{3}}\right) + 2g\left(\frac{2\ell}{\sqrt{3}} - \ell\right) + \frac{v^2_{C(\text{máx})}}{2} + v^2_{\text{máx}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2_{C(\text{máx})}}{2} + v^2_{\text{máx}} = g\ell\left(2 - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{(VI)}$$

Según esta última expresión, se requiere una relación entre $v_{C(\text{máx})}$ y $v_{\text{máx}}$ La rapidez de los bloques A y B se relaciona con la rapidez del bloque C.

El extremo de la cuerda atado al bloque central tiene igual rapidez que este. Asimismo, la rapidez del bloque lateral es igual a la rapidez del extremo de la cuerda a lo cual está unido. Sin embargo, todos los puntos de la cuerda tienen la misma rapidez a lo largo de esta. (La cuerda no se estira) Analizando una parte del sistema.



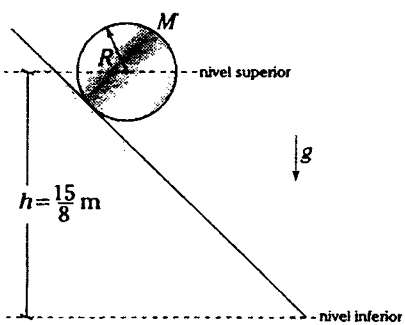
$$\therefore\ v_{\text{máx}}=\frac{v_{C(\text{máx})}}{2}$$

En (VI)

$$v_{C(\max)}=\sqrt{4g\ell\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)}$$

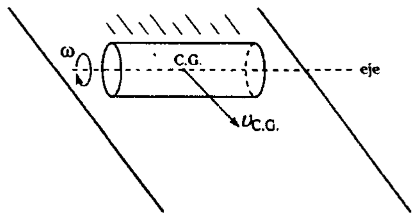
Problema 12

Se suelta un cilindro homogéneo macizo como se muestra en la figura. Si este desciende rodando, sin deslizar y sobre el plano inclinado, determine la rapidez de su centro de gravedad cuando pase por el nivel inferior indicado. (g=10 m/s)



Resolución

En este caso el cilindro rueda sin deslizar por el plano inclinado, con lo cual el movimiento del cilindro puede interpretarse como la combinación de dos movimientos: traslación y rotación simultánea.



En virtud a su movimiento de traslación, podemos asociar al cilindro energía cinética de traslación, la cual se determina así

$$\frac{1}{2}M\,v_{C.G.}^2$$

donde

$v_{C.G.}$: es la rapidez del centro de gravedad del cilindro.

Además, en virtud a su movimiento de rotación en torno al eje, que pasa por su centro de gravedad, podemos asociar al cilindro energía cinética de rotación, la cual se determina así

$$\frac{1}{2}I\omega^2$$

donde

- ω : es la rapidez angular del cilindro respecto de su eje.
- I : es su momento de inercia respecto al eje de rotación indicado.

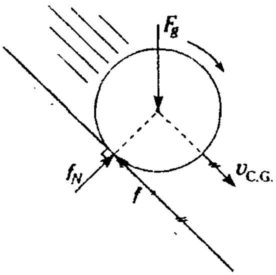
En este caso se demuestra que

$$I=\frac{1}{2}MR^2$$

luego, la energía cinética total del cilindro se puede expresar así

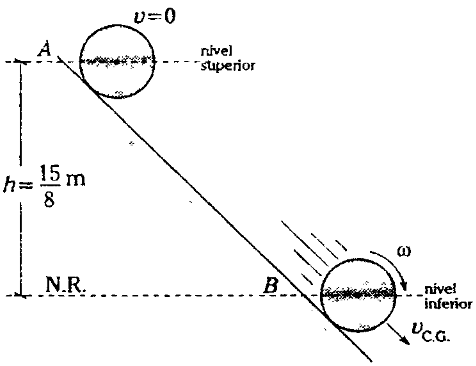
$$E_C=\frac{1}{2}M\,v_{C.G}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

La energía mecánica del cilindro se conserva mientras rueda sobre el plano porque la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de gravedad. El trabajo de la fuerza de rozamiento es nulo porque el punto de aplicación de esta no se desplaza. Con esta conclusión no se disipa energía en forma de calor.



f : fuerza de rozamiento por rodadura.

Conforme el cilindro desciende su energía potencial disminuye pero su energía cinética aumenta.



Del gráfico se verifica que

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

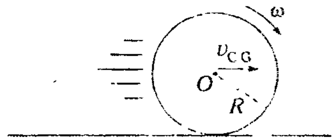
$$\Rightarrow \quad E_{PG(A)} = E_{C(B)}$$

$$\Rightarrow \quad Mgh = \frac{M}{2}v_{C.G}^2 + \frac{I\omega^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{M}gh = \frac{1}{2}\cancel{M}v_{C.G.}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cancel{M}R^2\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_{C.G}^2 + \frac{1}{4}R^2\omega^2 = gh \qquad \text{(I)}$$

De la expresión (I) vemos que se requiere una relación entre $v_{C.G}$ y ω. En el capítulo V (movimiento circunferencial) para un disco, un cilindro o una esfera que se traslada sin deslizar sobre un plano se demostró que



$$v_{C.G.} = \omega R$$

de donde

$$\omega = \frac{v_{C.G}}{R}$$

Ahora reemplazando en (I)

$$\frac{1}{2}v_{C.G}^2 + \frac{1}{4}R^2\left(\frac{v_{C.G}}{R}\right)^2 = gh$$

Operando

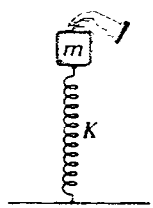
$$v_{C.G} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Reemplazando valores

$$v_{C.G} = 5 \text{ m/s}$$

Problema 13

En la figura mostrada el resorte de rigidez $K=20$ N/m está sin deformar y se sostiene a un bloque de 1 kg. ¿Qué máxima rapidez adquiere el bloque al ser soltado? ¿Qué máxima deformación experimenta el resorte? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Al soltarse al bloque, éste tendrá $v_0=0$ y por la acción de la fuerza de gravedad comienza a comprimir al resorte de modo que en un principio

$$F_g(\downarrow) > F_E(\uparrow)$$

Por lo tanto el bloque acelera hacia abajo pues en esa dirección existe una $F_R(\downarrow)$.

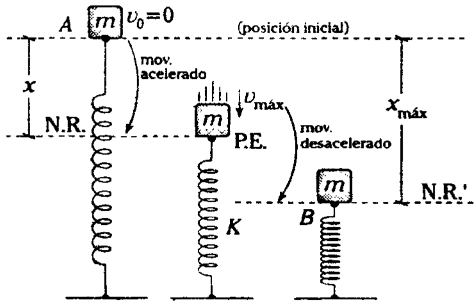
El bloque termina de acelerar cuando, la $F_R = 0$; es decir

$$F_g = F_e$$

$$1(10) = 20x$$

$$\therefore\ x = 0{,}5\ \text{m}$$

En el gráfico sería



Si consideramos el sistema bloque más resorte, sobre él no actúan fuerzas del viento ni rozamiento (solo la $\vec{F}_g$ y la $\vec{F}_E$ realizan trabajo); entonces su energía mecanica se conserva, ahora hacemos el balance de energía para el sistema de A hacia la P.E.

$$E_{M(A)} = E_{M(P.E.)}$$

$$\left(\cancel{E_C} + E_{PG} + \cancel{E_{PE}}\right)_A = \left(E_C + \cancel{E_{PG}} + E_{PE}\right)_{P.E.}$$

$$mgx = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Reemplazando datos

$$1(10)0{,}5 = \frac{1}{2}(1)v_{máx}^2 + \frac{1}{2}(20)(0{,}5)^2$$

$$\therefore\ v_{máx} = \sqrt{5}\ \text{m/s}$$

Analogamente para hallar la máxima deformación ($x_{máx}$) que experimenta el resorte, se tendrá cuando el bloque ya no pueda comprimir más al resorte ($v_{bloque} = 0$), consideramos el plano de referencia en la posicion mas baja (posición final) y nuevamente aplicamos conservación de la energía mecánica para el sistema de A hacia B, entonces:

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

Respecto del (N.R)' trazado por B tenemos

$$\left(\cancel{E_C} + E_{PG} + \cancel{E_{PE}}\right)_A = \left(\cancel{E_C} + \cancel{E_{PG}} + E_{PE}\right)_B$$

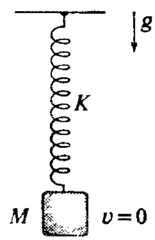
$$mgx_{max} = \frac{Kx_{máx}^2}{2}$$

$$x_{máx} = \frac{2mg}{K}$$

Reemplazando datos $x_{max} = 1$ m

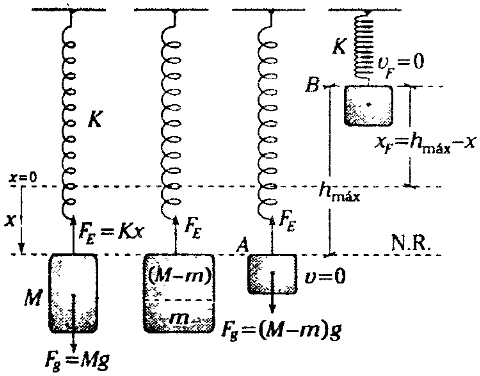
Problema 14

Una masa m se desprende del bloque M colgada de un resorte de rigidez K. ¿A qué altura máxima se elevará después de ello la parte restante del bloque?



Resolución

Antes de desprenderse m de la masa total M del bloque; este se hallaba en reposo y en estas condiciones la $F_g = F_E$. Al desprenderse la porción m, la fuerza de gravedad sobre la parte que queda es menor que la fuerza elástica y la fuerza de gravedad. Entonces se manifiesta una fuerza resultante hacia arriba y la parte de masa $(M-m)$ empezará a elevarse verticalmente hasta alcanzar su altura máxima (h_{max}).



En el equilibrio del bloque M

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\Rightarrow \; Kx=Mg$$

Ahora para calcular h_{max}, podemos hacer uso de balance de energía, ya que sobre el sistema bloque-resorte no actúan fuerzas de rozamiento y su energía mecánica se conserva por lo tanto podemos plantear de A hacia B que:

$$E_{M(A)}=E_{M(B)}$$

$$\frac{1}{2}Kx^2=(M-m)gh_{máx}+\frac{1}{2}Kx_F^2$$

Reemplazando

$$\frac{1}{2}Kx^2=(M-m)gh_{máx}+\frac{1}{2}K(h_{máx}-x)^2$$

$$\frac{1}{2}Kx^2=Mgh_{max}-mgh_{máx}+\frac{1}{2}K(h_{max}^2-2h_{max}x+x^2)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{Kx^2}=Mgh_{max}-mgh_{máx}+\frac{1}{2}Kh_{max}^2-Kh_{máx}x+\frac{1}{2}\cancel{Kx^2}$$

Simplificando, ya que $Kx=Mg$

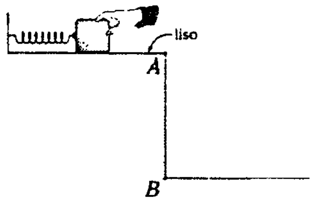
$$0=\cancel{mgh_{máx}}-mgh_{max}+\frac{1}{2}Kh_{max}^2-\cancel{Kh_{max}x}$$

$$2mgh_{máx}=Kh_{máx}^2$$

$$\therefore \quad h_{máx}=2\text{ mg}/K$$

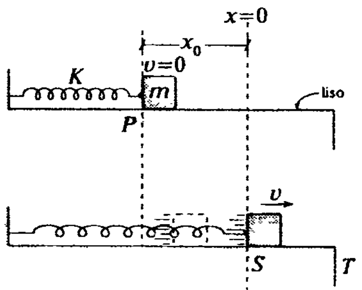
Problema 15

En la figura, se muestra un bloque de 1 kg con el cual se está comprimiendo 50 cm al resorte de rigidez K = 2 000 N/m. Si se le suelta al bloque, ¿con qué rapidez llega a la parte más baja?
(g = 10 m/s^2, $\overline{AB}$ = 5 m y el bloque no está soldado al resorte).



Resolución

Antes de que se suelte el bloque, el resorte almacena energía potencial elástica y el bloque de la superficie que está apoyado no tiene energía mecánica. Cuando se suelta el bloque, el resorte buscará recuperar su longitud natural, mientras lo intenta le va transmitiendo movimiento al bloque tal como se muestra.



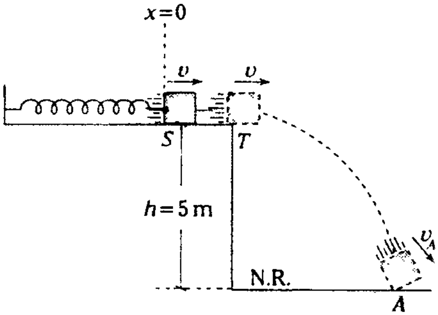
Para este caso, el resorte una vez que recupera su longitud natural (hasta $x=0$) le transmite toda su E_{PE} al bloque, el cual la manifiesta en forma de energía cinética (E_C). Entonces se tiene

$$E_{PE}^{\text{resorte}}=E_C^{\text{bloque}} \Rightarrow \frac{Kx^2}{\cancel{2}}=\frac{mv^2}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow \; 2\,000\left(\frac{1}{2}\right)^2=(1)v^2$$

$$\Rightarrow \; v=10\sqrt{5}\text{ m/s}$$

A partir de S, el bloque continúa avanzando debido a su inercia y deja al resorte sin deformar en S. Luego abandona la superficie y comienza un M.P.C.L. hasta impactar en el piso tal como se muestra.



Ahora para determinar la v, podemos proceder considerando las nociones del M.P.C.L o planteamos la conservación de la energía mecánica para el bloque. Al preferir este último, de T hacia A se cumple que

$$E_{M(T)}=E_{M(A)}$$

De la figura

$$(E_C+E_{PG})_T=(E_C+\cancel{E_{PG}})_A$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2}+mgh=\frac{mv_A^2}{2}$$

Reemplazando datos

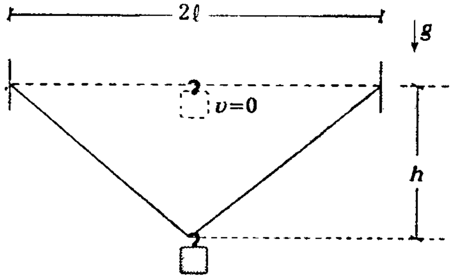
$$(10\sqrt{5})^2+10(5)=\frac{v_A^2}{2}$$

$$\therefore \quad v_A=10\sqrt{11}\ \text{m/s}$$

El problema lo hemos resuelto al hacer el análisis por tramos. No obstante, nos preguntamos si no se pudo hacer el balance de energía de la posición P a la posición A. Se le sugiere al lector que lo intente y así ver si se obtiene la misma respuesta. En caso contrario ¿dónde esta la contradicción?

Problema 16

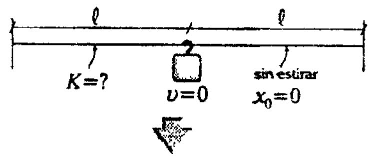
En el centro de la cuerda elástica inicialmente sin estirar y de longitud 2ℓ, se cuelga un bloque de masa m. ¿Cuál será la constante de rigidez (K) de dicha cuerda, si al soltar el bloque esta desciende como máximo h?



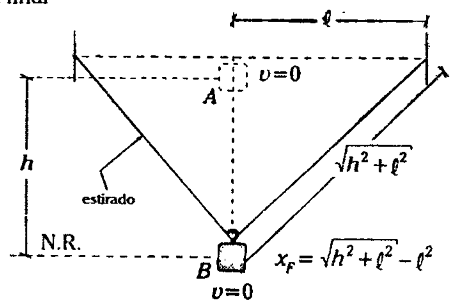
Resolución

Conforme el bloque desciende, la cuerda se estira y va almacenando energía potencial elástica. El máximo descenso h del bloque se registra cuando este se detiene por un instante, es decir, cuando su velocidad se hace nula.

Inicialmente



Al final



Ahora para determinar K, podemos hacer uso de un balance de energía mecánica. Cuando el bloque es soltado en A, respecto del N.R. tiene energía potencial gravitatoria y cuando se detiene en B, ya no. ¿Qué paso con su E_{PG}? Fue transferido a la cuerda, es decir se transformó en energía potencial elástica (E_{PE})

$$\Rightarrow \quad E_{PG}^{\text{bloque}} = E_{PE}^{\text{cuerda}} \qquad \text{(I)}$$

donde $E_{PE}^{\text{bloque}} = 2E_{PE}^{\text{mitad de la cuerda}}$

$$= \cancel{2}\left(\frac{K'}{\cancel{2}}x_F^2\right)$$

pero $K' = 2K$ y $x_F = \sqrt{h^2+\ell^2}-\ell$

$$\Rightarrow \quad E_{PE}^{\text{cuerda}} = \left(\sqrt{h^2+\ell^2}-\ell\right)^2$$

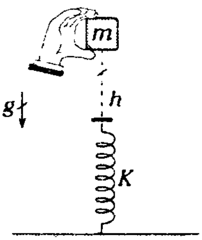
En (I)

$$mgh = 2K\left(\sqrt{h^2+\ell^2}-\ell\right)^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{mgh}{2\left(\sqrt{h^2+\ell^2}-\ell\right)^2}$$

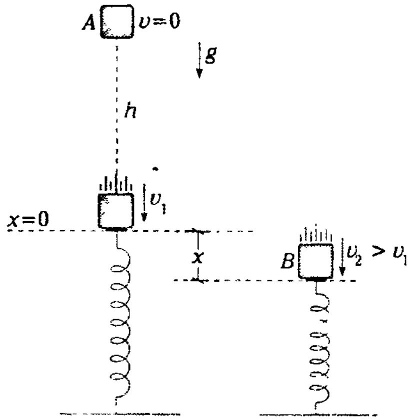
Problema 17

Se muestra el instante en que se suelta un bloque sobre un resorte sin deformar. Calcule la máxima rapidez del bloque. (Desprecie efectos del aire)



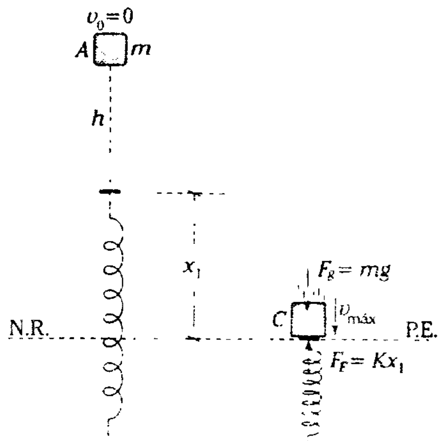
Resolución

Una vez soltado el bloque, debido a la atracción de la tierra, empieza a descender y aumenta su rapidez. Cuando encuentra el extremo libre del resorte, a este lo comienza a comprimir (x) y mientras ocurra que sobre el bloque $F_g > F_E$ ($mg > Kx$), la rapidez del bloque seguirá en aumento, tal como lo mostramos.



Como el bloque a partir de la posición B seguirá descendiendo, la deformación del resorte seguirá aumentando y por tanto también la fuerza que ejerce el resorte (F_E) al bloque. Luego llegara el instante en que la fuerza que ejerce el resorte equilibre a la fuerza de gravedad (F_g) sobre el bloque, es decir $F_g = F_E$ ($mg = Kx_1$).

Ahora tendríamos



Por lo tanto, en dicho instante estaría pasando por su posición de equilibrio (P.E.). como sabemos, en dicha posición el bloque alcanzaría su máxima rapidez ($v_{máx}$).

Calculemos $v_{máx}$, para ello consideremos balance de energía. El bloque respecto de la P.E. (Nivel de referencia) al inicio tenia energía potencial gravitatoria y al final energía cinética, como no hay resistencia del aire podemos concluir que parte de su energía potencial gravitatoria se ha transformado en energía cinética y la otra parte de su energía fue transferida al resorte en forma de energía potencial elástica. Entonces planteamos:

$$E_{PG(A)}^{\text{bloq}} = E_{C(C)}^{\text{bloq.}} + E_{PE}^{\text{resorte}}$$

$$\Rightarrow \quad mg(h+x_1) = \frac{mv_{\text{máx}}^2}{2} + \frac{K}{2}(x_1)^2 \qquad \text{(I)}$$

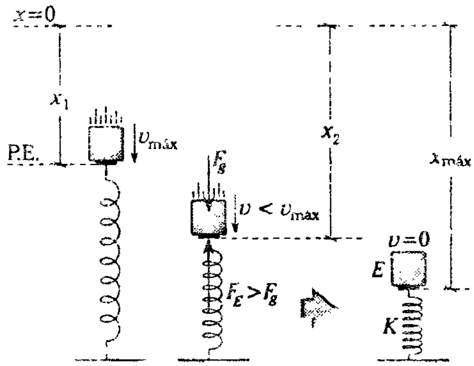
Se requiere x_1. Como x_1 representa la deformación del resorte cuando el bloque está en su posición de equilibrio, se deduce que

$$x_1 = \frac{mg}{K} \qquad \text{(II)}$$

Efectuando y despejando se obtiene

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{K}}$$

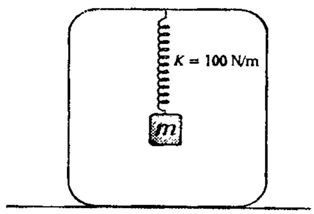
Con respecto al problema resuelto, se sabe que el bloque alcanza su $v_{máx}$ en su P.E., posición donde las fuerzas que actúan sobre el bloque están equilibradas, pero como el bloque está moviéndose en dicha posición, por inercia continuará descendiendo pero para este caso la deformación del resorte permitirá que $F_E > F_g$. Con ello el bloque empezará a disminuir su rapidez hasta que se frena ($v=0$) tal como lo mostramos.



En la posición E como el bloque ya no continúa bajando en dicho instante el resorte presenta su máxima deformación $x_{máx}$. Asimismo hay que tener presente que en dicho instante el bloque no está en equilibrio *(E)*, solo se detiene por un instante y como en dicha posición la $F_E > F_g$, él empezará a elevarse. Al no haber ningún tipo de rozamiento el bloque luego podrá recobrar la posición de donde lo soltaron.

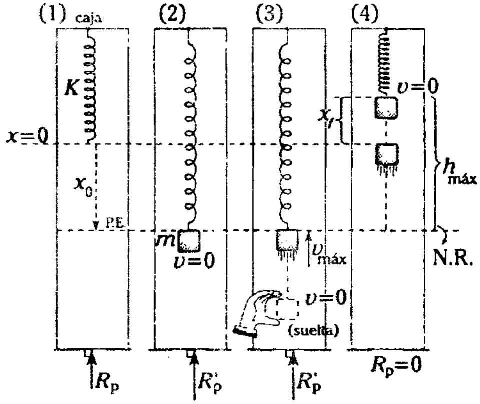
Problema 18

Un bloque de 1 kg se encuentra en reposo dentro de una caja de 2 kg tal como se indica. Si lo desplazamos hacia abajo lentamente y luego lo soltamos, determine la máxima rapidez que puede adquirir el bloque de tal forma que la caja no pierda contacto con el piso. (g = 10 m/s^2).



Resolución

Considerando las condiciones dadas y lo que nos piden tenemos



- En (1) se tiene el resorte ideal sin deformar.
- En (2) se colocó el bloque, quedando en reposo (en P.E.) y estirando al resorte en x_0.
- En (3) al bloque se le lleva lentamente hacia abajo y se le suelta; luego cuando pasa por su P.E. adquiere su máxima rapidez ($\upsilon_{máx}$).
- En (4) el bloque continúa ascendiendo (por inercia) hasta que el resorte recupera su longitud natural y luego es comprimido un x_F hasta que el bloque alcanza su altura máxima ($h_{máx}$). Aquí el bloque se detiene por un instante.

Ahora calculando $\upsilon_{máx}$, observe que desde el instante que se suelta el bloque (3) hasta que alcanza su altura máxima (4) sobre el sistema (bloque-resorte) no se manifiesta ninguna resistencia, entonces su energía mecánica se conserva y podemos plantear.

$$\Rightarrow \; E_{M_0} = E_{M_F}$$

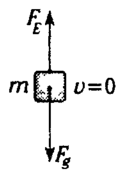
Respecto al N.R. trazado convenientemente por la P.E. se tiene

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{máx}^2 + \frac{1}{2}Kx_0^2 = mgh_{máx} + \frac{1}{2}Kx_F^2$$

$$\Rightarrow \; m\upsilon_{máx}^2 = 2mg(x_0 + x_F) + K(x_F^2 - x_0^2) \quad \text{(I)}$$

Ahora determinando x_0 y x_F.

- Para x_0: analizamos al bloque en reposo (en 2).

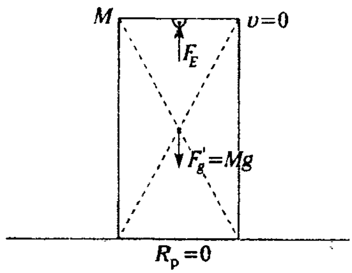


$$\left.\begin{aligned} F_E &= F_g \\ Kx_0 &= mg \\ x_0 &= mg/K \end{aligned}\right\}$$

Reemplazando datos

$$x_0 = \frac{(1)(10)}{100} = 0{,}1 \text{ m} \qquad \text{(II)}$$

- Para x_F : analizamos a la caja (en 4)
  Consideremos el sistema: caja – resorte en el instante que la caja empieza a perder contacto con el suelo, la $R_P = 0$, ya que en ese instante el resorte experimenta la máxima compresión.



Del gráfico, las fuerza F_E equilibra a la fuerza de gravedad sobre la caja F'_g, entonces

$$\Rightarrow \; F_E = F'_g$$

$$Kx_F = Mg$$

$$x_F = \frac{Mg}{K}$$

Reemplazando datos

$$x_F = \frac{2(10)}{100} = 0{,}2 \text{ m} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III), m, K y g en (I)

$$\upsilon_{máx}^2 = 20(0{,}1 + 0{,}2) + 100\left((0{,}2)^2 - (0{,}1)^2\right)$$

$$\Rightarrow \; \upsilon_{max} = 3 \text{ m/s}$$

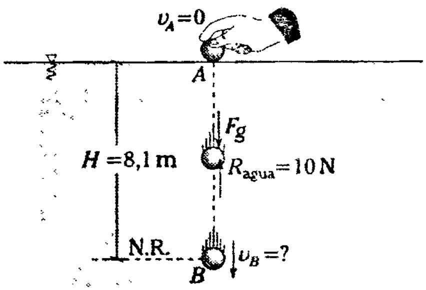
RELACIÓN TRABAJO-ENERGÍA

Problema 19

Una esfera de 2 kg es soltada sobre la superficie libre de un lago. Si la resistencia que ofrece el agua al movimiento de la esfera es de 10 N, ¿qué rapidez tiene la esfera cuando ha descendido 8,1 m? (g = 10 m/s^2)

Resolución

Bosquejemos cómo sucede el movimiento de la esfera.



En A la esfera posee $E_{PG} = mgH$

En B la esfera tiene $E_C = \frac{1}{2}mv^2$

De A hacia B hay resistencia del agua; la cual desarrolla trabajo mecánico y le varía la energía mecánica a la esfera. Por lo cual planteamos

$$W_{A\to B}^{R_{agua}} = \Delta E_M^{esfera}$$

$$-R_{agua}.H = E_{M(B)} - E_{M(A)}$$

$$-R_{agua}.H = E_{C(B)} - E_{PG(A)}$$

$$-R_{agua}.H = \frac{\cancel{m}v_B^2}{\cancel{2}} - mgH$$

$$-10.(8,1) = v_B^2 - 2(10)(8,1)$$

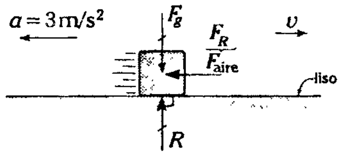
$$\therefore v_B = 9 \text{ m/s}$$

Problema 20

Un bloque de 4 kg es lanzado sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez de 10 m/s. Sobre el bloque actúa una fuerza de resistencia del aire cuyo módulo es $F_{aire} = 2v$, donde v es la rapidez del bloque. ¿Qué cantidad de trabajo desarrolla dicha fuerza, desde que se lanzó al bloque hasta el instante en que el bloque tiene una aceleración de módulo 3 m/s^2?

Resolución

Cuando el bloque tiene a = 3 m/s^2, ¿qué rapidez tendrá en dicho instante? Para saberlo podemos hacer uso de la F_{aire} en el D.C.L. del bloque.



Sobre el bloque, la fuerza resultante (F_{aire}) le ocasiona un frenado con a = 3 m/s^2. Podemos plantear

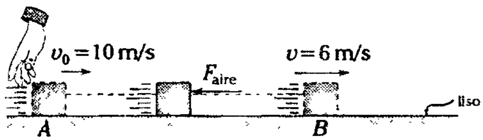
$$F_R = ma$$

$$F_{aire} = ma$$

$$2v = (4)(3)$$

$$\Rightarrow v = 6 \text{ m/s}$$

Posteriormente sobre el bloque podemos establecer



Según el enunciado debemos calcular la $W_{A\to B}^{F_{aire}}$; de este último gráfico podemos notar que la fuerza del aire causa cambios en la energía cinética del bloque. Entonces podemos plantear

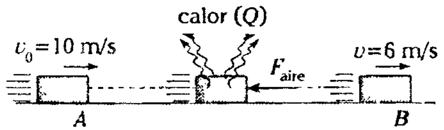
$$W_{A\to B}^{F_{aire}} = \Delta E_C^{bloque} = E_{C(B)} - E_{C(A)}$$

$$W_{A\to B}^{F_{aire}} = \frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{4}{2}(6^2 - 10^2)$$

$$\therefore W_{A\to B}^{F_{aire}} = -128 \text{ J}$$

Otro método

La resolución de este problema lo podemos enfocar señalando que la $\vec{F}_{aire}$ cumple un papel similar a la fuerza de rozamiento cinético, es decir, permite tener energía disipada en forma de calor (Q), tal como lo indicamos a continuación.



Al hacer un balance de energía de A hacia B, se entiende que parte de la energía cinética del bloque se transforma en calor.

$$\Rightarrow \quad E_{C(A)}^{\text{bloq}} = E_{C(B)}^{\text{bloq}} + Q$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + Q$$

$$\frac{4(10)^2}{2} = \frac{4(6)^2}{2} + Q$$

$$Q = 128\ \text{J}$$

Por lo establecido en la teoría

$$Q = \left|W_{A\to B}^{F_{aire}}\right|$$

o lo que expresa lo mismo

$$W_{A\to B}^{F_{aire}} = -Q$$

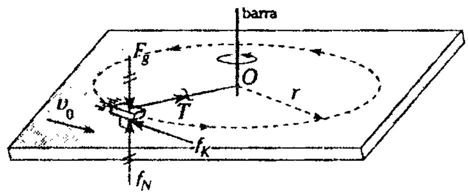
$$\therefore \quad W_{A\to B}^{F_{aire}} = -128\ \text{J}$$

Problema 21

Un bloque de 1 kg se encuentra unido a una cuerda en uno de sus extremos y su extremo opuesto está unido a una barra fija. El bloque reposa sobre un plano horizontal con el cual tiene un coeficiente de rozamiento igual a $\mu_K = 0{,}25$. Si lanzamos al bloque de manera que su velocidad de lanzamiento es perpendicular al hilo, el bloque logra realizar tres vueltas completas. ¿Qué tensión experimentó la cuerda en el instante del lanzamiento?

Resolución

Esbocemos lo que se tiene inmediatamente después del lanzamiento



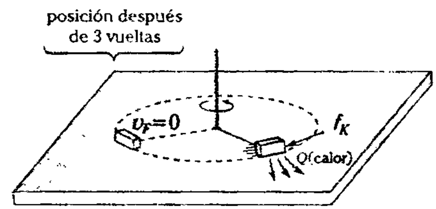
El bloque una vez lanzado por inercia continuará deslizando y seguirá una circunferencia tal como se ha mostrado.

Para calcular el valor de la tensión $(\vec{T})$ en la posición de lanzamiento para el bloque planteamos

$$F_{cp} = ma_{cp}$$

$$T = m\frac{v_0^2}{r} = \frac{v_0^2}{r} \qquad (I)$$

Para determinar $\frac{v_0^2}{r}$, podemos hacer uso de consideraciones energéticas.



Mientras el bloque desliza debido al rozamiento, va disipando energía en forma de calor (Q) y luego de las tres vueltas se puede hacer un balance de energía.

$$E_C^{\text{bloq}} \xrightarrow[\text{transforma}]{\text{se}} \underbrace{Q(\text{calor})}_{\left|W_{\text{en 3 vueltas}}^{f_K}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad E_C^{\text{bloq}} = \left|W_{\text{en 3 vueltas}}^{f_K}\right|$$

Para este caso la f_K es de valor constante, entonces tenemos

$$\frac{mv_0^2}{2}=f_K.e_{\substack{\text{en 3}\\\text{vueltas}}}$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=(\mu_K.f_N)(3(2\pi r))$$

$$\Rightarrow\quad \frac{v_0^2}{2}=\frac{12\pi}{\cancel{m}}\mu_K\cancel{m}g$$

Reemplazando datos

$$\frac{v_0^2}{r}=\underbrace{12(3{,}14)(0{,}25)(10)}_{94{,}2\ \text{N}}$$

Finalmente reemplazamos en (I)

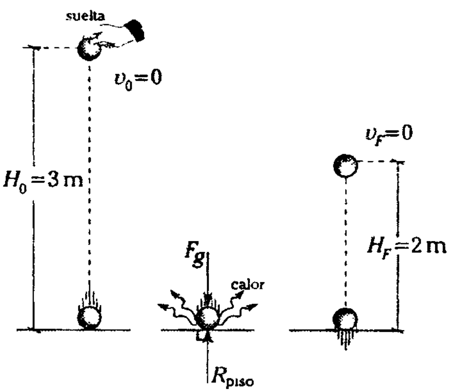
$T=94{,}2$ N

Problema 22

Un balón de 2 kg se suelta desde 3 m de altura, choca con el piso y luego se eleva hasta 2 m de altura respecto al piso. ¿Qué cantidad de energía mecánica pierde el balón? ¿Qué cantidad de energía calorífica se disipó durante el choque?

Resolución

Examinemos los casos que presenta o experimenta el balón.



En el primer caso, el balón posee

$$E_{PG}=mgH_0=2(10)(3)=60\ \text{J}$$

Cuando rebota el balón se eleva y posee

$$E_{PG}=mgH_F=2(10)(2)=40\ \text{J}$$

¿Qué sucedió con la energía del balón? Desde un punto de vista cuantitativo, el balón pierde

$$60\ \text{J}-40\ \text{J}=20\ \text{J}$$

de energía potencial gravitatoria ya que de no haber perdido energía durante el impacto se hubiese elevado hasta la altura inicial.

Desde un punto de vista cualitativo el balón durante el choque o interacción con el piso se deforma, incrementa su temperatura y disipa calor hacia el medio ambiente es decir de esta manera el balón durante el choque transforma 20 J de energía mecánica en energía calorífica.

Se concluye que el balón perdió 20 J de energía mecánica.

$$\Rightarrow\quad\left(\begin{array}{c}\text{calor disipado}\\\text{durante el choque}\end{array}\right)=Q=\left(\begin{array}{c}\text{energía mecánica}\\\text{perdida por el balón}\end{array}\right)$$

$$\therefore\quad Q=20\ \text{J}$$

Una observación final es que durante el choque del balón con el piso se da una serie de transformaciones energéticas que en el capítulo de choques se ampliará.

Conclusión

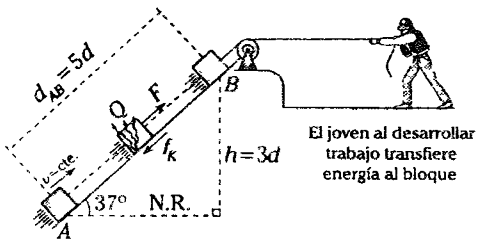
- Cuantitativamente los cuerpos pierden energía mecánica cuando hay rozamiento, encuentran oposición en su deslizamiento o cuando experimentan choques.
- Cualitativamente durante los choques, deslizamiento sobre superficies ásperas o líquidos viscosos la energía mecánica se transforma en energía calorífica.
- Y lo más importante es que en todo proceso mecánico real, inevitablemente hay transformación de energía mecánica en energía calorífica (calor Q).

Problema 23

Al elevar lentamente un bloque por un plano inclinado, 37° respecto a la horizontal, se realiza un trabajo de 200 J. ¿Qué cantidad de calor se disipó en el trayecto si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es igual a 0,5?

Resolución

Según el enunciado, entendemos que el bloque, al ser elevado lentamente, debe subir con rapidez constante y debido al roce con el plano inclinado disipa energía en forma de calor (Q). Lo señalado lo bosquejamos de la siguiente manera:



A partir de este gráfico podemos deducir que el trabajo desarrollado por el joven ($W^{joven}=200$ J), le permite al bloque ganar energía potencial gravitatoria y a la vez disipar energía (calor – Q), además como el proceso es lento el bloque no varía su energía cinética. Ahora planteando un balance de energía tenemos

$$W_{A\to B}^{joven}=E_{PG\,(\text{ganada por bloque})}+Q$$

$$200=mgh+Q$$

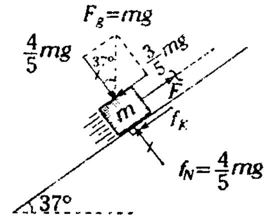
$$\Rightarrow\ Q=200-mg(3d) \qquad \text{(I)}$$

Ahora se requiere mgd. Por condición

$$\underbrace{W_{A\to B}^{joven}}=200\text{ J}$$

$$\Rightarrow\ F.d_{AB}=200\text{ J} \qquad \text{(II)}$$

Del gráfico, $d_{AB}=5d$ y F lo podemos obtener a partir del equilibrio cinético del bloque.



En el D.C.L. del bloque se debe cumplir

$$F=\frac{3}{5}mg+f_K$$

$$F=\frac{3}{5}mg+\mu_K f_N$$

$$F=\frac{3}{5}mg+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}mg\right)$$

$$\Rightarrow\ F=mg$$

Reemplazando F y d_{AB} en (II)

$$(mg)\,(5d)=200$$

$$\Rightarrow\ mgd=40 \qquad \text{(III)}$$

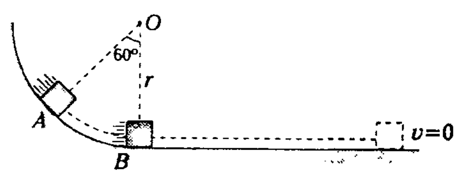
Finalmente (III) lo reemplazamos en (I)

$$Q=200-3(40)$$

$$\therefore\ Q=80\text{ J}$$

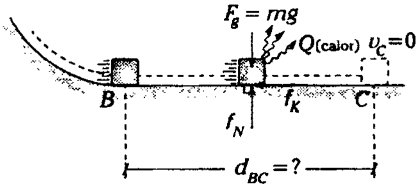
Problema 24

El bloque mostrado, cuando pasa por A, tiene una aceleración de 10 m/s^2; resbala por el arco liso y luego se detiene sobre el plano horizontal con el cual tiene coeficiente de rozamiento de 0,15. ¿A qué distancia de B se detiene el bloque? (El radio del arco es r = 2 m y g = 10 m/s^2)



Resolución

El bloque va descendiendo de A hacia B debido a la atracción terrestre, pero a partir de B se mueve por inercia y debido al rozamiento se va frenando hasta que se detiene.



Para calcular d_{BC}, podemos hacer uso de las nociones de Cinemática y Dinámica pero, vamos a usar nociones de energía. De B hacia C, debido al rozamiento, la energía cinética del bloque se transformó íntegramente en calor (Q), entonces

$$E_{C(B)}^{\text{bloq.}} = Q = \left| W_{B\to C}^{f_K} \right|$$

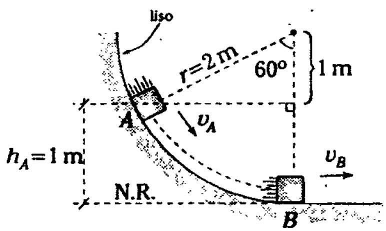
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = f_K . d_{BC}$$

Como $f_K = \mu_K f_N = \mu_K mg$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 = \mu_K \cancel{m} g d_{BC}$$

$$\Rightarrow d_{BC} = \frac{v_B^2}{2\mu_K g} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere v_B^2 y cuando el bloque desciende sobre el arco liso conserva su energía mecánica, entonces de A hacia B tenemos



Se debe cumplir $E_{M(A)} = E_{M(B)}$

Respecto del N.R. queda

$$E_{C(A)} + E_{PG(A)} = E_{C(B)}$$

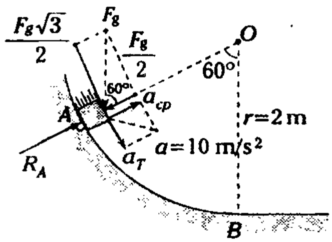
$$\frac{\cancel{m} v_A^2}{2} + \cancel{m} g h_A = \frac{\cancel{m} v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2(10)(1)$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 20 \qquad \text{(II)}$$

Por condición del problema cuando el bloque pasa por A tiene una aceleración de 10 m/s². Esta información nos va a permitir calcular v_A^2.

En A ¿qué aceleración del bloque nos han dado de dato? ¿La $\vec{a}_{cp}$ o la $\vec{a}_T$? Ninguna de ellas, nos han dado de dato la aceleración total o instantánea que es la resultante de las aceleraciones mencionadas.



Para el bloque en A, planteamos

$$a_{cp} = \frac{v_A^2}{r} \Rightarrow v_A^2 = 2a_{cp} \qquad \text{(III)}$$

Pero $a_{cp} = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{10^2 - a_T^2}$ (IV)

Para la a_T planteamos $a_T = \dfrac{F_{R(\tan)}}{m}$

$$\Rightarrow a_T = \frac{\frac{F_g\sqrt{3}}{2}}{m} = 5\sqrt{3}\ \text{m/s}^2$$

En (IV)

$$a_{cp} = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{3})^2} = 5\ \text{m/s}^2$$

En (III)

$$v_A^2 = 10$$

En (II)

$$v_B^2 = 30$$

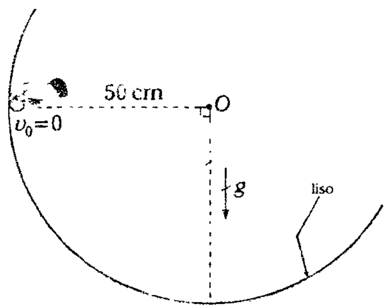
Finalmente en (I)

$$d_{BC} = \frac{30}{2(0,15)(10)}$$

$$\therefore\ d_{BC} = 10\ \text{m}$$

Problema 25

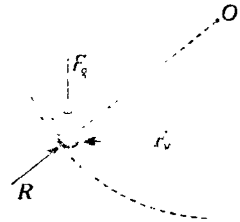
Se muestra el instante en que se suelta una pequeña esfera de 400 g. Si durante su movimiento la esfera experimenta una fuerza por parte del viento $\vec{F}_v = -3\hat{i}$ N (constante), determine la máxima rapidez que logra adquirir la esfera y el módulo de la fuerza que le ejerce la superficie en dicho instante. ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

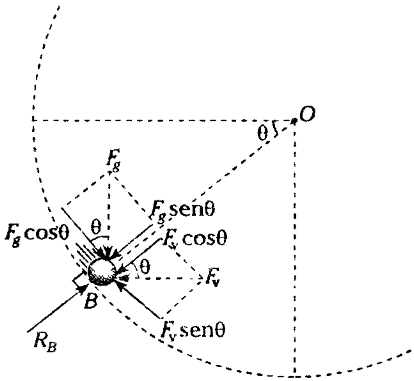
Al descender la esfera sobre la superficie esférica, experimenta un desplazamiento vertical hacia abajo y un desplazamiento horizontal hacia la derecha. Al hacer el diagrama de fuerzas podemos darnos cuenta de que la $\vec{F}_g$ está en favor del movimiento de la esfera; la F_v está en contra y $\vec{R}$ [illegible] favor o en contra [illegible] $\vec{R}$ [illegible] pero [illegible]

(1)



Ahora, para determinar en qué posición se da la rapidez máxima $v_{máx}$ debemos hacer el análisis en la dirección tangencial del movimiento circunferencial. En el gráfico (2), si $F_g\cos\theta > F_v\,\text{sen}\,\theta$ la rapidez de la esfera aumenta ya que la fuerza resultante en dirección tangencial está en favor del movimiento. Ahora si $F_g\cos\theta < F_v\,\text{sen}\,\theta$ y entonces como es lógico la rapidez disminuye.

(2)



Por lo tanto, la rapidez será máxima cuando

$$F_g\cos\theta = F_v\,\text{sen}\,\theta$$

$$mg\cos\theta = F_v\,\text{sen}\,\theta$$

$$(0,4)(10)\cos\theta = 3\,\text{sen}\,\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \theta = 53°$$

Para este valor de θ la rapidez de [illegible]

Ahora para determinar dicha rapidez máxima nótese que en A existe

$$E_{M(A)}=E_{PG}=mgH=0{,}4(10)(0{,}4)=1{,}6\text{ J}$$

Pero, en B

$$E_{M(B)}=E_C=\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2=\frac{1}{2}(0{,}4)v_{\text{máx}}^2=0{,}2\,v_{\text{máx}}^2$$

Como de A hacia B al descender la esfera, esta varía su energía mecánica ya que la fuerza del viento desarrolla trabajo y se opone a su movimiento. Ahora planteamos

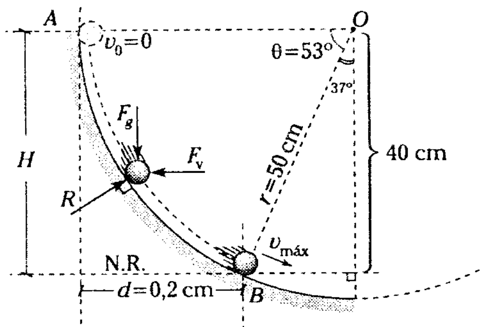
$$W_{A\to B}^{F_v}=\Delta E_M^{\text{esfera}}$$

$$-F_v d=E_{M(B)}-E_{M(A)}$$

$$-3(0{,}2)=0{,}2\,v_{\text{máx}}^2-16$$

$$\therefore\ v_{\text{máx}}=\sqrt{5}\text{ m/s}$$

(3)



Para determinar el módulo de la reacción en $B(R_B)$ en ese instante y en la dirección radial (véase gráfico 2) puesto que hay movimiento circunferencial, planteamos

$$F_{cp}=ma_{cp}$$

$$R_B-F_v\cos\theta-F_g\operatorname{sen}\theta=m\frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

Reemplazando los valores obtenidos

$$R_B-3\left(\frac{3}{5}\right)-4\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{(0{,}4)(\sqrt{5})^2}{0{,}5}$$

$$R_B-\frac{9}{5}-\frac{16}{5}=4$$

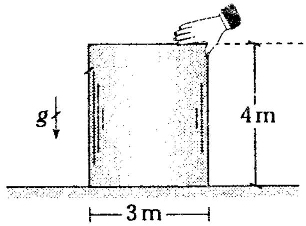
$$\therefore\ R_B=9\text{ N}$$

Nota

Después de haber resuelto el problema anterior, notamos que en un movimiento curvilíneo (circunferencial) se alcanza la máxima rapidez ($v_{\text{máx}}$) en el instante en que en la dirección tangencial la fuerza resultante es nula, es decir si $F_{R(\tan)}=0\ \Rightarrow\ v=v_{\text{máx}}$.

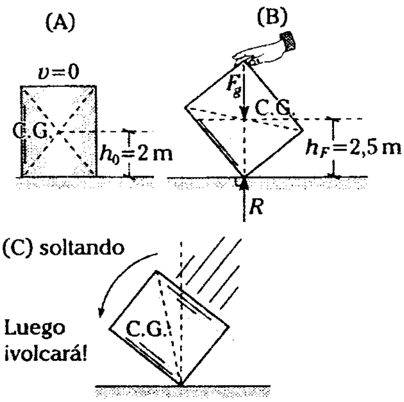
Problema 26

En el gráfico se muestra un cajón rectangular homogéneo de 8 kg. Determine la cantidad de trabajo necesario que debe desarrollar una persona sobre dicho cajón para colocarlo en una posición donde luego de soltarlo logre volcar. (g = 10 m/s^2)



Resolución

El cajón debe ser colocado de tal manera que la línea de acción de la F_g debe pasar por uno de sus vértices de apoyo, lo que trae como consecuencia que al soltarlo logrará volcar.



En (A), el cajón posee

$$E_{PG_0} = mgh_0 = 8(10)(2) = 160 \text{ J}$$

En (B) el cajón a punto de resbalar posee

$$E_{PG_F} = mgh_F = 8(10)(2,5) = 200 \text{ J}$$

cómo podemos notar que la energía potencial del cajón ¡aumentó en 200 J − 160 J = 40 J! ¿Quién le dio esta energía? Una persona al realizar trabajo cambian de posición al cajón de (A) y lo movió hacia (B).

Por lo tanto, podemos plantear

$$W_{A\to B}^{\text{persona}} = \Delta E_M^{\text{cajón}}$$

$$= \Delta E_C + \Delta E_{PG}$$

Como el trabajo es necesario, el proceso es lento

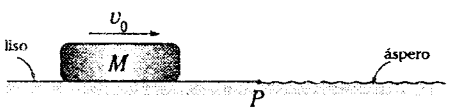
$$\Rightarrow \quad \Delta E_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad W_{A\to B}^{\text{persona}} = \Delta E_{PG} = E_{PG_F} - E_{PG_0}$$

$$\therefore \quad W_{A\to B}^{\text{persona}} = 40 \text{ J}$$

Problema 27

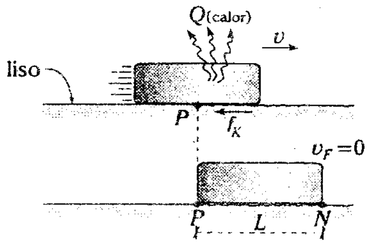
Una barra homogénea de longitud L desliza tal como se muestra. A partir del punto P ingresa a una superficie áspera cuyo coeficiente de rozamiento con la barra es μ_K. Halle v_0 mínimo para que la barra ingrese totalmente a la superficie áspera.



Resolución

Al inicio la barra resbala por inercia con v_0 y por lo tanto posee al principio energía cinética de traslación $E_C = \frac{1}{2}Mv_0^2$

Luego va ingresando a la superficie áspera y poco a poco debido al rozamiento va perdiendo rapidez hasta que se detiene, en ese instante su energía cinética es cero. ¿Qué sucedió con la energía cinética de la barra? La barra al ir ingresando a la superficie áspera vence la oposición que ejerce la fuerza de rozamiento y debido a ello todo su energía cinética inicial se va transformando en calor (Q).



Para calcular $v_{0(\text{mín})}$ debemos considerar el movimiento de la barra hasta que termina de ingresar totalmente a la parte rugosa, ya que si pudiese ingresar algo más, la barra tendría disipar más energía con lo cual debería tener mayor E_C así como mayor rapidez inicial (v_0).

Considerando un balance de energía se plantea

$E_C^{\text{barra}} = Q$ (calor disipado cuando la barra desliza de P hacia N)

Recordemos que

$$Q = \left|W_{P\to N}^{f_K}\right|$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{v_0^2}{2} = \left|W_{P\to N}^{f_K}\right|$$

$$v_0^2 = \frac{2}{M}\left|W_{P\to N}^{f_K}\right| \qquad \text{(I)}$$

Determinemos $W_{P\to N}^{f_K}$

Mediante razonamiento demostremos que la fuerza de rozamiento es de valor variable. Mientras va ingresando la barra, cada vez más parte de ella presiona sobre la parte rugosa. Por ende se manifiesta más resistencia de dicha superficie y aumenta la f_K (fuerza variable).

Se le deja al lector demostrar que el valor de la $\vec{f}_K$ varía linealmente con respecto a la longitud de la barra que va ingresando.

Ahora solamente planteamos

$$W_{P\to N}^{f_K}=f_{K(m)}.d_{pN}$$

donde

$f_{K(m)}$: fuerza de rozamiento media

$$W_{P\to N}^{f_K}=\left(\frac{f_{K(\text{mín})}+f_{K(\text{máx})}}{2}\right).L$$

$f_{K(\text{mín})}=0$ (no ha ingresado nada de la barra)

$f_{K(\text{máx})}=\mu_K Mg$ (la barra ingresó completamente)

$$\Rightarrow\quad W_{P\to N}^{f_K}=\frac{\mu_K MgL}{2}$$

Finalmente reemplazamos en (I)

$$\therefore\quad v_0=\sqrt{\mu_K gL}$$

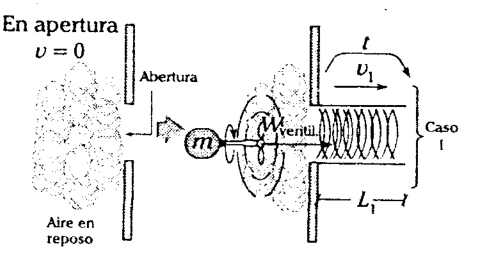
Problema 28

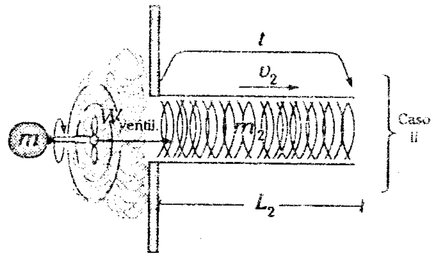
Un ventilador arroja a través de una abertura cierta cantidad de aire en un determinado intervalo de tiempo y desarrolla para ello cierta cantidad de trabajo W_1. Otro ventilador a través de la misma abertura logra arrojar una cantidad doble de aire en el mismo intervalo de tiempo. ¿Qué cantidad de trabajo desarrolló?

Resolución

Debemos considerar que la masa de aire arrojado por el ventilador se encontraba inicialmente en reposo y cuando sale por la abertura lo hace con cierta rapidez; entonces el trabajo desarrollado por el ventilador tendrá relación directa con la energía cinética ganada por la masa de aire.

Representemos gráficamente lo que acontece.





En la figura el ventilador mueve la masa de aire y al realizar trabajo mecánico sobre el aire, modifica su energía cinética.

$$W_{\text{ventil.}}=\Delta E_{C(\text{aire})}=E_{C_F(\text{aire})}-\cancel{E_{C_0(\text{aire})}}$$

$$\therefore\quad W_{\text{ventil.}}=E_{C_F(\text{aire})}$$

- En el caso I

$$W_{\text{ventil.}}=W_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2 \qquad \text{(I)}$$

- En el caso II

$$W_{\text{ventil.}}=W_2=\frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad \text{(II)}$$

Por condición del problema la cantidad de aire arrojado en el caso II es el doble de lo arrojado en el caso I (se refieren a las masas).

$$m_2=2m_1$$

Por lo tanto al dividir (II) entre (I) se tiene

$$\frac{W_2}{W_1}=2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \qquad \text{(III)}$$

Solo falta determinar una relación entre la rapidez con que es arrojado el aire en ambos casos.

Como sabemos $m_2=2m_1$ y si recordamos que

$$m=\rho V$$

donde

ρ : densidad

V : volumen

$$\cancel{\rho_{\text{aire}}}V_2=2\left(\cancel{\rho_{\text{aire}}}V_1\right)$$

$$\Rightarrow\quad \cancel{A_{\text{aber.}}}L_2=2\left(\cancel{A_{\text{aber.}}}L_1\right)$$

$$\Rightarrow\quad v_2\cancel{t}=2\left(v_1\cancel{t}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{v_2}{v_1}=2$$

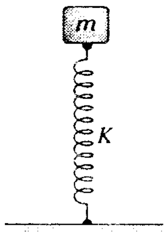
Finalmente, reemplazamos en (III)

$$\frac{W_2}{W} = 2(2)^2$$

$$\therefore \; W_2 = 8W_1$$

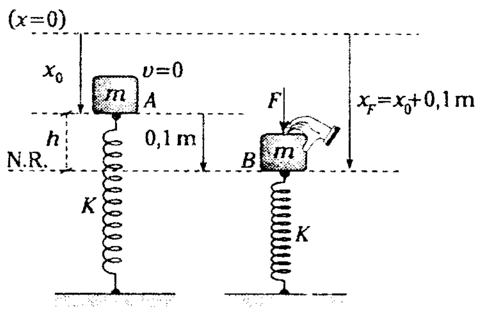
Problema 29

Un bloque de 4 kg reposa apoyado sobre el resorte ideal de $K = 400$ N/m. ¿Qué cantidad de trabajo se debe desarrollar sobre el sistema para que el bloque descienda lentamente 10 cm desde la posición mostrada? (Considere $g = 10$ m/s^2)



Resolución

Bosquejemos lo que acontece con el sistema bloque - resorte, así tenemos



Examinemos al sistema bloque.

Inicialmente, él está en equilibrio estático y se cumple que

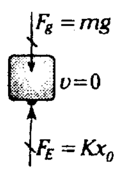
$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$F_E = F_g$$

$$Kx_0 = mg$$

$$400x_0 = 4(10)$$

$$\therefore \; x_0 = 0{,}1\,\text{m}$$



En la posición inicial el bloque posee

$$E_{PG} = mgh = 4(10)(0{,}1) = 4\text{ J}$$

En la posición más baja, el bloque respecto al N.R. no posee E_{PG}, es decir

$$E_{PG} = 0$$

Por lo tanto, se puede apreciar que el bloque al descender lentamente pierde 4 J de energía.

Ahora veamos qué ocurre con el resorte. Nótese que el resorte inicialmente está deformado $x_0 = 0{,}1$ m, entonces posee

$$E_{PE} = \frac{1}{2}Kx_F^2 = \frac{1}{2}(400)(0{,}1)^2 = 2\text{ J}$$

Luego cuando se le comprime 0,10 m más su deformación final es $x_F = x_0 + 0{,}1 = 0{,}2$ m y ahora posee

$$E_{PE} = \frac{1}{2}Kx_F^2 = \frac{1}{2}(400)(0{,}2)^2 = 8\text{ J}$$

Podemos apreciar que el resorte incrementa su energía potencial elástica en 6 J.

¿Qué conclusión podemos sacar de este análisis? El resorte en el proceso ganó 6 J; pero el bloque en el descenso pierde 4 J.

Entonces, el sistema resorte - bloque gana en total 2 J.

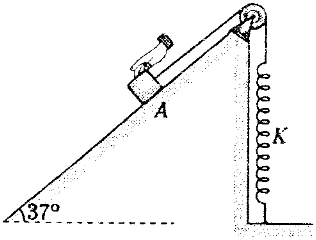
¿Quién le proporcionó esta energía al sistema? Vemos que es debido al trabajo desarrollado por una persona, la cual con una fuerza vertical desplaza al bloque verticalmente hacia abajo, es decir, le transmite energía al sistema. De esta manera se establece

$$W_{A\to B}^{\text{persona}} = E_{\substack{\text{transmitia}\\ \text{al sistema}}}$$

$$\therefore \; W_{A\to B}^{\text{persona}} = 2\text{ J}$$

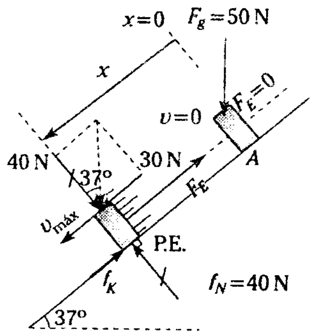
Problema 30

Un bloque de masa 5 kg es soltado cuando el resorte de $K = 100$ N/m está sin deformar. Si el plano inclinado con la base del bloque tiene un coeficiente de rozamiento $\mu_K = 0{,}25$; ¿qué máxima energía cinética adquiere el bloque? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Nos piden hallar la $E_{C(\text{máx})}$, que se tendrá cuando la rapidez del bloque sea máxima; es decir cuando el bloque pasa por su posición de equilibrio (P.E.) Luego de ser soltado, tenemos



En la posición de equilibrio del bloque se cumple que

$$\sum F(\nearrow)=\sum F(\swarrow)$$

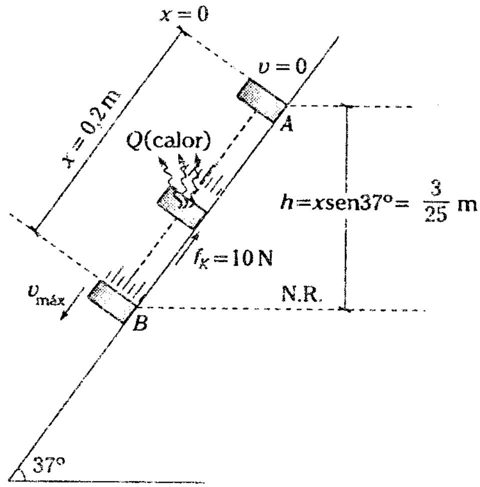
$$f_K+F_E=30$$

$$\mu_K f_N+Kx=30$$

$$10+100x=30$$

$$\Rightarrow x=0{,}20\text{ m}$$

Para calcular la $E_{C(\text{máx})}$ del bloque, podemos hacer un balance de energía desde que el bloque es soltado (en A) hasta que pasa por su P.E. por donde trazamos el nivel de referencia (N.R.)



A partir de este gráfico, podemos notar que en A el bloque tiene energía potencial gravitatoria, respecto del N.R. y cuando va descendiendo dicha energía se va transformando en energía cinética para el bloque, calor Q (debido al rozamiento) y en energía potencial elástica para el resorte. Luego planteamos

$$E_{PG(A)}^{\text{bloq.}}=E_{C(\text{P.E.})}^{\text{bloq.}}+E_{PE}^{\text{resort.}}+Q$$

$$mgh=\widehat{E_{C(\text{máx})}}+\frac{Kx^2}{2}+Q \qquad \text{(I)}$$

donde el calor disipado por teoría es igual a

$$Q=\left|W_{A\to PE}^{f_K}\right|=f_K.x=10(0{,}2)$$

$$\therefore\ Q=2\text{ J}$$

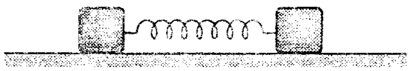
Reemplazando datos en (I)

$$(5)\,(10)\left(\frac{3}{25}\right)=E_{C(\text{máx})}+2+\left(\frac{100}{2}\right)(0{,}2)^2$$

$$\therefore\ E_{C(\text{máx})}=2\text{ J}$$

Problema 31

Sobre una mesa horizontal lisa se encuentran en reposo dos bloques idénticos, unidos por un resorte de rigidez K y una fuerza $\vec{F}$ (constante) horizontal que empieza a actuar sobre el bloque derecho. Si el sistema oscila pero luego se amortigua paulatinamente a causa de un calentamiento del resorte, de modo que al cabo de cierto tiempo los bloques adquieren aceleración constante, ¿qué cantidad de calor se desprenderá hasta ese instante el resorte?

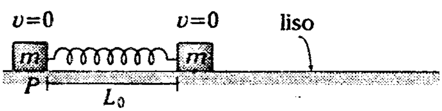


Resolución

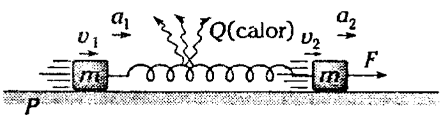
Inicialmente los bloques están en reposo sobre una superficie lisa. De esto se concluye que el resorte no está deformado ya que si estuviese deformado ejercería fuerza sobre los bloques, lo cual provocaría que éstos aceleren.

Cuando empieza a actuar la fuerza $\vec{F}$, lo que acontece es lo siguiente:

- Estado inicial (reposo): $F = 0$
  Resorte sin deformar $x_0 = 0$

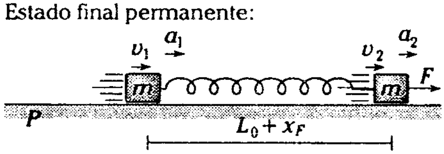


- Estado intermedio: $F \neq 0$ y $x \neq 0$



  El resorte no es 100% elástico su temperatura aumenta y disipa **calor**.

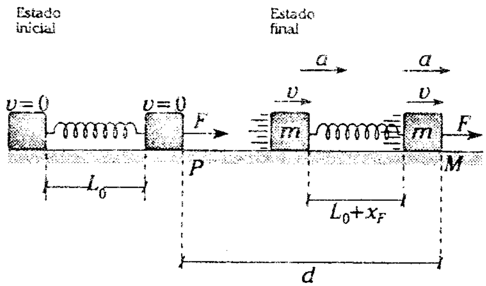
- Estado final permanente:



  Aquí $v_1 = v_2$ y $a_1 = a_2$

¿Qué sucede al aplicar la fuerza F?

El bloque derecho acelera primero y estira al resorte, este a su vez jala al otro bloque y se va calentando (aumenta su temperatura). Luego los bloques oscilan y el resorte disipa calor a la vez se estira y comprime así sucesivamente hasta que ambos bloques solo se trasladan cuando adquieren, igual velocidad y aceleración respecto al piso.



Note que F transmite movimiento y realiza un trabajo $W^F_{P\to M}$ que consiste en entregar

- Energía cinética a los bloques $E_C = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$
- Energía potencial elástica al resorte pues lo deforma $E_{PE} = \frac{1}{2}Kx_F^2$.
- Además debido a cierta plasticidad del resorte que se manifiesta mediante un amortiguamiento plástico, calentamiento del resorte y disipación de calor (Q).

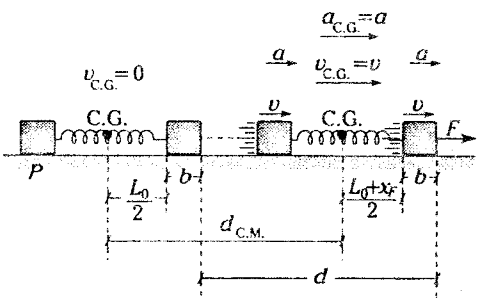
Haciendo un balance de energía tenemos

$$\underbrace{\text{trabajo realizado por } F} = E_C^{\text{bloque}} + E_{PE}^{\text{resorte}} + E_{\substack{\text{disip.}\\ \text{resorte}}}$$

$$\Rightarrow \quad W^F_{P\to M} = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{1}{2}Kx_F^2 + Q$$

$$F.d = mv^2 + \frac{1}{2}Kx_F^2 + Q \qquad \text{(I)}$$

En el estado final todos los puntos del sistema bloque – resorte se mueven con la misma velocidad e igual aceleración. El centro de gravedad (C.G.) del sistema en estas condiciones, tiene igual velocidad $(\vec{v})$ y aceleración $(\vec{a})$ que los bloques. El centro de gravedad se sitúa en el punto medio del resorte y como en todo instante sobre el sistema actúa una fuerza resultante constante (F), el centro de gravedad se mueve con aceleración constante y realiza M.R.U.V.



Entonces podemos utilizar

$$v_F^2 = v_0^2 + 2a.d$$

$$v^2 = 2a_{C.G.}.d_{C.G.} \qquad \text{(II)}$$

donde

$$d_{C.M.} = d - \left[\left(\frac{L_0 + x_F}{2}\right) + b\right] + \frac{L_0}{2} + b$$

$$d_{C.M.} = d - \frac{x_F}{2}$$

En (II)

$$v^2 = 2a\left(d - \frac{x_F}{2}\right) \qquad \text{(III)}$$

Puesto que el sistema acelera, usamos la Segunda Ley de Newton aplicada al sistema así

$$a_{C.G.} = \frac{F_R}{m_{\text{sistema}}}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F}{2m}$$

En (III) obtenemos

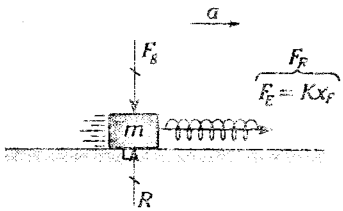
$$v^2 = \frac{F}{m}\left(d - \frac{x_F}{2}\right)$$

En (I)

$$\cancel{m}\frac{F}{\cancel{m}}\left(d - \frac{x_F}{2}\right) + \frac{1}{2}Kx_F^2 + Q = F.d$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{Fx_F}{2} - \frac{Kx_F^2}{2} \qquad \text{(IV)}$$

La deformación x_F del resorte la determinamos el analizar el bloque de la izquierda así:



Vemos que actúa

$$F_R = ma$$

$$Kx_F = ma$$

$$x_F = \frac{ma}{K} = \frac{m}{K}\left(\frac{F}{2m}\right) = \frac{F}{2K}$$

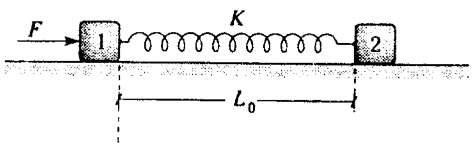
Finalmente en (IV)

$$Q = \frac{F}{2}\left(\frac{F}{2K}\right) - \frac{K}{2}\left(\frac{F}{2K}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{F^2}{8K}$$

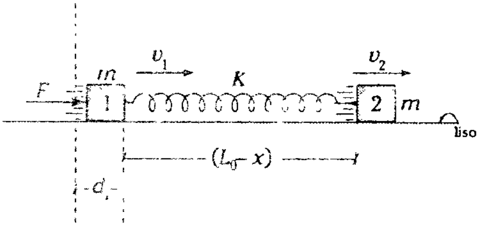
Problema 32

En una mesa horizontal lisa se encuentran dos bloques iguales unidos por un resorte de rigidez K y longitud natural L_0. Si de pronto sobre el bloque izquierdo empieza a actuar una fuerza horizontal constante F, determine la menor y mayor separación entre bloques.

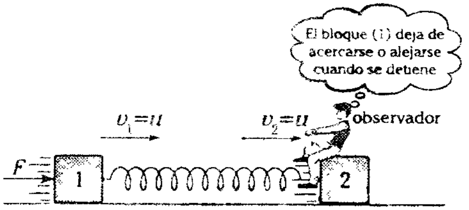


Resolución

Luego de aplicar F ambos bloques adquieren movimiento, el bloque (1) debido a $\vec{F}$ y el bloque (2) debido a la fuerza elástica del resorte. Al comienzo ambos se desplazan con aceleraciones diferentes.



¿En qué instante los bloques experimentan su mayor o menor separación? Analizando a un bloque respecto del otro vamos a poder predecirlo.



Cuando la velocidad de 1, respecto a 2 es nula.

$$\vec{v}_{2/1}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{u}$$

El mayor acercamiento o alejamiento entre bloques ocurre cuando las velocidades son iguales.

Ahora sobre el sistema únicamente F realiza trabajo, pues la mesa es lisa y no hay fuerza del viento, mediante el trabajo de F sobre el sistema se transfiere energía a los bloques y al resorte.

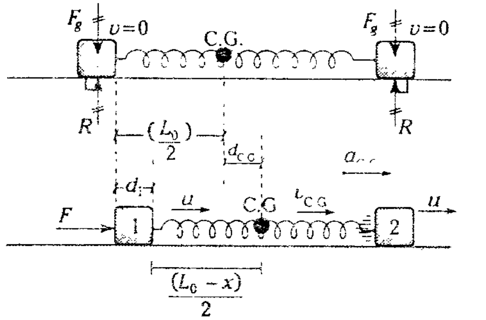
$$\Rightarrow W^F=E_{\substack{\text{ganada}\\ \text{por sistema}}}=E_C^{\text{bloques}}+E_{PE}^{\text{resorte}}$$

$$F.d_1=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}Kx^2$$

$$F.d_1=mu^2+\frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(I)}$$

Cálculo de d_1

F aplicada altera la posición del centro de masa y para ello analizamos al centro de gravedad (C.G.) del sistema



De los gráficos

$$d_1+\left(\frac{L_0-x}{2}\right)=\frac{L_0}{2}+d_{CG}$$

$$d_{CG}=d_{CG}+\frac{x}{2} \qquad \text{(II)}$$

Se observa que sobre el sistema la fuerza resultante es F y genera según Segunda Ley de Newton

$$a_{CG}=\frac{F_R}{m_{\text{sistema}}}$$

Luego $a_{CG}=\dfrac{F}{2m}$ (III)

Si F y m son constantes, entonces $a_{CG}=$ cte.

El centro de gravedad realiza M.R.U.V. y se puede usar

$$d_{CG}=\cancel{v_0}t+\frac{1}{2}a_{CG}t^2=\frac{1}{2}a_{CG}t^2$$

Reemplazando (III)

$$d_{CG}=\left(\frac{F}{4m}\right)t^2$$

En (II)

$$d_1=\frac{Ft^2}{4m}+\frac{x}{2} \qquad \text{(IV)}$$

También en el estado final el C.G. tiene una rapidez

$$u=\cancel{v_0}+a_{CG}t=\left(\frac{F}{2m}\right)t \qquad \text{(V)}$$

(IV) y (V) en (I)

$$F\left(\frac{Ft^2}{4m}+\frac{x}{2}\right)=m\left(\frac{Ft}{2m}\right)^2+\frac{1}{2}Kx^2$$

Resolviendo

$$F = Kx$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{F}{K} \quad \wedge \quad x = 0$$

de donde, afirmaremos que

$$d_{max} = L_0 - x = L_0$$

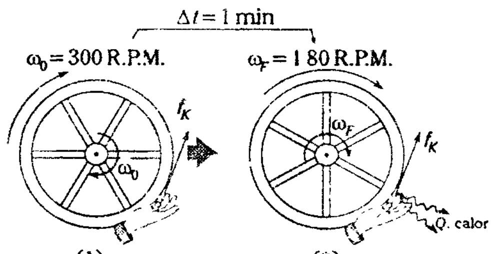
$$d_{min} = L_0 - x = L_0 - \frac{F}{K}$$

Problema 33

Una rueda está girando con respecto a un eje ideal que pasa por su centro con 300 R.P.M. Si con nuestras manos presionamos la rueda, entonces la rueda gira desacelerando uniformemente de modo que en 1 minuto su rapidez angular disminuye hasta 180 R.P.M. ¿Qué cantidad de trabajo realizó nuestra mano sobre la rueda al frenarlo en dicho intervalo de tiempo? (La rueda tiene un momento de inercia: $I = 2\ kg \cdot m^2$)

Resolución

El proceso de frenado, se realiza así



(1) (2)

La rueda inicialmente solo rota y tiene energía cinética de rotación que se evalúa así

$$E_{C_0} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \qquad (I)$$

donde $\omega_0 = 300$ R.P.M.

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = 300\ \cancel{rev}/\cancel{min}\left(\frac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{rev}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{min}}{60\ s}\right) = 10\pi\ rad/s$$

En (I)

$$E_{C_0} = \frac{1}{2}(2)(10\pi)^2 = 100\pi^2\ J$$

Luego de 1 min = 60 s, la rueda tiene otra rapidez angular, entonces su nueva energía cinética de rotación es

$$E_{C_F} = \frac{1}{2} I \omega_F^2 \qquad (II)$$

donde $\omega_F = 180$ R.P.M.

$$\omega_F = 180\ rev/min\left(\frac{2\pi\ rad}{1\ rev}\right)\left(\frac{1\ min}{60\ s}\right) = 6\pi\ rad/s$$

En (II)

$$E_{C_F} = \frac{1}{2}(2)(6\pi)^2 = 36\pi^2\ J$$

¿Qué sucedió con la energía cinética de rotación de la rueda? Disminuyo comparando valores.

Vemos que en $100\pi^2\ J - 36\pi^2\ J = 64\pi^2\ J$

¿Por qué disminuyó la energía cinética de rotación de la rueda?

Cuando colocamos nuestra mano sobre la periferia de la rueda esta la roza y ejerce oposición, debido a ello parte de su energía cinética de rotación se va transformando en calor (Q)

Entonces afirmamos

$$W_{1\to 2}^{mano} = Q_{dis} = \Delta E_{C(rotac)}^{rueda}$$

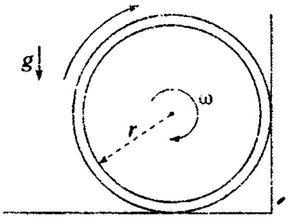
$$W_{1\to 2}^{mano} = E_{C_F} - E_{C_0}$$

$$W_{1\to 2}^{mano} = (-)64\pi^2\ J$$

Esto nos quiere decir que la fuerza que ejerce la mano de la persona está en contra del movimiento de la rueda.

Problema 34

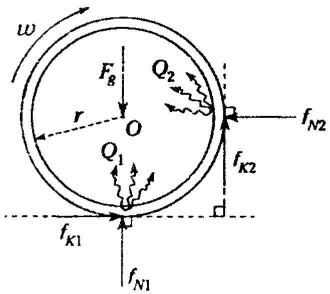
Un aro homogéneo cuyo radio es π m se hace rotar alrededor del eje que pasa por su centro en forma perpendicular al plano que lo contiene. Si cuando el aro presenta una rapidez angular de 12 rad/s se coloca entre el piso y la pared tal como se muestra, determine el número de vueltas que logra dar el aro hasta detenerse. (Considere que entre todas las superficies en contacto $\mu_K = 0.5$, además $g = 10\ m/s^2$)



Resolución

Al colocar el aro entre las superficies rugosas debido a su inercia (de rotación) continuará rotando, pero debido a la fricción su rapidez angular (ω) va disminuyendo hasta que se detiene. Hasta que ocurra ello, el aro habrá dado un cierto número de vueltas (n) que es precisamente lo que nos piden determinar.

Ahora para calcular n, podemos hacer uso de cinemática (de rotación) o nociones de energía. Se usará esto último y a continuación haremos el diagrama de fuerzas sobre el aro para establecer con precisión qué fuerzas son las que hacen variar su E_C (de rotación).



Como al rotar el aro raspa la pared y el piso áspero, se realiza trabajo con f_{K1} y f_{K2} y se disipa calor al medio ambiente.

Hasta que el aro se detiene, su energía cinética (de rotación) se transforma en calor.

$$\Rightarrow\ Q_1 + Q_2 = E_{C_0}^{\text{aro}}$$

$$|W^{f_{K1}}| + |W^{f_{K2}}| = E_C$$

$$(f_{K1}e) + (f_{K2}e) = E_C$$

e : recorrido de un punto de la periferia del aro, hasta que este se detiene.

$$(f_{K1} + f_{K2})e = E_C \qquad \text{(I)}$$

Como sabemos

$$\left.\begin{array}{l} f_{K1} = \mu_K f_{N1} \\ f_{K2} = \mu_K f_{N2} \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Ahora como el aro no se traslada, entonces se encuentra en equilibrio mecánico de traslación, razón por la cual podemos plantear

$$\sum F(\rightarrow) = \sum F(\leftarrow)$$

$$f_{K1} = f_{N2}$$

$$\mu_K f_{N1} = f_{N2}$$

También

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$f_{N1} + f_{K2} = F_g$$

$$f_{N1} + \mu_K f_{N2} = mg$$

$$f_{N1} + \mu_K(\mu_K f_{N1}) = mg$$

$$f_{N1}(1+\mu_K^2) = mg \ \Rightarrow\ f_{N1} = \frac{mg}{(1+\mu_K^2)} \qquad \text{(III)}$$

y como

$$f_{N2} = \mu_K f_{N1} \ \Rightarrow\ f_{N2} = \frac{\mu_K mg}{(1+\mu_K^2)} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (III) y (IV) en (II) y luego en (I) se obtiene

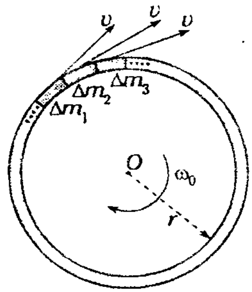
$$\mu_K mg\left[\frac{1+\mu_K}{(1+\mu_K^2)}\right]e = E_C \qquad \text{(V)}$$

Como en una vuelta el recorrido de un punto de la periferia del aro es $2\pi r$, entonces en n vueltas $e = 2\pi r n$.

Reemplazando en (V) y despejando n tenemos

$$n = \frac{E_C(1+\mu_K^2)}{2\pi r\mu_K mg(1+\mu_K)} \qquad \text{(VI)}$$

Como podemos notar, para determinar n solo nos falta conocer E_C del aro.
Para determinar E_C dividimos imaginariamente al aro en un conjunto de pequeñas partículas que giran alrededor de O con rapidez angular ω_0 y con rapidez tangencial $v=\omega_0 r$.



Luego

$$E_C^{\text{aro}}=\sum E_C\,(\text{de todas las partícula})$$

$$E_C=\frac{1}{2}\Delta m_1 v_1^2+\frac{1}{2}\Delta m_2 v_2^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\Delta m_1(\omega_0 r)^2+\frac{1}{2}\Delta m_2(\omega_0 r)^2+\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{(\Delta m_1+\Delta m_2+\ldots)}_{\text{masa del aro } m}(\omega_0 r)^2$$

$$E_C=\frac{1}{2}m(\omega_0 r)^2$$

Finalmente, reemplazamos esta expresión en (VI)

$$n=\frac{\left[\frac{1}{2}\cancel{m}(\omega r)^2\right](1+\mu_K^2)}{2\pi r\mu_K\cancel{m}g(1+\mu_K)}=\frac{\omega_0^2 r(1+\mu_K^2)}{4\pi\mu_K g(1+\mu_K)}$$

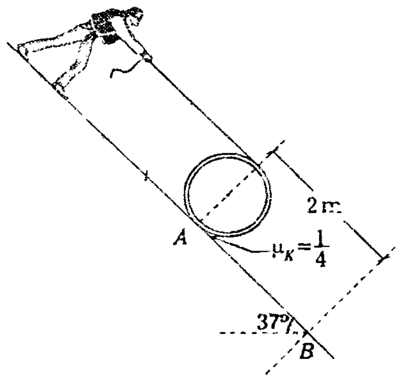
Reemplazando los datos

$$n=\frac{(12)^2(\pi)\left[1+(0,5)^2\right]}{4\pi(0,5)(10)(1+0,5)}$$

$$\therefore\ n=6$$

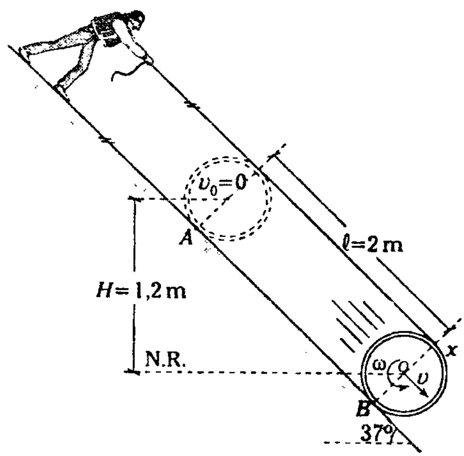
Problema 35

Un anillo fino se enrolla en un hilo cuyo extremo se mantiene fijo y luego de soltarse el anillo, este empieza a deslizar de manera que el hilo se mantiene paralelo al plano. Determine la rapidez de traslación del anillo cuando pasa por B, si el hombre se mantiene fijo y no suelta el hilo.
($g=10\ \text{m/s}^2$)



Resolución

Una vez soltado el anillo empieza a desenrollarse del hilo, mientras lo hace se traslada y rota en sentido antihorario, tal y como se muestra a continuación



rotación)
Fíjese que cuando el aro pasa por B su movimiento es de traslación y de rotación simultáneo.

$$E_{C(B)}=E_{C(\text{trasl.})}+E_{C(\text{rot.})} \qquad \text{(I)}$$

Como sabemos

$$E_{C(\text{trasl.})}=\frac{1}{2}mv^2$$

Ahora para determinar la $E_{C(\text{rot.})}$ debemos tener presente que el punto x es un punto del hilo inextensible, x ya no se aleja respecto de las manos del hombre $v_x=0$. Con esto al hilo se le puede considerar como una superficie sobre la cual el aro rota sin deslizar deducimos que todos los puntos del aro se trasladan y giran con la misma rapidez v con la que se traslada el centro del aro ($v=\omega r$), entonces

$$E_{C(\text{trasl.})}=E_{C(\text{rot.})}$$

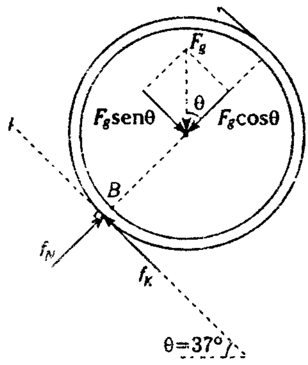
$$\Rightarrow \quad E_{C(\text{rot.})}=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(véase problema anterior)}$$

Reemplazando en (I)

$$E_{C(B)}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2=mv^2 \qquad \text{(II)}$$

Ahora para determinar v, debemos conocer la $E_{C(B)}$ y para ello examinemos el movimiento del aro, en A respecto del N.R. posee $E_{PG(A)}=mgH$ y cuando desciende debido al rozamiento llega al punto B con $E_{C(B)}=mv^2$, es decir con menor energía.

Esta disminución de energía se explica por el hecho de que mientras el aro se desenrolla, su periferia roza la superficie inclinada, con lo cual parte de su energía mecánica se va transformando en calor que se disipa al medio ambiente.



$$\therefore \quad W^{f_K}_{A\to B}=E_{\substack{\text{perdida}\\ \text{por el aro}}}=Q$$

$$W^{f_K}_{A\to B}=E_{PG(A)}-E^{\text{total}}_{C(B)}$$

$$W^{f_K}_{A\to B}=mgh-mv^2 \qquad \text{(III)}$$

La fuerza de tensión $(\vec{T})$ no realiza trabajo debido a que el extremo del hilo es un punto fijo y no se traslada respecto de las manos del hombre que la sujeta.

El punto B del aro, que está en contacto con la superficie rugosa, presenta una rapidez que es el doble de la rapidez del centro del aro en todo instante; (recuerde traslación y rotación simultánea respecto de una superficie plana) por lo tanto en un pequeño intervalo de tiempo su recorrido (e) se puede considerar lineal y sería el doble del recorrido del centro del aro (es decir $e=2e$ centro del aro). Si hacemos este mismo análisis para muchos intervalos de tiempo continuos se tendrá que

$$W^{f_K}_{A\to B}=f_K.e=\mu_K f_N\left(2e_{\substack{\text{centro}\\ \text{del aro}}}\right)$$

$$W^{f_K}_{A\to B}=\mu_K(mg\cos\theta)(2\ell)$$

Reemplazando en (III)

$$\cancel{m}gh-\cancel{m}v^2=2\mu_K\cancel{m}g\ell\cos\theta$$

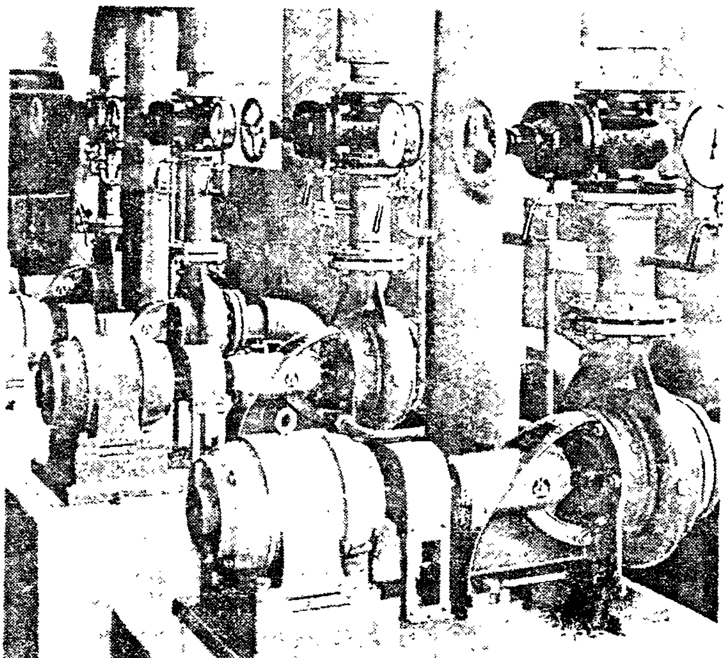
$$10(1{,}2)-v^2=2\left(\frac{1}{4}\right)(10)(2)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \quad v=2\ \text{m/s}$$

POTENCIA

En la actualidad, para efectuar un trabajo mecánico, como por ejemplo la excavación de una zanja o de un pozo. puede participar una cuadrilla de obreros o también los tractores excavadores ya que ambos podrían realizar el mismo trabajo. ¿Cuál es la diferencia? La diferencia está en la rapidez con la cual se realiza, es decir en el factor tiempo. En la práctica los tractores en mínimo tiempo realizan la obra, mientras que la cuadrilla de obreros demora más tiempo.

En Física vemos que el trabajo mecánico desarrollado por unidad de tiempo es importante resaltarlo y para ello utilizaremos una magnitud física denominada Potencia. Entonces con respecto al ejemplo anterior podemos afirmar que los tractores desarrollan mayor potencia que los obreros y esta nueva magnitud nos ayuda a caracterizar la rapidez con la cual realizan trabajo mecanico específicamenie una pala mecánica. motor electrico, bomba hidráulica, etc.



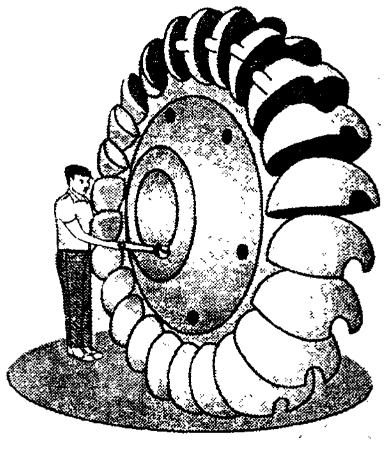
En muchas plantas industriales encontramos diversas maquinas y motores en los cuales es importante conocer su potencia y rendimiento para estimar aproximadamente la cantidad de energía que pueden consumir y transmitir.

¿Cómo se suele evaluar técnicamente a las maquinas o diferentes mecanismos?

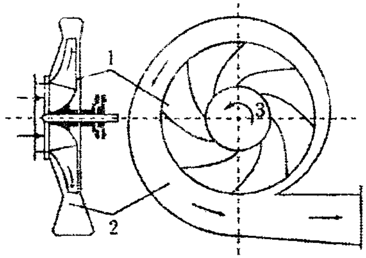
Se las evalúa por la potencia que desarrolla cada máquina o artefactos: la potencia máxima con optimo funcionamiento es señalada por el fabricante. Por ejemplo en los equipos electrodomesticos el fabricante en las placas garantiza lo siguiente:

- Un motor de licuadora desarrolla una potencia de 120 W
- Un televisor (T.V.) de 20" al funcionar consume 80 W.
- Un tubo fluorescente al iluminar consume 40 W.
- La hornilla de una cocina electrica disipa 300 W.

Así podemos mencionar a otras máquinas que desarrollan potencia tales como las grúas, motobombas, motores térmicos (automóviles y tractores), turbina (a gas y vapor), equipos de sonido, ..., etc. Todos estos artefactos necesariamente tienen sus placas datos donde figura su potencia nominal de funcionamiento.



Esquema de turbina Pelton que desarrolla potencia mecánica de rotación o al recibir en sus cucharas una caída de agua.



Esquema de una bomba centrífuga
1: rodete de trabajo, 2: camara espiral

Una bomba centrífuga desarrolla una potencia para elevar agua a cierta altura y se vale de un motor eléctrico acoplado a su eje.

LA POTENCIA

Es una magnitud física escalar, que nos expresa la rapidez con la cual se desarrolla trabajo. También se le puede definir como la energía que se transmite por unidad de tiempo.

Matemáticamente la potencia media desarrollada se determina así

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}}$$

$$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

(Potencia media)

Unidades

W : en Joule (J)

t : en segundos (s)

P : en Watts o vatio (W)

Tener en cuenta: 1 W = 1 J/s

El Watts o vatio es la unidad de medida de la potencia que nos expresa 1 J de trabajo realizado por un máquina cada 1 s de funcionamiento.

Equivalencias prácticas

1 kilovatio o kilowatts = 1 kW = 10^3 W

1 Megavatio o Megawatts = 10^3 kW = 10^6 W = 1 MW

1 caballo de fuerza = 1 horse-power = 1 H.P. = 746 W

Ahora podemos interpretar el hecho que un motor tenga una $P = 400$ W. Este valor nos quiere decir que el motor es capaz de desarrollar un trabajo de 400 J en 1 s o también que transfiere 400 J de energía cada 1 s que funciona

Las lanchas, los buques, los aviones cohetes, automóviles y otros medios de transporte generalmente se desplazan con rapidez constante. ¿Que implica esto? Implica que la fuerza que actua sobre estas maquinas es la fuerza de impulsion del motor y la fuerza de resistencia opuesta, ambas son de igual módulo o en equilibrio cinético

$$F_{motor} = F_{resist}$$

Sin embargo, el motor desarrolla una potencia mecánica dada por

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F_{motor} d}{t} = F_{motor} v = F_{resist} v$$

$$\boxed{P_{\substack{medio\\transporte}} = F_{motor} \cdot v = F_{resist} \cdot v}$$

A partir de esta ecuación, nos preguntamos de qué factores depende la rapidez de los medios de transporte.

Despejando de la ecuación anterior se obtiene

$$v = \frac{P_{motor}}{F_{resist}} \qquad (I)$$

Considerando constante la fuerza de resistencia vemos que la rapidez de la máquina depende directamente de la potencia que desarrolla su motor

Es por esta causa que los automóviles, trenes, locomotoras, de gran velocidad requieren de motores de combustión interna de gran potencia. De la ecuación (I)

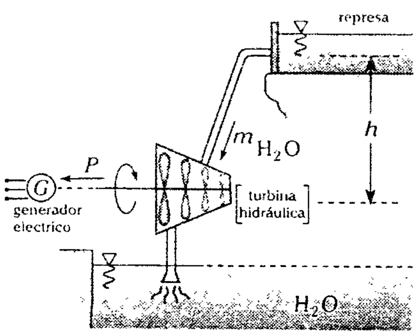
$$F_{resist} = \frac{P_{motor}}{v} = F_{motor}$$

Si consideramos que la potencia del motor es constante, entonces la fuerza del motor aumentará cuando se reduzca la velocidad del vehículo. Es por esta razon que cuando viajamos a provincia y subimos un cerro o cuesta, los choferes saben que es necesaria una mayor fuerza de tracción por parte del motor y para que esta sea máxima, reducen al mínimo la rapidez del automóvil, conociendo los cambios en primera o segunda.

POTENCIA INSTALADA EN UNA CENTRAL HIDROELÉCTRICA

En nuestro país la central hidroeléctrica mas grande que nos proporciona la mayor cantidad de potencia eléctrica es la Central Hidroeléctrica del Mantaro (Santiago Antúnez de Mayolo), que aprovecha la altura de las aguas del río Mantaro. El flujo de este río cae sobre los álabes de un grupo de turbinas acopladas a grandes alternadores que transforman la energía mecánica de rotación en energía eléctrica.

¿Qué potencia reciben las turbinas debido a la caída de las aguas?



Esta potencia se denomina potencia hidráulica instalada y nos expresa la rapidez con la cual reciben energía potencial gravitatoria los álabes de la turbina. Se le calcula así

$$P = \frac{W}{t} = \frac{E_{PG}}{t} = \frac{m_{H_2O}gh}{t} \qquad \text{(I)}$$

La masa de agua que ingresa a la turbina es

$$m_{H_2O} = \rho_{H_2O}V$$

En (I)

$$P = \frac{\rho_{H_2O}Vgh}{t} \qquad \text{(II)}$$

Definimos la relación

$$\frac{V}{t} = \frac{\text{volumen de agua}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{\text{caudal}}{\text{hidráulico}} = Q$$

En (II)

$$\boxed{P = \rho_{H_2O}Qgh}$$

siendo

ρ_{H_2O} : densidad del agua, en kg/m^3.

h : altura desde la cual cae el agua a la turbina, en m.

Q : caudal hidráulico en m^3/s.

P : potencia hidráulica instalada o recibida por la turbina o desarrollada por una bomba hidráulica.

RENDIMIENTO O EFICIENCIA (η)

Se sabe que un motor de automóvil al funcionar transforma la energía interna de los combustibles en energía calorífica y esta a su vez en energía mecánica. También un motor de licuadora transforma la energía eléctrica que recibe en energía mecánica para que gire la cuchilla y además disipe calor y la hornilla de una cocina eléctrica transforma la energía eléctrica que recibe en energía calorífica. A partir de estos casos afirmaremos que toda máquina transforma la energía que recibe en otra forma de energía y no que crea una forma de energía.

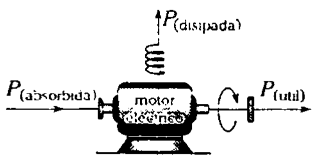
Sin embargo, debido a la fricción entre piezas de la máquina e interacción de la máquina con el medio ambiente hay una forma de energía que se disipa (se pierde, no es útil) y no la podemos aprovechar. Por tal razón, las máquinas jamás han llegado a tener 100% de rendimiento.

Citemos algunos casos:

- Motor eléctrico: 98%
- Motor térmico (automóvil): 42%
- Motor hidráulico (turbina): 86%

¿Cómo evaluamos el rendimiento de una máquina?

Para esto es importante hacer un esquema de la máquina donde se tenga en cuenta el tipo de potencia que absorbe y resaltar qué tipo de potencia arroja o entrega dicha máquina. Asimismo, durante el proceso las máquinas experimentan debido a la fricción interna, una disipación de potencia térmica (potencia disipada) hacia el medio ambiente que muchas veces no es aprovechada.



A partir de la comparación de potencias definimos para la máquina mostrada

$$\boxed{\text{Rendimiento} = \frac{\text{potencia útil que entrega}}{\text{potencia absorbida por máquina}}}$$

Abreviando

$$\boxed{n = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{abs.}}}} \qquad \text{(I)}$$

Según el gráfico

$$P_{\text{abs}} = P_{\text{útil}} + P_{\text{dis}}$$
$$P_{\text{útil}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{dis}}$$

En (I)

$$n = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{abs}}} = \frac{P_{\text{abs}} - P_{\text{dis}}}{P_{\text{abs}}} = 1 - \frac{P_{\text{dis}}}{P_{\text{abs}}}$$

En porcentaje

$$\boxed{n\% = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{abs}}} \times 100\% = \left(1 - \frac{P_{\text{dis.}}}{P_{\text{abs.}}}\right) \times 100\%}$$

Aquí es importante resaltar que el rendimiento no es una magnitud física, es tan solo un parámetro que nos permite comparar la potencia útil que entrega la máquina con respecto a la potencia que consume.

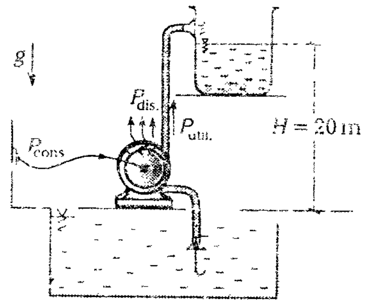
En todo proceso de funcionamiento de un mecanismo siempre hay disipación de potencia térmica hacia el medio ambiente que no es aprovechado pero que sí es reducido mejorando la lubricación, el diseño de las cámaras de combustión, la turboregeneración, etc. Sin embargo las máquinas no llegan al 100% de eficiencia.

Ejemplo 22

Una motobomba puede elevar 600 litros de agua hasta una altura de 20 m en cinco minutos. Si el motor que hace girar el rotor de la bomba de la red eléctrica consume una potencia de 1 000 W, ¿qué rendimiento hidráulico tiene? (Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Resolución

Bosquejemos aproximadamente lo que nos plantea el enunciado (el sistema motobomba es el acoplamiento al eje de un motor eléctrico y una bomba hidráulica).



600 L de agua (su masa es 600 kg)

La bomba centrífuga tiene un rendimiento hidráulico definido por

$$n = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{cons}}} = \frac{P_{\text{hidráulica}}}{1000 \text{ W}} \qquad \text{(I)}$$

Si el agua llega a la parte alta sin rapidez, entonces

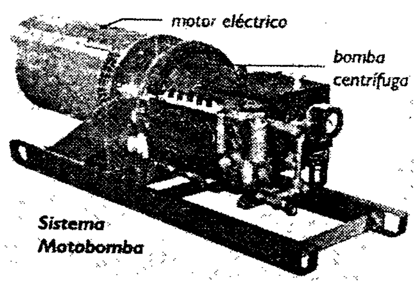
$$P_{\text{hidráulica}} = \frac{\overset{\text{bomba al elevar}}{W^{\text{el agua}}}}{t} = \frac{\Delta E_{PC}^{\text{agua}}}{t}$$

$$P_{\text{hidráulica}} = \frac{m_{\text{agua}} g . H}{t} = \frac{600(10)(20)}{5(60)}$$

$$P_{\text{hidráulica}} = 400 \text{ W}$$

En (I)

$$n = \frac{400 \text{ W}}{1000 \text{ W}} = 0{,}4 = 40\%$$



Un sistema motobomba suele alcanzar un rendimiento del 30% al 40%.

EL CICLISTA IMPETUOSO

Un ciclista sin mucho esfuerzo puede ejercer una fuerza de tracción de 100 N, si la fuerza de rozamiento es constante e igual a 5 N y ademas la masa de la bicicleta y el ciclista es 100 kg usando la Segunda Ley de Newton podemos hallar la aceleración que experimenta

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{100\text{ N} - 50\text{ N}}{100\text{ kg}} = 0{,}5\text{ m/s}^2$$

Con esta aceleración, luego de 20 min de iniciado su movimiento su rapidez será

$v_F = v_0 + at = 0 + 0{,}5(20 \,.\, 60) = 600$ m/s.

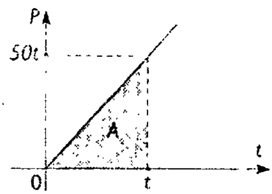
Una rapidez fantástica análoga a la rapidez de una bala de fusil.

¿Qué error tiene este resultado teóricamente evaluado?

Para esto será necesario conocer la cantidad de trabajo por segundo o potencia que debe desarrollar el ciclista.

Se sabe que $P = F \,.\, v_F = 100 \; at = 100\,(0{,}5t) = 50t$

La potencia desarrollada varía linealmente con el tiempo y la podemos graficar.



por de el área de la región nos representa

$$A = \frac{\textit{Energía}}{\textit{transferida}} = \frac{\textit{Cantidad de trabajo}}{\textit{realizado por la persona (W)}}$$

$$\frac{50t}{2} = W$$

$$\therefore \quad W = 25t^2$$

Dándole valores al tiempo transcurrido en el pedaleo del ciclista.

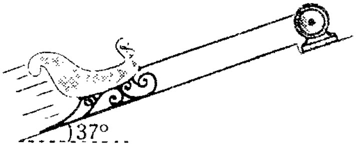
t (min)	0	1	2	3	4	. . .	20
W (kJ)	0	90	360	810	1 440	. . . .	36 000

Podemos apreciar que la cantidad de energía por minuto que tendría que entregar el ciclista al pedal de la bicicleta es relativamente inmensa y en la práctica resulta imposible que el ciclista ceda la cantidad de energía 36 000 kJ al cabo de 20 min o de 60 kJ por cada segundo al final del vigésimo minuto.

Concluimos que el resultado teóricamente evaluado es ideal y engañoso. Porque en la práctica para cada rapidez de rotación del pedal existe una máxima fuerza con la cual el ciclista puede presionar los pedales y luego esta disminuye. La potencia desarrollada por el ciclista tiene límites, así la fuerza de tracción que surge en la cadena y que desarrolla el ciclista en realidad también disminuye con el aumento de rapidez .

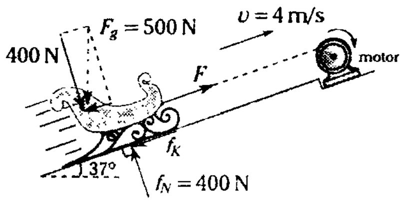
Problema 1

Un trineo de 50 kg es arrastrado sobre el plano inclinado áspero ($\mu_K = 0{,}5$) por medio de un motor y una cuerda, si el bloque asciende con rapidez constante de 4 m/s ¿qué potencia desarrolla el motor al arrastrar el trineo? ($g = 10$ m/s^2)



Resolución

Grafiquemos las fuerzas sobre el trineo.



El motor por medio de la cuerda le transfiere energía al trineo realizando un trabajo y la potencia que desarrolla el motor lo podemos calcular con

$$P = \frac{W^F}{t} = \frac{F.d}{t} = F.v$$

$$\Rightarrow \quad P = F(4) \qquad \text{(I)}$$

Ahora calculamos la fuerza $\vec{F}$ que ejerce la cuerda al bloque.

Bueno, el trineo está ascendiendo con rapidez constante, es decir sin aceleración y en equilibrio cinético. Por consiguiente las fuerzas que actúan sobre el trineo se equilibran y podemos plantear que

$$\sum F(\nearrow) = \sum F(\swarrow)$$

$$F = 300 + f_K$$

$$F = 300 + \mu_K f_N$$

$$F = 300 + (0{,}5)400$$

$$\therefore \quad F = 500 \text{ N}$$

En (I)

$$P = 2\,000 \text{ W} = 2 \text{ kW}$$

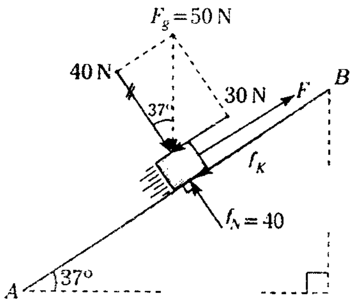
Problema 2

Un bloque de 5 kg es desplazado 5 m en 10 s a lo largo de un plano inclinado (37°) con una fuerza paralela al plano, de modo que el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie inclinada es 0,75. Determine la mínima potencia desarrollada por dicha fuerza. (Considere $g = 10$ m/s^2)

Resolución

Grafiquemos lo que acontece.

Dato: $d_{AB} = 5$ m



Nos piden

$$P^F_{\min} = \frac{W^F_{\min}}{t} = \frac{W^F_{\min}}{10} \qquad \text{(I)}$$

donde $W^F_{\min} = F.d_{AB} = F_{\min}(5)$ (II)

Para que el bloque suba será necesario que

$$F \geq f_K + 30$$

$$F \geq \mu_K f_N + 30$$

$$F \geq 0{,}75(40) + 30$$

$$\therefore \quad F \geq 60 \text{ N}$$

Como se requiere su mínimo valor para que suba lo debe hacer lentamente con rapidez uniforme

$\Rightarrow \quad F_{\text{mín}} = 60\ \text{N}$

En (II)

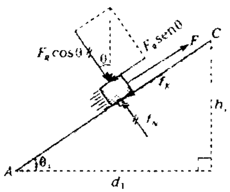
$W^F_{\text{mín}} = 300\ \text{J}$

En (I)

$P^F_{\text{mín}} = 30\ \text{W}$

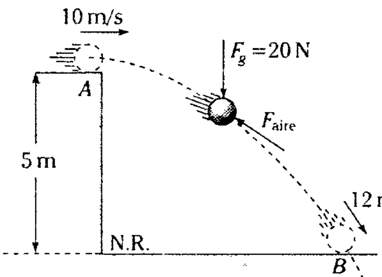
Problema 3

La esfera de 2 kg lanzada desde la posición A, con una rapidez de 10 m/s, impacta sobre el piso con una rapidez de 12 m/s. Si la esfera en todo momento experimenta una fuerza de resistencia del aire constante, ¿qué potencia desarrolla la fuerza del aire sobre la esfera dado que ésta impacta en el piso luego de 2 s? (g = 10 m/s²)



Resolución

Bosquejemos cómo sucede el movimiento.



La esfera al abandonar la superficie describe un movimiento curvilíneo y experimenta resistencia por parte del aire, entonces el movimiento no es parabólico de caída libre.

La resistencia del aire realiza trabajo de oposición y disminuye la energía mecánica de la esfera. Este trabajo depende del recorrido que sigue la esfera pues la fuerza es constante en módulo y tangente a la trayectoria. La potencia de oposición del aire está definida

$$P = \frac{W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B}}{t} = \frac{W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B}}{2} \qquad \text{(I)}$$

El trabajo de oposición del aire ocasiona pérdida de energía mecánica de la esfera.

$$\Rightarrow \quad W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B} = \Delta E_M = E_{M(B)} - E_{M(A)}$$

$$W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B} = \frac{mv_B^2}{2} - \left(\frac{mv_A^2}{2} + mgh\right)$$

$$W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B} = \frac{2(12)^2}{2} - \left(\frac{(2)(10)^2}{2} + 2(10)(5)\right)$$

$$W^{F_{\text{aire}}}_{A\to B} = -56\ \text{J}$$

En (I)

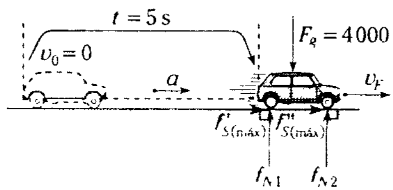
$$P = -28\,\text{W}$$

Problema 4

Un automóvil de 400 kg inicia su movimiento sobre una superficie áspera. ¿Qué potencia desarrolla la fuerza de rozamiento sobre el automóvil luego de 5 s? (Las ruedas del automóvil están a punto de deslizar sobre la pista, siendo $\mu_k = 0{,}4$; $\mu_S = 0{,}5$)

Resolución

Realicemos un bosquejo, de cómo sucede el fenómeno.



La potencia que desarrolla la fuerza de rozamiento viene dada por

$$P = \frac{W^f}{t} = \frac{\Delta E_C}{t} = \frac{E_{C_F} - E_{C_0}}{t} = \frac{\frac{1}{2} m v_F^2}{t}$$

$$P = \frac{1}{2}\frac{400}{5} v_F^2 = 40 v_F^2 \qquad \text{(I)}$$

Se requiere v_F

Como el automóvil experimenta aceleración constante y realiza un M.R.U.V. podemos usar

$$v_F = v_0 + at$$
$$v_F = 0 + a(5)$$
$$\Rightarrow \; v_F = 5a \qquad \text{(II)}$$

Ahora calculemos a, del D.C.L. del automóvil. Si sobre el automóvil actúa una fuerza resultante (F_R)

$$F_R = f'_{S(max)} + f''_{S(max)}$$
$$F_R = \mu_S f_{N1} + \mu_S f_{N2}$$
$$F_R = \mu_S(f_{N1} + f_{N2}) = 0{,}5\,(f_{N1} + f_{N2}) \qquad \text{(III)}$$

Verticalmente hay equilibrio

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$
$$f_{N1} + f_{N2} = F_3$$
$$f_{N1} + f_{N2} = 4\,000 \text{ N}$$

Reemplazando en (III)

$$F_R = 2\,000 \text{ N}$$

Esta fuerza resultante de acuerdo a la Segunda Ley de Newton ocasiona

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{2000 \text{ N}}{400 \text{ kg}} = 5 \text{ m/s}^2$$

En (II)

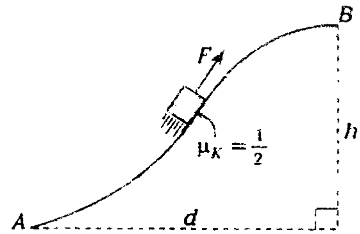
$$v = 25 \text{ m/s}$$

Finalmente en (I)

$$P = 40\,(25)^2$$
$$\therefore \; P = 25\,000 = 25 \text{ kW}$$

Problema 5

La fuerza F en todo momento es tangente a la trayectoria curvilínea y arrastra lentamente un bloque de 5 kg, desde A hasta B, donde $h = 1$ m y $d = 2$ m, durante 20 s. ¿Qué potencia desarrolla esta fuerza? ($g = 10$ m/s^2)

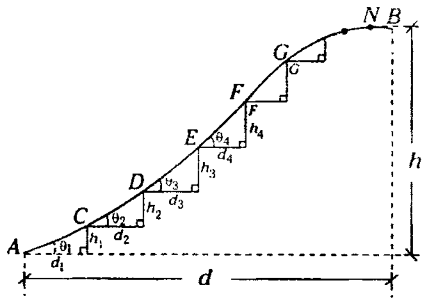


Resolución

Nos piden la potencia desarrollada por F de A hacia B, entonces planteamos

$$P = \frac{W^F_{A\to B}}{t} = \frac{W^F_{A\to B}}{20} \qquad \text{(I)}$$

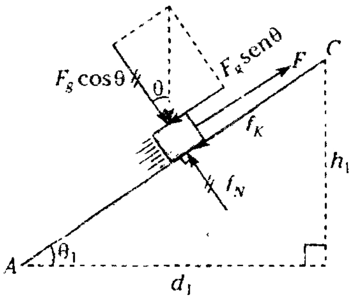
Determinemos $W^F_{A\to B}$. Si la trayectoria de A hacia B fuese rectilínea, entonces con h y d se conocería la d_{AB} y sería relativamente simple su cálculo y si la trayectoria es curva, ¿qué hacemos? A esta trayectoria curva la dividimos en varios tramos pequeños de modo que sean casi rectilíneos. Por dato, siempre F será tangente a la trayectoria, entonces es como si fuera paralela a cada tramo.



donde

- Horizontalmente
$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots = d$$
- Verticalmente
$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots = h$$

Analicemos el tramo de A hacia C, prácticamente rectilíneo (tramo curvo muy pequeño)



Como el movimiento es lento, el bloque está en equilibrio cinético y se verifica

$$\sum F(\nearrow)=\sum F(\swarrow)$$

$$F=f_K+F_g\,\text{sen}\,\theta$$

$$F=\mu_K f_N+mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$F=\mu_K mg\cos\theta+mg\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces, el trabajo realizado por F desde A hasta C será

$$W^F_{A\to C}=F.d_{AC}=(\mu_K mg\cos\theta+mg\,\text{sen}\,\theta)d_{AC}$$

$$W^F_{A\to C}=\mu_K mg\underbrace{d_{AC}\cos\theta}_{d_1}+mg\underbrace{d_{AC}\,\text{sen}\,\theta}_{h_1}$$

$$\therefore\ W^F_{A\to C}=\mu_K mgd_1+mgh_1$$

A partir de este caso inducimos análogamente para los demás tramos

Tramo $C\to D$: $W^F_{C\to D}=\mu_K mgd_2+mgh_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Tramo enésimo: $W^F_{N\to B}=\mu_K mgd_n+mgh_n$

Sumando todos los trabajos efectuados

$$\underbrace{W^F_{A\to C}+W^F_{C\to D}+\ldots+W^F_{N\to B}}_{\text{trabajo total de } F \text{ desde } A \text{ hacia } B}=\mu_K mg\underbrace{(d_1+d_2+\ldots+d_n)}_{d}+mg\underbrace{(h_1+h_2+\ldots+h_n)}_{h}$$

$$\therefore\ W^F_{A\to B}=\mu_K mgd+mgh$$

Reemplazando datos

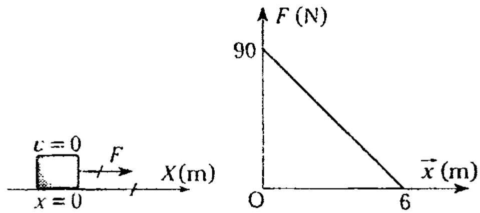
$$W^F_{A\to B}=0{,}50(5)10(2)+5(10)]=100\text{ J}$$

En (I)

$$P=5\text{ W}$$

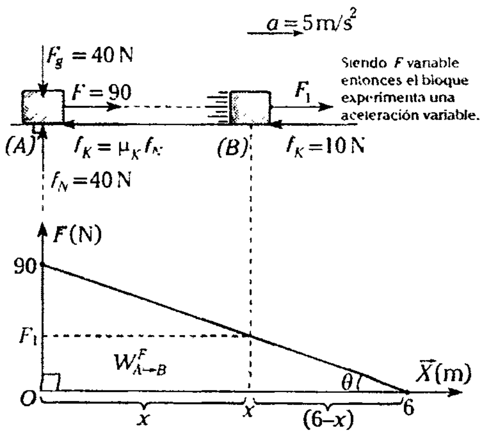
Problema 6

Al bloque de 4 kg en reposo se le aplica una fuerza horizontal que varía con la posición $(\vec{x})$ tal como se muestra en la gráfica adjunta. Determine la potencia neta sobre el bloque hasta el instante t = 10 s en que adquiere una aceleración de módulo 5 m/s^2. (Considere para el bloque y la superficie un coeficiente de rozamiento cinético de 0,25 y g = 10 m/s^2)



Resolución

Examinemos el caso



Sobre el bloque solo realizan trabajo la fuerza externa $\vec{F}$ y la fuerza de rozamiento $(\vec{f}_K)$ tal como se aprecia en la figura.

Entonces la potencia neta será

$$P_{\text{neta}}=\frac{W^{\text{neto}}_{A\to B}}{t}=\frac{W^{F}_{A\to B}-W^{f_k}_{A\to B}}{10} \qquad \text{(I)}$$

donde $W^{f_k}_{A\to B}=f_K d_{AB}=10x$ (II)

y $W^{F}_{A\to B}=A_{\square}=\left(\frac{90+F_1}{2}\right)x$ (III)

Se requiere F_1 y x

En la posición B el bloque experimenta una $a=5$ m/s^2, entonces sobre él actúa una fuerza resultante

$$\underbrace{F_R}=ma$$

$$\Rightarrow\ F_1-f_k=m(5)$$

$$F_1-10=4(5)$$

$$\therefore\ F_1=30\text{ N}$$

¿Cómo hallamos x? De la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{x}$ en la cual usamos la razón tangente en los triángulos rectángulos; así

$$\tan\theta=\frac{90}{6}=\frac{F_1}{6-x}$$

$$15=\frac{30}{6-x}\ \Rightarrow\ x=4\text{ m}$$

Reemplazamos en (II) y (III)

$$W^{f_k}_{A\to B}=40\text{ J} \quad \text{y} \quad W^{F}_{A\to B}=240\text{ J}$$

Reemplazando en (I)

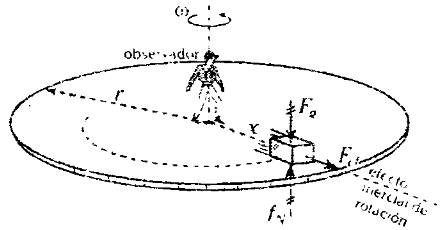
$$P_{\text{neta}}=20\text{ W}$$

Problema 7

Sobre un disco de 1 m de diámetro, que rota alrededor de un eje fijo a razón de 5 rad/s, se mueve un bloque de 300 g. Si durante el deslizamiento del bloque por una trayectoria arbitraria desde un punto que dista 30 cm del eje hasta que abandona la superficie del disco emplea 2 s, ¿qué potencia desarrolla la fuerza centrífuga $(\vec{F}_{cf})$?

Resolución

Nos piden calcular la potencia desarrollada por la fuerza centrífuga, entonces lo primero que debemos recordar qué es la fuerza centrífuga. Es aquella fuerza inercial que se manifiesta cuando analizamos un cuerpo desde un sistema rotacional en donde experimentalmente notamos que debido a dicha fuerza, los cuerpos tienden a abandonar radialmente al plano de rotación. Por lo tanto, debemos analizar el movimiento del bloque situándonos en el disco que rota.



Diámetro del disco = 1 m; entonces r = 0,5 m

Para el observador no inercial sobre el bloque la fuerza centrífuga (F_{cf}) se calcula en forma análoga a la centrípeta, así

$$F_{cf}=ma_c=m\omega^2x=0{,}3(5)^2x$$

$$\therefore\ F_{cf}=7{,}5x$$

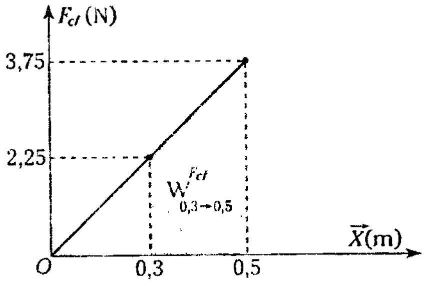
Note que la F_{cf} varía linealmente con el radio de giro x y se confirma dándole valores a x desde 0,3 m hasta 0,5 m. De esto nos percatamos al plantear una tabla

x (m)	0,30	0,40	0,50
F_{cf} (N)	2,25	3,00	3,75

Como nos piden la potencia desarrollada definimos

$$P=\frac{W^{F_{cf}}_{0,3\to0,5}}{t}=\frac{W^{F_{cf}}_{0,3\to0,5}}{2} \qquad \text{(II)}$$

Debemos calcular el trabajo desarrollado por la fuerza centrífuga desde $x_0 = 0{,}30$ m hasta que abandona el disco, es decir hasta $x_F = r = 0{,}50$ m. Para ello como $\vec{F}_{cf}$ es de valor variable, con los datos de la tabla, construyamos la gráfica $\vec{F}_{cf}$ vs. $\vec{x}$.



De donde calculamos

$$W^{F_{cf}}_{0,3\to0,5} = A_{\triangle} = \left(\frac{2{,}25+3{,}75}{2}\right)(0{,}5-0{,}2)$$

$$\Rightarrow \quad W^{F_{cf}}_{0,3\to0,5} = 0{,}9 \text{ J}$$

Reemplazamos en (I)

$P = 0{,}45$ W

Problema 8

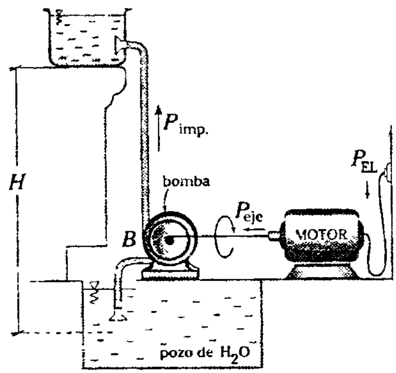
Un motor eléctrico de 80% de rendimiento requiere de 6 kW para impulsar una bomba centrífuga de 73,5% de rendimiento, la cual a su vez eleva agua desde la planta baja hacia el tanque de un edificio situado en su azotea a razón de 0,54 m^3/min (caudal). ¿Qué cantidad de pisos tiene el edificio, si cada uno de ellos tiene 2,5 m de altura? (g = 10 m/s^2)

Resolución

Consideremos que el edificio tiene una altura neta H y como cada piso tiene 2,5 m de alto, entonces el número de pisos lo obtenemos con

$$N = \frac{H}{2{,}5} \qquad \text{(I)}$$

Analicemos, cómo ocurre el proceso de llenado del tanque de agua.



Del esquema, definimos el rendimiento (n)

- Para el motor eléctrico

$$n_{motor} = \frac{P_{eje}}{P_{EL}} \qquad \text{(II)}$$

- Para la bomba centrífuga

$$n_{bomba} = \frac{P_{imp}}{P_{eje}} \qquad \text{(III)}$$

Haciendo (II) × (III) tenemos

$$n_{motor} \times n_{bomba} = \frac{P_{imp}}{P_{EL}}$$

$$\therefore \quad P_{imp} = n_{motor} n_{bomba} P_{EL} = (0{,}8)(0{,}735)(6\,000)$$

$$\Rightarrow \quad P_{imp.} = 3\,528 \text{ W}$$

Es la potencia con la cual la bomba impulsa al agua. A esta potencia de bombeo se le denomina también potencia hidráulica y se le determina así

$$P_{imp.} = P_{bombeo} = P_{hidráulico} = \frac{\text{trabajo realizado por bomba}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

$$P_{imp.} = \frac{\begin{matrix}\text{energía entregada}\\ \text{por la bomba al } H_2O\end{matrix}}{t} = \frac{\begin{matrix}\text{energía cinética}\\ \text{que adquiere el } H_2O\end{matrix}}{t}$$

Pero, generalmente despreciando la fricción del agua en los tubos, la energía cinética del agua (E_C) al llegar a la parte alta se transforma totalmente en energía potencial gravitatoria (E_{PG}).

$$\therefore \quad P_{\text{imp.}} = \frac{E_C}{t} = \frac{E_{PG}}{t} = \frac{m_{H_2O}gh}{t} \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \quad \Rightarrow \quad m_{H_2O} = \rho_{H_2O}V$$

En (IV)

$$P_{\text{imp.}} = \frac{\rho_{H_2O}VgH}{t} \qquad \text{(V)}$$

Hacemos

$$\frac{\text{volumen de } H_2O}{\text{tiempo}} = \frac{V}{t} = \begin{matrix}\text{caudal}\\ \text{hidráulico}\end{matrix} = Q(\text{m}^3/\text{s})$$

Reemplazando en (IV)

$$P_{\text{imp.}} = \rho_{H_2O}Qgh$$

(Fórmula de potencia hidráulica)

Sustituyendo datos

$$3\,528 = 10^3\left(\frac{0{,}54}{60}\right)10H$$

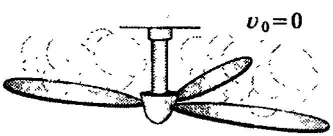
$$\Rightarrow \quad H = 40 \text{ m}$$

En (I)

N = 16 pisos

Problema 9

El ventilador al funcionar recibe 15 J por cada segundo de una red eléctrica y expulsa el aire a 6 m/s con sus aletas, que tienen 25 cm de longitud. Si consideramos al inicio las partículas de aire sin rapidez y que el aire tiene una densidad 1,2 kg/m^3; ¿qué rendimiento tiene el ventilador?



Resolución

Cuando el ventilador es encendido, su motor (eléctrico) consume o absorbe de la red eléctrica 15 J en cada segundo, es decir consume una potencia de 15 W al funcionar.

¿Qué hace el sistema de álabes del ventilador con la potencia que le da su motor? Agita e impulsa para ceder energía cinética a las partículas del aire por unidad de tiempo.

Ahora para calcular el rendimiento (n) del ventilador planteamos

$$n = \frac{P_{\text{entregada}}}{P_{\text{consumida}}} = \frac{P_{\substack{\text{entregada}\\ \text{al aire}}}}{P_{\text{motor}}} = \frac{\dfrac{E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}}}{t}}{15} = \frac{E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}}}{15t} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere la $E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}}$, se sabe que esta energía verifica que

$$E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}} = E_C^{\substack{\text{recibida}\\ \text{por aire}}} = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \ldots$$

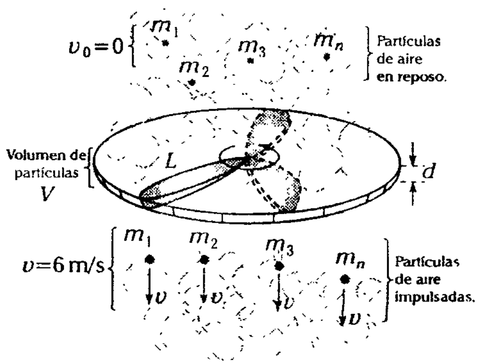
$$E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}} = \frac{1}{2}\underbrace{(m_1 + m_2 + \ldots)}_{m}v^2 \qquad \text{(II)}$$

donde

$$m = m_1 + m_2 + \ldots = \begin{matrix}\text{masa de todas las partículas}\\ \text{de aire que escapan por los}\\ \text{álabes del ventilador}\end{matrix}$$

¿Cómo calculamos esta masa? Veamos lo siguiente:

Esta masa cruza las aletas del ventilador, así .



En el volumen resaltado, se tiene $V >>$ volumen de los álabes

$$\therefore \quad m_{\text{aire}} = m = \rho_{\text{aire}} V = \rho_{\text{aire}}\left(\pi L^2.d\right) \qquad \text{(III)}$$

donde el espesor (d) del volumen señalado representa la distancia que cruzan las partículas de aire y podemos calcularlo al usar

$$d = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t = \frac{vt}{2}$$

En (III)

$$m = \rho_{\text{aire}}\frac{\pi L^2 vt}{2}$$

En (II)

$$E_{\substack{\text{entregada por}\\ \text{el ventilador}}} = \frac{1}{2}\left(\rho_{\text{aire}}\frac{\pi L^2 vt}{2}\right)v^2$$

Ahora este resultado lo reemplazamos en (I)

$$n = \frac{\frac{1}{4}\left(\rho_{\text{aire}}\pi L^2 v^3 \cancel{t}\right)}{15\cancel{t}}$$

$$n = \frac{1}{60}\rho_{\text{aire}}\pi L^2 v^3$$

Reemplazando estos se obtiene

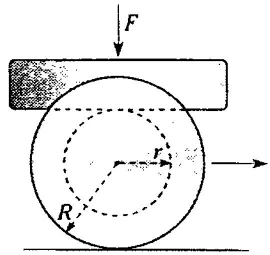
$$n = \frac{1}{60}(1{,}2)\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2(6)^2$$

$$n = 0{,}847$$

$$\therefore \quad n = 84{,}7\%$$

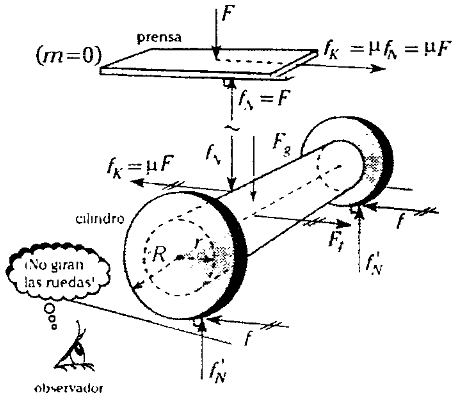
Problema 10

Una prensa ejerce presión con la fuerza F sobre el cilindro de radio r con ruedas R fijadas rígidamente a él. El coeficiente de fricción entre el cilindro y la prensa, así como entre las ruedas y el plano horizontal, es μ. ¿Qué mínima potencia es necesario efectuar para desplazar el eje del sistema hacia la derecha a la distancia d en t segundos? (Considere d menor que la distancia hasta el extremo de la prensa, cuya masa es despreciable).



Resolución

Realicemos un gráfico donde se aprecie lo que sucede, donde F_l es la fuerza aplicada al eje.



La prensa desliza debido a f_K, que surge cuando F_l jala al eje del cilindro.

En la figura, F_l es la fuerza que jala al cilindro sin que sus ruedas giren y para esto aplicamos F_l en el centro, de manera que corte al eje del cilindro.

Nos piden calcular la potencia desarrollada por F_l en forma mínima

$$P_{\text{mín}} = \frac{W^{F_l}}{t} = \frac{F_l.d}{t} \qquad \text{(1)}$$

Para que la potencia sea mínima, necesariamente F_l también debe serlo y esto se consigue al desplazar lentamente el cilindro; para lo cual

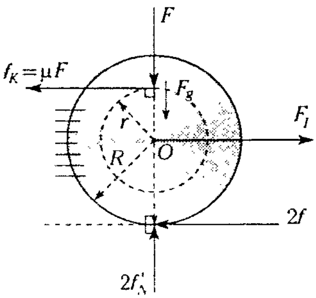
$F_1 \geq 2f + f_K$

$F_1 \geq 2f + \mu F$

$\therefore \ F_{\text{mín}} = 2f + \mu F$ (II)

¿Cómo hallamos f?

Analicemos el perfil de una rueda vista por el observador indicado, anteriormente.



Para que la rueda no rote, es decir se traslade solamente, respecto de su centro de masa (O) debe haber equilibrio de rotación. Podemos plantear

$$\sum M_0 \circlearrowright = \sum M_0 \circlearrowleft$$

$$M_0^{2f} = M_0^{f_K}$$

$$(2f)R = (f_K)r$$

$$\therefore \ 2f = \mu F\left(\frac{r}{R}\right)$$

En (II)

$$F_{\text{mín}} = \mu F\left(\frac{r}{R}\right) + \mu F = \mu F\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Reemplazando en (I)

$$P_{\text{mín}} = \frac{\mu F d}{t}\left(1 + \frac{r}{R}\right)$$

Problema 11

Sobre un bloque de masa m que reposa sobre una superficie horizontal lisa empieza a actuar una fuerza horizontal cuyo módulo depende del tiempo según $F = Kt$ ¿Qué potencia desarrolla dicha fuerza durante t segundos?

Resolución

Se sabe que la potencia desarrollada es

$$P = \frac{W^F}{t} = \frac{\Delta E_C}{t} = \frac{\frac{1}{2}m\left(v_F^2 - v_0^2\right)}{t}$$

Pero, inicialmente $v_0 = 0$, entonces

$$P = \frac{1}{2}\frac{m}{t}v_F^2 \qquad (I)$$

Hallemos la rapidez final v_F, para lo cual usamos la Segunda Ley de Newton

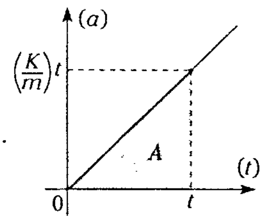
$$F_R = ma$$

$$\Rightarrow \ F = ma$$

$$\Rightarrow \ Kt = ma$$

$$\Rightarrow \ a = \left(\frac{K}{m}\right)t$$

La aceleración varía linealmente con el tiempo según la ecuación, entonces hacemos la gráfica $\vec{a} - t$



donde

$$A = \Delta\vec{v}$$

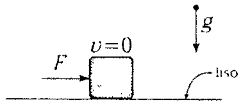
$$\Rightarrow \ \frac{Kt^2}{2m} = v_F - \cancel{v_0}$$

En (I)

$$P = \frac{K^2t^3}{8m}$$

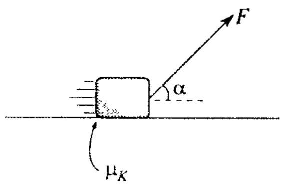
Problemas Propuestos

1. Sobre el bloque de 4 kg que se muestra empieza a actuar una fuerza $\vec{F}$, lo cual permite que el bloque varíe su rapidez uniformemente en 4 m/s cada 2 s. Determine la cantidad de trabajo que se desarrolla mediante $\vec{F}$ en los primeros 10 s. ($g = 10$ m/s^2)



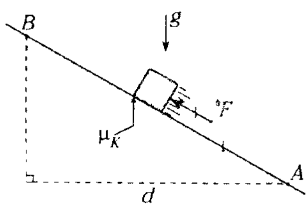
A) 0,8 kJ B) 1,2 kJ C) 1,6 kJ
D) 2 kJ E) 2,4 kJ

2. En el gráfico, se muestra un bloque de 5 kg que experimenta M.R.U.V. Si su rapidez varía en 12 m/s cada 3 s, determine el trabajo neto para un tramo de 10 m.



A) 100 J B) 120 J C) 150 J
D) 200 J E) 250 J

3. A partir del gráfico, determine la cantidad de trabajo desarrollado mediante la fuerza de rozamiento sobre el bloque de masa m de A hacia B.



A) $-\mu_K mgd$

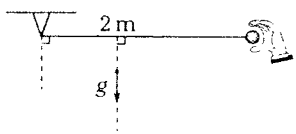
B) $-\mu_K(mg+F)d$

C) $-2\mu_K mgd$

D) $-\dfrac{\mu_K mgd}{2}$

E) $-\mu_K(2mg+F)d$

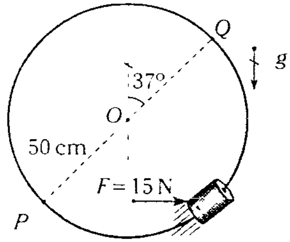
4. Se muestra el instante en que se abandona a una esfera de 4 kg. Si por parte del aire experimenta una resistencia de módulo constante e igual a $25/\pi$ N, determine la cantidad de trabajo neto hasta el instante en que la esfera llega a su posición más baja. ($g = 10$ m/s^2)



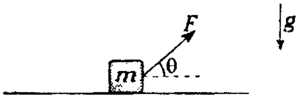
A) 50 J B) 52 J C) 54 J
D) 55 J E) 56 J

5. Al pequeño collarín de 0,5 kg se le traslada lentamente sobre el aro que está en posición vertical por medio de la fuerza constante $\vec{F}$. ¿Cuánto trabajo se desarrolló por medio de la fuerza de rozamiento de P hacia Q? ($g = 10$ m s^2)

A) – 3 J
B) – 4 J
C) – 5 J
D) – 6 J
E) – 2 J



6. Sobre el pequeño bloque que se encuentra en reposo, empieza a actuar una fuerza cuyo módulo depende del tiempo según $F = (at)$ y mantiene la dirección que se muestra. ¿Cuánto trabajo se desarrolla por medio de dicha fuerza hasta el instante que el bloque pierde contacto con el piso liso?



A) $\dfrac{m^3g^4}{a^2}\cot^2\theta$

B) $\dfrac{1}{8}\dfrac{m^3g^4}{a^2}\cdot\dfrac{\cot^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

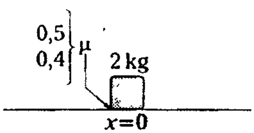
C) $\dfrac{m^3g^4}{a^2}\operatorname{sen}^2\theta$

D) $\dfrac{1}{4}\dfrac{m^3g^4}{a^2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cot^2\theta}$

E) $\dfrac{1}{8}\dfrac{m^3g^4}{a^2}\cdot\tan^2\theta$

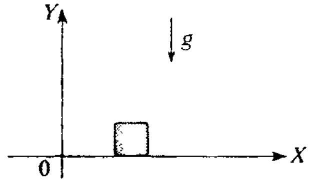
7. Sobre el bloque que se muestra empieza a actuar una fuerza que depende de la posición $(\vec{x})$, según $\vec{F} = (48 - 5x)\hat{i}$ N donde x se expresa en metros. Determine el trabajo neto sobre el bloque hasta el instante en que alcanza su máxima rapidez. ($g = 10$ m/s^2)

A) 150 J
B) 160 J
C) 180 J
D) 190 J
E) 200 J

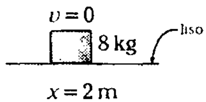


8. Sobre el bloque de 4 kg empieza a actuar una fuerza $\vec{F}$ que depende de la posición $(\vec{y})$, según $\vec{F} = (60 - 2y)\hat{j}$ N, donde y se expresa en metros. ¿Cuánto trabajo se desarrolla sobre el bloque por medio de dicha fuerza hasta el instante en que su aceleración es igual a $\vec{a} = -5\hat{j}$ m/s^2? ($g = 10$ m/s^2)

A) 600 J
B) 700 J
C) 750 J
D) 800 J
E) 850 J

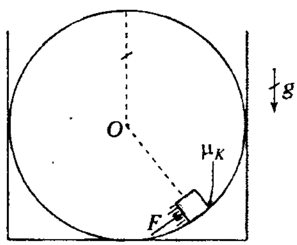


9. Sobre el bloque que se muestra empieza a actuar una fuerza $\vec{F}$ que viene expresada por $\vec{F} = (4x\hat{i} + 5x^2\hat{j})$ N, donde x es la posición (en m). Determine la cantidad de trabajo que se desarrolla por medio de $\vec{F}$ hasta el instante en que está por elevarse el bloque. ($g = 10$ m/s^2)



A) 20 J B) 22 J C) 24 J
D) 28 J E) 32 J

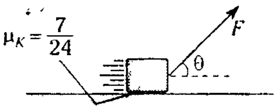
10. Mediante la acción de la fuerza $\vec{F}$, al bloque de masa M se le traslada con una rapidez constante v sobre el rizo de radio R. ¿Cuánto trabajo se desarrolló mediante la fuerza de rozamiento en una vuelta? ($\vec{F}$ en todo instante es tangente a la trayectoria)



A) $-2\pi\mu_K mv^2$ B) $-\dfrac{2\pi}{\mu_K}mgv^2$ C) $-\pi\mu_K mgv^2$

D) $-\dfrac{\pi mg}{2\mu_K v^2}$ E) $-\pi\mu_K mv^2$

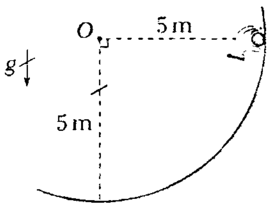
11. En el gráfico, se muestra como se traslada a un bloque de 25 kg. ¿Qué cantidad de trabajo es necesario desarrollar por medio de $\vec{F}$ para un tramo de 20 m? (g = 10 m/s^2)



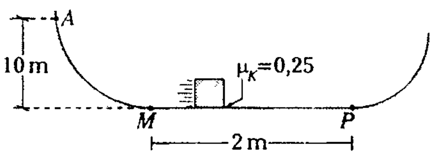
A) 670 J B) 1 340 J C) 1 344 J
D) 1 240 J E) 1 440 J

12. Se muestra el instante en que a una esfera de 4 kg se le suelta. Si el viento le ejerce una fuerza constante $\vec{F} = +30\hat{i}$ N., determine el módulo de la reacción de la superficie cilíndrica lisa sobre la esfera al pasar por su posición más baja . (g = 10 m/s^2).

A) 60 N
B) 70 N
C) 80 N
D) 90 N
E) 100 N



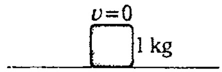
13. El bloque que se muestra es de 4 kg y se le soltó en A. Si solo hay asperezas en el tramo horizontal, ¿cuántas veces recorre enteramente dicho tramo y a qué distancia de P se detiene? (g = 10 m/s^2)



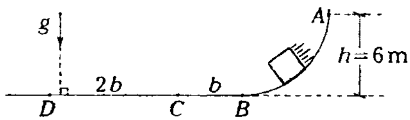
A) 40 veces; 0 m
B) 20 veces; 2 m
C) 20 veces; 1 m
D) 40 veces; 1 m
E) 20 veces; 0 m

14. Sobre el bloque que se muestra empieza a actuar una fuerza $\vec{F}$, que depende de la altura (h) según $\vec{F} = (20 - h)\hat{j}$ N donde h está en metros. Si el aire le ejerce una fuerza de resistencia de módulo 2 N; ¿cuál será su máxima rapidez? (g = 10 m/s^2)

A) 2 m/s
B) 4 m/s
C) 6 m/s
D) $2\sqrt{2}$ m/s
E) 8 m/s



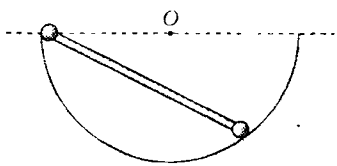
15. El bloque que se muestra fue abandonado en A y solo llegó hasta D. Si solo se considera áspero el tramo horizontal; ¿qué rapidez tuvo cuando pasó por C? (g = 10 m/s^2)



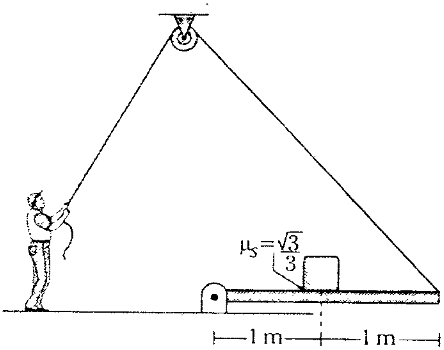
A) $2\sqrt{5}$ m/s B) $4\sqrt{5}$ m/s C) $\sqrt{10}$ m/s
D) $5\sqrt{2}$ m/s E) $5\sqrt{5}$ m/s

16. En el gráfico, se muestran a dos pequenas esferas, de 0,5 kg cada una, unidas a una varilla rígida de 3,2 m y masa despreciable. Las esferas son abandonadas dentro de una superficie semicilíndrica de radio 2 m. Si el rozamiento no es muy intenso, determine la energía disipada debido al rozamiento después de un tiempo muy prolongado. (g = 10 m/s^2)

A) 2,4 J
B) 3,2 J
C) 3,6 J
D) 4,2 J
E) 4,5 J



17. A partir de la figura, determine el trabajo necesario que desarrolla el joven hasta que el bloque esté a punto a deslizar. (Considere $g = 10$ m/s^2; $m_{\text{tabla}} = 5m_{\text{bloque}} = 50$ kg).



A) 250 J B) 280 J C) 320 J
D) 300 J E) 350 J

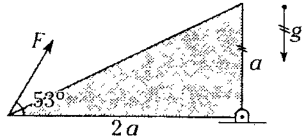
18. Una barra homogénea de masa m y longitud L descansa sobre una superficie horizontal. Si se le hace rotar sobre la superficie para mantener uno de sus extremos fijo; ¿cuánto trabajo como mínimo se debe desarrollar para que dé n vueltas?
(g: aceleración de la gravedad y
μ_K : coeficiente de rozamiento cinético entre la barra y la superficie).

A) $\dfrac{n\mu_K mgL}{\pi}$ B) $\dfrac{n\mu_K mgL}{2\pi}$ C) $2n\mu_K MgL\pi$

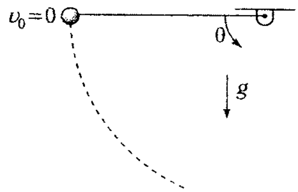
D) $n\mu_K MgL\pi$ E) $n\mu_K MgL$

19. La placa homogénea de 60 N es puesta en posición de máxima altura mediante una fuerza constante cuyo módulo es $F = 100$ N. Al llegar a la posición mencionada, la placa presenta una energía cinética de rotación de 300 J; ¿cuál será su energía cinética de traslación en dicha posición? ($a = 1{,}5$ m)

A) 60 J
B) 90 J
C) 80 J
D) 95 J
E) 65 J



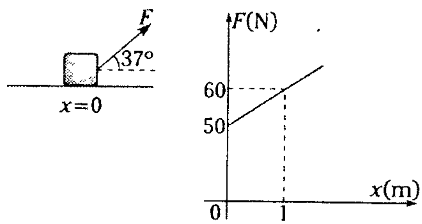
20. Durante la caída de la esfera de 1 kg, el aire ofrece resistencia al movimiento mediante una fuerza de módulo constante F de tal manera que la cuerda logra barrer un ángulo de 150°. Determine F ($g = 10$ m/s^2)



A) $\dfrac{5}{\pi}$N B) $\dfrac{6}{\pi}$N C) $\dfrac{8}{\pi}$N

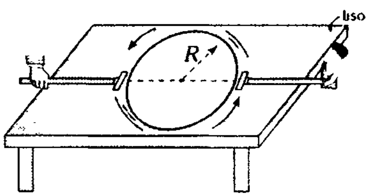
D) $\dfrac{10}{\pi}$N E) $\dfrac{9}{\pi}$N

21. Un pequeño bloque de 6 kg se encuentra sobre una superficie horizontal lisa y se le ejerce una fuerza que forma en todo instante un ángulo de 37° con la horizontal, pero su módulo cambia según como lo indica la gráfica adjunta. Determine con qué rapidez el bloque abandona el piso ($g = 10$ m/s^2)



A) 8 m/s B) 7,5 m/s C) 10 m/s
D) 12 m/s E) 12,5 m/s

22. A un aro fino de masa m y radio R se le ha hecho rotar hasta que adquiere una rapidez angular ω y lo hemos colocado sobre una superficie horizontal lisa. Si lo presionamos simultáneamente con dos tabiques tal como se muestra, ejerciéndole cada uno una fuerza de módulo F, determine el número de vueltas que logra dar el aro hasta que se detiene, si se sabe que el coeficiente de rozamiento cinético entre el aro y los tabiques es μ.



A) $\frac{\mu mR}{8F}\omega^2$ B) $\frac{\pi mR}{8\mu F}\omega^2$ C) $\frac{\mu mR}{8\pi F}\omega^2$

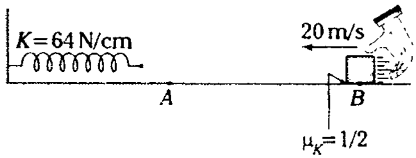
D) $\frac{mR}{8\pi\mu F}\omega^2$ E) $\frac{\mu\pi mR}{8F}\omega^2$

23. Una piedra de 200 g es lanzada con una velocidad de $\vec{v}=30\hat{j}$ m/s . Si el aire le ejerce una fuerza de resistencia de módulo constante e igual a 1 N; ¿con qué rapidez retorna la esfera? (g = 10 m/s²)

A) 30 m/s B) 20 m/s C) $20\sqrt{3}$ m/s

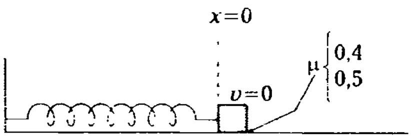
D) 10 m/s E) $10\sqrt{3}$ m/s

24. Se muestra el lanzamiento de un bloque de 4 kg sobre una superficie horizontal donde solo el tramo AB es áspero. ¿Cuál es la máxima deformación del resorte?
(g = 10 m/s² y d_{AB} = 30 m)



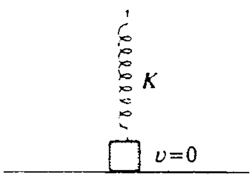
A) 10 cm B) 15 cm C) 20 cm
D) 25 cm E) 30 cm

25. El bloque que se muestra es de 5 kg y está soldado al resorte de rigidez K = 20 N/cm. Si se le desplaza 5 cm a la izquierda y se le suelta, ¿cuál es la mayor rapidez que adquiere? (g = 10 m/s²)



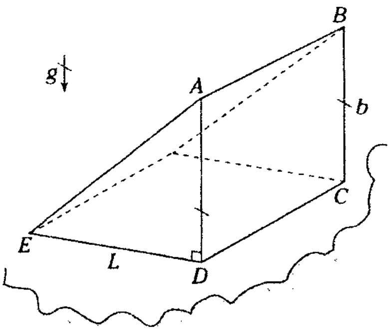
A) 0,5 m/s B) 0,6 m/s C) 0,8 m/s
D) 1 m/s E) 1,6 m/s

26. Se muestra a un bloque de 4 kg unido a un resorte de rigidez 8 N/cm. Si se empieza a ejercer una fuerza vertical hacia arriba sobre el extremo libre del resorte, ¿cuál es el menor trabajo que se debe realizar para que el bloque se eleve 3 m? (g = 10 m/s²)



A) 111 J B) 121 J C) 124 J
D) 112 J E) 128 J

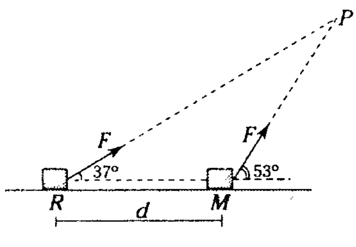
27. Se muestra un prisma homogéneo de masa M, ¿cuánto trabajo es necesario realizar para colocar al prisma con su cara $ABCD$ apoyada sobre la superficie?



A) $\frac{Mgb}{2}$ B) $\frac{MgL}{2}$ C) $Mg(L+b)$

D) $\frac{Mg(L-b)}{2}$ E) $\frac{Mg(L-b)}{3}$

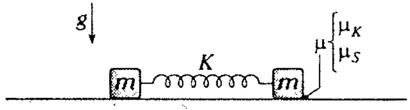
28. Sobre el bloque que se muestra actúa una fuerza de módulo constante F, que en todo instante ésta dirigida hacia el punto P. Determine la cantidad de trabajo que se desarrolla por medio de F de R a M.



A) $F.d$ B) $\frac{7}{5}F.d$ C) $\frac{4}{7}F.d$

D) $\frac{5}{7}F.d$ E) $\frac{3}{5}F.d$

29. Se muestran dos bloques de igual material unidos a un resorte sin deformar. Si a uno de los bloques se le empieza a desplazar hacia la izquierda, ¿cuánto trabajo como mínimo se debe desarrollar hasta el instante en que el otro bloque esté a punto de deslizar?



A) $(\mu_S+\mu_K)\mu_K\frac{(mg)^2}{K}$

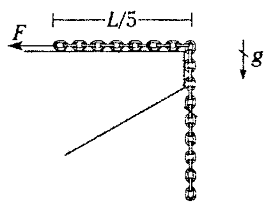
B) $(\mu_S+2\mu_K)\mu_S\frac{(mg)^2}{K}$

C) $\left(\frac{\mu_S+2\mu_K}{2}\right)\mu_S\frac{(mg)^2}{K}$

D) $(\mu_S-\mu_K)\mu_K\frac{(mg)^2}{2K}$

E) $(\mu_S-\mu_K)\mu_K\frac{(mg)^2}{2K}$

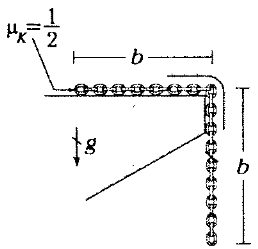
30. Se muestra una cadena homogénea de masa M y longitud L en reposo. ¿Cuál es la menor cantidad de trabajo que se debe realizar para colocarla sobre la superficie horizontal lisa?



A) $\frac{4}{25}MgL$ B) $\frac{8}{5}MgL$ C) $\frac{5}{6}MgL$

D) $\frac{16}{5}MgL$ E) $\frac{8}{25}MgL$

31. Se muestra el instante en que una cadena homogénea se abandona, ¿qué rapidez tiene su extremo A en el instante en que se coloca verticalmente?



A) $\sqrt{gb}$ B) $2\sqrt{gb}$ C) $\sqrt{2gb}$

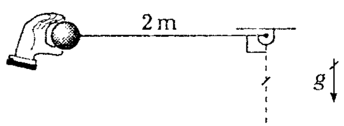
D) $4\sqrt{gb}$ E) $\frac{\sqrt{gb}}{2}$

32. Un bloque de 2 kg descansa sobre una superficie horizontal lisa en la posición $\vec{x} = \vec{0}$, simultáneamente empiezan a actuar dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, las cuales se expresan por $\vec{F}_1 = +15\hat{i}$ N y $\vec{F}_2 = -(2x+5)\hat{i}$ N , donde el módulo de la posición (x) se expresa en metros. ¿Cuál es la mayor rapidez que alcanza el bloque?

A) $\sqrt{5}$ m/s B) $\sqrt{5}$ m/s C) $\sqrt{7}$ m/s

D) 4 m/s E) 5 m/s

33. Se muestra el instante en que se abandona a una esfera, ¿qué rapidez tendrá después de haber recorrido $\frac{5\pi}{3}$? (g = 10 m/s^2)



A) 2 m/s B) $2\sqrt{5}$ m/s C) 5 m/s

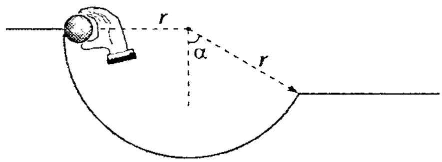
D) $\sqrt{5}$ m/s E) $5\sqrt{2}$ m/s

34. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez v. ¿A qué altura su energía potencial gravitatoria es cinco veces su energía cinética? (g: aceleración de la gravedad).

A) $\frac{1}{5}\left(\frac{v^2}{g}\right)$ B) $\frac{5}{6}\left(\frac{v^2}{g}\right)$ C) $\frac{1}{12}\left(\frac{v^2}{g}\right)$

D) $\frac{1}{6}\left(\frac{v^2}{g}\right)$ E) $\frac{5}{12}\left(\frac{v^2}{g}\right)$

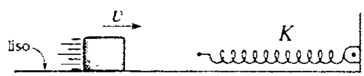
35. Una pequeña esfera es soltada tal como se muestra, determine el máximo alcance horizontal sobre la superficie horizontal (desprecie todo tipo de rozamiento).



A) $2r$ B) $r\sqrt{2}$ C) $r\sqrt{3}$

D) $\frac{8\sqrt{3}}{9}r$ E) falta conocer α

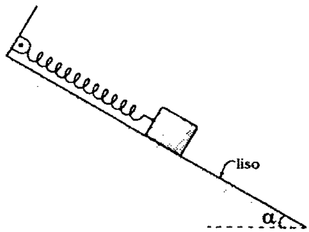
36. A partir de la figura, determine la rapidez del bloque en el instante en que su aceleración es la mitad de su aceleración máxima.



A) $\frac{v}{2}$ B) $\frac{v}{3}$ C) [illegible]

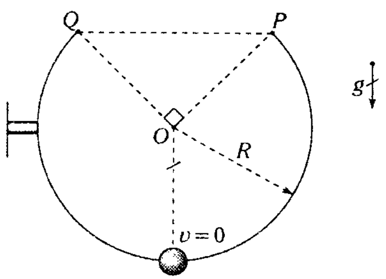
D) $\frac{v}{3}\sqrt{2}$ E) $\frac{v}{2}\sqrt{3}$

37. Si el bloque, que se muestra está en reposo, se le traslada d centímetros hacia arriba y se le suelta, ¿cuánto desciende como máximo respecto de su posición de equilibrio (en metros)?



A) d B) $d/10$ C) $d/100$
D) $10\,d$ E) $100\,d$

38. A un alambre liso se le ha dado la forma que se muestra. ¿Qué módulo debe tener la velocidad horizontal, que hay que comunicarle a la cuenta en la posición que se muestra, para que saliendo por P logre ingresar por Q?



A) $\sqrt{Rg}\sqrt{5+8\sqrt{2}}$

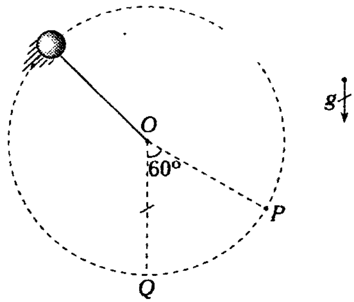
B) $\frac{\sqrt{Rg}}{2}\sqrt{2+3\sqrt{2}}$

C) $\sqrt{2gR(\sqrt{2}+1)}$

D) $2\frac{\sqrt{Rg}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{3}}$

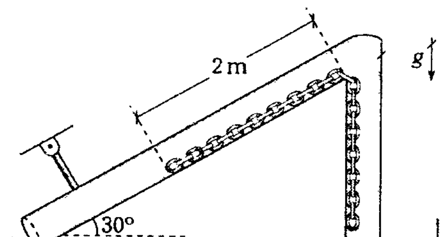
E) $\sqrt{Rg}\sqrt{8-\sqrt{2}}$

39. En la figura se muestra una esfera de 2 kg que describe una trayectoria circunferencial en un plano vertical. Determine la variación en el valor de la fuerza de tensión de la cuerda, cuando la esfera pasa de P hacia Q. ($g = 10\text{ m/s}^2$).



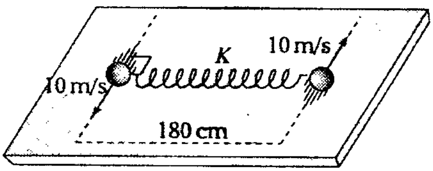
A) 30 N B) 45 N C) 48 N
D) 50 N E) 54 N

40. Una cadena homogénea lisa de 4 m de longitud es abandonada al interior de un tubo doblado, tal como se muestra. ¿Qué rapidez tendrá la cadena cuando se coloque verticalmente? ($g = 10\text{ m/s}^2$)



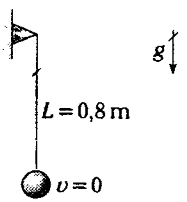
A) 2 m/s B) $\sqrt{3}$ m/s C) $\sqrt{5}$ m/s
D) $2\sqrt{5}$ m/s E) 5 m/s

41. Se muestra el lanzamiento de 2 esferas, cada una de 2 kg y unidas a un resorte ideal inicialmente sin deformar. Si el sistema se encuentra sobre una superficie horizontal lisa, determine el máximo estiramiento del resorte. (K = 20 N/cm)



A) 5 cm B) 8 cm C) 10 cm
D) 15 cm E) 20 cm

42. A la esfera que se muestra se le comunica una velocidad igual a $\vec{v}=2\sqrt{2}\,\hat{i}$ m/s, determine el ángulo barrido por la cuerda hasta el instante en que su aceleración centrípeta se hace nula. (g = 10 m/s^2).



A) $\frac{\pi}{6}$rad B) $\frac{\pi}{4}$rad C) $\frac{\pi}{3}$rad

D) $\frac{2\pi}{3}$rad E) $\frac{\pi}{2}$rad

43. Un péndulo simple de longitud L se encuentra en reposo. ¿Qué valor debe tener como mínimo, la velocidad horizontal constante con la cual se debe trasladar el punto de suspensión del péndulo para qué éste logre dar una vuelta? (g representa el módulo de la aceleración de la gravedad).

A) $\sqrt{gL}$ B) $2\sqrt{gL}$ C) $\sqrt{3gL}$

D) $\sqrt{5gL}$ E) $\sqrt{6gL}$

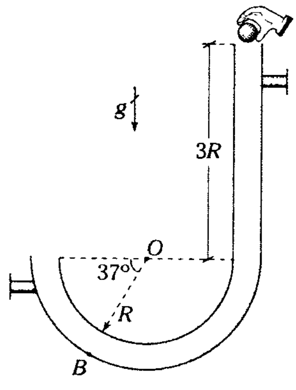
44. Del techo de un vagón, en reposo, se encuentra suspendido un péndulo de 2 m de longitud. Si el vagón repentinamente adquiere una aceleración constante de $\vec{a}=+10\hat{i}$ m/s^2, ¿qué valor tiene la máxima velocidad del péndulo para una persona que está dentro del vagón? (g = 10 m/s^2)

A) $2\sqrt{5(2+\sqrt{2})}$ B) $2\sqrt{10(\sqrt{2}-1)}$

C) $\sqrt{10(2\sqrt{2}-1)}$

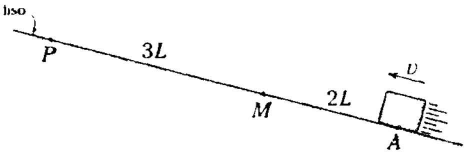
D) $\sqrt{5(2-\sqrt{2})}$ E) $2\sqrt{10(2-\sqrt{2})}$

45. Se muestra el instante en que se suelta una pequeña esfera lisa de masa m. ¿Qué módulo tiene la fuerza del tubo sobre la esfera, cuando esta pasa por B?



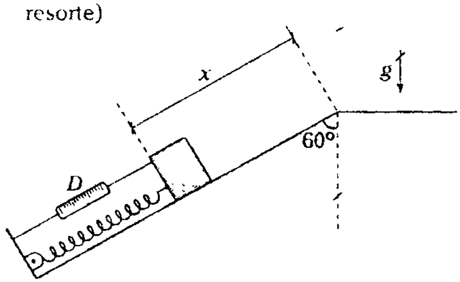
A) $7mg$ B) $7,4mg$ C) $7,8mg$
D) $8,2mg$ E) $8,6mg$

46. Se muestra el lanzamiento de un bloque con una rapidez de 5 m/s. Si éste solo llega hasta *P*, determine su rapidez cuando pase por *M*.



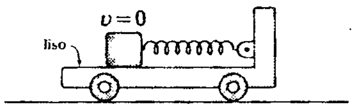
A) $\sqrt{5}$ m/s   B) $\sqrt{15}$ m/s   C) $\sqrt{10}$ m/s
D) $\sqrt{6}$ m/s   E) $2\sqrt{2}$ m/s

47. En la figura se muestra a un bloque donde m es la masa del bloque en reposo y el dinamómetro indica $11{,}5mg$. Al cortar la cuerda ¿qué rapidez adquiere el bloque al estar a una altura $H = 4{,}5x$ por encima de la superficie horizontal?
(*g* representa ser el módulo de la aceleración de la gravedad y *x* la deformación inicial del resorte)



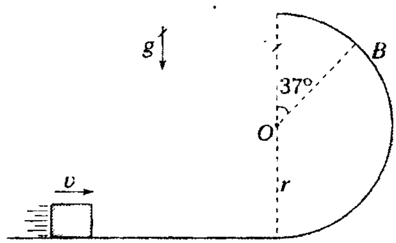
A) $\sqrt{9x}$ B) $\sqrt{2gx}$ C) $2\sqrt{gx}$
D) $\dfrac{\sqrt{9x}}{2}$ E) $4\sqrt{gx}$

48. Un bloque de 1 kg se encuentra unido a un coche mediante un resorte ($K = 100$ N/m). Si el coche inicia su movimiento con una aceleración de $7{,}5\ m/s^2$; ¿cuál será la máxima deformación que experimenta el resorte?



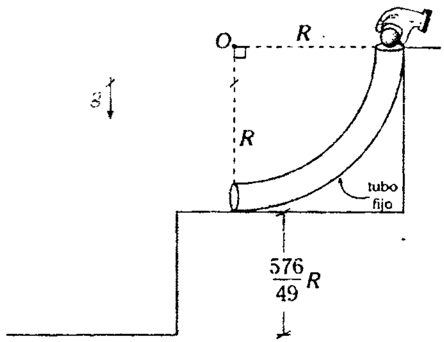
A) 7,5 cm   B) 10 cm   C) 12,5 cm
D) 15 cm   E) 20 cm

49. A partir de la figura, determine la rapidez (v) con la cual desliza el bloque, si se sabe que a partir del punto *B* empieza a describir un M.P.C.L. ($g = 10\ m/s^2$; $r = 25$ cm)



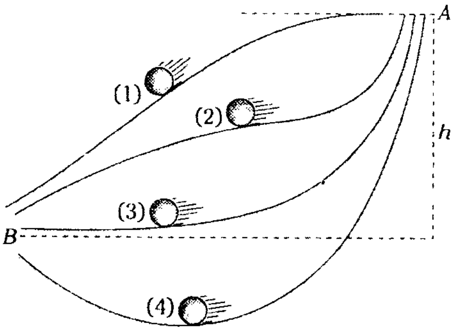
A) 3 m/s   B) $\sqrt{10}$ m/s   C) 4 m/s
D) $\sqrt{11}$ m/s   E) $2\sqrt{3}$

50. Se muestra el instante en que se abandona a una canica lisa, ¿qué dirección tiene su velocidad cuando impacta en la superficie?



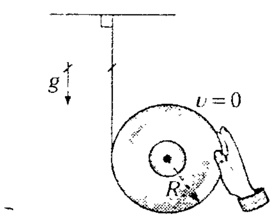
A) 74°   B) 196°   C) 256°
D) 254°   E) 156°

51. En la figura se muestra a 4 esferas que han sido abandonadas en el nivel A y se mueven sobre las superficies lisas que se indican. ¿En qué relación estará su rapidez cuando pasen por el nivel B?



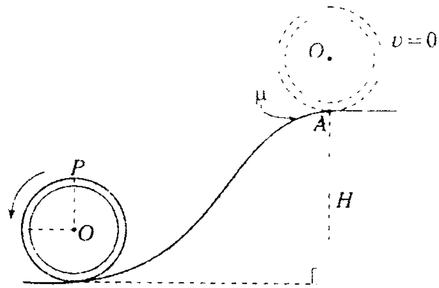
A) $v_1 > v_2 > v_3 > v_4$
B) $v_1 = v_2 > v_3 = v_4$
C) $v_1 = v_2 = v_3 > v_4$
D) $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$
E) $v_1 < v_2 < v_3 > v_4$

52. Una cuerda ideal se ha enrollado a una polea homogénea y se le dispone tal como muestra la figura. Si se suelta la polea, ¿qué rapidez angular adquiere cuando su centro de masa haya descendido una distancia de $30R$? (Considere $g = 10$ m/s^2 y $R = 3$ cm)



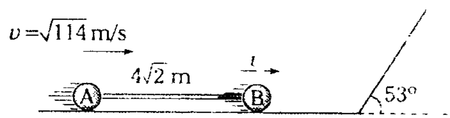
A) 50 rad/s B) 100 rad/s C) 150 rad/s
D) 75 rad/s E) 80 rad/s

53. Se muestra a un aro homogéneo que rueda sin deslizar. Determine el módulo de la velocidad del punto P en el instante mostrado, si el aro fue abandonado en A



A) $\sqrt{gH}$ B) $\sqrt{2gH}$ C) $2\sqrt{gH}$
D) $\dfrac{\sqrt{gH}}{2}$ E) $4\sqrt{gH}$

54. Dos pequeñas esferas idénticas y lisas unidas a una barra rígida de masa despreciable han sido lanzadas en la dirección que se muestra. ¿qué rapidez tendrá la esfera A cuando la esfera B haya ascendido 4 m? ($g = 10$ m/s^2)



A) 5 m/s B) $5\sqrt{2}$ m/s C) $7\sqrt{2}$ m/s
D) 10 m/s E) $4\sqrt{2}$ m/s

55. Un tren se mueve con una aceleración de 50 cm/s^2. Si el 50% de la potencia media del motor se invierte en vencer la fuerza de rozamiento y el 50% restante en incrementar la rapidez, determine el coeficiente de rozamiento. ($g = 10$ m/s^2)

A) 0,01 B) 0,02 C) 0,03
D) 0,04 E) 0,05

56. Un automóvil es de 10 kN y cuando se desplaza, sobre él actúa una fuerza de rozamiento igual al 10% del módulo de su fuerza de gravedad. ¿Qué cantidad de gasolina consumirá el motor para incrementar la rapidez desde 10 km/h hasta 40 km/h en un recorrido de 0,50 km? El rendimiento del motor es igual al 20% y el poder calorífico de la gasolina es $4{,}6\times10^7$ J/kg ($g = 10$ m/s^2)

A) 100 g B) 80 g C) 60 g
D) 150 g E) 120 g

57. Determine la potencia del motor de una cepilladora, si el recorrido de trabajo es de 2 m y dura 10 s; la fuerza de corte es igual a 12 kN y su movimiento es uniforme. El rendimiento de la máquina es 80%.

A) 2 kW B) 3 kW C) 4 kW
D) 5 kW E) 6 kW

58. Una piedra rectificadora de 60 cm de diámetro realiza 120 R.P.M. y la potencia consumida es 1,174 kW. Si el coeficiente de rozamiento entre la piedra rectificadora y la pieza es igual a 0,20; ¿con qué fuerza la piedra presiona la pieza a rectificar?

A) 3 250 N B) 2 720 N C) 1 557 N
D) 1 830 N E) 1 570 N

59. Un elevador de 900 kg y que está impulsado por un motor eléctrico puede llevar una carga total de 500 kg. Señale qué potencia debe tener el motor, si el elevador sube a razón de 1,20 m/s; con un factor de seguridad de 1,5. Esto significa que la capacidad del motor debe ser 1,5 veces la potencia necesaria que se calcule. ($g = 10$ m/s^2)

A) 25 kW B) 28,2 kW C) 30 kW
D) 32 kW E) 36 kW

60. Dos automóviles, cuyas potencias son como 1 y 3, se trasladan con rapidez $2v$ y v respectivamente. Si los dos automóviles son enganchados, ¿con qué rapidez se traslada el conjunto?

A) $3v$ B) v C) $\frac{3v}{2}$
D) $\frac{8v}{7}$ E) $\frac{6v}{5}$

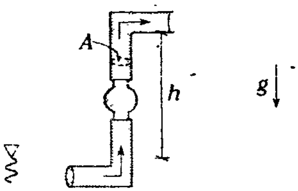
61. Si dos máquinas de eficiencias 0,5 y 0,75 se acoplan en serie; ¿cuál es la eficiencia del sistema?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

62. Un ventilador lanza un chorro de aire sobre un agujero en un muro. Si la potencia del ventilador es P, ¿cuál debe ser su nueva potencia para que la masa de aire lanzada por unidad de tiempo se cuadruplique?

A) $4P$ B) $16P$ C) $32P$
D) $64P$ E) $128P$

63. En la figura se muestra el esquema de una cisterna y una bomba de agua. ¿Qué potencia debe desarrollar dicha bomba para elevar el agua a una altura h? (Considere que el volumen de agua que se bombea por unidad de tiempo es V_t y la densidad de agua ρ)



A) $\rho g \dfrac{V_t^3}{A^2} h$

B) $\rho V_t\left(gh+\dfrac{V_t^2}{2A^2}\right)$

C) $V_t\left(gh\rho+\dfrac{V_t^2}{A^2}\right)$

D) $\rho V_t^2\left(gh+\dfrac{V_t}{2A}\right)$

E) $\rho g V_t^2\left(h+\dfrac{V_t}{A}\right)$

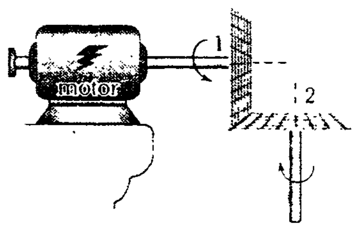
64. Un cohete se mantiene suspendido, sin moverse a cierta altura de la superficie terrestre. Si la masa del cohete es M y la rapidez de salida de los gases es v, ¿qué potencia media desarrollan los motores del cohete?

A) Mgv B) $Mgv/2$ C) $2\,Mgv$
D) $3\,Mgv/2$ E) $4\,Mgv$

65. Determine el módulo de la fuerza media de resistencia que opone el agua al movimiento de un barco, si este consume en tres días 6,5 toneladas de carbón al navegar a una rapidez media de 10 km/h. El rendimiento del motor del barco es 0,1 y el poder calorífico de combustión del carbón es $33{,}5.10^6$ J/kg

A) 30 kN B) 40 kN C) 50 kN
D) 60 kN E) 70 kN

66. La figura representa un engranaje y en el eje del motor va montado el piñón 1 que engrana con el piñón 2, montado en el árbol de trabajo. Se sabe que la potencia útil del motor es 63 kW y que el árbol de trabajo gira con la frecuencia de 300 R.P.M. Determine los módulos de los momentos de las fuerzas que actúan sobre el árbol y el motor de parte de los piñones 1 y 2 respectivamente, si la relación entre los números de dientes de ellos es de 5 a 1 respectivamente.



A) 10^3 N m; 200 N.m

B) 400 N.m; 200 N.m

C) 10^3 N.m; 10^3 N.m

D) 200 N.m; 200 N.m

E) 10^3 N.m; 500 N.m

CLAVES

1	A	11	C	21	C
2	D	12	A	22	D
3	A	13	B	23	E
4	D	14	E	24	D
5	C	15	B	25	C
6	B	16	A	26	B
7	B	17	D	27	E
8	D	18	D	28	D
9	C	19	B	29	C
10	A	20	B	30	E
31	A	32	E		

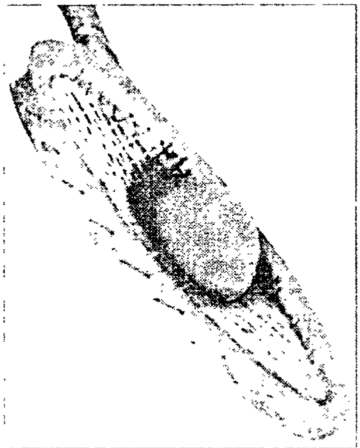
CLAVES

33	B	43	D	53	C
34	E	44	B	54	C
35	D	45	C	55	E
36	E	46	B	56	C
37	C	47	B	57	B
38	C	48	D	58	C
39	A	49	D	59	B
40	E	50	D	60	D
41	C	51	D	61	E
42	C	52	B	62	D
63	E	64	B	65	A
		66	A		

XI

CAPÍTULO

Impulso y Cantidad de movimiento



(a)

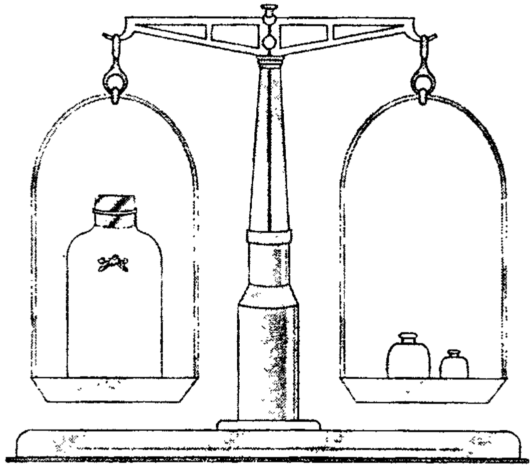
(b)

Fig. (a) La transmisión de movimiento de corta duración lo vemos en diferentes deportes. **Fig. (b)** Las fuerzas que actúan en brevísimo tiempo son generalmente de gran intensidad.

L E C T U R A

UNA MOSCA EN UN BOTELLA DE CRISTAL

En la superficie interior de una botella de vidrio tapado, que está en equilibrio en una balanza sensible, se encuentra una mosca. ¿Qué pasará con la balanza si el insecto abandona su puesto y empieza a volar por el interior de dicho recipiente?.



Una mosca atrapada en una botella.

Cuando la revista científica alemana Umschau publicó esta pregunta, se entabló una discusión acalorada: media docena de ingenieros presentaban las razones más diferentes y empleaban todo un sinfín de fórmulas, sin embargo, no pudieron llegar a una conclusión unánime.

Mas, este problema puede ser resuelto sin valerse de ecuación alguna. Al desprenderse de la pared del recipiente y mantenerse a un mismo nivel, la mosca presiona sobre el aire agitando sus alitas con una fuerza equivalente al peso de ella misma; esta presión se transmite a las paredes del tarro. Por consiguiente, la balanza debe permanecer en el mismo estado que mientras el insecto estaba posado en la pared.

Así sucede mientras la mosca se mantiene a un mismo nivel. Si ella sube o baja volando dentro del tarro, la balanza sensible deberá moverse un poco. Para determinar hacia dónde se moverá el plato con el tarro, primero supongamos que este, con la mosca dentro, se encuentra situado en algún punto del Universo. ¿Qué pasará entonces con el recipiente si el díptero empieza a volar? cuando se trata de un sistema aislado. Como la botella y la mosca, si una fuerza interna eleva la mosca, el centro de masas de dicho sistema seguirá en la misma posición mientras el recipiente se desplaza un poco hacia abajo. Al contrario, si el insecto baja aleteando, el tarro deberá subir para que el centro de masas del sistema tarro-mosca permanezca en el mismo punto.

Ahora volvamos a las condiciones reales, de las cuales hemos hecho la abstracción. El recipiento con la mosca no se encuentra en un punto lejano del Universo, sino que está en el plato de una balanza. Está claro que si ella sube, el plato descenderá, y si baja, se elevará.

Hay que agregar que el vuelo de la mosca hacia arriba o hacia abajo debe ser acelerado Un movimiento uniforme, es decir, por inercia y por tanto sin la intervención de una fuerza, será incapaz de alterar la presión que el recipiente ejerce sobre el plato de la balanza.

FUENTE: ¿Sabe usted Física? AUTOR: Y. Perelman. Pág.: 30

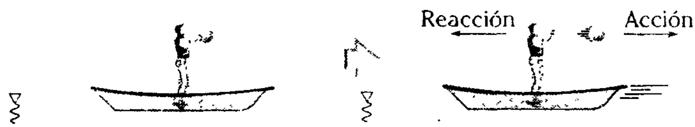
Impulso y Cantidad de movimiento

OBJETIVOS

- Establecer una nueva forma de medir el movimiento mecánico de traslación mediante la magnitud y cantidad de movimiento.
- Conocer otra forma de medir la transmisión de movimiento, el impulso.
- Establecer la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento.
- Conocer las diversas aplicaciones que tiene el principio de conservación de la cantidad de movimiento.
- Establecer lo que es centro de masa (C.M.) y conocer sus diversas aplicaciones en un sistema mecánico.

INTRODUCCIÓN

Cuando se patea un balón de fútbol, este experimenta un cambio en su velocidad, para cuando, se golpea con la varilla a la bola de billar, ésta sale con cierta energía cinética y va a chocar contra otras bolas transfiriendo parte de la energía hasta detenerse. También se ha observado que cuando se dispara un revólver, se origina un retroceso de la persona y así podemos mencionar otros casos donde se originan en los cuerpos cambios de velocidad (aceleración), transferencia de energía cinética, fuerzas de acción y reacción.

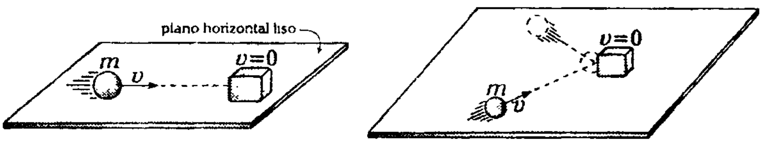


El ascenso del transbordador se da como consecuencia de que los gases expulsados lo impulsan hacia arriba.

Al soltar el sistema de esferas con el resorte comprimido... *...¡ocurren movimientos opuestos!*

De todo esto, vemos la importancia que tienen las interacciones y su medida, las fuerzas y su efecto, los cambios de velocidad, ¿cómo cambian durante las colisiones y lanzamientos?, ¿cómo evaluar en el proceso la fuerza y velocidad? Esto, usando las leyes anteriores de la mecánica resulta complicado y complejo, ¿qué hacer entonces? En esta parte del curso nuestro objetivo será desarrollar una técnica adicional a partir de la segunda ley de Newton, deduciendo sencillos corolarios de esta ley que nos permitan simplificar el análisis; al enfocar y examinar las interacciones que suceden en un sistema de dos o más cuerpos.

Con los conceptos de trabajo y energía se ha podido analizar y simplificar el estudio del movimiento mecánico, sin embargo por ser magnitudes escalares no se toma en cuenta o se da poca importancia a la dirección del movimiento o a la dirección de transferencia del movimiento mecánico, estos son esenciales para definir la dirección final de movimiento de los cuerpos que interactúan.
Por ejemplo



La esfera llega a chocar con el bloque con igual energía cinética, sin embargo como se mueve en una dirección diferente en el segundo caso, la dirección de movimiento final de la esfera después del choque y la transferencia de movimiento hacia el bloque es diferente.

Por ello, es necesario realizar un estudio vectorial del movimiento mecánico con magnitudes que midan sus efectos y su transferencia. Estas magnitudes son justamente la cantidad de movimiento $(\vec{p})$ y el impulso $(\vec{I})$

Muchos fenómenos se pueden explicar, estudiar y analizar de forma más simple usando estos conceptos como por ejemplo, los choques.

Concluiremos a la conclusión que la cantidad de movimiento mide lo mismo que la energía cinética solo que vectorialmente y el impulso mide lo mismo que el trabajo mecánico solo que vectorialmente; y así; como hay una relación entre el trabajo y la energía, también hay una relación entre el impulso y la cantidad de movimiento.

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

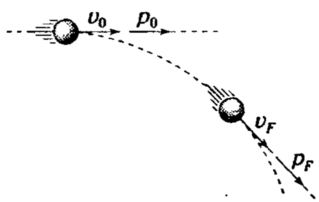
CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La capacidad de un cuerpo para transferir movimiento mecánico depende de la masa y la velocidad, por ejemplo si la esfera de la figura anterior tuviera mayor masa o mayor velocidad, le transferiría al bloque más movimiento mecánico.

Escalarmente la energía cinética mide esta capacidad y como sabemos depende de la masa y la velocidad ($1/2\ mv^2$). Vectorialmente se mide con la cantidad de movimiento $(\vec{p})$; que en consecuencia también debe depender de la masa y la velocidad. Por ello

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \qquad \frac{\text{unidad}}{\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

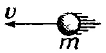
A diferencia de la energía cinética, $\vec{p}$ tiene una dirección igual que la velocidad.



Es importante saber determinar matemáticamente esta magnitud, para ello veamos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1

Podemos ver que en la figura la esfera de 2 kg se desplaza a razón de 5 m/s hacia la izquierda.

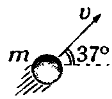


Entonces, su cantidad de movimiento será

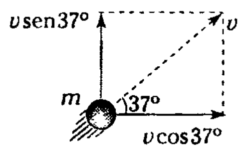
$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v} = 2(-5\hat{i}) = -10\hat{i}\ \text{kg m/s}}$$

Ejemplo 2

La esfera de 2 kg se desplaza a razón de 5 m/s, así



¿Qué hacemos en este caso? Debemos recordar que la dirección horizontal o eje X está definida por el vector unitario $\hat{i}$, mientras que la dirección vertical o eje Y está definida por el vector unitario $\hat{j}$. En consecuencia, aprovechamos el ángulo de 37° y descomponemos la velocidad en las direcciones mencionadas, así



Ahora la cantidad de movimiento es

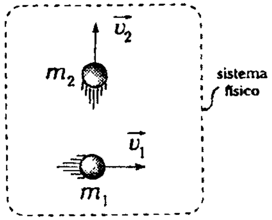
$$\vec{p} = m(+v\cos 37°\,\hat{i}) + m(+v\,\text{sen}\,37°\,\hat{j})$$

$$\vec{p} = 2\left[\cancel{5}\left(\frac{4}{\cancel{5}}\right)\hat{i}\right] + 2\left[\cancel{5}\left(\frac{3}{\cancel{5}}\right)\hat{j}\right]$$

$$\boxed{\vec{p} = (8\hat{i} + 6\hat{j})\ \text{kg.m/s}}$$

¿Cómo medimos la cantidad de movimiento de un sistema de partículas?

Si un sistema está constituido por dos partículas.



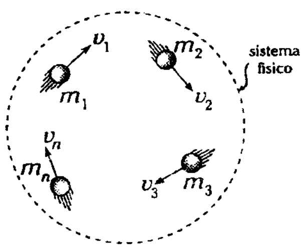
Aquí se aprecia

- Para m_1: $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$
- Para m_2: $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$
- Para el sistema $\vec{p}_{sist.} + \vec{p}_{sist} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA

Cuando se tenga un conjunto constituido por n partículas que se mueven en forma discreta, la cantidad de movimiento del sistema de partículas o cantidad de movimiento total queda expresada por la suma (vectorial) de las cantidades de movimiento de cada una las partículas.

A continuación se tiene:



El sistema presenta una cantidad de movimiento igual a

$$\vec{p}_{sistema} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

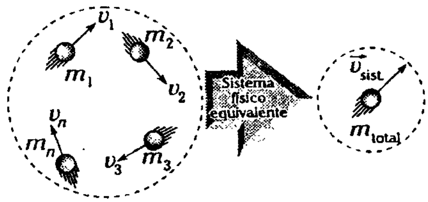
$$\boxed{\vec{p}_{sistema} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n}$$

(suma vectorial)

También se puede expresar por

$$\boxed{\vec{p}_{sistema} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$$

La forma de hallar la cantidad de movimiento de un sistema es muy operativa; sin embargo hay otra forma sintética de hallar la cantidad de movimiento y esta consiste en lo siguiente

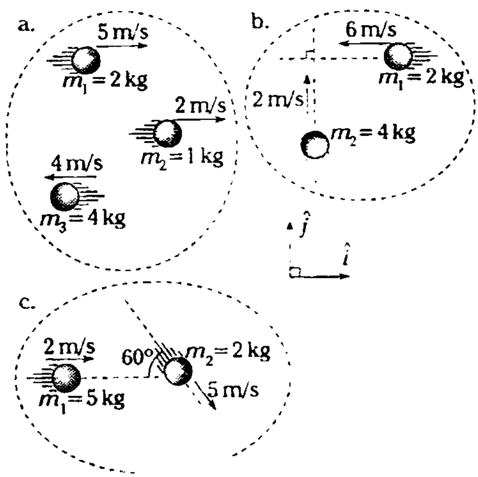


$$\therefore \vec{p}_{sistema} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = m_{total}\vec{v}_{sistema}$$

$$\boxed{\vec{p}_{sistema} = \sum m_i\vec{v}_i = m_{total}\vec{v}_{sistema}}$$

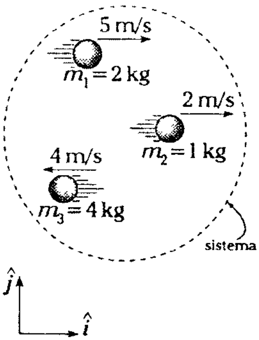
Ejemplo 3

En cada uno de los siguientes casos determine la cantidad de movimiento del sistema $(\vec{p}_{sist})$.



Resolución

a.



Para este caso tenemos

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

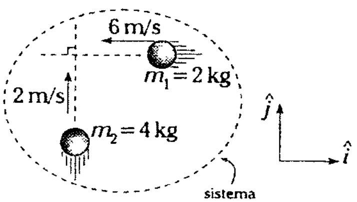
$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{sistema}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{sistema}} = 2(+5\hat{i}) + 1(+2\hat{i}) + 4(-4\hat{i})$$

$$\boxed{\vec{p}_{\text{sistema}} = -4\hat{i}\ \text{kg m/s}}$$

Significa que la $\vec{p}_{\text{sist}}$ apunta hacia la izquierda.

b.



En este caso se observa

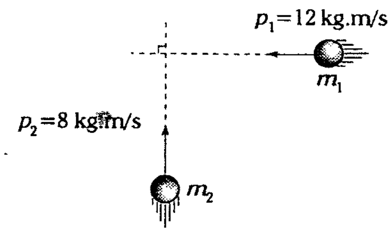
$$\vec{p}_{\text{sist.}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{sist.}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

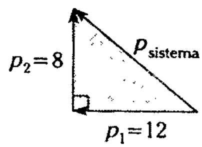
$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{sist.}} = 2(-6\hat{i}) + 4(+2\hat{j})$$

$$\therefore \vec{p}_{\text{sist.}} = 4(-3\hat{i} + 2\hat{j})\ \text{kg.m/s}$$

En el caso que las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema no sean paralelas la dirección de la cantidad de movimiento del sistema se puede obtener cómodamente en forma geométrica; en ese sentido para el caso *B* planteamos



Con los vectores mostrados construimos



Considerando el Teorema de Pitágoras.

$$p_{\text{sist.}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(12)^2 + (8)^2}$$

$$\boxed{p_{\text{sist.}} = 4\sqrt{3}\ \text{kg.m/s}}$$

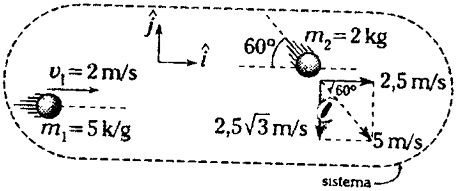
¿A qué es igual la velocidad del sistema? Se sabe que también:

$$\underbrace{\vec{p}_{\text{sist}}} = m_{\text{total}}\vec{v}_{\text{sist.}}$$

$$4(-3\hat{i} + 2\hat{j}) = (2+4)\vec{v}_{\text{sist}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{\text{sist.}} = \frac{2}{3}(-3\hat{i} + 2\hat{j})\ \text{m/s}}$$

c. Después de haber dado resolución al caso b, notamos que la cantidad de movimiento de un sistema $(\vec{p}_{sist})$ se puede obtener tanto analíticamente como geométricamente, esto mismo haremos en este caso.



Según la figura hay dos partículas, entonces:

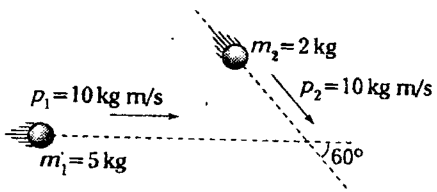
$$\vec{p}_{sist.} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\vec{p}_{sist} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

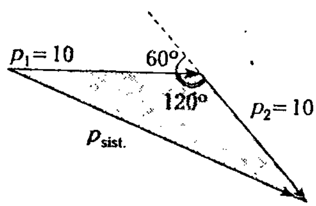
$$\vec{p}_{sist} = 5(+2\hat{i}) + 2(+2{,}5\hat{i} - 2{,}5\sqrt{3}\hat{j})$$

$$\therefore\ \vec{p}_{sist} = (15\hat{i} - 5\sqrt{3}\hat{j})\ \text{kg.m/s}$$

Ahora determinemos la $\vec{p}_{sist.}$ geométricamente



Según los vectores tenemos



A partir del triángulo formado obtenemos

$$p_{sist} = 10\sqrt{3}\ \text{kg.m/s}$$

¿A qué es igual la velocidad del sistema?

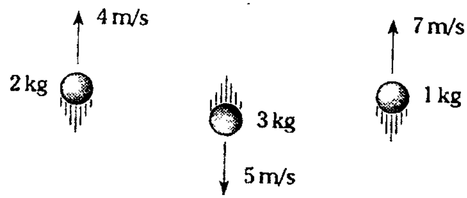
$$\vec{p}_{sist} = m_{total}\,\vec{v}_{sist}$$

$$15\hat{i} - 5\sqrt{3}\hat{j} = (5+2)\ \vec{v}_{sist}$$

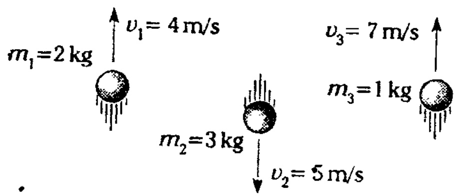
$$\therefore\ \vec{v}_{sist} = \frac{15}{7}\hat{i} - \frac{5}{7}\sqrt{3}\hat{j}\ \text{ m/s}$$

Ejemplo 4

Para el sistema mostrado determine la velocidad del sistema



Resolución



Para este sistema definimos

$$\vec{p}_{sist.} = \Sigma\ \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow\ m_{sist}\vec{v}_{sist} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

$$\Rightarrow\ 8\vec{v}_{sist} = (+8\hat{j}) + (-15\hat{j}) + (+7\hat{j})$$

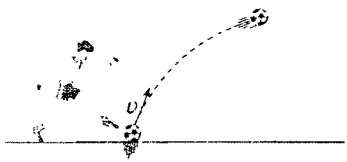
$$\Rightarrow\ 8\vec{v}_{sist} = 0\hat{j}$$

$$\therefore\ \vec{v}_{sist} = \vec{0}$$

Este resultado permite establecer que el sistema está en reposo, también podemos decir que el punto donde se concentra la masa del sistema está en reposo, *mientras los componentes del* sistema se mueven.

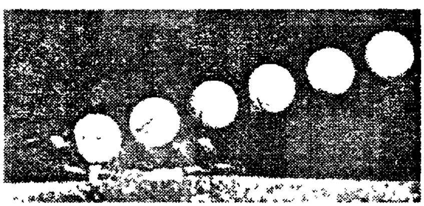
IMPULSO

Un deportista le da un puntapié a un balón detenido, tal como se indica



¿Qué sucede durante el puntapié del deportista al balón? Ocurre una interacción física entre el pie del deportista y el balón que reposa en el suelo y debido a esto, el deportista le transfiere movimiento mecánico al balón. En consecuencia podemos afirmar que:

- El deportista transmitió energía cinética (E_C) al balon, es decir realizó un trabajo mecánico.
- El deportista transmitió al balón cierta cantidad de movimiento $(\vec{p})$ durante un breve intervalo de tiempo, desde este punto de vista vectorial se dice que la pelota recibió un impulso $(\vec{I})$.



En el golf, al interacturar el bastón con la pequeña bola se da una transmisión de movimiento en un intervalo de tiempo muy pequeño. La foto muestra una toma con destello múltiple de tal acontecimiento

¿Qué podemos afirmar a partir de estas dos apreciaciones? Podemos darnos cuenta y sintetizar que también hay dos formas de medir la transferencia de movimiento: en forma escalar como **cantidad de trabajo mecánico** (W) y en forma vectorial como **impulso** $(\vec{I})$.

En conclusión entonces podemos plantear

Dos medidas de la transferencia de movimiento mecánico

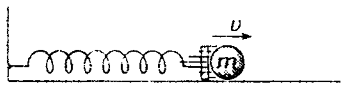
Medida escalar: trabajo mecánico

Medida vectorial: impulso

Otros ejemplos donde se establece las dos medidas de transferencia de movimiento mecánico son:

- La esfera reposa con el resorte comprimido.

Estado inicial

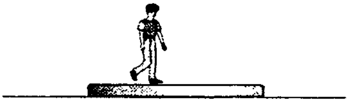


Después de soltar la esfera

El resorte le transmite movimiento a la esfera, es decir

- Realiza trabajo mecánico sobre la esfera.
- Transfiere un impulso hacia la derecha modificando su cantidad de movimiento inicial.

- Un niño reposa sobre la tabla apoyada en un piso liso. No hay movimiento de ningún cuerpo.



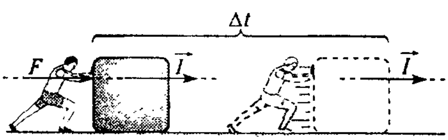
Al correr el niño, la rugosidad entre sus zapatos y la tabla, determina el surgimiento de la fuerza de rozamiento, tanto sobre los zapatos del niño como sobre la tabla, en consecuencia con la fuerza de rozamiento hay transferencia de movimiento del niño sobre la tabla es decir:

- El niño hace trabajo mecánico sobre la tabla.
- El niño impulsa la tabla.

En consecuencia se define al impulso como la medida vectorial de la transferencia de movimiento de un cuerpo hacia otro, mediante una fuerza, durante cierto intervalo de tiempo.

¿Cómo se evalúa el impulso? Esto depende de la fuerza aplicada porque esta puede ser constante o variable.

Fuerza constante

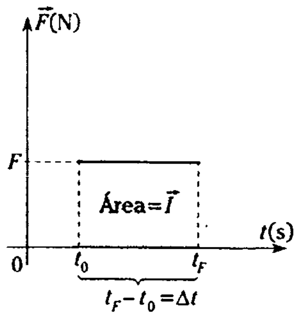


En la figura, el joven ejerce un impulso $(\vec{I})$ horizontal sobre el bloque porque con su fuerza constante $(\vec{F})$ actúa durante un intervalo de tiempo (Δt) y le transmite movimiento horizontal al bloque, tal que:

$$\boxed{\vec{I}=\vec{F}.\Delta t}$$

Nótese que $\vec{I}$ y $\vec{F}$ son vectores de igual dirección.

La fórmula del impulso puede ser obtenida también planteando la gráfica $\vec{F}$ vs. t así



donde el área de la gráfica es

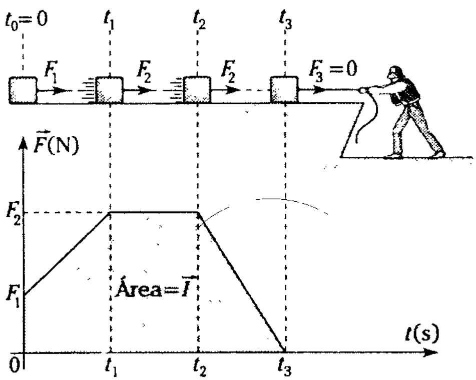
$$A=\Delta t\vec{F}=\vec{I}$$

$$\boxed{\vec{I}=\vec{F}.\Delta t=\underset{\vec{F}\text{ vs. }t}{\text{área bajo la gráfica}}}$$

¿Cómo calculamos el impulso transferido por una fuerza variable?

En este caso será necesario conocer la ley de variación de $\vec{F}$ y utilizar con el debido criterio la gráfica $\vec{F}$ vs. t.

Para ello consideremos que un joven con una cuerda ejerce una fuerza variable sobre el bloque, así:

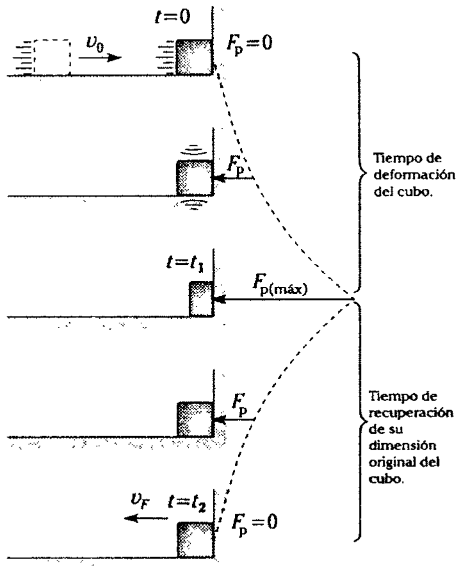


El impulso transferido por la fuerza variable del joven al bloque es

$$\boxed{\vec{I} = \begin{array}{c}\text{área bajo la gráfica}\\ \vec{F} \text{ vs. } t\end{array}}$$

Obsérvese que en este caso el joven jala la cuerda con una fuerza que varía linealmente con el tiempo y se forma una figura conocida y por ende su área es calculable con matemática básica. Sin embargo, hay casos donde la fuerza no varía linealmente con el tiempo y por lo tanto la figura tiene una forma compleja, en ese caso usamos matemática superior para determinar dicha área.

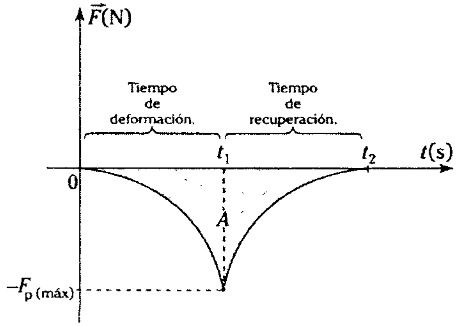
¿En qué caso el área no tiene forma conocida? Cuando la fuerza varía aleatoriamente con el tiempo, esto se presenta cuando se examinan colisiones, por ejemplo lancemos un cubo de jebe (muy elástico) contra una pared rígida, así



En este caso, la duración del evento la podemos plantear, así:

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo de}\\ \text{duración}\\ \text{del choque}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Tiempo de}\\ \text{deformación}\\ \text{del cubo}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de}\\ \text{recuperación}\\ \text{del cubo}\end{pmatrix}$$

La fuerza de contacto del cubo con la pared, varía aleatoriamente con el tiempo, pero esta variación debido a las propiedades elásticas es simétrica durante la deformación y recuperación por lo que podríamos esbozar la gráfica siguiente:



La gráfica está por debajo del eje de tiempo ya que la fuerza tiene dirección negativa, tal como se indica en la gráfica anterior. Donde el área A representa el impulso que le transmitió la fuerza de la pared al cubo durante el impacto.

$$\boxed{I = A}$$

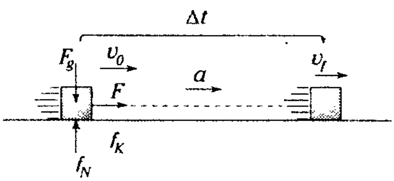
donde:

A : área en la gráfica entre $t = 0$ a $t = t_2$

Cuando aplicamos un puntapié a una pelota, a pesar de que actuamos sobre ella en un intervalo de tiempo pequeño se causa una deformación apreciable

RELACIÓN ENTRE EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Podemos partir de la segunda ley de Newton aplicada al siguiente movimiento



$$\vec{F}_R = m\vec{a} \qquad \text{(I)}$$

Donde

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

En (I)

$$\vec{F}_R = m\left[\frac{\vec{v}_F - \vec{v}_0}{\Delta t}\right]$$

Despejando

$$\underbrace{\vec{F}_R . \Delta t}_{\vec{I}_{res}} = \underbrace{m\vec{v}_F}_{\vec{p}_F} - \underbrace{m\vec{v}_0}_{\vec{p}_0}$$

$$\boxed{\vec{I}_{res} = \Delta\vec{p}}$$

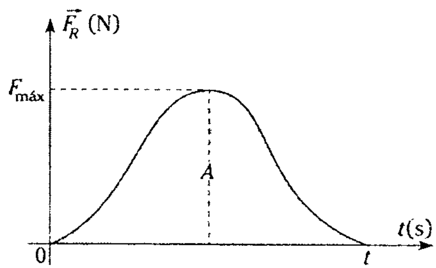
En general

$$\boxed{\vec{I}_{res} = \vec{F}_R \Delta t = \Delta\vec{p}}$$ Unidades N.s o kg.m/s

- Donde $\vec{I}_{res}, \vec{F}_R$ y $\Delta\vec{p}$ tienen la misma dirección

¿Cómo interpretamos físicamente esta fórmula? Al enfocar un fenómeno físico, téngase presente que el impulso neto transferido por una fuerza resultante durante un intervalo de tiempo ocasiona un cambio en la cantidad de movimiento del cuerpo o sistema analizado..

¿Cómo interpretamos gráficamente la fórmula demostrada? En forma general, se demostró y concluyó en que había que construir la gráfica $\vec{F}$ vs. t, así:



$$\boxed{A = \vec{I}_{res} = \Delta\vec{p}}$$

donde el área A nos expresa

- El impulso resultante de la fuerza resultante variable.
- La variación de la cantidad de movimiento que experimenta el cuerpo o sistema analizado.

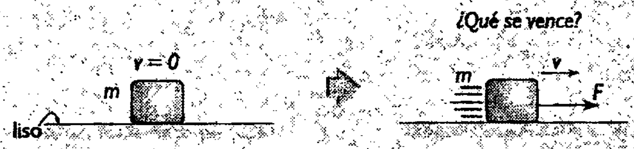
LECTURA

¿QUÉ SIGNIFICA VENCER LA INERCIA?

Para acabar el capítulo queremos observar todavía un problema, que produce también muchas veces conceptos erróneos. Se lee y se oye, no raras veces, que para lanzar los cuerpos, que se encuentran en estado de reposo hacia el movimiento, es ante todo necesario **vencer la inercia** de estos cuerpos. Nosotros sabemos, sin embargo, que los cuerpos libres, en cuanto no se ven impedidos por fuerzas opuestas tienen la tendencia a ponerse en movimiento. ¿Qué es, por lo tanto, lo que hay que **vencer?**

La idea de tener que vencer la inercia no es nada más que la degeneración de aquel pensamiento, que indica que cada cuerpo para ponerse en movimiento con una velocidad determinada necesita un intervalo determinado de tiempo. Ninguna fuerza (F); incluso la mayor, es capaz de poner inmediatamente en movimiento con una velocidad (v) cualquiera, a una masa (m); incluso a una muy insignificante. Esta idea se expresa en la breve fórmula:

$$Ft = mv$$



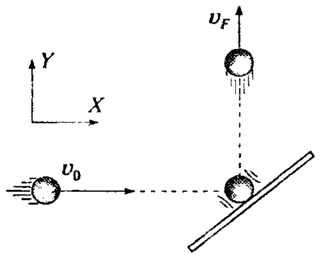
la cual se demuestra por medio del teorema del impulso y la cantidad o movimiento, esto se verá en el desarrollo del capítulo.

Los lectores deben ponerse al corriente por medio de otros manuales sobre física. Ahora con respecto a nuestro ejemplo, es claro que en el caso en que $t = 0$ (el intervalo de tiempo es igual cero) el resultado de la multiplicación mv masa multiplica por velocidad es igual a cero, y por lo tanto la velocidad es igual a cero, porque la masa no puede ser igual a cero. Con otras palabras, si la fuerza F no tiene tiempo para realizar su acción, entonces el cuerpo no recibe ninguna velocidad es decir no entra en movimiento. Si la masa del cuerpo es grande, hace falta un espacio de tiempo relativamente mayor, para que la fuerza pueda poner al cuerpo en movimiento. Debemos decir que el cuerpo comienza a moverse inmediatamente, pero que parece que él se resiste algo a la acción de la fuerza. De allí resulta la falsa concepción de que la fuerza debe **vencer la inercia del cuerpo** antes de poder ponerlo en movimiento.

FUENTE: Mecánica Recreativa. AUTOR: Y. Pereliman. Pág.: 27

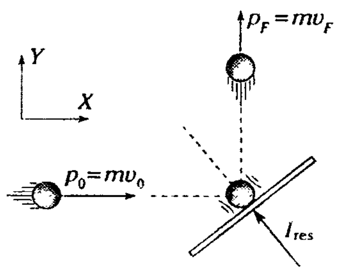
Problema 1

Una bola de billar de 0,5 kg choca contra la banda como indica la figura y su rapidez cambia de 8 m/s a 6 m/s. Determine el módulo del impulso resultante que recibió la bola durante el impacto



Resolución

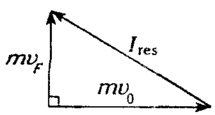
Durante el impacto sobre la bola actúa la fuerza de gravedad y la reacción de la banda en un pequeño intervalo de tiempo, lo cual altera la cantidad de movimiento horizontal de la bola y rebota verticalmente así



En la figura, la bola antes del impacto posee $\vec{p}_0$; durante el choque recibe el impulso resultante y después del impacto posee $\vec{p}_F$, entonces

$$\vec{I}_{res} = \vec{p}_F - \vec{p}_0$$

Por lo tanto con los tres vectores construímos



$$I_{res}^2 = (mv_0)^2 + (mv_F)^2$$

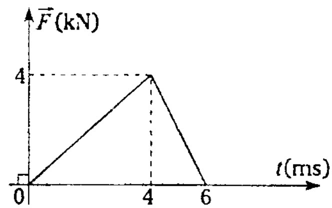
$$I_{res}^2 = (0{,}5\times 8)^2 + (0{,}5\times 6)^2$$

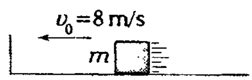
$$\therefore \quad I_{res} = 5 \text{ N.s}$$

Vectorialmente $\vec{I}_{res} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ N.s

Problema 2

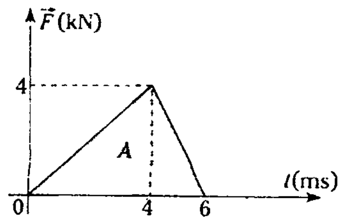
El bloque de 1 kg se aproxima a la pared con una rapidez de 8 m/s. Durante el choque la fuerza que ejerce la pared sobre el bloque varía linealmente con el tiempo, tal como se indica en la gráfica $\vec{F}$ vs. t ¿Qué impulso recibió el bloque? ¿Qué velocidad tendrá el bloque inmediatamente después del choque con la pared? Desprecie la fricción.





Resolución

¿Para qué nos sirve la gráfica $\vec{F}$ vs. t? Nos sirve para calcular el impulso transferido por la fuerza normal de la pared sobre el bloque, ello lo hacemos mediante el cálculo del área.



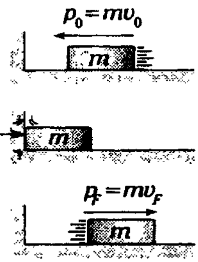
$$A=\frac{4\times 6}{2}=12\ \text{kN.ms}$$

$$I=12\times 10^{3}\text{N}.10^{-3}\text{s}$$

$$\therefore\ I=12\,\text{N.s}$$

$$\Rightarrow\ \vec{I}=12\hat{i}\ \text{N.s}$$

Ahora, como se desea conocer la velocidad de la barra después del choque, analizamos



El impulso $\vec{I}$ transferido al bloque es

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}$$

$$\vec{I}=\vec{p}_F-\vec{p}_0$$

$$12\hat{i}=m\vec{v}_F-m\vec{v}_0$$

$$12\hat{i}=1\vec{v}_F-1\left(-8\vec{i}\right)$$

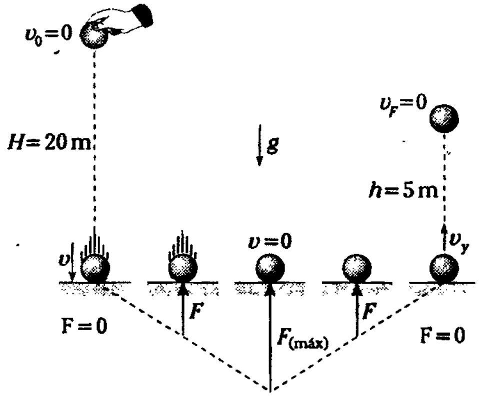
de donde $\vec{v}_F=4\hat{i}$ m/s

Problema 3

A 20 m del suelo una esfera es soltada, observándose que después del impacto se eleva verticalmente hasta 5 m. Si el contacto entre esfera y piso dura 0,02 s, calcule el valor de la fuerza media que ejerce el suelo sobre la esferita. Compare el valor de la fuerza de reacción del suelo con el valor de la fuerza de gravedad. La esfera tiene 200 g. ($g=10$ m/s^2)

Resolución

Esbocemos el fenómeno que sucede antes, durante y después de la colisión. La fuerza de reacción del suelo $\left(\vec{F}\right)$ varía durante el impacto



Del primer gráfico hay caída libre y evaluamos

$$v_2=v_0^2+2gH=0^2+2(10)(20)$$

Por lo tanto, $v=20$ m/s$(\downarrow)$ (Es la rapidez antes del choque). Vectorialmente $\vec{v}=-20\hat{j}$ m/s

Luego del choque, la esfera se eleva $h=5$ m y asciende con $v_y=?$, donde el movimiento es desacelerado:

$$\Rightarrow\ v_F^2=v_y^2-2gh$$

$$0^2=v_y^2-2(10)(5)$$

$$v_y=10\ \text{m/s}\ \ \text{(Rapidez luego del choque)}$$

¿Qué ha sucedido? La esfera debido al impulso resultante que recibe experimentó un cambio en su cantidad de movimiento; por tanto

$$\vec{I}_{res}=\underbrace{\Delta\vec{p}}$$

$$\vec{I}_{res}=\vec{p}_F-\vec{p}$$

$$\vec{I}_{res}=m\vec{v}_y-m\vec{v}_0$$

$$\vec{I}_{res}=0{,}2\left(+10\hat{j}\right)-0{,}2\left(-20\hat{j}\right)=6\hat{j}$$

Pero

$$\vec{I}_{res} = \vec{I}_F + \vec{I}_{mg} = 6\hat{j}$$

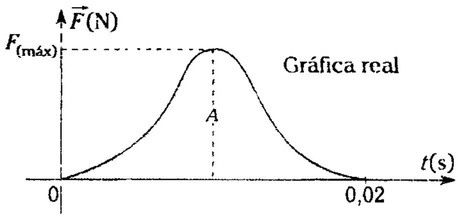
$$\vec{I}_F + m\vec{g}.\Delta t = 6\hat{j}$$

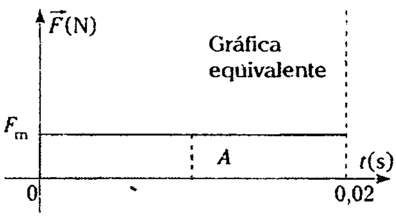
$$\vec{I}_F + 0{,}2(-10\hat{j}).0{,}02 = 6\hat{j}$$

$$\therefore\ \vec{I}_F = 6{,}04\hat{j}\ \text{N.s}$$

¿el impulso obtenido **es transmitido por una fuerza de valor constante o variable?**

En la figura vemos que varía desde $F = 0$ hasta $F_{(máx)}$ y luego disminuye hasta cero esto último se da en el instante de despegue y rebote del piso. Más si no se conoce la ley de variación de la fuerza normal del piso, ¿qué hacemos? Podemos plantear las gráficas matemáticaS equivalentes, de esta manera





¿Qué es la fuerza media? Es aquella fuerza de módulo constante que durante el mismo intervalo de tiempo (0,02 s) transmite el mismo impulso a la esfera en estudio.

$$\therefore\ A = \underbrace{\vec{I}_F} = \underbrace{\vec{I}_{F_m}}$$

$$6{,}04\hat{j} = \vec{F}_m \Delta t$$

$$6{,}04\hat{j} = \vec{F}_m(0{,}02)$$

$$\Rightarrow\ \vec{F}_m = 302\hat{j}\ \text{N}$$

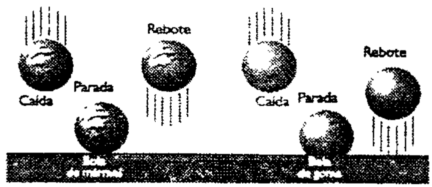
Comparemos el valor de $\vec{F}_m$ con $m\vec{g}$

$$\vec{F}_m = 302\hat{j}\ \text{N}$$

$$m\vec{g} = 0{,}2(-10\hat{j}) = -2\hat{j}\ \text{N}$$

$$\therefore\ |\vec{F}_{media}| >> |m\vec{g}|$$

El valor de la fuerza de gravedad es muy pequeño con respecto a la fuerza de reacción, por lo que en este caso puede ser despreciado.

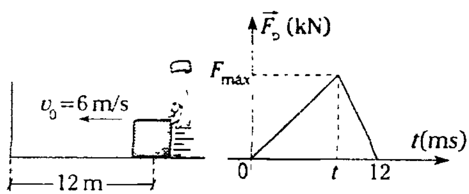


¿Cuál experimenta mayor deformación? El golpe contra el suelo de una bola de mármol dura mucho menos que el de una bola de goma de igual masa, porque la deformación alcanzada es bastante menor. Por este motivo, la fuerza que impulsa a la bola de mármol es mucho mayor

Problema 4

Se lanza un cubo de jebe liso de 4 kg con 6 m/s tal como se muestra. Si la pared le ejerce una fuerza que varía con el tiempo según la gráfica, ¿al cabo de qué tiempo el cubo regresa al lugar de lanzamiento? Considere

$$|\vec{I}_{deformador}| = 2|\vec{I}_{recuperación}|$$



Resolución

Nótese del gráfico que el bloque recorre 12 m hacia la izquierda, colisiona y luego retorna.

Se pide

$$t = t_{ida} + t_{choque} + t_{regreso}$$

$$t = \frac{d}{v_0} + 12\times10^{-3} + \frac{d}{v_F}$$

$$t = \frac{12}{6} + 12\times10^{-3} + \frac{12}{v_F} \qquad \text{(I)}$$

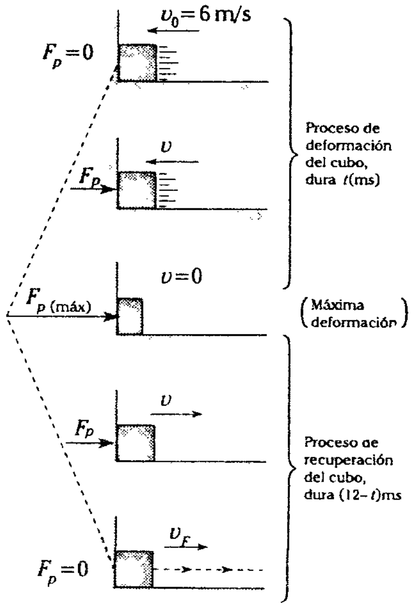
Vemos que, es necesario calcular la $v_{regreso}$, es decir, después del choque. ¿Cómo lo calculamos? Se sabe que durante el choque el cubo recibe un

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

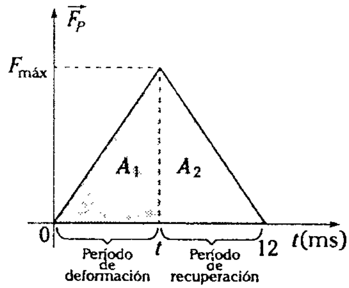
$$\vec{I} = \vec{p}_{d.ch} - \vec{p}_{a\,ch}$$

$$\vec{I} = m\vec{v}_{regreso} - m\vec{v}_0 \qquad \text{(II)}$$

Tenga en cuenta el proceso que sucede durante el choque, así:



De la gráfica, interpretando el área–proceso:



$$A_1 = \left|\vec{I}_{deformación}\right|$$

$$A_2 = \left|\vec{I}_{recuperación}\right|$$

Dividiendo $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\left|\vec{I}_{deformación}\right|}{\left|\vec{I}_{recuperación}\right|} = 2$

$$\frac{(F_{máx}\,.t/2)}{F_{máx}(12-t)/2} = 2$$

$$t = 24 - 2t$$

$$\therefore\ t = 8\text{ ms}$$

Además

$$\underbrace{A_1}_{} = \vec{I}_{deformación} = \Delta\vec{p}_{\text{periodo de deformación}}$$

$$\frac{\vec{F}_{máx}\,.t}{2} = \vec{p}_{\text{instante máx. def.}} - \vec{p}_{\text{instante antes del choque}}$$

$$\vec{F}_{máx}\frac{t}{2} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$$

$$\vec{F}_{máx}\frac{8\times10^{-3}}{2} = 4(0) - 4(-6\hat{i})$$

$$\therefore\ \vec{F}_{máx} = 6\times10^{3}\hat{i}\text{ N} = 6\hat{i}\text{ kN}$$

Con este valor hallado podemos calcular a partir de la gráfica $\vec{F}$ vs. t

$$A_1 + A_2 = I$$

$$\frac{F_{max}(12\times10^{-3})}{2} = I$$

$$\frac{6\times10^3(12\times10^{-3})}{2}=I$$

$$\therefore\ I=36\text{ N.s}\ \text{ o }\ \vec{I}=36\hat{i}\text{ N.s}$$

Reemplazando en (II)

$$36\hat{i}=4\vec{v}_F-4(-6\hat{i})$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_F=3\hat{i}\text{ m/s}$$

En (I)

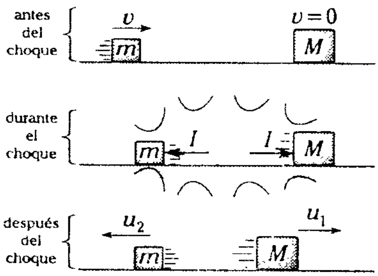
$$t=6{,}012\text{ s}$$

Problema 5

Un cuerpo de masa m se desplaza horizontalmente sobre una superficie lisa con una velocidad $\vec{v}$ y choca frontalmente contra un cuerpo de masa M en reposo. La fuerza que surge durante la interacción de los cuerpos crece linealmente durante un intervalo de tiempo t desde cero hasta un valor F, disminuyendo después linealmente hasta que su módulo es nulo en ese mismo intervalo de tiempo t. ¿Qué velocidad tienen los cuerpos después del choque?

Resolución

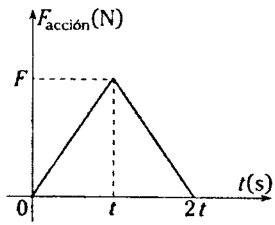
Bosquejemos lo que sucede



Según la tercera Ley de Newton durante el choque m ejerce un impulso $(\vec{I})$ sobre M, ejerce un impulso de reacción $(-\vec{I})$ sobre m.

Nos piden u_1 y u_2

¿Cómo los calculamos? Por condición del problema que la fuerza durante el choque aumenta linealmente desde cero hasta F durante t segundos y luego disminuye de F a cero en t segundos por consiguiente construimos la gráfica $\vec{F}$ vs. t.



De la gráfica

$$\vec{I}=A=\frac{F(2t)}{2}=Ft$$

vectorialmente, los impulsos son

$$\vec{I}_{\text{sobre M}}=F.t(\hat{i})$$

$$\vec{I}_{\text{sobre m}}=(-)F.t(\hat{i})$$

¿Cómo calculamos la velocidad de m después del choque? Analizaremos su situación, pues M recibió durante el choque un impulso.

$$\vec{I}_{\text{sobre M}}=\Delta\vec{p}$$

$$+F.t\hat{i}=\underbrace{\vec{p}_F}-\vec{p}_0$$

$$F.t\hat{i}=M\vec{u}_1-M(0)$$

$$\Rightarrow\ \vec{u}_1=\left(\frac{F}{M}\right)t\hat{i}$$

Análogamente sobre m actúa el otro

$$\vec{I}_{\text{sobre m}}=\Delta\vec{p}$$

$$-F.t\hat{i}=\vec{p}_F-\vec{p}_0$$

$$-F.t\hat{i}=m\vec{u}_2-mv\hat{i}$$

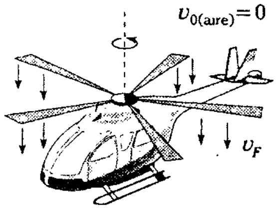
$$\Rightarrow\ \vec{u}_2=\left(v-\frac{F}{m}t\right)\hat{i}$$

Problema 6

Un helicóptero de masa m se encuentra suspendido en el aire de densidad ρ. Halle la velocidad con la que el aire se mueve, si las hélices giratorias tienen un radio de longitud L.

Resolución

Bosquejemos cómo sucede el evento físico



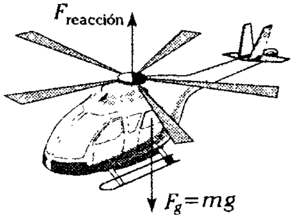
¿Qué sucede cuando gira la hélice del helicóptero? Se va a aspirar aire, el cual al inicio tiene $v_{0y}=0$, pero, luego el aire desciende con $v_F\,(\downarrow)$. Entonces el aire recibe un impulso

$$\vec{I}_{\text{acción}}(\downarrow)=\Delta\vec{p}_{\text{aire}} \qquad \text{(I)}$$

y sobre el helicóptero se manifestará la reacción del aire, el cual ejerce impulso de reacción hacia arriba.

$$\vec{I}_{\text{reacción}}(\uparrow)=\vec{F}_{\text{reacción}}\,\Delta t \qquad \text{(II)}$$

Realicemos el diagrama de fuerzas sobre el helicóptero en equilibrio mecánico:



Para el equilibrio

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$F_{\text{reacción}}=mg$$

En (II)

$$\vec{I}_{\text{reacción}}=mg\Delta t\,\hat{j}$$

Pero $\vec{I}_{\text{acción}}=-\vec{I}_{\text{reacción}}$

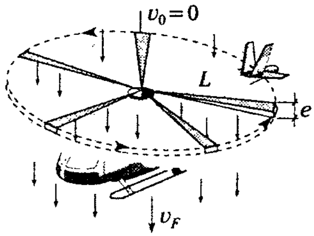
Reemplazando (I)

$$\Delta\vec{p}_{\text{aire}}=-mg\Delta t\,\hat{j}$$

$$M_{\text{aire}}\vec{v}_F-\cancel{M_{\text{aire}}\vec{v}_0}=mg\Delta t\,\hat{j}$$

$$\therefore\ \vec{v}_F=\frac{m}{M_{\text{aire}}}g\Delta t\,\hat{j} \qquad \text{(III)}$$

¿Cómo hallamos M_{aire}? Consideraremos la masa de aire contenida entre las hélices de modo que el volumen de aire que contiene es muy grande comparado con el volumen que ocupan las hélices. ($V_{\text{aire}}>V_{\text{hélice}}$)



$$M_{\text{aire}}=\rho.V_{\text{aire entre las hélices}}$$

$$M_{\text{aire}}=\rho.(\pi L^2.e) \qquad \text{(IV)}$$

Considerando un pequeño espesor se tendría

$$e=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)\Delta t$$

En (IV)

$$M_{\text{aire}}=\rho.\pi L^2\left(\frac{0+v_F}{2}\right)\Delta t$$

Reemplazando en (III)

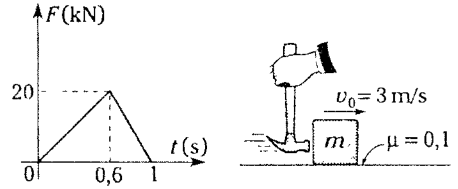
$$v_F=\frac{2m}{\rho\pi L^2 v_F\cancel{\Delta t}}g\cancel{\Delta t}$$

$$v_F^2=\frac{2mg}{\rho\pi L^2}$$

$$\therefore\ v_F=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2mg}{\rho\pi}}$$

Problema 7

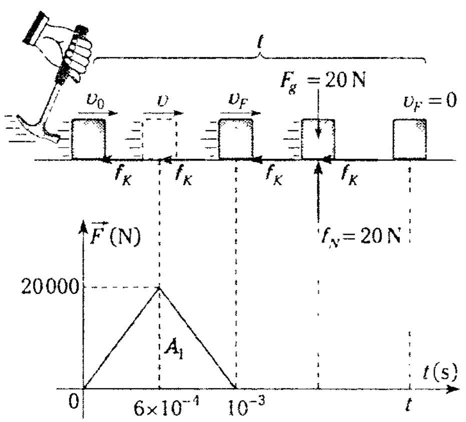
En el instante mostrado el bloque de madera de 2 kg se encuentra deslizando con 3 m/s, pero con el golpe del martillo le ejercemos una fuerza cuyo módulo varía respecto al tiempo como se indica en la gráfica $\vec{F}$ vs. t. ¿Al cabo de qué tiempo de producido el golpe el bloque se detendrá?



Resolución

¿Qué tiempo dura el contacto entre el martillo y el bloque? De la gráfica $\vec{F}$ vs. t, deducimos que es 1 ms$=10^{-3}$ s durante el cual actúa la fuerza variable del martillo. La fuerza de rozamiento cinético actúa hasta que el bloque se detiene.

Esbocemos el evento físico y la secuencia de cómo varía la fuerza.



De la figura la duración de la fuerza de contacto entre el martillo y el bloque es mínima, luego si sobre el bloque sólo ejerce oposición el rozamiento cinético entonces:

$$\vec{I}_{res} = \vec{I}_{F\,(martillo)} + \vec{I}_{f_k}$$

$$\Delta\vec{p} = A_1(\hat{i}) + (-f_k t)\hat{i}$$

$$m\vec{v}_f - m\vec{v}_0 = \frac{20000(1\times10^{-3})}{2}\hat{i} - (\mu_k f_N)t\hat{i}$$

$$2(0)\hat{i} - 2(-3)\hat{i} = 10\hat{i} - 2t\hat{i}$$

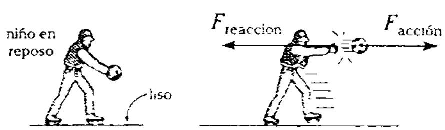
$$\therefore\ t = 2\ \text{s}$$

Problema 8

Una lancha impulsada por chorro de agua se mueve en agua tranquila. El módulo de la fuerza de resistencia del agua al movimiento de la lancha es $F=Kv$. La velocidad del agua expulsada con respecto a la lancha es u. Determine la rapidez constante v de la lancha, si la sección del flujo de agua aspirada por el motor es A. (La densidad del agua es ρ).

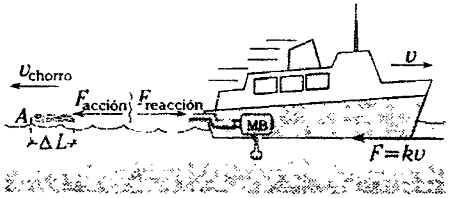
Resolución

Para resolver este caso es importante explicar y comprender cómo avanza una lancha en el agua. Para esto, es muy útil explicar la ley de acción y reacción, en el caso siguiente:



Luego del lanzamiento el niño y el balón se mueven en direcciones opuestas ¿Por qué sucede esto? El niño, al efectuar el lanzamiento hacia la derecha, realiza una acción sobre el balon. Pero el balón, ejerce una reacción sobre las manos de. hombre y como el piso es liso este deslizara hacia la izquierda.

Al ser lanzado hacia adelante el balón, el niño retrocede por efecto de la reacción, de acuerdo con la ley de acción y reacción, como aplicación de esta tenemos que cuando un cohete asciende debe expulsar hacia abajo sus gases o cuando queremos avanzar en cierta dirección, debemos expulsar una masa en dirección contraria.
Por lo tanto en nuestro caso, para que la lancha avance hacia adelante debe expulsar el agua con su motor hacia atrás. Bosquejemos lo acontecido.



Nótese que cuando la motobomba expulsa el chorro, sobre éste se manifiesta la $\vec{F}_{acción}$ y sobre la lancha la $\vec{F}_{reacción}$ con la cual avanzará la lancha. Como la lancha se mueve con $\vec{\upsilon}=$ cte., entonces está en equilibrio cinético. Se cumple para la lancha.

$$\underbrace{\sum F(\rightarrow)}_{F_{reacción}} = \underbrace{\sum F(\leftarrow)}_{k\upsilon}$$

Por tercera ley de Newton .

$$\underbrace{F_{reacción}}_{k\upsilon} = F_{acción}$$

$$k\upsilon = F_{acción} \qquad \text{(I)}$$

Ahora analicemos la masa del chorro de agua que es expulsada por la motobomba; sobre esta durante un intervalo de tiempo Δt actúan un

$$\vec{I}_{\substack{sobre\\chorro}} = \vec{F}_{acción}\Delta t = \Delta\vec{p}_{chorro}$$

Reemplazando (I)

$$-k\upsilon.\Delta t(\hat{i}) = m_{\substack{H_2O\\sale}}\vec{\upsilon}_{\substack{chorro\\sale}} - m_{\substack{H_2O\\sale}}\vec{\upsilon}_{0(chorro)} \quad \text{(II)}$$

La función específica de la motobomba consiste en que primero debe aspirar agua del mar hacia el rotor de la motobomba y luego de cierto tiempo (Δt) recién expulsará el chorro. Entonces

$$\upsilon_{0(chorro)} = 0$$

Reemplazando en (II)

$$-k\upsilon.\Delta t(\hat{i}) = m_{\substack{H_2O\\sale}}\vec{\upsilon}_{chorro}$$

$$-k\upsilon.\Delta t(\hat{i}) = (\rho V).\vec{\upsilon}_{chorro}$$

- En un Δt, sale un chorro de longitud: ΔL

$$\Rightarrow \; -k\upsilon\Delta t\hat{i} = \rho(A\Delta L)\vec{\upsilon}_{chorro} \qquad \text{(III)}$$

Si por dato; tenemos la velocidad del chorro respecto a la lancha; entonces plantearemos que

$$\underbrace{\vec{\upsilon}_{chorro/lancha}}_{-u\hat{i}} = \vec{\upsilon}_{chorro} - \underbrace{\vec{\upsilon}_{lancha}}_{(+\upsilon\hat{i})}$$

$$-u\hat{i} = \vec{\upsilon}_{chorro} - (+\upsilon\hat{i})$$

$$\therefore \; \vec{\upsilon}_{chorro} = -(u-\upsilon)\hat{i} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (IV) en (III)

$$-k\upsilon\Delta t\hat{i} = \rho(A\Delta L)\left[-(u-\upsilon)\hat{i}\right]$$

Simplificando

$$-k\upsilon = \rho A\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)(u-\upsilon)$$

Colocando un observador sobre la lancha

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \begin{matrix}\text{rapidez del chorro}\\\text{respecto de la lancha}\end{matrix} = u$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$-k\upsilon = \rho A u(u-\upsilon)$$

de donde

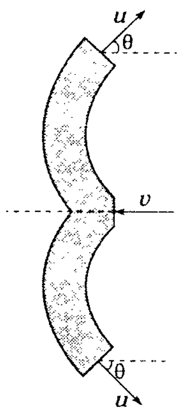
$$\upsilon = \frac{\rho A u^2}{k + \rho A u}$$

Observación

1. La lancha avanza sobre el agua, gracias a la impulsión que recibe al arrojar el chorro hacia atrás; es decir cuando se establece el fenómeno de acción sobre el chorro hacia atrás y reacción sobre la lancha hacia adelante.
2. Nótese que si el chorro no es arrojado respecto a la lancha; entonces $u = 0$. De esta manera reemplazamos en la fórmula obtenida y se concluye $\upsilon=0$, es decir la lancha no avanzará.
3. En un Δt ingresa al rotor de la bomba una masa de agua: $\rho_{H_2O}V = \rho_{H_2O}A\Delta L$ y en estado estacionario; en este mismo intervalo de tiempo (como en el rotor no se estanca agua) debe salir la misma masa de agua, como chorro.

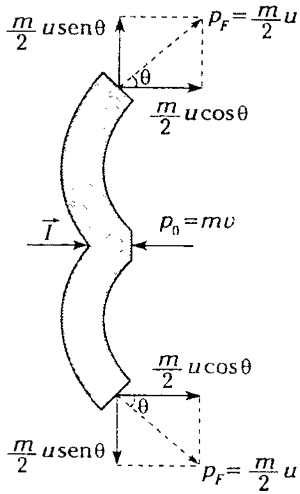
Problema 9

Calcule el módulo de la componente horizontal de la fuerza del chorro de agua sobre la paleta fija de la rueda de turbina: si el caudal hidráulico es Q, la rapidez de suministro de agua es υ la paleta es horizontal, la rapidez de salida del agua es u y forma un ángulo θ con la horizontal.



Resolución

El agua luego de impactar sobre la paleta fija de la turbina cambia de dirección y su masa se fracciona en dos partes iguales experimentando un cambio en su cantidad de movimiento y ejerciendo un impulso, así



Horizontalmente se manifiesta un

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{F}_x\,\Delta t = \vec{p}_{x(f)} - \vec{p}_{x(0)}$$

$$F_x\Delta t\hat{i} = \left(\frac{m}{2}u\cos\theta + \frac{m}{2}u\cos\theta\right)\hat{i} - m\upsilon(-\hat{i})$$

Simplificando

$$F_x\,\Delta t = m(u\cos\theta + \upsilon)$$

$$F_x\Delta t = \overbrace{\rho_{H_2O}V}(\upsilon + u\cos\theta)$$

de donde $F_x = \rho_{H_2O}\left(\frac{V}{\Delta t}\right)(\upsilon + u\cos\theta)$ (I)

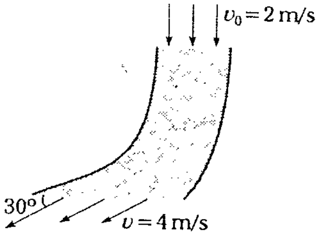
siendo $\frac{V}{\Delta t} = \text{caudal hidraulico} = Q$

En (I)

$$F_x = \rho_{H_2O}Q(\upsilon + u\cos\theta)$$

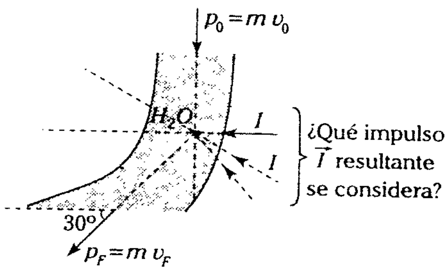
Problema 10

En un canal fijo de sección variable, tal como se muestra, el agua ingresa con $v_0=2$ m/s si la sección de ingreso del canal 0,02 m^2, la rapidez del agua a la salida es $v = 4$ m/s y está dirigida como indica la figura; calcule el módulo de la fuerza resultante del canal sobre el agua.

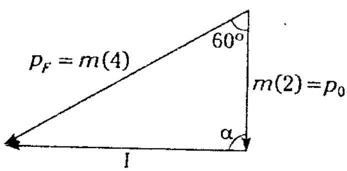


Resolución

El volumen de agua que contiene el canal experimenta un cambio en su cantidad de movimiento al entrar y salir del canal.



En este caso es necesario precisar la dirección del impulso $\vec{I}$, y como solo actúan tres vectores construímos:



Necesariamente $\alpha=90°$.

Por el teorema de Pitágoras

$$I=m(2\sqrt{3})$$

$$F.\Delta t=\rho_{H_2O}V(2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow\quad F=\rho_{H_2O}\left(\frac{V}{\Delta t}\right)(2\sqrt{3}) \qquad \text{(I)}$$

¿Qué nos representa la relación: $V/\Delta t$?

Se le denomina caudal hidráulico; el volumen de agua que por unidad de tiempo que sale o ingresa a un tubo o canal. Matemáticamente:

$$\Rightarrow\quad \left(\begin{smallmatrix}\text{caudal}\\ \text{hidráulico}\end{smallmatrix}\right)=\frac{V}{\Delta t}=\frac{A_0\,\Delta L_0}{\Delta t}=\frac{A_1\Delta L_2}{\Delta t}$$

$$\boxed{Q=\frac{V}{\Delta t}=A_0v_0=A_1v_1}$$

Fórmula para caudal hidráulico

donde

A_0 : área de ingreso al canal

v_0 : rapidez del agua al ingreso del canal

A_1 : área de salida del canal

v_1 : rapidez del agua al salir del canal

Como se conoce el área de ingreso al canal nos conviene considerar

$$\frac{V}{\Delta t}=A_0v_0$$

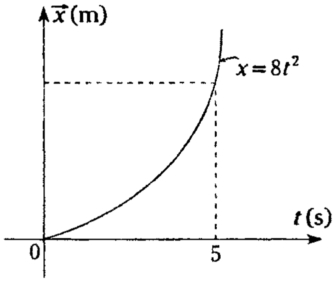
lo reemplazamos en (I)

$$F=\rho_{H_2O}(A_0v_0)(2\sqrt{3})=10^3(0{,}02\times 2)(2\sqrt{3})$$

$$\therefore\quad F=80\sqrt{3}\text{ N}$$

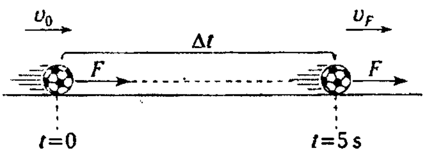
Problema 11

Determine el impulso que recibe una pelota de 2 kg, si la ley que sigue en dirección de la fuerza impulsora está definida por la gráfica. Considere que la fuerza que actúa durante 5 s es constante. ¿Qué valor tiene dicha fuerza despreciando el rozamiento?



Resolución

Como la gráfica $\vec{x}-t$ es una parábola, entonces se trata de un M.R.U.V. entonces $\vec{a}$ = cte. y $\vec{F}$ = cte. Bosquejemos lo que sucede, sobre el balón el cual actúa una fuerza horizontal constante así:



Nótese que sobre el balón la fuerza $\vec{F}$ transmite un impulso, tal que:

$$\vec{I}=\Delta\vec{p}=m\vec{v}_F-m\vec{v}_0$$

$$\vec{I}=m\left(\vec{v}_F-\vec{v}_0\right) \qquad \text{(I)}$$

Ahora pasemos a calcular $\vec{v}_F$ y $\vec{v}_0$

De la ecuación de la curva

$$x=8t^2$$

Para hallar la velocidad, derivamos la posición (x) respecto al tiempo (t) así

$$\frac{dx}{dt}=16t \qquad v=16t$$

En

$t=0$: $v=v_0=0$

En

$t=5$ s : $v=v_F=80$ m/s

En (I)

$$\vec{I}=2(80\hat{i}-\hat{i})=160\hat{i}$$

$$\therefore\ \vec{I}=160\hat{i}\ \text{N.s}$$

Finalmente pasemos a calcular la fuerza $\vec{F}$.

Se sabe que

$$\vec{I}=160\hat{i}$$

$$\vec{F}.\Delta t=160\hat{i}$$

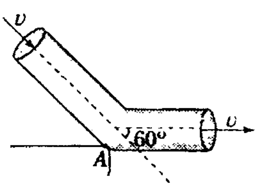
La fuerza actúa durante un periodo $\Delta t=5$ s (dato)

Reemplazando $\vec{F}.(5)=160\hat{i}$

$$\therefore\ \vec{F}=32\hat{i}\ \text{N}$$

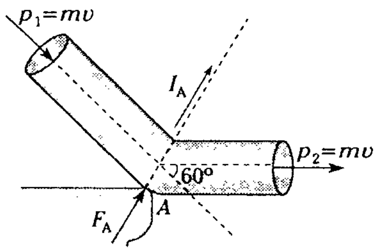
Problema 12

Determine el módulo de la fuerza que ejerce el codo de un tubo sobre el soporte A, si el eje del tubo está situado en el plano horizontal y el agua circula dentro del tubo de 20 cm de diámetro con una rapidez $v=4$ m/s.



Resolución

En la figura vemos que el codo presiona al soporte A el cual reacciona ejerciendo un impulso de la siguiente forma:

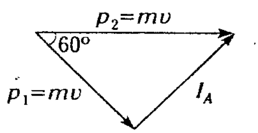


La cantidad de movimiento del agua varía porque recibe un impulso exterior.

Para derterminar el módulo de la fuerza $\vec{F}_A$ podemos usar la relación entre el $\vec{I}_{res}$ y la $\vec{p}$.

$$\vec{I}_{res}=\Delta\vec{p}=\vec{p}_F+\left(-\vec{p}_0\right)$$

Como las cantidades vectoriales no son paralelas con ellas podemos formar un triángulo.



de donde deducimos que el triángulo es equilátero

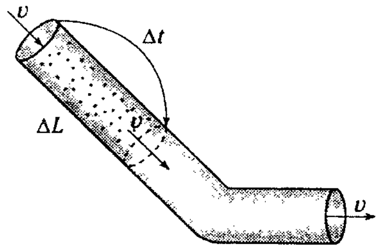
$$\underbrace{I_A}=mv$$

$$F_A.\Delta t=\left(\rho_{H_2O}V\right)v$$

$$F_A.\Delta t=\left(\rho_{H_2O}.A\Delta L\right)v$$

$$F_A=\rho_{H_2O}A\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)v \qquad \text{(I)}$$

¿Qué es $\Delta L/\Delta t$? Examinemos el ingreso de agua al codo, así



ΔL : Es la longitud de agua que ingresa al tubo.

Δt : Es el intervalo de tiempo que demoran las partículas de agua en recorrer ΔL en el interior del tubo.

Entonces se deduce que

$$\frac{\Delta L}{\Delta t}=\text{rapidez del agua}=v$$

Reemplazando en (I)

$$F_A=\rho_{H_2O}Av^2$$

Pero

$$A=\underset{\text{transversal}}{\text{sección}}=\frac{\pi d^2}{4}$$

$$F_A=\rho_{H_2O}\left(\frac{\pi d}{4}\right)^2v^2$$

Reemplazando datos

$$F_A=10^3\,\frac{\pi(0,20)^2}{4}(4)^2$$

$$\therefore\ F_A=160\pi\ \text{N}$$

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

En el capítulo X, en la parte de energía mecánica, se estableció que esta bajo determinadas condiciones se puede conservar, es decir, en todo instante su valor no se altera. Algo similar puede ocurrir con la cantidad de movimiento de un cuerpo o de un sistema, dadas las condiciones también podemos tener conservación de la cantidad de movimiento.

Durante los siglos XVI y XVIII se despertó el interés por el análisis del movimiento mecánico de los cuerpos. (Galilei, Descartes y Newton). Por otro lado también llamó la atención a lo que ocurría durante un choque o colisión, los que contemplaban los choques quedaban sorprendidos de la complejidad de este fenómeno. Fue justamente el estudio de los choques lo que trajo como consecuencia el descubrimiento de una de las leyes más importantes de la naturaleza, la Ley de conservación de la cantidad de movimiento. Esta ley la encontramos establecida en 1671 en los trabajos destacados hombres de ciencia, entre ellos tenemos a C. Huygens (también aportó en la teoría de ondas).

Esta notable propiedad de la cantidad de movimiento (de conservarse) permite resolver diversos problemas relacionados con los choques, el fenómeno de percusión, es decir el retroceso que podemos experimentar cuando se dispara una escopeta o carabina; también nos permite tratar el caso en que una persona salta de una plataforma con ruedas y esta última retrocede, etc. Si bien es cierto en los casos mencionados los cuerpos que participan son diferentes, pero *desde el punto de vista de los fenómenos físicos* que experimentan son parecidos.

Esta ley la podemos demostrar fácilmente al hacer uso de diversos ejemplos mecánicos, entre ellos los choques o analizando a dos cuerpos que solo están en interacción; pero vamos a proceder a partir de la relación entre el impulso resultante y la cantidad de movimiento.

$$\vec{I}_{res} = \Delta\vec{p}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_R \Delta t = \vec{p}_F - \vec{p}_0 \qquad \text{(I)}$$

Si después de hacer el diagrama de fuerzas sobre un cuerpo se determina que la fuerza resultante sobre él es nula $\left(\vec{F}_R = \vec{0}\right)$, ¿qué ocurre?

En la relación (I) queda

$$\vec{0} = \vec{p}_F - \vec{p}_0$$

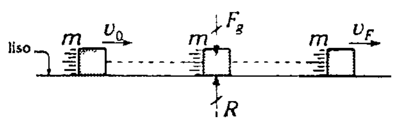
$$\therefore \boxed{\vec{p}_0 = \vec{p}_F}$$

Está relación expresa que la cantidad de movimiento inicial y final es igual, es decir la cantidad de movimiento del cuerpo se conserva.

Conclusión

Un cuerpo conservará su cantidad de movimiento si sobre él la fuerza resultante es nula.

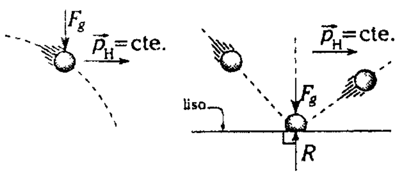
En el siguiente caso tenemos



Que sobre el bloque la $F_R = 0$, entonces su

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_F$$

La conclusión dada para un cuerpo en algunos casos se establece por componente es decir, puede demostrarse para un cuerpo que en la dirección horizontal la fuerza resultante es nula, mientras que en la dirección vertical no lo es. En este caso se establece la conservación de la cantidad de movimiento en la horizontal mientras que en la vertical existe variación. Este hecho se evidencia en un M.P.CL. o también cuando un cuerpo impacta oblicuamente sobre un piso liso.

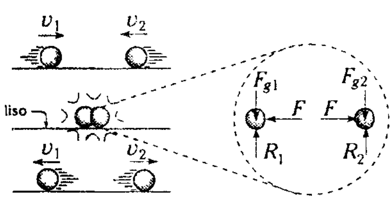


Se ha establecido que puede pasar cuando se analiza a un cuerpo, pero en la práctica analizamos a varios cuerpos simultáneamente o a un sistema.

Para el caso de un sistema conformado por dos cuerpos de masas m_1 y m_2. Donde las fuerzas externas aplicadas al sistema se compensaron.

Antes de interactuar tienen velocidades $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$; durante su interacción que dura t segundos surgen fuerzas de acción y reacción $\vec{F}$ y $-\vec{F}$ variando las velocidades a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Consideremos la relación impulso y cantidad de movimiento para cada cuerpo por separado.



Para (1) $\vec{I}_{res} = \Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_{F(1)} - \vec{p}_{0(1)}$

$$+\vec{F}\Delta t = m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1 \qquad \text{(I)}$$

Para (2) $\vec{I}_{res} = \Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_{F(2)} - \vec{p}_{0(2)}$

$$-\vec{F}\Delta t = m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2 \qquad \text{(II)}$$

Igualando las relaciones (II) y (I)

$$-m_2\vec{u}_2 - m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 - m_1\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}_{\text{suma de } \vec{p}_0} = \underbrace{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2}_{\text{suma de } \vec{p}_F}$$

$$\boxed{\Sigma\vec{p}_0 = \Sigma\vec{p}_F}$$

Este resultado expresa que si bien varían las cantidades de movimientos de los cuerpos, su suma antes y después de interactuar es la misma, es decir se conserva.

Conclusión

Este resultado nos permite también plantear que la cantidad de movimiento de un sistema no varía a costa de fureñas internas, estas sólo varían la cantidad de movimiento de los cuerpos que conforman el sistema.

Del análisis hecho para un cuerpo o dos cuerpos podemos ahora generalizar y establecer que es posible probar y la experiencia también lo confirma que la suma de cantidad de movimiento de dos o más cuerpos en interacción o como se plantea, de un sistema queda invariable. Es decir se conserva. Esto es válido cuando la fuerza resultante, sobre el sistema es nulo.

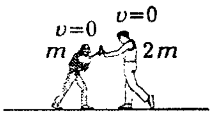
La ley de conservación de la cantidad de movimiento para un sistema establece que si sobre un sistema nó se manifiestan fuerzas externas en todo caso si su suma es nula, su cantidad de movimiento se conserva.

En resumen

$$\text{Si } \vec{F}_{R(sist)} = \sum\vec{F}_{\substack{\text{ext al}\\ \text{sistema}}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{sist} \text{ no varía}$$

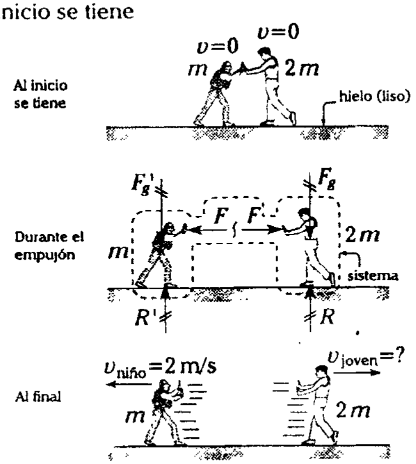
Ejemplo 5

El niño y el joven están sobre una superficie de hielo. Si después de empujarse mutuamente el niño adquiere una rapidez de 2 m/s, ¿con qué rapidez retrocede el joven?



Resolución

Al inicio se tiene



La rapidez del joven la podemos determinar haciendo uso de la ley de conservación de la cantidad de movimiento del sistema, ya que sobre él la fuerza resultante es nula.

$$\Rightarrow \quad \sum \vec{p}_0 = \sum \vec{p}_F$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\vec{p}_{0(\text{niño})}} + \cancel{\vec{p}_{0(\text{joven})}} = \vec{p}_{F(\text{niño})} + \vec{p}_{F(\text{joven})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{0} = m\vec{\upsilon}_{\text{niño}} + 2m\vec{\upsilon}_{\text{joven}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{0} = \cancel{m}(-2) + 2\cancel{m}(+\upsilon_{\text{joven}})$$

$$\therefore \quad \upsilon_{\text{joven}} = 1 \text{ m/s}$$

A partir de este resultado podemos notar que la *relación de rapidez es igual a la relación inversa* de las masas.

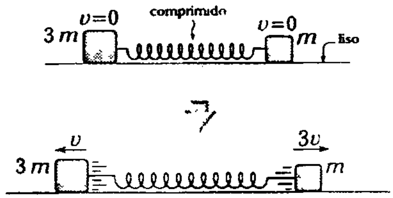
Es decir

$$\frac{\upsilon_{\text{niño}}}{\upsilon_{\text{joven}}} = \frac{m_{\text{joven}}}{m_{\text{niño}}} = \frac{2}{1}$$

Importante

Si se tiene un sistema en reposo conformado por solo dos cuerpos y luego los cuerpos se mueven debido a la fuerza de acción y reacción (fuerzas intemas). Ellos se moveran en direcciones contrarias con velocidades que están en relación inversas a sus masas.

Por ejemplo

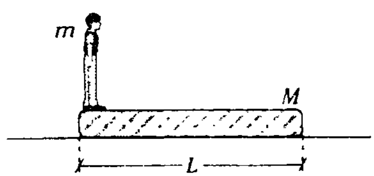


Por inspección directa notamos que

$$\sum \vec{p}_0 = \sum \vec{p}_F = \vec{0}$$

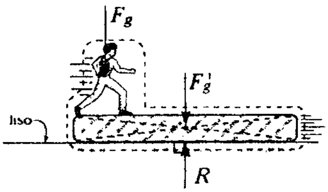
Ejemplo 6

Un niño de masa M está parado en el extremo de un tablón homogéneo, de masa m y longitud L, apoyado sobre un piso liso. Si el niño corre sobre la tabla, ¿se conserva la cantidad de movimiento del sistema tabla-niño?, y ¿qué ocurre con la cantidad de movimiento de la tabla?



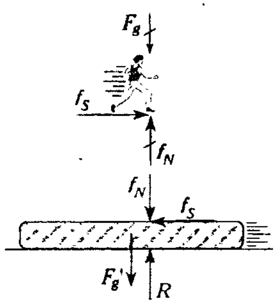
Resolución

La cantidad de movimiento del sistema se conserva, si y solo si se verifica previamente que la fuerza resultante sobre el sistema en estudio es nula. Entonces, hagamos el diagrama de fuerzas sobre dicho sistema.



Vemos que sobre el sistema actúan tres fuerzas verticales y estas se anulan, pues no hay desplazamiento vertical, entonces deducimos que la fuerza resultante es nula y por lo tanto la cantidad de movimiento del sistema se conserva.

Para saber si la cantidad de movimiento de la tabla se conserva, analizaremos en forma individual a la tabla y al niño, para lo cual hacemos una separación imaginaria.



Si el niño verticalmente no experimenta desplazamiento, entonces en esta dirección no hay fuerza resultante.

Sin embargo, horizontalmente no existe equilibrio de fuerzas ya que la fuerza de rozamiento $(\vec{f}_S)$ no tiene con qué equilibrarse. Sobre el niño hay

$F_R = f_S$

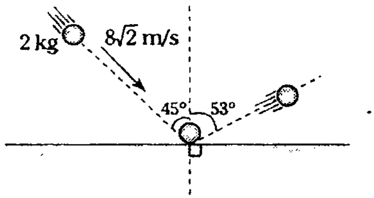
Por lo tanto su movimiento varía.

Algo similar ocurre con el tablón. sobre él hay $F_R = f_S$ y su cantidad de movimiento varía.

El análisis de este ejemplo confirma lo planteado en la teoría. Mientras la cantidad de movimiento de un sistema no varía la cantidad de movimiento de los cuerpos que lo conforman sí varían.

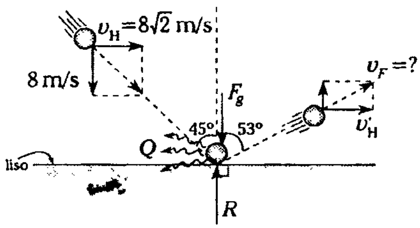
Ejemplo 7

Se muestra cómo una esfera impacta y rebota sobre una superficie horizontal lisa. ¿Cuánta energía mecánica perdió la esfera?



Resolución

Para poder determinar la energía mecánica perdida por la esfera, se requiere comparar su energía cinética antes y después de chocar. Para esto también se necesita la rapidez después del impacto.



Analizando a la esfera durante el impacto, notamos que sobre ella solo hay fuerzas verticales y en la dirección horizontal la fuerza resultante es nula. Concluimos que en esta última la cantidad de movimiento se conserva, y en consecuencia la componente horizontal de la velocidad no cambiará.

$\Rightarrow \quad v_H' = v_H = 8$ m/s

Con esto se deduce que $v_F = 10$ m/s

Si hacemos el cálculo de la energía cinética

$$E_{C_0} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{2(8\sqrt{2})^2}{2} = 128 \text{ J}$$

$$E_{C_F} = \frac{mv_F^2}{2} = \frac{2(10)^2}{2} = 100 \text{ J}$$

Por balance de energía se establece que

$$E_{C_0} = E_{C_F} + Q$$

$$\therefore \quad Q = 28 \text{ J}$$

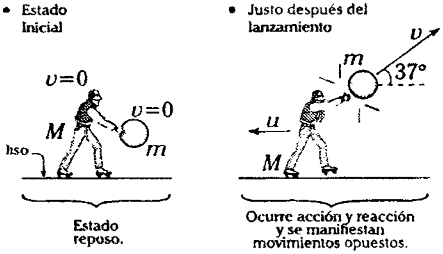
Problemas Resueltos

Problema 1

Un niño de 40 kg tiene entre sus manos un balón de 2 kg y está parado, con los patines puestos, sobre una pista horizontal lisa. Si el niño lanza el balón bajo un ángulo de 37° con la horizontal saliendo el balón de sus manos con 5 m/s, ¿con qué velocidad retrocederá el niño?

Resolución

Esbocemos lo que indica el problema.



Para el sistema inicialmente, ni el niño ni la pelota se mueven, por lo que la cantidad de movimiento del sistema es nula

$$\vec{p}_0 = M(0) + m(0) = 0$$

Justo después del lanzamiento, horizontalmente, tenemos

$$\vec{p}_F = m(v\cos 37°\,\hat{i}) + M\vec{u}$$

Sobre el sistema niño y balón horizontalmente no hay fuerzas externas (por ejemplo ni viento ni rozamiento) es decir, la fuerza resultante en la horizontal es nula. Por lo tanto, la cantidad de movimiento del sistema horizontalmente se conserva. Entonces resulta útil plantear la ley de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\underbrace{\vec{p}_0} = \underbrace{\vec{p}_F}$$

$$0 = mv\cos 37°\,\hat{i} + M\vec{u}$$

$$0 = 2(\cancel{5})\left(\frac{4}{\cancel{5}}\right)\hat{i} + 40\vec{u}$$

$$\therefore\ \vec{u} = -0{,}2\hat{i}\ \text{m/s}$$

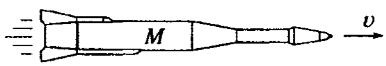
El niño retrocede luego del lanzamiento.

Problema 2

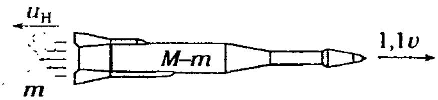
¿Qué masa de combustible es necesario arrojar con la rapidez $3v$ con respecto a un cohete de masa M para que su velocidad aumente desde v hasta $1{,}1v$?

Resolución

Consideremos que el cohete se desplaza así



Luego de arrojar m kg de combustible:



Para el primer esquema

$$\vec{p}_0 = M\vec{v} = Mv\hat{i} \qquad \text{(I)}$$

Para el segundo esquema

$$\vec{p}_F = (M-m)1{,}1v\hat{i} + m\vec{u}_H\hat{i} \qquad \text{(II)}$$

Si horizontalmente no hay fuerzas externas que actúen sobre el cohete $\left(\vec{F}_R = \vec{0}\right)$, entonces horizontalmente se conserva su cantidad de movimiento y planteamos

$$\Rightarrow\ \vec{p}_0 = \vec{p}_F$$

Reemplazando (I) y (II)

$$Mv\hat{i} = (M-m)1{,}1v\hat{i} - mu_H\hat{i} \qquad \text{(III)}$$

Por dato, la rapidez del combustible arrojado respecto al cohete es $3v$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_{\text{comb cohete}} = \vec{v}_{\text{comb}} - \vec{v}_{\text{cohete}}$$

$$-3v\hat{i} = -u_H\hat{i} - (1{,}1v\hat{i})$$

$$\therefore\ u_H = 1{,}9v$$

En (III)

$$M\cancel{v}\cancel{\hat{i}} = (M-m)1{,}1\cancel{v}\cancel{\hat{i}} - m(1{,}9\cancel{v}\cancel{\hat{i}})$$

$$M = 1{,}1M - 3m$$

$$3m = 0{,}1M$$

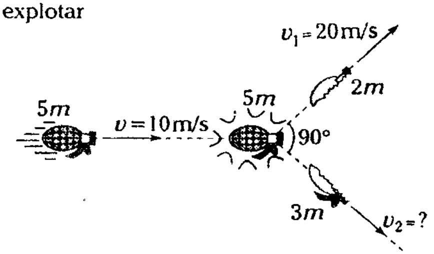
$$\therefore\ m = \frac{M}{30}$$

Problema 3

Una granada de masa $5m$ se desplaza con 10 m/s sobre una superficie horizontal lisa en cierto instante estalla y se fracciona en dos fragmentos de masas $2m$ y $3m$. Si la rapidez de $2m$ es 20 m/s y es perpendicular a la velocidad del otro fragmento, calcule la rapidez del fragmento.

Resolución

Inicialmente la granada se desplaza y debido a las fuerzas internas (producto de reacciones químicos) se fragmenta (estalla) así tenemos que, al explotar



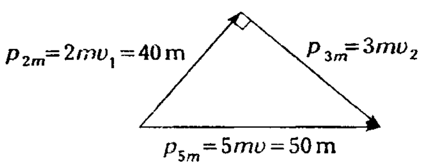
Como la superficie es lisa, entonces sobre la granada externamente no hay influencia de fuerzas, entonces la fuerza resultante es nula.

Por lo tanto, se conserva la cantidad de movimiento de la granada, es decir, es igual antes y después del fraccionamiento se verifica

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_F$$

$$\vec{p}_{5m} = \vec{p}_{2m} + \vec{p}_{3m}$$

Como las cantidades de movimiento no son paralelas, es conveniente plantear método geométrico. Con las cantidades de movimiento formamos un triángulo.



de donde deducimos que se trata de un triángulo rectángulo: 50 m, 40 m y 30 m.

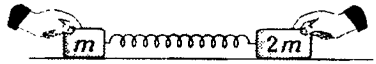
$$\therefore\ v_2 = 10 \text{ m/s}$$

Problema 4

Dos bloques de 1 y 2 kg están unidos a un resorte de constante de rigidez $K = 600$ N/m. Se comprime 10 cm al resorte y luego se le deja en libertad sobre el piso liso. ¿Qué máxima rapidez adquieren los bloques?

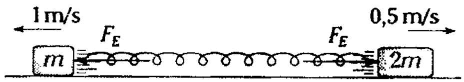
Resolución

Inicialmente el sistema está comprimido como se muestra



El sistema reposa, por lo tanto $\vec{p}_{0(\text{sistema})} = \vec{0}$

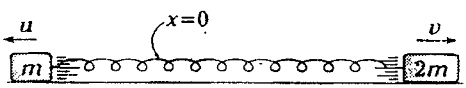
Luego, al soltarlo sobre cada bloque actúa la fuerza elástica y sus velocidades empiezan a incrementarse así



Durante todo este proceso la fuerza resultante sobre el sistema es nula. Luego

$$\vec{p}_{\text{sistema}} = 2m(+0,5) + m(-1) = 0$$

Sabemos que la rapidez de los bloques será máxima si sobre ellos la $\vec{F}_R = \vec{0}$, es decir, cuando $F_E = Kx = 0$. Esto se registra en el instante que el resorte ya no esté deformado.



También en este caso la fuerza resultante sobre el sistema es nula, por lo tanto se verifica

$$\therefore\ \vec{p}_{0(\text{sistema})} = \vec{p}_{F(\text{sistema})}$$

$$0 = Mv\hat{i} + m(-u\hat{i})$$

$$0 = 2mv\hat{i} - mu\hat{i}$$

$$\Rightarrow\ u = 2v \qquad \text{(I)}$$

Además, note que como no hay fuerza de rozamiento, y la energía mecánica del sistema bloques y resorte se conserva.

Hacemos el balance de energía del sistema

$$\Rightarrow \; E_{M_0} = E_{M_f}$$

$$E_{PE} = E_{C1} + E_{C2}$$

$$\frac{1}{2}Kx_0^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mv^2$$

$$600(0,1)^2 = 1(2v)^2 + 2v^2$$

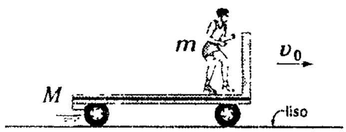
$$\Rightarrow \; v = 1\,\text{m/s}$$

En (I)

$$u = 2\ \text{m/s}$$

Problema 5

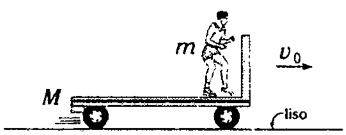
La figura muestra a un hombre de masa m descansando sobre un coche de masa $M = 7m$ que se mueve a razón de 12 m/s. Si el hombre empieza a correr hacia el extremo posterior del coche con 8 m/s respecto del coche, determine la nueva rapidez del coche.



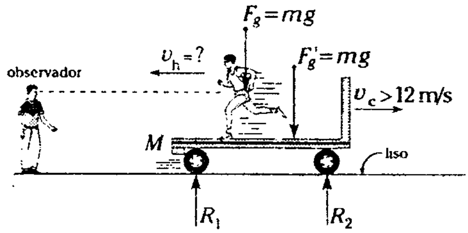
Resolución

Recuerde que, convencionalmente todo fenómeno se analiza respecto a un observador fijo en tierra.

- Inicialmente tanto el coche como el hombre avanzan a razón de $v_0 = 12$ m/s.



Cuando el hombre se desplaza con una velocidad $\vec{v}_h$ hacia la parte posterior del coche, en cada pisada impulsa al coche hacia la derecha de tal manera que el nuevo valor de la velocidad del coche será $\vec{v}_c > 12$ m/s .



Para determinar la velocidad $\vec{v}_c$, podemos analizar la cantidad de movimiento del sistema. ¿Cómo es la velocidad $\vec{v}_h$ del hombre respecto al observador fijo en tierra?

Por dato sabemos que la velocidad del hombre respecto al coche es 8 m/s hacia la izquierda, entonces

$$\vec{v}_{h/c} = \vec{v}_h - \vec{v}_c$$

$$-8\hat{i} = \vec{v}_h - (+v_c\hat{i})$$

$$\therefore \; \vec{v}_h = (v_c - 8)\hat{i}$$

Pero,

$$v_c > 12\,\text{m/s} \; \Rightarrow \; \vec{v}_h(\rightarrow)$$

Horizontalmente, sobre el sistema hombre y coche las fuerzas exteriores se equilibran entonces $\vec{F}_R = \vec{0}$; luego la cantidad de movimiento del sistema no varía, se conserva. Así podemos plantear

$$\sum \vec{p}_0 = \sum \vec{p}_F$$

$$\Rightarrow \; (M+m)(v_0\hat{i}) = Mv_c\hat{i} + m\vec{v}_h$$

$$\Rightarrow \; (7m+m)12\hat{i} = 7mv_c\hat{i} + m(v_c - 8)\hat{i}$$

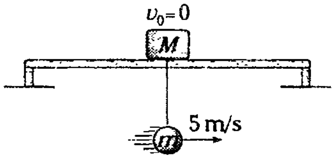
$$\Rightarrow \; 96\cancel{m} = 8\cancel{m}v_c - 8\cancel{m}$$

$$12 = v_c - 1$$

$$\therefore \; v_c = 13\,\text{m/s}$$

Problema 6

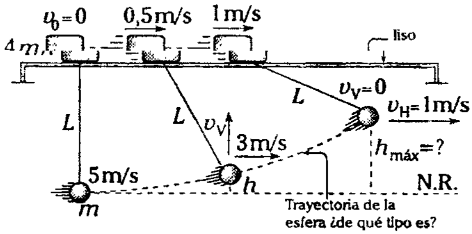
En la figura mostrada, despreciando la fuerza del viento y el rozamiento, ¿qué rapidez alcanza el bloque liso cuando la esfera alcanza su máxima altura? Se sabe que $M = 4m = 80$ g.



Resolución

En la figura note que $v_{mx} > v_{Mx}$. Mientras esto suceda, m al tener mayor rapidez que M seguirá elevándose hasta que $v_{mx} = v_{Mx}$.

Y como no hay rozamiento ni viento, la fuerza resultante en la horizontal es nula, entonces la cantidad de movimiento del sistema se conservará en la dirección horizontal. Grafiquemos la secuencia que sigue el sistema



Para el primer caso

$$\sum \vec{p}_{\text{horizontal}} = m(+5) + 4m(0) = +5m$$

Para el segundo caso

$$\sum \vec{p}_{\text{horizontal}} = 4m(0,5) + m(3) = +5m$$

Para el primer caso

$$\sum \vec{p}_{\text{horizontal}} = 4m(1) + m(1) = +5m$$

Entonces deducimos que m llega a su máxima altura cuando su rapidez respecto de $4m$ es cero y esto se logra cuando m adquiere $v_H = 1$ m/s. Luego, en ese instante la rapidez del bloque también será 1 m/s. ¿Cómo calculamos $h_{máx}$? Como sobre el sistema bloque, cuerda y esferita no actúan fuerzas del viento ni rozamiento, entonces afirmaremos que la energía mecánica del sistema se conserva.

$$\Rightarrow \quad E_{M_0} = E_{M_F}$$

$$\frac{1}{2}m(5)^2 + \cancel{4mg(L)} = \frac{1}{2}(4m)(1)^2 + \frac{1}{2}m(1)^2 + \cancel{4mg(L)} + mgh_{máx}$$

$$\frac{25}{2}\cancel{m} = \frac{5}{2}\cancel{m} + \cancel{m}(10)h_{máx}$$

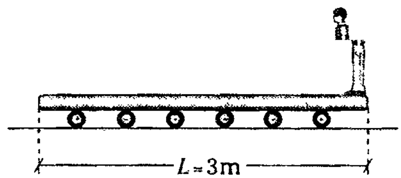
$$10 = 10h_{máx}$$

$$\therefore \quad h_{máx} = 1\text{ m}$$

Para el lector ¿Qué tipo de movimiento realizan luego $4m$ y m?

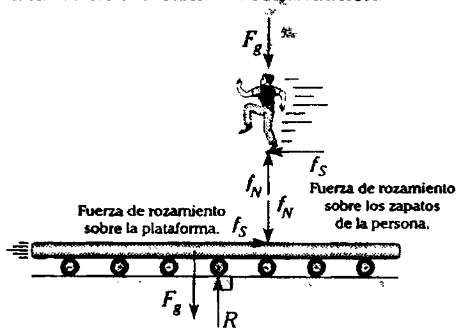
Problema 7

Una plataforma de 120 kg y 3 m de largo está en reposo sobre unos rieles. Sobre uno de los extremos de la plataforma se encuentra parada una persona de 60 kg. Si la persona camina sobre la plataforma y llega al otro extremo de esta, determine cuántos metros se desplaza la plataforma. (Desprecie el rozamiento entre la plataforma y los rieles)

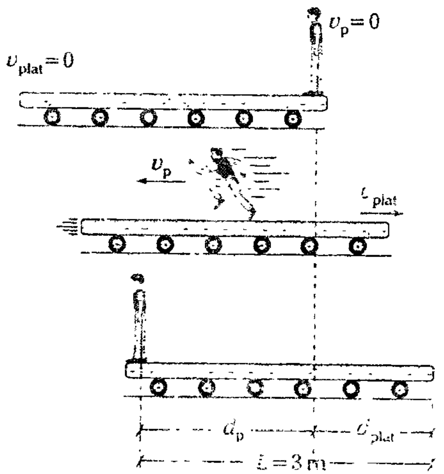


Resolución

Conforme la persona avanza hacia la izquierda, la plataforma se desplaza hacia la derecha por acción de la fuerza de rozamiento que se manifiesta sobre ella tal como indicamos a continuación:



Note que es la fuerza de rozamiento estático entre los zapatos de la persona y la plataforma, lo que hace posible que ésta se desplace hacia la derecha y aquella hacia la izquierda.
Lo que se desplaza la persona, visto por un observador en tierra, está relacionado con su velocidad.



Para este caso es conveniente conocer la relación de velocidades y luego ver la relación de desplazamientos.
Del ejemplo 5 podemos plantear que

$$m_p v_p = m_{plat}\, v_{plat}$$
$$60\, v_p = 120\, v_{plat}$$
$$\Rightarrow \quad v_p = 2v_{plat}$$

Este resultado implica que los desplazamientos de la persona (d_p) y de la plataforma (d_{plat}) están en la misma relación

$$d_p = 2d_{plat} \qquad \text{(I)}$$

Como del gráfico

$$d_p + d_{plat} = 3m \qquad \text{(II)}$$

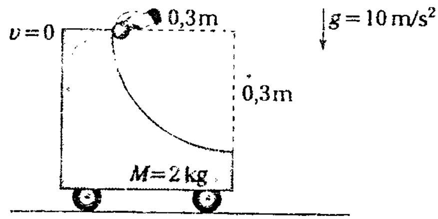
De (I) y (II) se obtiene que

$$d_{plat} = 1m$$

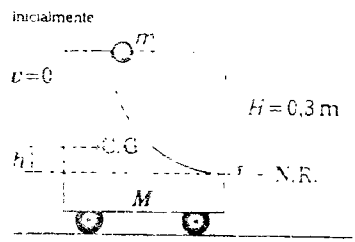
Este problema también se puede resolver *haciendo uso de centro de masa (C.M.) del* sistema, esto lo discutiremos más adelante.

Problema 8

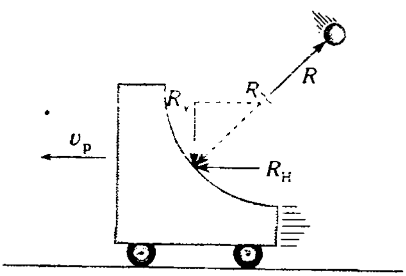
Se abandona una esfera de 1 kg sobre una plataforma, como se muestra en la figura. Determine el módulo de la velocidad de la esfera justo cuando está por abandonar la plataforma. (Desprecie todo tipo de rozamiento)



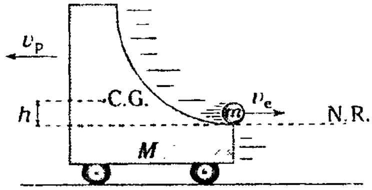
Resolución



Cuando se suelta la esfera, ésta desciende deslizando y sin rotar apoyándose sobre la superficie lisa de la plataforma
La componente R_H sobre la superficie de la plataforma provoca que esta se mueva hacia la izquierda



Cuando la esfera está por abandonar la plataforma se tiene



Justo cuando la esfera está por abandonar la plataforma su velocidad es horizontal. El valor de esta velocidad está relacionada con la energía cinética de la esfera en ese instante. Note que conforme la esfera desciende su energía potencial gravitatoria inicial se va transformando en energía cinética que manifiestan la esfera y la plataforma. Debido a que no existe rozamiento la energía del sistema esfera-plataforma se conserva y no se disipa en calor.

$$\Rightarrow \quad E_{M_f} = E_{M_0}$$

Con respecto al nivel de referencia señalado tenemos

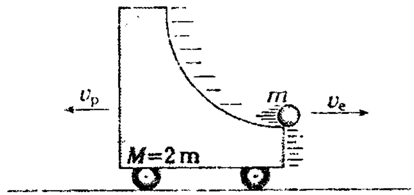
$$\frac{1}{2}mv_e^2 + \frac{1}{2}Mv_p^2 + \cancel{Mgh} = mgH + \cancel{Mgh}$$

donde Mgh es la energía potencial gravitatoria asociada a la plataforma.

$$\frac{1}{2}(1)v_e^2 + \frac{1}{2}(2)v_p^2 = 1(10)0{,}3$$

$$v_e^2 + 2v_p^2 = 6 \qquad \text{(I)}$$

Además, la velocidad de la esfera justo cuando está por abandonar la plataforma es horizontal. Esta velocidad está vinculada con la cantidad de movimiento que la esfera presenta en ese momento. Note que sobre el sistema, en todo instante, la fuerza resultante en la horizontal es nula, por lo tanto la cantidad de movimiento del sistema debe conservarse en esa dirección.



Análogamente al problema anterior se debe cumplir que

$$m_e v_e = Mv_p$$

$$\Rightarrow \quad v_e = 2v_p$$

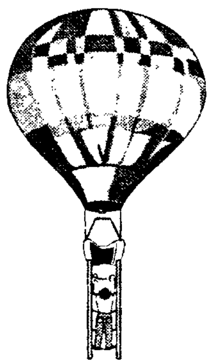
$$\therefore \quad v_e = 2v_p \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$v_e = 2 \text{ m/s}$$

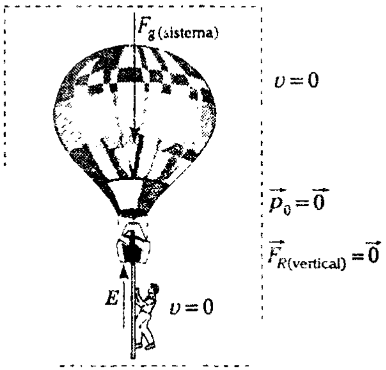
Problema 9

Un hombre de masa m se sujeta de una escalera de cuerdas atada de un globo de masa M. Inicialmente, el globo se encuentra estacionario respecto al piso. Si el hombre asciende por la escalera con una rapidez v (respecto de la escalera), ¿en qué dirección y con qué rapidez respecto del piso se moverá el globo?



Resolución

Inicialmente el sistema globo-persona está en reposo, la fuerza de gravedad se equilibra con una fuerza de empuje del aire $(\vec{E})$ que experimenta el globo. Luego, debido a que el sistema está en reposo su cantidad de movimiento inicialmente es nula.

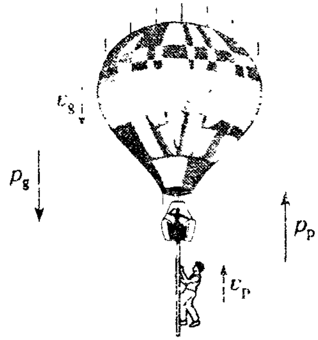


Cuando la persona asciende por la escalera, aún la fuerza resultante sobre el sistema es nula. Por lo tanto, la cantidad de movimiento del sistema no cambiará mientras la persona ascienda, es decir, la cantidad de movimiento del sistema continuará siendo nula.

Note que las fuerzas que surgen cuando la persona asciende, por ejemplo entre sus manos y la cuerda, son fuerzas internas (fuerza de rozamiento) y no provocan cambio en la cantidad de movimiento del sistema. Luego

$$\vec{p}_{\substack{\text{en}\\ \text{cualquier}\\ \text{instante}}}=\vec{p}_{\text{inicialmente}}$$

$$\therefore\ \vec{p}_{\substack{\text{en}\\ \text{cualquier}\\ \text{instante}}}=\vec{0} \qquad (I)$$



En (I)

$$\vec{p}_g+\vec{p}_p=\vec{0}$$

$$m_g\vec{v}_g+m_p\vec{v}_p=\vec{0}$$

$$M\vec{v}_g+m\vec{v}_p=\vec{0}$$

$$\vec{v}_g=-\frac{m}{M}\vec{v}_p \qquad (II)$$

donde $\vec{v}_g$ y $\vec{v}_p$ son las velocidades del globo y de la persona relativas al suelo, respectivamente. Observe que la velocidad del globo tiene dirección opuesta a la velocidad de la persona, si la persona asciende el globo desciende.

Ya que la escalera está sujeta al globo, la velocidad de la persona respecto de la escalera es igual a la velocidad de la persona respecto del globo. Si la persona asciende respecto del globo, entonces:

$$\vec{v}_{p/g}=\vec{v}_p-\vec{v}_g$$

$$v\hat{j}=\vec{v}_p-\left(-v_g\hat{j}\right)$$

$$v\hat{j}=\vec{v}_p+v_g\hat{j}$$

de donde

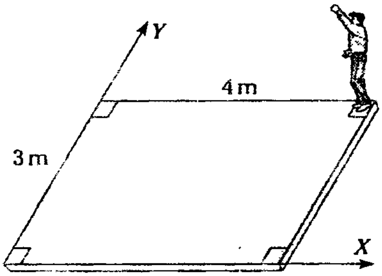
$$\vec{v}_p=\left(v-v_g\right)\hat{j} \qquad (III)$$

Reemplazando (III) en (II) y operando

$$v_g=\frac{m}{m+M}v$$

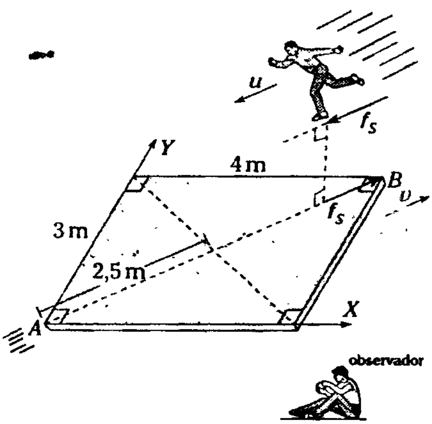
Problema 10

En la figura se muestra una tabla homogénea de masa $3M$ en reposo, sobre una superficie horizontal lisa. En una esquina de la tabla se encuentra un joven de masa M en reposo. Si el joven inicia su movimiento dirigiéndose al centro de la tabla, determine el desplazamiento que experimenta la tabla hasta el instante que el joven llega al centro de la misma.

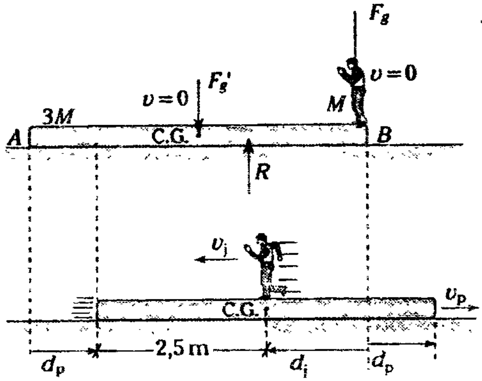


Resolución

Al caminar el joven sobre la tabla, la fuerza de rozamiento sobre esta hace que se desplace en dirección contraria al joven.



Desde otra vista, perfil paralelo a la diagonal (AB) de la tabla.



Se observa que horizontalmente la fuerza resultante sobre el sistema joven y plataforma es nula. Entonces, la cantidad de movimiento del sistema se conserva en dicha dirección.

Como en los problemas anteriores se cumple que

$$m_j v_j = m_p v_p$$

$$M v_j = (3M) v_p$$

$$\Rightarrow \quad v_j = 3v_p$$

La rapidez del joven es tres veces la rapidez de la plataforma, de esta manera el joven se desplaza 3 veces lo que se desplaza la plataforma.

$$d_j = 3d_p \qquad \text{(I)}$$

De la figura anterior

$$d_j + d_p + 2{,}5 = 5$$

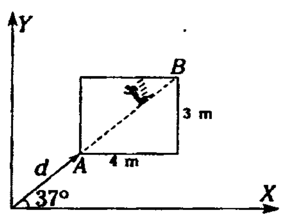
$$d_j + d_p = 2{,}5 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (I) en (II)

$$3d_p + d_p = 2{,}5$$

$$\therefore \quad d_p = 0{,}625 \text{ m}$$

Finalmente se tiene



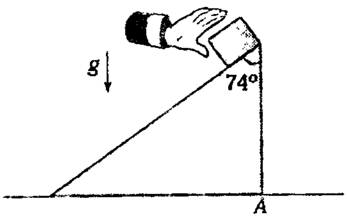
$d_p = 0{,}625\ \text{m}$; $\theta = 37°$

En componentes el desplazamiento quedaría por

$\vec{d}_p = (0{,}5\hat{i} + 0{,}375\hat{j})\text{m}$

Problema 11

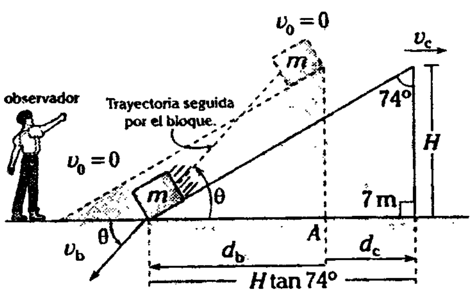
En la figura se muestra el instante en que se abandona un pequeño bloque sobre una cuña. Despreciando asperezas, ¿qué dirección tiene la velocidad del bloque cuando está por tocar la superficie horizontal?



Resolución

Una vez abandonado el bloque, empieza a descender apoyándose sobre la cuña y como ésta se apoya en el piso liso la cuña resbalará retrocediendo hacia la derecha.

Para un observador en tierra la trayectoria del bloque no es paralela al perfil de la cuña. Es como se indica en la figura:



Según la figura la dirección de la velocidad (respecto de la horizontal) es $180° + \theta$, calculemos θ.

Para determinar θ se requiere saber cuánto avanza horizontalmente el bloque y la cuña. Se puede comprobar que en la dirección horizontal no se manifiestan fuerzas externas como el viento ni el rozamiento, entonces, horizontalmente, la fuerza resultante sobre el sistema es nula.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\vec{p}_0}_{} = \underbrace{\vec{p}_F}_{}$$

$$m(0) + 7m(0) = m(-v_b\cos\theta) + 7mv_c$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{v_b\cos\theta}_{} = 7\underbrace{v_c}_{}$$

$$\frac{d_b}{\cancel{\Delta t}} = 7\left(\frac{d_b}{\cancel{\Delta t}}\right) \qquad \text{(I)}$$

De la figura anterior

$$\underbrace{d_b}_{} + d_c = H\underbrace{\tan 74°}_{}$$

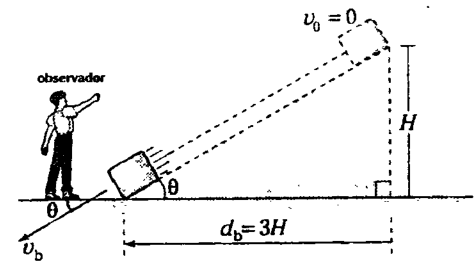
$$7d_c + d_c = H\left(\frac{24}{7}\right)$$

$$\therefore \quad d_c = \frac{3}{7}H$$

En (I)

$$d_b = 3H$$

El bloque visto por un observador en tierra, se mueve en la dirección mostrada



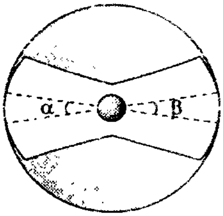
de donde, $\tan\theta = \dfrac{H}{3H}$

$$\theta \approx 18{,}5°$$

En consecuencia, la dirección de la velocidad del bloque respecto a la horizontal un instante antes de tocar el piso es 198,5°

Problema 12

En una esfera hueca se han efectuado dos orificios que se ven desde el centro de la esfera bajo los ángulos sólidos α y β, diferentes y pequeños. En el centro de la esfera explota una bola en muchos fragmentos de modo que la explosión es esféricamente simétrica y los fragmentos que impactan sobre la superficie interna de la esfera se adhieren. Halle la rapidez de la esfera luego de la explosión, si su masa es igual a la masa de la bola y la rapidez de los fragmentos es v.



Resolución

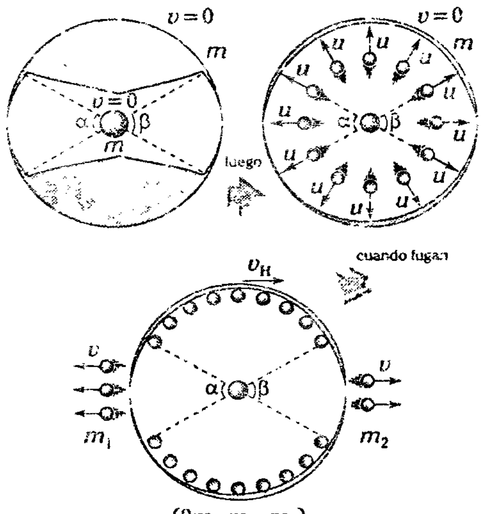
El hecho que la bola central realice una explosión esféricamente simétrica significa que las n partículas o fragmentos que se forman deben ser simétricos en masa y rapidez, porque deben impactar y adherirse en forma simultánea sobre la superficie interna de la esfera al realizar el mismo recorrido (radio de la esfera) en el mismo intervalo de tiempo.

No obstante ¿qué sucede en los agujeros de la esfera?

Por allí fugarán de la esfera algunos fragmentos. Por el agujero más grande (α) fugarán más partículas o fragmentos (m_1) y por ende mayor masa a los que fugan por el agujero pequeño (β). Por otro lado si $\alpha=\beta$, las masas que fugan serían iguales y la esfera quedaría en reposo.

¿Qué implicaría el hecho que por α fuguen más fragmentos ($\alpha>\beta$)? La acción de fuga hacia la izquierda provoca una reacción sobre la esfera de tal modo que la esfera resbalará hacia la derecha.

A partir del análisis planteado, diremos que el fenómeno sucede así



¿Por qué m_1 y m_2 tienen velocidades horizontales v?

En realidad estas velocidades son radiales a la esfera, pero nos dieron el dato que α y β son ángulos pequeñísimos, siendo

$$\alpha>\beta \Rightarrow m_1>m_2$$

Entonces m_1 y m_2 tienen velocidades prácticamente horizontales, porque α y β son ángulos pequeñísimos. Además, sobre el sistema esfera y bola, en todo momento la fuerza resultante exterior es cero, por lo tanto, la cantidad de movimiento del sistema se conserva y podemos plantear en la horizontal

$$\vec{p}_0=\vec{p}_F$$

$$0=(2m-m_1-m_2)v_H+m_2v+m_1(-v)$$

$$\therefore\ v_H=\frac{(m_1-m_2)v}{(2m-m_1-m_2)} \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos m_1 y m_2

Siendo la explosión con dispersión uniforme, entonces la cantidad de partículas que fugan es directamente proporcional al ángulo sólido.

Esbocemos el razonamiento, como todo el cascarón posee m kg y subtiende un ángulo sólido de 4π.

$$\Rightarrow \quad m \longrightarrow 4\pi$$

$$\text{para} \quad m_1 \longrightarrow \alpha$$

$$\therefore \quad m_1 = \left(\frac{m}{4\pi}\right)\alpha \qquad \text{(II)}$$

Análogamente, para el otro agujero

$$\Rightarrow \quad m \longrightarrow 4\pi$$

$$\text{para} \quad m_2 \longrightarrow \beta$$

$$\therefore \quad m_2 = \left(\frac{m}{4\pi}\right)\beta \qquad \text{(III)}$$

(II) y (III) en (I)

$$v_H = \left[\frac{\left(\frac{m}{4\pi}\right)\alpha - \left(\frac{m}{4\pi}\right)\beta}{2m - \left(\frac{m}{4\pi}\right)\alpha - \left(\frac{m}{4\pi}\right)\beta}\right]v$$

Simplificando tenemos

$$\therefore \quad v_H = \left[\frac{\alpha - \beta}{8\pi - (\alpha + \beta)}\right]v$$

Por dato α y β son ángulos sólidos pequeñísimos con respecto al ángulo sólido de la esfera (4π).

Si $4\pi >> (\alpha + \beta)$

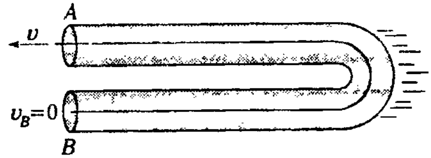
entonces $8\pi - (\alpha + \beta) \approx 8\pi$

Reemplazando esta aproximación en la ecuación obtenida

$$\Rightarrow \quad v_H \approx \left(\frac{\alpha - \beta}{8\pi}\right)v$$

Problema 13

Dentro de un tubo en U de masa M se encuentra un hilo de masa m. En el instante inicial el hilo y el tubo se mueven de tal manera que la rapidez del cabo del hilo A es igual a v y la rapidez del cabo B del hilo es nula. ¿Con qué rapidez se moverá el tubo cuando el hilo salga de él? El tubo no gira, se desprecia su radio de curvatura y la fricción, el tubo está en la superficie horizontal de una gran mesa lisa.

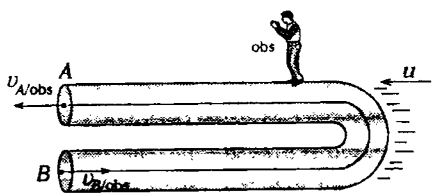


Resolución

¿Cómo se explica que siendo la cuerda inextensible, los puntos A y B del mismo hilo tengan diferente rapidez? ¿Es posible ello? Para el movimiento del hilo hay una composición de movimientos ya que el hilo se mueve y el tubo también; sin embargo respecto al tubo, la rapidez de A y B son iguales. Ahora señalemos el motivo por el cual el tubo se mueve.

- En la región curva el hilo ejerce presión hacia la izquierda y desplaza al tubo en esa dirección.

Entonces, en el estado inicial analizaremos lo que sucede al colocar un observador sobre el tubo



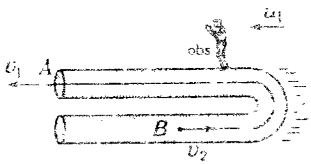
Para el observador situado en el tubo como el hilo es inextensible, entonces

$$v_{A/obs} = v_{B/obs}$$

$$v - u = u + 0$$

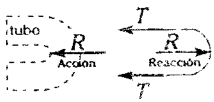
$$\therefore \quad u = \frac{v}{2} \qquad \text{(I)}$$

Luego, debido a la curvatura del tubo surge una reacción sobre el tubo y este cambia de velocidad, así



donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades de A y B respecto de tierra.

Analizando las reacciones sobre la parte curva del tubo y del hilo tendremos:



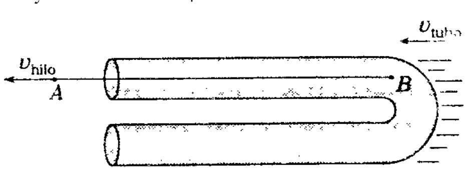
Para un observador sobre el tubo

$$v_{A/obs} = v_{B/obs}$$

$$v_1 - u_1 = u_1 + v_2$$

$$\therefore \quad u_1 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

¿Cuándo la v_A y v_B serán iguales? Esto se logra cuando A y B están en la misma horizontal, es decir en ese instante la reacción en la curvatura del tubo es cero, y allí $R = 0$, por ello a partir de ese momento tanto el tubo como el hilo tendrán velocidades constantes, la acción de uno ya no influye sobre el otro, entonces



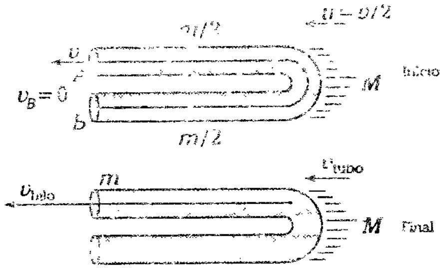
En este caso el hilo escapa del tubo y esto es *posible siempre que* $v_{hilo} > v_{tubo}$, *donde* v_{hilo} es la rapidez del hilo y v_{tubo} es la rapidez del tubo.

En el estado final calculemos u...

Como no hay rozamiento ni viento sobre el sistema tubo e hilo podemos afirmar que su cantidad de movimiento se conserva y planteamos

$$\vec{p}_o = \vec{p}_f$$

Y de ecuación I



$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}(-v) + M\left(-\frac{v}{2}\right) + \frac{m}{2}(0) = m(-v_{hilo}) + M(-v_{tubo})$$

$$\therefore \quad (M+m)\frac{v}{2} = Mv_{tubo} + mv_{hilo} \qquad \text{(II)}$$

Cuando el hilo desliza por el interior del tubo, podemos plantear para el sistema un balance de energía mecánica ya que no hay rozamiento.

$$E_{C_o} = E_{C_f}$$

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left(\frac{m}{2}\right)(0)^2 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}Mu^2 = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}mv_{hilo}^2 + \frac{1}{2}Mv_{tubo}^2$$

$$\left(\frac{m}{2}\right)v^2 + M\left(\frac{v}{2}\right)^2 = mv_{hilo}^2 + Mv_{tubo}^2$$

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)\frac{v^2}{2} = mv_{hilo}^2 + Mv_{tubo}^2 \qquad \text{(III)}$$

Resolviendo (II) y (III) deducimos que

$$\Rightarrow \quad v_{tubo} = \frac{v}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}}\right)$$

CENTRO DE MASA

Cuando analizamos el movimiento mecánico de un cuerpo hacemos uso de principios y leyes que facilitan su descripción. Sin embargo, esto tiende a complicarse cuando el análisis se hace para varios cuerpos (o partículas), a lo cual si recordamos lo hemos denominado **sistema**. Esta complejidad en el análisis que estamos planteando es porque cada cuerpo involucrado presenta para cada instante su respectiva posición, velocidad, aceleración y otros parámetros que caracterizan su movimiento; ahora preguntémonos: cuántas variables están involucradas en un sistema de ***n*** cuerpos ...Como comprenderán son muchas, si solo consideramos las tres más importantes mencionadas, tendríamos **3*n*** variables diferentes para cada instante.

Esta dificultad nos obliga a buscar otra forma de enfocar, el análisis del movimiento de muchos cuerpos, es ahí donde desempeña un papel muy importante el criterio del Centro de Masa (C.M.), como una alternativa para simplificar el análisis de sistemas.

Un cuerpo sólido puede ser considerado como un sistema constituido por ***n*** partículas. El cuerpo sólido y por consiguiente el sistema de partículas tiene un punto notable donde teóricamente se concentra toda la masa del cuerpo sólido o la masa del sistema de partículas; a este punto notable lo denominamos centro de masa (C.M.).

¿Qué es el centro de masa (C.M.)?

Es la representación puntual de un sistema de partículas (cuerpo físico) donde se considera concentrada toda la masa en consecuencia la ubicación del C.M de un sistema de partículas va a depender de la distribución de estas en el sistema físico o cuerpo.

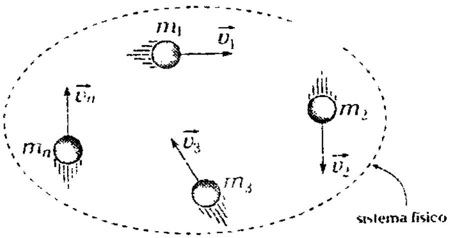
La importancia del estudio del Centro de Masa (C.M.) radica en lo siguiente:

- Su comportamiento físico es análogo al comportamiento del sistema.
- Su posición velocidad y aceleración corresponden a la posición, velocidad y aceleración del sistema.
- Cuando el sistema presenta traslación pura puede concentrarse aquí la acción de la fuerza resultante.

La noción de centro de masa (C.M) caracteriza la distribución de masas dentro del sistema físico, este criterio conserva su sentido independientemente del hecho de que este sistema este sometido a la acción de fuerzas o no. Planteada la importancia que tiene este punto notable (C.M.), el problema será hallar la velocidad y la posición del C.M. Para esto existen diferentes criterios y a continuación pasaremos a exponer uno de ellos.

VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA $(\vec{v}_{C.M.})$

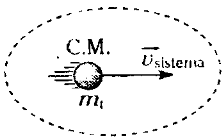
Para esto es importante tener en cuenta que la velocidad de un sistema de partículas es la velocidad del centro de masa (C.M.); en consecuencia consideremos



en donde se debe cumplir

$$\vec{p}_{sistema} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$$

Para un sistema puntual equivalente tenemos



Aquí se debe cumplir

$$\vec{p}_{sist.} = m_t\vec{v}_{sist}$$

Como se planteó la equivalencia, establecemos

$$\vec{p}_{sist.} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = m_t\vec{v}_{sist.}$$

de donde

$$\vec{v}_{sist} = \vec{v}_{C.M.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + .. + m_n\vec{v}_n}{m_t}$$

siendo m_t = masa total del sistema

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum m_i$$

$$\boxed{\vec{v}_{C.M.} = \vec{v}_{sist} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i}}$$

Esta es la velocidad de traslación del sistema.

Si esta es nula significa que el centro de masa está en reposo, mientras esto ocurra es posible que los elementos que conforman al sistema se estén moviendo.

POSICIÓN DEL CENTRO DE MASA $(\vec{r}_{C.M.})$

Por otro lado, acerca del estudio de la cinemática se sabe que

$$\vec{v}_{C.M.} = \frac{\Delta\vec{r}_{C.M.}}{\Delta t} = \frac{\text{cambio de posición del C.M.}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

Reemplazando además

$$\vec{v}_1 = \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}\ ;\ \vec{v}_2 = \frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}\ ; ...;\ \vec{v}_n = \frac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t}$$

En la fórmula anterior tendremos

$$\vec{v}_{C.M.} = \frac{\Delta\vec{r}_{C.M.}}{\Delta t} = \frac{m_1\dfrac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\dfrac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} + ... + m_n\dfrac{\Delta\vec{r}_n}{\Delta t}}{m_1 + m_2 + ... + m_n}$$

Simplificando

$$\Rightarrow\ \Delta\vec{r}_{C.M.} = \frac{m_1\Delta\vec{r}_1 + m_2\Delta\vec{r}_2 + ... + m_n\Delta\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + .. + m_n}$$

Como las masas son constantes, entonces podemos establecer la siguiente relación

$$m\Delta\vec{r}=\Delta(m\vec{r})$$

$$\Rightarrow\quad \Delta\vec{r}_{C.M.}=\frac{\Delta(m_1\vec{r}_1)+\Delta(m_2\vec{r}_2)+\ldots+\Delta(m_n\vec{r}_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$\Delta\vec{r}_{C.M.}=\frac{\Delta(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_n\vec{r}_n)}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

de donde obtenemos

$$\boxed{\vec{r}_{C.M.}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

Fórmula general

donde

$\vec{r}_{C.M.}$: Es la posición del centro de masa del sistema (C.M.) respecto al origen de un sistema de coordenadas.

$\vec{r}_1;\vec{r}_2;\ldots\vec{r}_n$: Son las posiciones de cada partícula respecto al origen de coordenadas.

$m_1+m_2+\ldots+m_n$: es la masa del sistema de coordenadas.

Esta fórmula se utiliza para una distribución discreta de partículas, ya sea en el plano (dos dimensiones) o en el espacio (tres dimensiones), y se puede plantear también por componentes.

En caso de dos dimensiones plantearemos

$$\boxed{\vec{x}_{C.M.}=\frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+\ldots+m_n\vec{x}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

y

$$\boxed{\vec{y}_{C.M.}=\frac{m_1\vec{y}_1+m_2\vec{y}_2+\ldots+m_n\vec{y}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

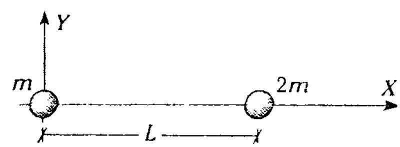
En el capítulo de Estática se plantearon unas ecuaciones para calcular el centro de gravedad (C.G.) de un sistema de partículas. Como vemos las expresiones para determinar el C.M. y el C.G. son similares y en ese sentido para la práctica se pueden usar sin ningún inconveniente, pero hay que resaltar que en el C.G. actúa la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$ mientras que en el C.M. actúa la fuerza resultante $(\vec{F}_R)$.

Nota

Luego de haber establecido las ecuaciones relacionadas con el C.M. notamos una gran semejanza con las ecuaciones relacionadas con el C.G., entonces surge la interrogante si serán iguales estos conceptos o estaremos refiriéndonos a lo mismo solo que de dos formas distintas. Lo que sucede es que al trabajar con las alturas pequeñas comparadas con el radio terrestre la aceleración de la gravedad se considera constante (en módulo y dirección). En estas condiciones decimos que en las proximidades a la superficie terrestre hay un campo gravitatorio homogeneo (uniforme) y en estas condiciones la posición del C.M. y C.G. coinciden. Si le indicamos que el C.G de la Luna está más próximo a la Tierra que su C.M., ¿sabe Ud. por qué?

Ejemplo 8

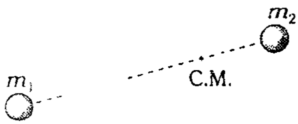
Para el sistema dado determine la posición del C.M.



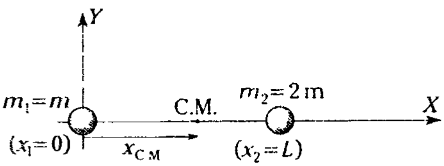
Resolución

Antes de hacer el cálculo, es conveniente que se tenga presente lo siguiente:

Para dos partículas su C.M. esta sobre la línea que une a las partículas, es decir



Según el planteamiento anterior, establecemos que el C.M del sistema está sobre el eje X y para calcularlo bosquejamos el sistema



Usando la ecuación

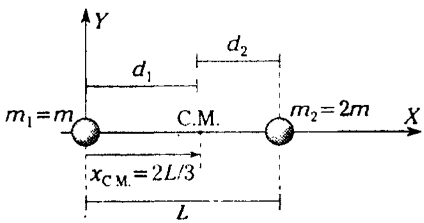
$$x_{C.M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Reemplazando datos

$$x_{C.M.} = \frac{m(0) + 2m(L)}{m + 2m}$$

$$x_{C.M} = \frac{2L}{3}$$

Según lo calculado podemos plantear



donde d_1 y d_2 representan las distancias del C.M. a cada uno de los cuerpos y verifican

$$d_1 = \frac{2L}{3} \text{ y } d_2 = \frac{L}{3}$$

Si formamos los productos m_1d_1 y m_2d_2 obtenemos

$$m_1d_1 = m\left(\frac{2L}{3}\right) \text{ y } m_2d_2 = 2m\left(\frac{L}{3}\right)$$

lo cual nos permite establecer que

$$\boxed{m_1d_1 = m_2d_2}$$

Propiedad

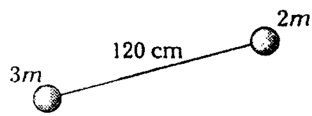
Para dos cuerpos (partículas) se verifica que

$$\boxed{m_1d_1 = m_2d_2} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}}$$

Estas expresiones nos permiten señalar que para un sistema de dos partículas el C.M. esta a una distancia de las partículas que es inversamente proporcional a las masas.

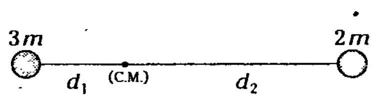
Ejemplo 9

Según la figura, ¿a qué distancia de $3m$ está el C.M.?



Resolución

Aquí se tiene el sistema: (C.M. más cercano a $3m$)



De la figura

$$d_1 + d_2 = 120 \text{ cm} \qquad \text{(I)}$$

Usando la propiedad anterior

$$3md_1 = 2md_2$$

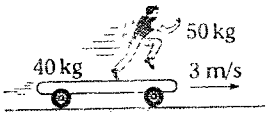
$$\therefore\ \frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{3} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II), se deduce que

$$d_1 = 48\ \text{cm} \quad \text{y} \quad d_2 = 72\ \text{cm}$$

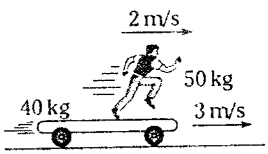
Ejemplo 10

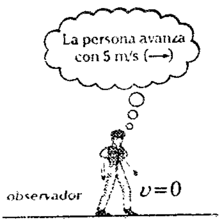
Se muestra una persona corriendo con 2 m/s respecto del tablón, determine la cantidad de movimiento de dicha persona del sistema (tablón y persona).

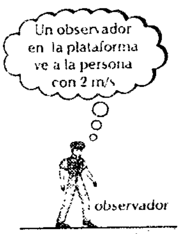


Resolución

Cuando se nos pida calcular la cantidad de movimiento de un cuerpo o un sistema y no se indica desde dónde, debe quedar sobreentendido que es desde un observador fijo (en reposo) en tierra. Para el caso dado tenemos







Según el observador fijo en tierra

$$\vec{p}_{\text{pers.}} = m_{\text{pers.}}\vec{v}_{\text{pers.}}$$

$$\vec{p}_{\text{pers.}} = 50(+5\hat{i})$$

$$\therefore\ \vec{p}_{\text{pers}} = +250\hat{i}\ \text{kg.m/s}$$

Además para el sistema (plataforma - persona) se tiene

$$\vec{p}_{\text{sist}} = \underbrace{\vec{p}_{\text{pers}}} + \vec{p}_{\text{plat}}$$

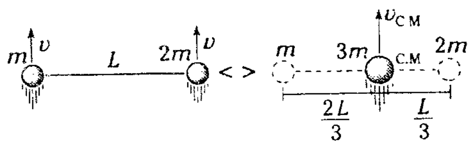
$$\vec{p}_{\text{sist}} = +250\hat{i} + M_{\text{plat}}\vec{v}_{\text{plat}}$$

$$\vec{p}_{\text{sist}} = +250\hat{i} + 40(+3\hat{i})$$

$$\therefore\ \vec{p}_{\text{sist}} = +370\hat{i}\ \text{kg.m/s}$$

Ejemplo 11

Dos partículas m y $2m$ unidas por una varilla de masa despreciable se desplazan así



El sistema se traslada con

$$\vec{p}_{\text{sist}} = m(v\hat{j}) + 2m(v\hat{j})$$

$$\Rightarrow\ \vec{p}_{\text{sist}} = 3m(v\hat{j})$$

El sistema equivalente tiene

$$\vec{p}_{\text{sist.}} = m_{\text{sist}}\vec{v}_{\text{C M}}$$

$$\vec{p}_{\text{sist.}} = (3\ \text{m})\vec{v}_{\text{C M}}$$

De esto deducimos que

$$\vec{v}_{\text{C M.}} = +v\hat{j}$$

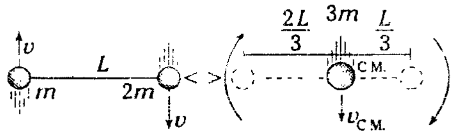
Solo hay movimiento de traslación, ¿por qué no hay movimiento de rotación? Porque si nos situamos en el C.M. la $\vec{v}$ de cada partícula respecto al C.M. es nula.

Propiedad

Cuando la velocidad de las partículas respecto al C.M. del sistema es nula; entonces el sistema no experimenta movimiento de rotación.

Ejemplo 12

Las partículas m y $2m$ unidas por una varilla de masa despreciable se mueven así



Del gráfico inicial

$$\vec{p}_{sist} = m(+v\hat{j}) + 2m(-v\hat{j}) = -mv\hat{j}$$

Del segundo gráfico equivalente

$$\vec{p}_{sist} = 3m\vec{v}_{C.M.}$$

$$-mv\hat{j} = 3m\vec{v}_{C.M.}$$

$$\therefore\ \vec{v}_{C.M.} = -\frac{v}{3}\hat{j}$$

En este caso el sistema se traslada y a la vez también gira en torno al centro de masa (C.M.)

¿Por qué gira en torno al centro de masa? Porque si teóricamente nos situamos en este punto asumimos

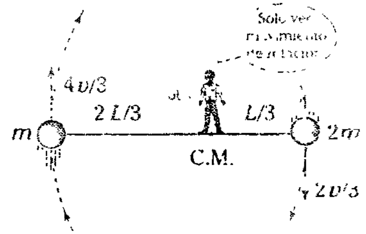
- La velocidad relativa de m respecto al C.M. será

$$\vec{v}_{m/C.M.} = \vec{v} - \vec{v}_{C.M.} = +v\hat{j} - \left(-\frac{v}{3}\hat{j}\right) = \frac{4}{3}v\hat{j}$$

La velocidad relativa de $2m$ respecto al C.M. será

$$\vec{v}_{2m/C.M.} = \vec{v}_{2m} - \vec{v}_{C.M.} = -v\hat{j} - \left(-\frac{v}{3}\hat{j}\right) = -\frac{2}{3}v\hat{j}$$

Entonces para nosotros situados en el C.M. observaremos la rotación así



La velocidad angular de la varilla es

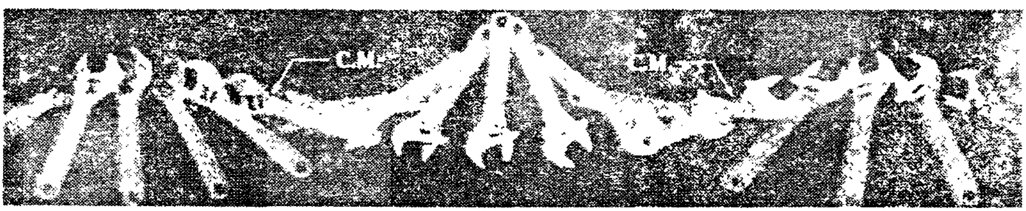
$$\omega = \frac{v_{tan}}{R} = \frac{4v/3}{2L/3} = \frac{2v/3}{L/3}$$

$$\therefore\ \omega = 2\frac{v}{L}$$

¡Todos los puntos de la varilla tienen igual velocidad angular!

Propiedad

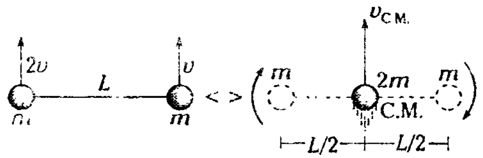
Cuando la velocidad de las partículas respecto al C.M. del sistema es diferente de cero, el sistema experimenta movimiento de rotación respecto al C.M.



La foto muestra a una llave que fue lanzada sobre una superficie horizontal casi lisa. Mientras su centro de masa (C.M.) experimenta M.R.U. sus otros puntos experimentan M.C.U. respecto al C.M.

Ejemplo 13

Ahora examinemos el caso siguiente:



En este caso

- Para el esquema inicial

$$\vec{p}_{sist.} = m(+2v\hat{j}) + m(+v\hat{j}) = 3mv\hat{j}$$

- Para el centro de masa

$$\vec{p}_{sist} = 2m\vec{v}_{C.M}$$

$$3\cancel{m}v\hat{j} = 2\cancel{m}\vec{v}_{C.M}$$

$$\therefore\ \vec{v}_{C.M} = \frac{3}{2}v\hat{j}$$

El sistema se traslada, pero además **¿rotará o no?** Existen dos formas de verificar

1. La forma directa que se aprecia en los casos anteriores (ver propiedades).

   Si $\vec{v}_{C.M} \neq \vec{v}_{\text{cada partícula}}$ (hay rotación)

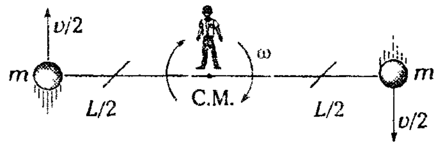
   Si $\vec{v}_{C.M} = \vec{v}_{\text{cada partícula}}$ (no hay rotación)

2. La forma indirecta, si colocamos un observador en el centro de masa (C.M.) y evaluamos la velocidad relativa de cada partícula respecto al C.M. en este caso es

$$\vec{v}_{m/C.M.} = \vec{v}_m - \vec{v}_{C.M} = (+2v\hat{j}) - \left(\frac{3}{2}v\hat{j}\right) = \frac{1}{2}v\hat{j}$$

$$\vec{v}_{m/C.M} = \vec{v}_m - \vec{v}_{C.M} = (+v\hat{j}) - \left(\frac{3}{2}v\hat{j}\right) = -\frac{1}{2}v\hat{j}$$

Por lo tanto, el sistema se traslada con $\frac{3}{2}v\hat{j}$ y a la vez gira en torno al centro de masa.



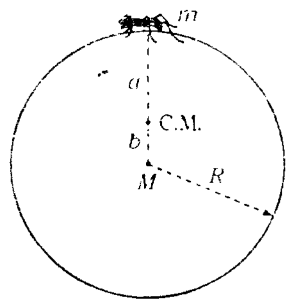
La varilla gira con $\omega = \frac{v/2}{L/2} = \frac{3v}{2L}$

Ejemplo 14

En un plano horizontal liso reposa un aro homogéneo de radio R y masa M. Sobre el aro reposa una hormiga. Si la hormiga de masa m se mueve a lo largo del aro. Determine si se conserva la cantidad de movimiento del sistema aro y hormiga y qué trayectoria describiría el centro del aro y la hormiga.

Resolución

Grafiquemos el instante inicial considerando a la hormiga con masa puntual m y al aro con masa M en su centro de masa.



En este caso tenemos el sistema $m-M$ al cual lo concentramos en el centro de masa C.M. ¿Pero, cómo ubicamos el C.M? Unimos M y m mediante una línea (radio). El C.M. está sobre esta línea y se sitúa más cerca de M ya que $M>m$.

$\therefore$ En la figura $a+b = \text{radio} = R$ (I)

También por propiedad anteriormente planteada para dos partículas:

$$ma = Mb$$

$$a = \left(\frac{M}{m}\right)b \text{ ; reemplazamos en (I)}$$

$$\left(\frac{M}{m}\right)b + b = R$$

$$b = \left(\frac{m}{M+m}\right)R$$

$$a = \left(\frac{M}{M+m}\right)R$$

Ahora como el centro de masa (C.M.) del sistema reposa en un plano liso y como sobre el sistema no hay fuerzas horizontales en ningun momento, entonces el centro de masa C.M. no experimentará desplazamiento horizontal, seguirá reposando $\vec{v}_{C.M} = \vec{0}$.

$$\underbrace{\vec{p}_{sist}} = m_{sist}.\vec{v}_{C.M}$$

$$\vec{0} = (M+m)\vec{v}_{C.M.}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{C.M} = \vec{0}$$

¡El sistema no se traslada!

Para saber qué trayectoria describe el centro del aro y la hormiga, resulta útil ubicarnos en el C.M. ¿por qué?

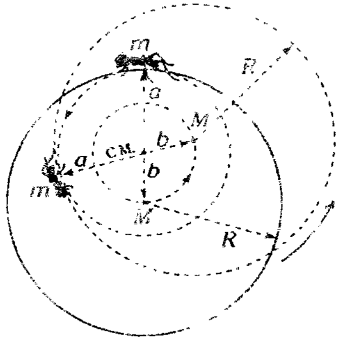
Porque respecto del centro de masa la hormiga gira con un radio

$$a = \left(\frac{M}{M+m}\right)R$$

y el aro con otro radio d

$$b = \left(\frac{m}{M+m}\right)R$$

Bosquejemos el movimiento de la hormiga y del aro respecto a tierra



¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema aro y hormiga?

El centro de masa no se desplaza, es fijo; alrededor de este punto giran el centro del aro y la hormiga con radios b y a respectivamente respecto al C.M. La cantidad de movimiento del sistema se conserva en todo instante, pues sobre el sistema $\vec{F}_R = \vec{0}$.

¿Qué trayectoria describe la hormiga?

Para un observador en el C.M. es un movimiento circunferencial de radio $a=MR(M+m)$, y para un observador en tierra también ya que $v_{C.M.}=0$.

¿Qué trayectoria describe el centro del aro?

Para un observador situado en el C.M. realiza movimiento circunferencial de radio: $b=mR/(M+m)$. Para un observador en tierra también ya que $v_{C.M.}=0$.

¿Qué aceleración experimenta el C.M.?

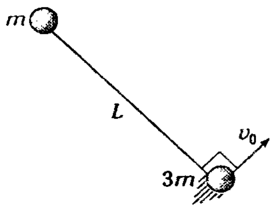
Por la Segunda Ley de Newton se sabe que

$$a_{C.M.} = \frac{F_R}{m_{sist.}} = 0$$

El sistema físico no acelera.

Problema 1

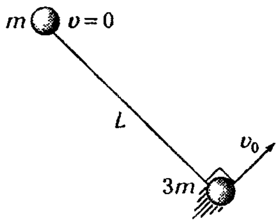
Dos esferas de masas m y $3m$ están unidas por un hilo de longitud L y se mueven por una superficie horizontal lisa que coincide con el plano de la figura. En cierto instante de tiempo, m queda inmóvil, mientras que $3m$ tiene una rapidez υ_0 perpendicular al hilo. Halle la tensión del hilo en dicho instante.



Resolución

Conociendo la característica del movimiento de cualquiera de las esferas podemos calcular el módulo de la fuerza de tensión ($\vec{F}$) en el hilo. Para ello resulta útil ubicarnos en el centro de masa (C.M.) porque respecto al C.M. solo apreciamos movimiento de rotación. (Esto ya fue examinado en los ejemplos anteriores donde: $\vec{\upsilon}_{\text{partículas}} \neq \vec{\upsilon}_{C.M}$

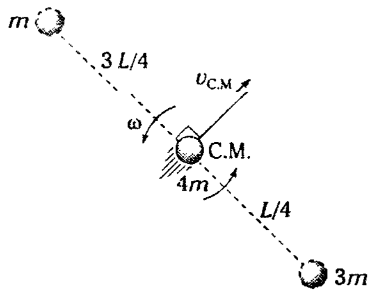
En el instante mostrado evaluamos



$$\vec{p}_{sist} = 3m\vec{\upsilon}_0 + m(0)$$

$$\vec{p}_{sist} = 3m\vec{\upsilon}_0 \qquad (I)$$

El sistema equivalente es el centro de masa del sistema (El C.M. divide al hilo en segmentos que están en la relación 3:1)



$$\vec{p}_{sist} = m_{sist}\vec{\upsilon}_{C.M} = 4m\vec{\upsilon}_{C.M}$$

$$\vec{p}_{sist} = 4m\vec{\upsilon}_{C.M} \qquad (II)$$

Igualando las relaciones (I) y (II)

$$3m\vec{\upsilon}_0 = 4m\vec{\upsilon}_{C.M}$$

$$\therefore \quad \upsilon_{C.M.} = \frac{3}{4}\upsilon_0$$

Al situarnos en el centro de masa (C.M.) del sistema observamos velocidades relativas de cada esfera con las cuales giran alrededor del C.M.

Velocidad relativa de $3m$ respecto del C.M.

$$\vec{\upsilon}_{3m/C.M} = \vec{\upsilon}_{3m} - \vec{\upsilon}_{C.M}$$

$$\vec{\upsilon}_{3m/C.M} = \upsilon_0 - \frac{3}{4}\upsilon_0 = \frac{1}{4}\upsilon_0$$

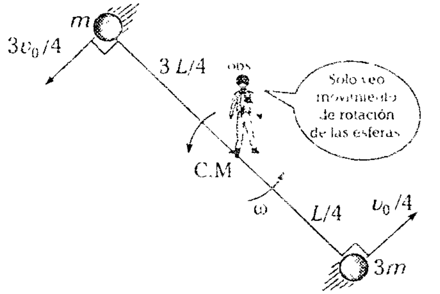
Velocidad relativa de m respecto del C.M.

$$\vec{\upsilon}_{m/C.M} = \vec{\upsilon}_m - \vec{\upsilon}_{C.M}$$

$$\vec{\upsilon}_{m/C.M} = 0 - \frac{3}{4}\upsilon_0 = (-)\frac{3}{4}\upsilon_0$$

Indica que es opuesta a $\vec{\upsilon}_{3m/C.M}$

Entonces, se aprecia la rotación desde el C.M. así

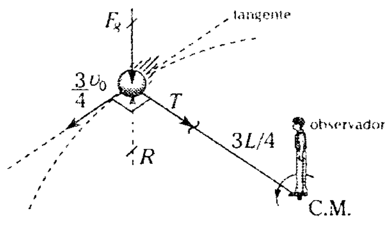


Para determinar con que rapidez angular (ω) rota la varilla respecto del C.M. planteamos en la esfera m.

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3\,v_0/4}{3L/4} = \frac{v_0}{L}$$

Note que m gira con un radio $\frac{3L}{4}$ y $3m$ gira con un radio $\frac{L}{4}$. Analicemos las fuerzas sobre m respecto al observador ubicado en el C.M.

Como la $F_R = 0$, para el sistema la $\vec{v}_{C.M}$ es constante, si el C.M. es un sistema de referencia inercial, entonces al hacer nuestro análisis no introducimos la fuerza inercial.



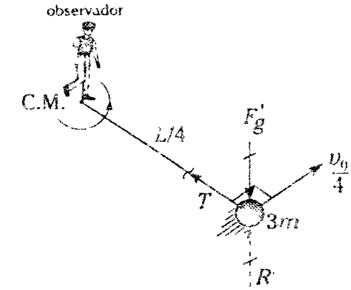
Como m realiza movimiento circunferencial, sobre ella planteamos $F_{cp} = ma_{cp}$.

$$T = m\frac{v_{\tan}^2}{R}$$

Reemplazando

$$T = m\frac{\left(\frac{3}{4}v_0\right)^2}{\left(\frac{3L}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{4}m\frac{v_0^2}{L}$$

Este resultado se puede comprobar analizando a $3m$, así:



En este caso, sobre $3m$ actúa

$$F_{cp} = 3ma_{cp}$$

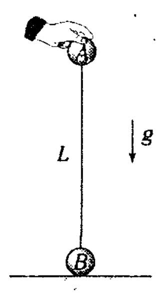
$$T = 3m\frac{v_{\tan}^2}{r}, \text{ reemplazando}$$

$$T = 3m\frac{\left(\frac{1}{4}v_0\right)^2}{\left(\frac{L}{4}\right)} = \frac{3}{4}m\frac{v_0^2}{L}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{3}{4}m\frac{v_0^2}{L}$$

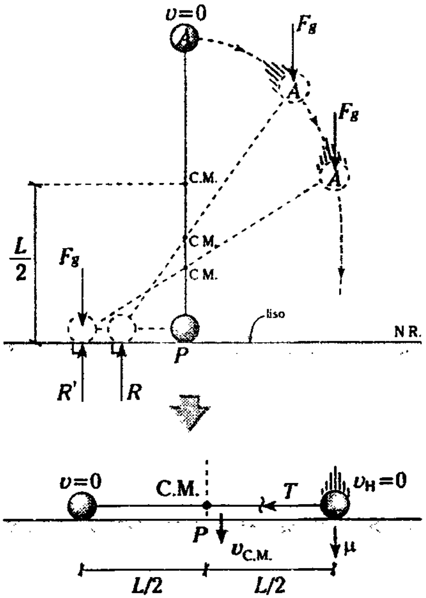
Problema 2

El sistema que se muestra está constituido por dos pequeñas esferas de igual masa m, unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Si el sistema es dejado en libertad donde no hay viento ni rozamiento, ¿qué tensión tiene la varilla en el instante que la esfera A llega al piso?



Resolución

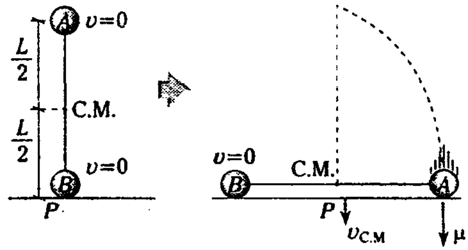
El sistema está constituido por cuerpos de masas iguales y puede ser representado en forma puntual por el centro de masa (C.M.), situado inicialmente a una altura $L/2$ respecto del piso. ¿Qué sucede cuando se suelta el sistema? Como horizontalmente no se lanza al sistema, ni tampoco hay fuerzas horizontales de rozamiento ni del viento, entonces el centro de masa (C.M.) no se trasladará horizontalmente, pero sí caerá verticalmente, debido a la atracción terrestre, tal como indica la figura siguiente



- Note que el C.M. desciende $L/2$ al caer al piso.
- También la esfera que siempre se apoya en el suelo al inicio su velocidad es nula, luego acelera porque sobre ella actúa la fuerza de compresión de la varilla. Pero, luego la varilla experimenta una tensión (fuerza interna opuesta) y la esfera empieza a desacelerar hasta que radialmente su velocidad se hace cero.

Debe darse cuenta que la fuerza de reacción del piso es una fuerza variable, desde $R = 2mg$ hasta $R \approx mg$, en el instante en que la otra esfera está por caer al suelo.

Calculemos la rapidez (μ) con la cual impacta A.



La esfera A cae al piso, como no hay rozamiento, hacemos balance de energía mecánica para el sistema

$$E_{M_0} = E_{M_F}$$

$$\Rightarrow \cancel{m_A} gL = \frac{1}{2} \cancel{m_A} u^2$$

$$\therefore \; u = \sqrt{2gL}$$

El centro de masa C.M. cae con $\upsilon_{C.M.}$ Note que A en t segundos recorre verticalmente L metros y el centro de masa (C.M.) en el mismo tiempo t recorre únicamente $L/2$ metros.

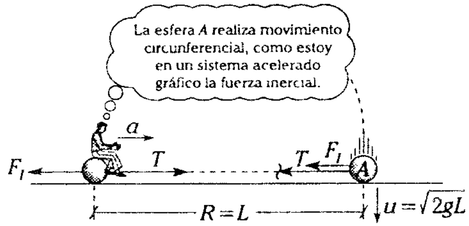
Podemos concluir que A es dos veces más rápido que el C.M.

$$\therefore \; u = 2\upsilon_{CM} \;\Rightarrow\; \upsilon_{CM} = \frac{\sqrt{2gL}}{2}$$

¿Qué trayectoria observamos de la esfera A? Depende del sistema o lugar desde donde analicemos su movimiento. Por ejemplo

- Si lo analizamos desde la esfera que está en el suelo, en todo momento veremos que A realiza un movimiento circunferencial de radio L.
- Si lo analizamos desde el centro de masa (C.M.) veremos que las esferas giran con radio $L/2$.
- Respecto de la superficie la esfera A sigue una trayectoria elíptica con ejes $2L$ y L. ¡Demuéstrelo!

Para calcular el módulo de la tensión en la varilla cuando A esta por impactar, es conveniente situarnos en la esfera que en todo instante se apoya en el piso, pues en el instante que A va a tocar el piso la rapidez de dicha esfera es nula. Porque la cantidad de movimiento del sistema en la horizontal en todo momento es nula pero, hay que tener en cuenta que en este momento actúa la tensión y origina una aceleración $a(\rightarrow)$ sobre la esfera donde se ubica al observador.



Por lo tanto, la esfera donde se ubica el observador esta en reposo respecto a él, entonces

$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$\Rightarrow \quad T=F_I$$

Pero, para el observador la esfera A un instante antes del choque está realizando movimiento circunferencial, entonces sobre ella actúa necesariamente una fuerza centrípeta dada por

$$F_{cp}=m_A a_{cp}$$

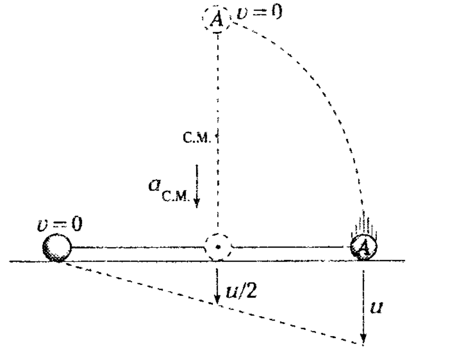
$$\Rightarrow \quad \underbrace{F_I+T}=m\frac{u^2}{R}=m\frac{\left(\sqrt{2gL}\right)^2}{L}$$

$$\cancel{2}T=\cancel{2}mg$$

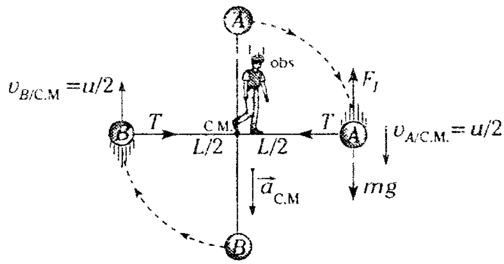
$$\therefore \quad T=mg$$

Otro método

También este problema se puede resolver colocando al observador en el centro de masa del sistema y solo verá movimiento circunferencial, para la esfera cuyo radio es $\frac{L}{2}$. Así tenemos



El observador situado en el C.M. verá a las esferas con velocidades relativas a él de la siguiente manera (considere las velocidades del anterior gráfico)



Graficamos las velocidades relativas de las esferas respecto al C.M.

Note que el observador tiene una $\vec{a}_{C.M.}(\downarrow)$, entonces se debe graficar la fuerza de inercia en sentido opuesto a la aceleración del C.M. $F_I(\uparrow)$.

Como el observador ve que A realiza movimiento circunferencial, entonces sobre A necesariamente actúa una fuerza centrípeta dada por

$$\underbrace{F_{cp}}=m_A a_{cp}$$

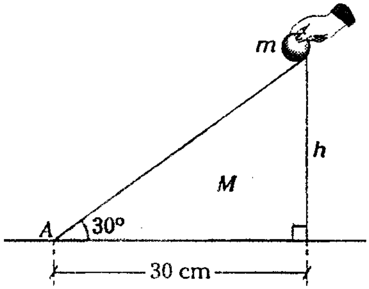
$$\Rightarrow \quad T=m\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{\frac{L}{2}}=\frac{mu^2}{2L}=\frac{m\left(\sqrt{2gL}\right)^2}{2L}$$

$$\therefore \quad T=mg$$

donde T es la tensión que experimenta la varilla un instante antes que la esfera A choque con el suelo.

Problema 3

Una cuña de masa uniforme $M = 4$ kg reposa en el plano horizontal liso. En su parte alta se coloca una pequeña esfera de masa $m = 1$ kg. Si se suelta la esferita, ¿cuánto avanzará el vértice A cuando la esfera llegue al piso? (Desprecie todo rozamiento).



Resolución

Después de soltar a la esfera, ella descenderá; mientras que la cuña irá retrocediendo. Inicialmente el centro de masas esta en reposo ($v_{C.M.} = 0$) y como sobre el sistema cuña y esfera horizontalmente no actúan fuerzas de rozamiento ni fuerzas del viento, entonces *horizontalmente el centro de masa del sistema no se mueve.* Concluimos que la velocidad del centro de masa en la horizontal será nula en todo instante, lo cual comprobamos con

$$\therefore\ \vec{v}_{C.M} = \frac{\sum \vec{p}_i}{m_t} = \frac{M(0)+m(0)}{M+m} = \vec{0}$$

Se sabe por Cinemática que

$$\text{velocidad} = \frac{\text{cambio de posición}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_{C.M.} = \frac{\Delta\vec{x}_{C.M.}}{\Delta t} = \vec{0}$$

de donde

$$\Delta\vec{x}_{C.M.} = 0$$

$$\Rightarrow\ \vec{x}_{F(C.M.)} - \vec{x}_{0(C.M.)} = \vec{0}$$

$$\therefore\ \vec{x}_{0(C.M.)} = \vec{x}_{F(C.M.)} \qquad \text{(I)}$$

Esto significa que la posición inicial del C.M. es igual a su posición final en la dirección horizontal. Con la relación (I) vamos a poder determinar el desplazamiento del vértice A, que en realidad viene a ser el desplazamiento de la cuña o de su centro de masa. ¿Cómo hallamos la posición del C.M. en los estados inicial y final?

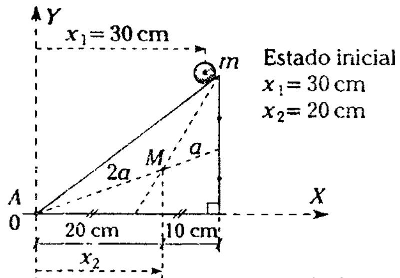
En el estado inicial, para calcular la posición necesitamos de coordenadas, tracemos el plano cartesiano de referencia, para usar

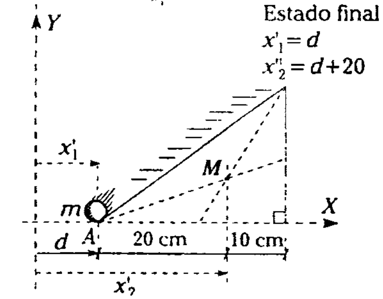
$$x_{C.M} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

donde

x_1 : abscisa del C.M. de m_1

x_2 : abscisa del C.M. de m_2





Del primer gráfico

$$x_{0(C.M.)} = \frac{M(20)+m(30)}{M+m} \qquad \text{(II)}$$

Al descender m, M retrocede d y en el estado final definimos para el segundo gráfico

$$x_{F(C.M.)} = \frac{M(d+20)+m(d)}{M+m} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

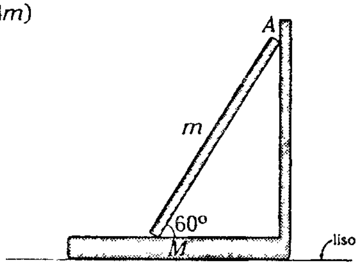
$$\frac{4(20)+1(30)}{\cancel{(M+m)}}=\frac{4(d+20)+1(d)}{\cancel{(M+m)}}$$

$$110=5d+80$$

$$\therefore\ d=6\,\text{cm}$$

Problema 4

El sistema mostrado $M+m$ es dejado en libertad y resbala sin rozamiento. ¿Cuánto se desplazó M cuando la barra homogénea se situó horizontalmente sobre M? La barra tiene 40 cm de longitud ($M=4m$)



Resolución

Después de abandonar el sistema m resbala y como se apoya sobre M, debido al contacto y presión en A, M se desplaza hacia la derecha y m resbala hasta colocarse horizontalmente.

Además, sobre el sistema, horizontalmente, no actúan fuerzas horizontales (no hay rozamiento y viento), entonces, como en centro de masa está en reposo, horizontalmente no se va a desplazar, como en el problema anterior para calcular el desplazamiento de M podemos plantear directamente que

$$\vec{x}_{0(C.M.)}=\vec{x}_{F(C.M.)} \qquad \text{(I)}$$

¡El C.M. no se desplaza horizontalmente!

Hallemos las posiciones del centro de masa en los estados inicial y final, trazando un plano de referencia cartesiano fijo, la finalidad de usar la ecuación demostrada de la posición del C.M.

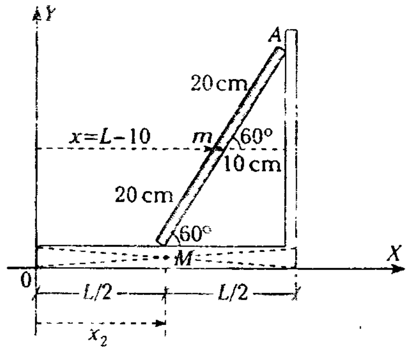
$$x_{C.M.}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

donde

x_1 : abscisa del C.M. de m

x_2 : abscisa del C.M. de M

- Para m: $x_1=L-10$
- Para M: $x_2=L/2$

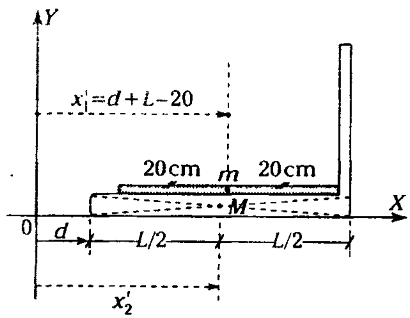


La posición inicial del C.M. del sistema es

$$x_{0(C.M.)}=\frac{M\left(\frac{L}{2}\right)+m(L-10)}{M+m} \qquad \text{(II)}$$

En el estado final

- Para m: $x_1'=d+L-20$
- Para M: $x_2'=d+\dfrac{L}{2}$



Cuando la barra se sitúa horizontalmente M avanza d y la posición del C.M. es

$$x_{F(C.M.)}=\frac{M\left(d+\frac{L}{2}\right)+m(d+L-10)}{M+m} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$\frac{M\left(\frac{L}{2}\right)+m(-10)}{\cancel{M+m}}=\frac{M\left(d+\frac{L}{2}\right)+m(d+L-20)}{\cancel{M+m}}$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right)+mL-m(10)=Md+M\left(\frac{L}{2}\right)+$$
$$+md+mL-20m$$

Simplificando

$$10m=(M+m)d$$

$$\Rightarrow\ d=\frac{10m}{M+m}=\frac{10m}{4m+m}=2$$

$$\therefore\ d=2\,\text{cm}$$

Problema 5

Una granada que cae verticalmente tiene una velocidad de $-60\hat{j}$ m/s cuando se halla a 2000 m de altura. En ese instante explota en dos fragmentos de igual masa, inmediatamente después de la explosión uno de los fragmentos se mueve con una velocidad de $-80\hat{j}$ m/s. Halle la posición del centro de masa del sistema 10 s después de la explosión ($g=10$ m/s^2).

Resolución

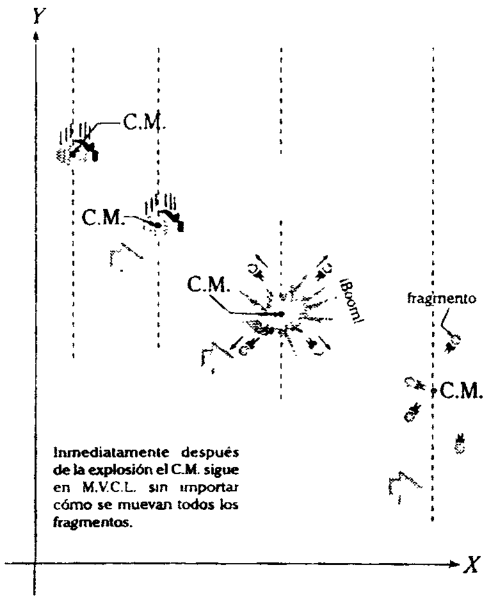
Mientras la granada va descendiendo realiza un M.V.C.L., entonces, podemos señalar que el C.M. de la granada estará descendiendo verticalmente mientras ella no explote (no se fraccione). Al explotar la granada se divide debido a las fuerzas internas, (debido a reacciones químicas) que por su intensidad se estima que es de varios miles de Newton. Si estas fuerzas internas las compararámos con la fuerza externa que actúa sobre ella $\left(\vec{F}_g\right)$; esta última resultaría ser muy pequeña, es decir $F_{\text{internas}}>>F_{g(\text{granada})}$

Con esto podemos concluir que la fuerza resultante en el instante de la explosión es muy pequeña $(F_R\approx 0)$ y la granada conservaría su cantidad de movimiento

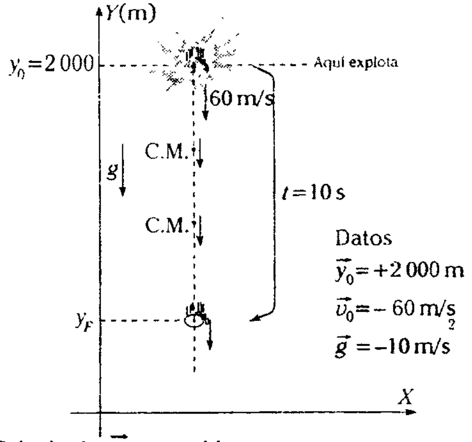
$$\left(\vec{p}_{\substack{\text{un instante antes}\\ \text{de la explosión}}}\approx\vec{p}_{\substack{\text{un instante después}\\ \text{de la explosión}}}\right)$$

Esta conclusión nos conduce a establecer que la velocidad del C.M. de la granada un instante antes y un instante después de la explosión es la misma, por consiguiente después de la explosión el C.M. seguirá descendiendo verticalmente en caída libre.

El comentario anterior lo esbozamos en un gráfico.



Para determinar la posición del C.M. de la granada luego de 10 s, usamos las ecuaciones de la caída libre vertical



Calculo de $\vec{y}_F$: consideramos

$$\vec{y}_F = \vec{y}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Reemplazando los datos

$$\Rightarrow \vec{y}_F = (+2\,000) + (-60)(10) + \frac{1}{2}(-10)(10)^2$$

$$\Rightarrow \vec{y}_F = +900 \text{ m}$$

En esta posición estará el C.M. de la granada luego de 10 s de su explosión independientemente de lo que pase con los fragmentos. A propósito no nos hemos preocupado de ellos.

El enunciado del problema plantea que la granada explota en dos fragmentos (cosa ideal, porque son muchos realmente). Veamos cómo se mueve el segundo fragmento inmediatamente después de la explosión, para ello usamos la conservación de la cantidad de movimiento para la granada ello se demostró.

$$\vec{P}_{\text{antes explosion}} = \vec{P}_{\text{después explosion}}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{granada}} = \vec{P}_{\text{frag(1)}} + \vec{P}_{\text{frag(2)}}$$

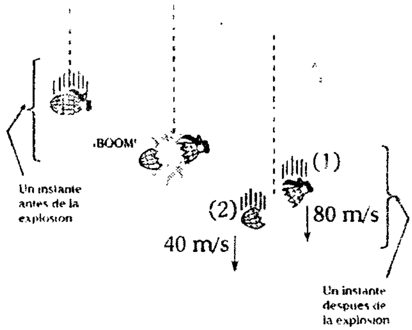
$$\Rightarrow \cancel{m}\vec{v}_{\text{granada}} = \frac{\cancel{m}}{2}\vec{v}_{\text{frag(1)}} + \frac{\cancel{m}}{2}\vec{v}_{\text{frag(2)}}$$

$$\Rightarrow -60\hat{j} = \frac{1}{2}(-80\hat{j}) + \frac{1}{2}\vec{v}_{\text{frag(2)}}$$

$$\therefore \vec{v}_{\text{frag(2)}} = -40\hat{j} \text{ m/s}$$

Este resultado significa que inmediatamente después de la explosión el segundo fragmento se moverá verticalmente hacia abajo.

En un gráfico proponemos .



Si el lector estudia la caída vertical de cada fragmento, luego puede calcular la posición del centro de masa (C.M.) al hacer uso de

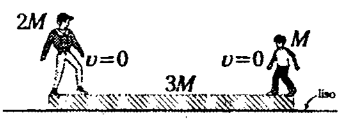
$$\vec{y}_{\text{C.M.}} = \frac{m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2}{m_1 + m_2}$$

Determine $\vec{y}_1$ y $\vec{y}_2$ luego de 10 s y verifique que

$$\vec{y}_{\text{C.M.}} = +900\hat{j} \text{ m}$$

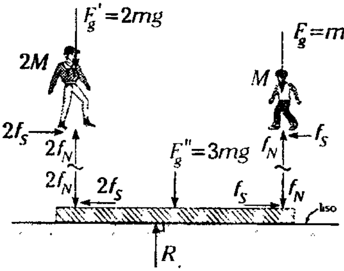
Problema 6

En la figura se muestra un niño y un joven sobre un tablón homogéneo de longitud L. Si ellos intercambian de posición ¿cuánto se desplazó hasta ese instante el tablón? (Considere los zapatos del niño y del joven del mismo material).



Resolución

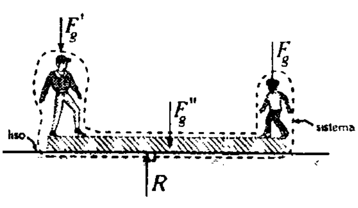
Cuando el joven y el niño deciden cambiar de posición sobre la suela de sus zapatos se manifestará la fuerza de rozamiento estático, como los zapatos son del mismo material (igual coeficiente de rozamiento). Entonces el módulo de dicha fuerza es proporcional a la acción normal que ejerzan sobre el tablón tal como lo indicamos a continuación.



Ahora uno se podrá preguntar y ¿para qué se hace el diagrama de cuerpo libre de los cuerpos participantes? Nuestra inquietud es saber qué pasa con el tablón mientras que el niño y el joven van cambiando de ubicación. En las condiciones dadas el tablón no se moverá verticalmente, pero horizontalmente sí. Esta afirmación es correcta ya que del diagrama de fuerzas, hay una fuerza resultante sobre el tablón hacia la izquierda.

$$F_{R(\text{tablón})}=2f_S-f_S=f_S$$

Está conclusión determinará que el tablón se desplace hacia la izquierda (←). Para determinar cuándo se desplaza, en este caso es conveniente hacer uso de la posición del C.M. del sistema.



$$F_{R(\text{sist})}=0$$

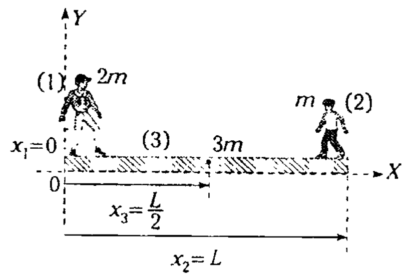
Este diagrama para el sistema nos muestra que la fuerza resultante sobre el mismo es nula, esto trae como consecuencia que el C.M. del sistema se quedará en todo instante en reposo (no se traslada) ya que al inicio todos los cuerpos estaban en reposo. Concluimos que

$$\vec{x}_{0(C.M.)}=\vec{x}_{F(C.M.)} \quad \text{(I)}$$

Para este caso es conveniente plantear

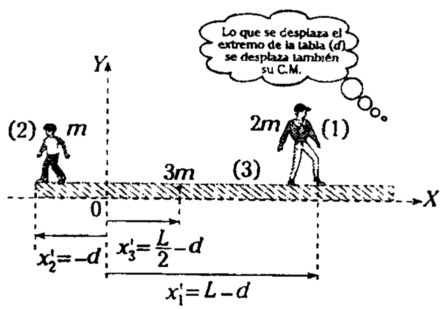
$$\vec{x}_{C.M}=\frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+m_3\vec{x}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

Asociamos un sistema de coordenadas.



Aquí tenemos

$$\vec{x}_{0(C.M.)}=\frac{2m(0)+m(L)+3m\left(\frac{L}{2}\right)}{2m+m+3m} \quad \text{(II)}$$



En este caso planteamos

$$\vec{x}_{F(CM)} = \frac{2m(L-d)+m(-d)-3m\left(\frac{L}{2}-d\right)}{2m+m+3m} \qquad \text{(III)}$$

Finalmente reemplazamos (II) y (III) en (I) quedando

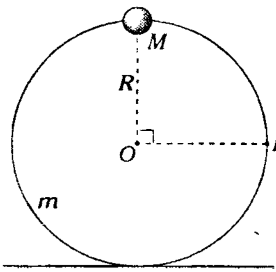
$$\cancel{m}L+3\cancel{m}\left(\frac{L}{2}\right)=2\cancel{m}(L-d)-\cancel{m}d+3\cancel{m}\left(\frac{L}{2}-d\right)$$

Efectuando

$$d=\frac{L}{6}$$

Problema 7

Un aro fino de masa m atraviesa una pequeña esfera metálica de masa M tal como indica la figura. Si ligeramente desviamos a M de su posición más alta, ¿cuánto recorrerá el aro cuando M llegue al punto P? (Considere $M=5m$ y $R=30$ cm. Desprecie el rozamiento).



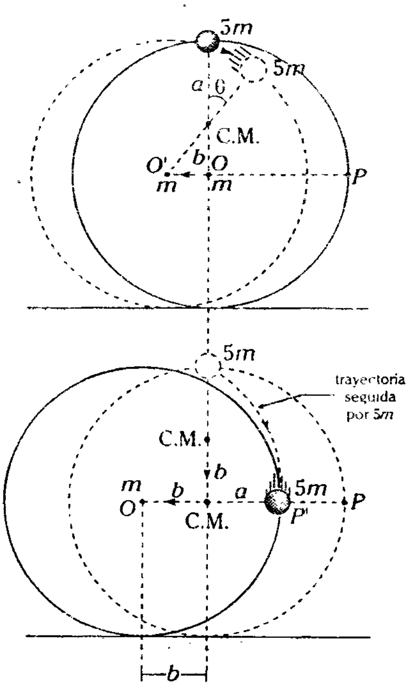
Resolución

Cuando la esfera M descienda sobre el aro, en todo instante el centro de masa (C.M.) del aro permanecerá a una distancia R del suelo, pero ¿Qué ocurre con el centro de masa del sistema? Como M desciende el C.M. del sistema descenderá verticalmente, pero no experimenta movimiento horizontal porque horizontalmente no hay fuerzas externas sobre el sistema; (se le recomienda al lector verificarlo).

De ahí afirmaremos que el C.M. del sistema no avanza horizontalmente:

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_{0(C.M.)}=\vec{x}_{F(C.M.)}$$

Una vez que a la esfera se le desvía ligeramente se tiene



Verticalmente el C.M. del sistema desciende b.

Aquí hay que tener en cuenta que mientras la pequeña esfera desciende sobre el aro el momento resultante respecto de su centro de masa es nulo, esto justifica el hecho que el aro sólo experimenta movimiento de traslación (no rueda).

A partir del diagrama anterior notamos que cuando la esfera desciende hasta P ella se desplaza verticalmente R y horizontalmente b mientras que el aro (su centro) se desplaza a hacia la izquierda.

¿Cómo hallamos b?
De la figura, el centro de masa del sistema (C.M.) divide al radio (R) en dos segmentos a y b, de modo que

$$a+b=R=30\text{ cm} \qquad \text{(I)}$$

También, considerando las masas (propiedad del C.M.)

$$5m(a)=m(b)$$

$$\therefore\ b=5a$$

En (I)

$$a+5a=30$$

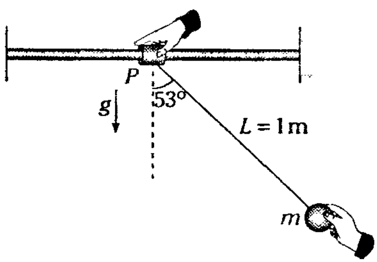
$$\therefore\ a=5\text{ cm}$$

$$\Rightarrow\ b=25\text{ cm}$$

Cuando la esfera llegue al punto P el aro habrá recorrido $b=25$ cm hacia la izquierda.

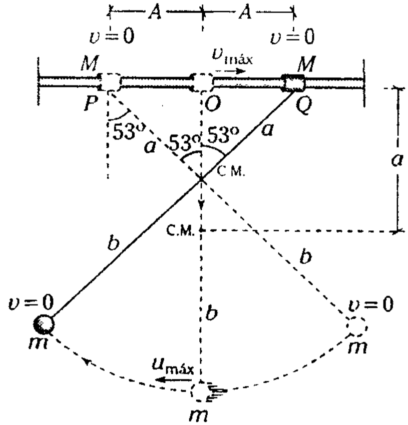
Problema 8

Se muestra el instante en que se suelta la bolita m y el collarín de masa $M=4m$. ¿Qué tipo de movimiento realizará el collarín? Determine la amplitud de las oscilaciones del collarín, si el hilo tiene 1 m de longitud (Desprecie el rozamiento)



Resolución

Se desea saber qué tipo de movimiento realiza el collarín y para esto es muy útil analizar el comportamiento del sistema, es decir cómo se mueve el centro de masa del sistema.



¿Qué ocurre al soltar el sistema (M+m)?
Sobre él actúa una fuerza resultante vertical hacia abajo, entonces el centro de masa se moverá verticalmente por acción de esta fuerza, que luego es anulada parcialmente cuando la bolita pasa por su posición más baja y luego esta sube desacelerando hasta detenerse.
El centro de masa (C.M.) del sistema ubicado sobre el hilo descenderá y luego ascenderá (oscila verticalmente), sin embargo horizontalmente, como no actúan fuerzas externas; el C.M. no experimenta movimiento horizontal.
También el collarín va a realizar un movimiento mecánico oscilatorio (va y viene) sobre la varilla siendo su rapidez máxima cuando la bolita pasa por su posición más baja y en los extremos es mínimo ($v=0$).
El C.M. del sistema divide al hilo en dos segmentos: a y b; según la propiedad del C.M. se cumple

$$Ma=mb\ \Rightarrow\ a=\left(\frac{m}{M}\right)b \qquad \text{(I)}$$

además

$$a+b=L=1 \qquad \text{(II)}$$

(I) en (II)

$$\left(\frac{m}{M}\right)b+b=L$$

$$\therefore\quad b=\left(\frac{M}{M+m}\right)L=\left(\frac{4m}{4m+m}\right)L$$

$$\Rightarrow\quad b=0{,}8\text{ m}\quad \text{y}\quad a=0{,}2\text{ m}$$

A partir del gráfico, el máximo alejamiento del collarín respecto de O viene a ser la amplitud (A), al respecto se ampliará en el capítulo de oscilaciones mecánicas.

En el triángulo rectángulo sombreado podemos calcular la amplitud (A) de las oscilaciones mecánicas del collarín.

$$A=a\operatorname{sen}53^{\circ}=0{,}2\left(\frac{4}{5}\right)$$

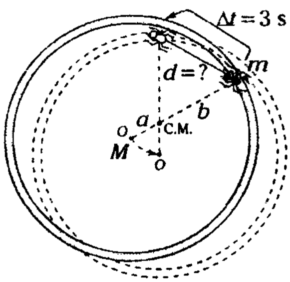
$$\therefore\quad A=0{,}16\text{ m}=16\text{ cm}$$

Problema 9

Sobre una mesa horizontal lisa se tiene un anillo homogéneo de masa M y radio R = 12 cm, inicialmente en reposo. Por la periferia del anillo comienza a caminar una pequeña araña de masa m con rapidez constante de π cm/s. Determine la distancia que logra avanzar la araña transcurridos 3 s. (Considere $M = 3m$).

Resolución

Esbocemos los estados inicial y final del sistema



El sistema inicialmente está en reposo y como la fuerza resultante sobre el sistema es nulo, entonces el CM del sistema se quedará en reposo ¡El C.M. del sistema no se traslada! pero la araña sí se mueve y lo hace en torno al C.M. del sistema, análogamente el centro del anillo gira en torno al C.M.

¿Qué movimiento hacen la araña y el C.M. del anillo? Realizan movimiento circunferencial de radios a y b con respecto al C.M. del sistema pero respecto de la superficie, la araña describe un movimiento curvilíneo.

Ahora determinemos a y b en función a R.

Por propiedad del C.M.

$$\underbrace{M}a=mb$$

$$3ma=mb$$

$$\therefore\quad b=3a$$

Pero

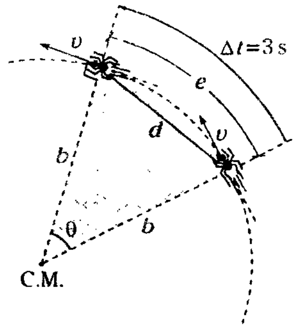
$$a+\underbrace{b}=R$$

$$a+3a=R\quad\Rightarrow\quad a=\frac{R}{4}$$

$$\therefore\quad b=\frac{3R}{4}$$

Con estos resultados la araña y el centro del anillo describirán un movimiento circunferencial en torno del C.M. cuyos radios son $3R/4$ y $R/4$ respectivamente.

Ahora, analicemos solo el movimiento de la araña respecto del C.M. del sistema.



Del triángulo sombreado se deduce

$$d=2b\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}=2\left(\frac{3}{4}R\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$d=\frac{3R}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\qquad\text{(I)}$$

Asimismo, la longitud del arco recorrido por la araña es

$$e=b\theta=\frac{3}{4}R(\theta)\qquad\text{(II)}$$

Pero, como la araña se traslada con rapidez constante $e = v\Delta t$.

Reemplazando en (II)

$$v\Delta t = \left(\frac{3R}{4}\right)\theta$$

$$\therefore\ \theta = \frac{4v\Delta t}{3R}$$

Reemplazando en (I)

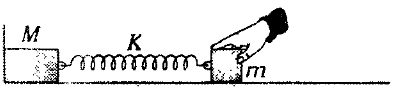
$$d = \frac{3R}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2v\Delta t}{3R}\right);\ \text{reemplazando datos:}$$

$$d = \frac{3(12)}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2(\pi)(3)}{3(12)}\right) = 18\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore\ d = 9\ \text{cm}$$

Problema 10

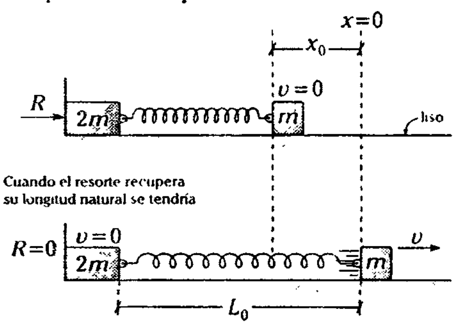
En la figura $M = 2m = 2$ kg, $K = 400$ N/m. Si el sistema carece de rozamiento y el resorte está comprimido 0,3 m, ¿qué velocidad adquiere el centro de masa en el instante que el resorte adquiere su máxima longitud al soltar m?



Resolución

Examinemos detenidamente una secuencia de situaciones por las cuales atraviesa el sistema.

Al soltar m, el resorte está comprimido $x_0 = 0,3$ m y la rapidez del bloque es $v = 0$.



Antes que se suelte a m, el bloque $2m$ presiona la pared, de ahí que hay reacción (R). Cuando el resorte va recuperando su longitud natural, el bloque $2m$ presiona con menor intensidad por ello la reacción (R) disminuye su valor y cuando el resorte recupera su longitud natural $2m$ deja de presionar la pared tal como se ha indicado.

Ahora calculemos u, como el sistema posee inicialmente $E_{PE} = \frac{1}{2}Kx_0^2 = 18$ J

Cuando el resorte recupera su longitud natural L_0 el bloque m posee $E_C = \frac{1}{2}mv^2$.

Como no hay rozamiento hacemos balance de energía.

$$\underbrace{E_{PE}} = \underbrace{E_C}$$

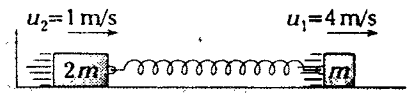
$$18 = \frac{1}{2}(1)v^2$$

$$\therefore\ v = 6\ \text{m/s}$$

En este instante la cantidad de movimiento del sistema es

$$\vec{p}_{sist} = 2m(0) + m(v) = 6\hat{i}\ \text{kg.m/s}$$

Por otro lado podemos plantear que esta cantidad de movimiento no cambiará ya que sobre el sistema se verifica que $F_R = 0$

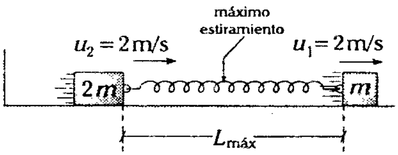


Se puede plantear

$$\vec{p}_{sist} = 2m(1) + m(4)$$

$$\vec{p}_{sist} = +6\hat{i}\ \text{kgm/s}$$

Se observa que la rapidez de m disminuye y la de $2m$ aumenta y el resorte comienza a estirarse, ¿hasta qué instante? Debe ser hasta el instante en que la rapidez de ambos bloques sean iguales o la velocidad relativa de uno respecto al otro sea nula.



A partir del instante en que el bloque $2m$ pierde contacto con la pared la $\vec{F}_R$ sobre el sistema es nula y entonces, en todo momento la cantidad de movimiento del sistema se mantendrá constante, por lo que

$$\vec{p}_{sist} = +6\hat{i} \text{ kg m/s}$$

$$m_{sist}\vec{v}_{C.M.} = +6\hat{i} \text{ kg m/s}$$

$$(m+2m)\vec{v}_{C.M.} = +6\hat{i} \text{ kg m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{C.M.} = 2\hat{i} \text{ m/s}$$

Esta velocidad no variará y no depende del estiramiento del resorte, ya que el movimiento del C.M. se da por inercia.

Problema 11

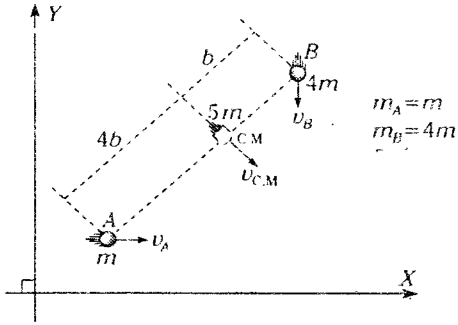
Dos partículas A y B se mueven en el plano XY con velocidades

$$\vec{v}_A = +3\hat{i} \text{ m/s} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = -4\hat{j} \text{ m/s}$$

Determine la energía cinética del sistema respecto del centro de masa. (Considere $m_B = 4m_A = 4$ g)

Resolución

Según lo planteado por el enunciado tenemos



El centro de masa del sistema tiene una velocidad

$$\vec{v}_{C.M.} = \frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}$$

entonces, la energía cinética del sistema (E_C) respecto al C.M. debido a cada partícula será

$$E_C = \underbrace{E_{C(A/C.M.)}}_{\substack{\text{energía cinética}\\ \text{de } A \text{ respecto del}\\ \text{C.M.}}} + \underbrace{E_{C(B/C.M.)}}_{\substack{\text{energía cinética}\\ \text{de } B \text{ respecto del}\\ \text{C.M.}}}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{m_A}{2}v_{A/C.M.}^2 + \frac{m_B}{2}v_{B/C.M.}^2 \qquad \text{(I)}$$

Ahora determinemos $v_{A/C.M.}$ y $v_{B/C.M.}$

Definimos la velocidad de A respecto al C.M.

$$\vec{v}_{A/C.M.} = \vec{v}_A - \vec{v}_{C.M.} = \vec{v}_A - \left(\frac{m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B}{m_A + m_B}\right)$$

$$\vec{v}_{A/C.M.} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\underbrace{\left(\vec{v}_A - \vec{v}_B\right)}_{\substack{\text{velocidad de } A\\ \text{respecto de } B}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A/C.M.} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{v}_{A/B} \qquad \text{(II)}$$

Análogamente se define la velocidad relativa de B respecto al C.M., así

$$\vec{v}_{B/C.M.}=\vec{v}_B-\vec{v}_{C.M.}=\vec{v}_B-\left(\frac{m_A\vec{v}_A+m_B\vec{v}_B}{m_A+m_B}\right)$$

$$\vec{v}_{B/C.M.}=\frac{m_A}{m_A+m_B}\underbrace{\left(\vec{v}_B-\vec{v}_A\right)}_{\substack{\text{velocidad de } B\\ \text{respecto de } A}}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_{B/C.M.}=\frac{m_A}{m_A+m_B}\vec{v}_{B/A}\qquad\text{(III)}$$

Reemplacemos (II) y (III) en (I)

$$E_C=\frac{m_A}{2}\left(\frac{m_B}{m_A+m_B}v_{A/B}\right)^2+\frac{m_B}{2}\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}v_{B/A}\right)^2$$

Recuerde que en módulo $v_{A/B}=v_{B/A}$, lo anterior se reduce a

$$\Rightarrow\ E_C=\frac{1}{2}\left(\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}\right)v_{A/B}^2\qquad\text{(IV)}$$

Como por dato

$m_A=1$ g, $m_B=4$ g, $\vec{v}_A=+3\hat{i}$ m/s y

$\vec{v}_B=-4\hat{j}$ m/s

reemplazando masas

$$\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}=\frac{1\text{g}.4\text{ g}}{1\text{g}+4\text{ g}}=\frac{4}{5}\text{g}=\frac{4}{5}\times10^{-3}\text{ kg}\quad\text{(V)}$$

La velocidad relativa de A respecto de B

$$\vec{v}_{A/B}=\vec{v}_A-\vec{v}_B=\left(+3\hat{i}\right)-\left(-4\hat{j}\right)=3\hat{i}+4\hat{j}$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{v}_{A/B}\right|=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{ m/s}\qquad\text{(VI)}$$

Finalmente, reemplazamos (V) y (VI) en (IV)

$$E_C=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\times10^{-3}\right)(5)^2=10^{-2}\text{ J}$$

$$\therefore\ E_C=10\text{ mJ}$$

Un aspecto adicional para el problema sería:
Analizando las expresiones (II), (III) y (IV), que se han demostrado para resolver el problema anterior, se concluye que cuando se tenga un sistema conformado por dos partículas y sus velocidades respecto del centro de masa (C.M.) son opuestas, ya que $\vec{v}_{A/B}=-\vec{v}_{A/B}$.
Al determinar sus cantidades de movimiento respecto del centro de masa se tendrá

$$\vec{p}_{A/C.M.}=m_A\vec{v}_{A/C.M.}$$

$$\vec{p}_{A/C.M.}=m_A\left(\frac{m_B}{m_A+m_B}\vec{v}_{A/B}\right)$$

$$\vec{p}_{A/C.M.}=\left(\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}\right)\vec{v}_{A/B}\qquad(1)$$

$$\vec{p}_{B/C.M.}=m_B\vec{v}_{B/C.M.}$$

$$\vec{p}_{B/C.M.}=m_B\left(\frac{m_A}{m_A+m_B}\vec{v}_{B/A}\right)$$

$$\vec{p}_{B/C.M.}=\left(\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}\right)\vec{v}_{B/A}\qquad(2)$$

Luego de comparar (1) y (2) se verifica que las cantidades de movimiento de las partículas, respecto del centro de masa son opuestas y de igual valor, es decir se verifica:

$$\vec{p}_{A/C.M.}=-\vec{p}_{B/C.M.}$$

A la expresión

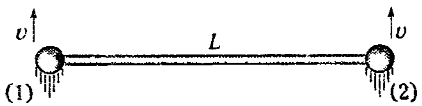
$$\frac{m_Am_B}{m_A+m_B}=\mu$$

se le denomina **masa reducida** del sistema conformado por dos partículas A y B, con ello la expresión (IV) queda expresada por

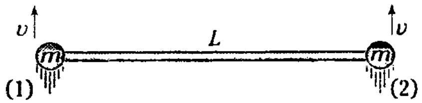
$$E_{C/C.M.}^{\text{sistema}}=\frac{1}{2}\mu v_{A/B}^2$$

Problema 12

En la figura se muestra dos pequeñas esferas, cada una de masa m, unidas a una varilla de masa despreciable. Determine la cantidad de movimiento del sistema y luego analice el sistema equivalente.



Resolución



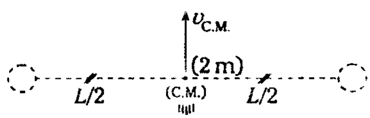
La masa de la varilla es despreciable $(m_v \approx 0)$.

Para este sistema compuesto por dos partículas:

$$\vec{p}_{sist} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{sist} = (2mv)\hat{j}$$

¿A qué es equivalente el resultado obtenido? La masa del sistema $2m$ se puede concentrar en forma puntual en el centro de masa (C.M.)



$$\vec{p}_{sist.} = (2m)\vec{v}_{C.M} = (2mv)\hat{j} \Rightarrow \vec{v}_{C.M} = v\hat{j}$$

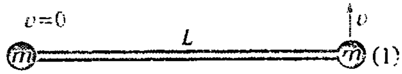
¿Qué significa este resultado?

Significa que el sistema centro de masa se traslada con la misma velocidad que las otras partículas, por consiguiente no hay rotación; el sistema solo se traslada.

Analicemos los siguientes casos

Caso I

Observe que el sistema anterior solo se traslada bien, pero... ¿Qué sucede con el sistema físico si una de las masa tiene $v = 0$? así.



Ahora la cantidad de movimiento del sistema es

$$\vec{p}_{sist.} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m(0) + mv\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{sist} = (mv)\hat{j}$$

Luego el sistema o centro de masa se moverá así:

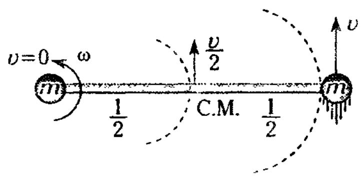
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{p}_{sist}}\; = \underbrace{m_{sist}}\,\vec{v}_{sist}$$

$$(mv)\hat{j} = (m+m)\,\vec{v}_{C.M}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{C.M} = \left(\frac{v}{2}\right)\hat{j} \Rightarrow \vec{v}_{C.M.} \neq \vec{v}_1$$

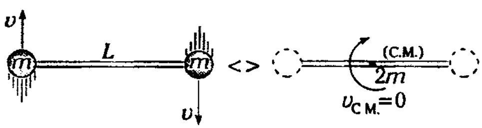
En consecuencia, el C.M. se traslada y también gira ¿en torno a quién?

En torno a la partícula que está estática o en reposo; por efectos de inercia unas tienden a quedarse y otras a moverse, así:



Caso II

Dos partículas iguales se mueven



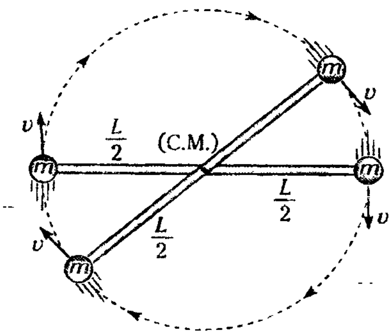
El sistema físico tiene

$$\underbrace{\vec{p}_{sist.}}=m\vec{v}+m(-\vec{v})=\vec{0}$$

$$\underbrace{m_{sist.}\ \vec{v}_{sist.}}=0$$

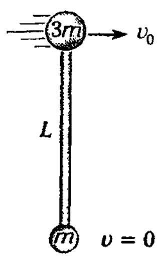
$$2m.\vec{v}_{C.M}=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{v}_{C.M}=\vec{0}$$

¿Qué significa este resultado? Significa que el sistema o centro de masa (C.M.) no se traslada, pero ... Las otras partículas sí se mueven. Pero como éstas equidistan del C.M. y tienen igual rapidez significa que las partículas giran en torno al centro de masa, así:



Caso III

Sobre una mesa lisa, en cierto instante la esfera de masa $3m$ adquiere una velocidad $\vec{v}_0$; mientras que la esfera de masa m, que está unida por una varilla de masa despreciable a $3m$, está en reposo. ¿Cómo observaremos al sistema posteriormente?



Siendo la varilla de masa despreciable para el sistema podemos plantear

$$\underbrace{\vec{p}_{sist}}=m(0)+3m(v_0\hat{i})$$

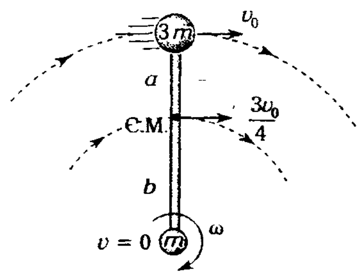
$$\underbrace{m_{sist}\ \vec{v}_{sist}}=3mv_0\hat{i}$$

$$(3m+m)\ \vec{v}_{C.M}=3mv_0\hat{i}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_{C.M.}=\frac{3}{4}v_0\hat{i}$$

Este resultado significa que el centro de masa (C.M.) o sistema se traslada con una velocidad diferente a la velocidad de cada una de las partículas (0 y v_0) esto quiere decir, que hay partículas en reposo y en movimiento y esto va a generar un efecto de rotación.

En consecuencia, el sistema físico se traslada y a la vez gira **¿en torno a quién gira?** Para el instante mostrado en la figura anterior debe ser respecto a la partícula de masa m, así



Donde, como la varilla tiene la misma velocidad angular entonces

- Para $3m$:

$$v_0=\omega(a+b) \qquad \text{(I)}$$

- Para C.M. ($4m$):

$$\frac{3}{4}v_0=\omega b \qquad \text{(II)}$$

Finalmente dividimos (I) entre (II)

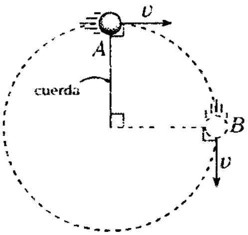
$$\frac{4}{3}=\frac{a+b}{b}$$

$$\Rightarrow\ b=3a$$

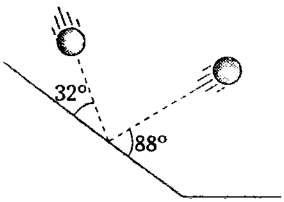
Problemas Propuestos

1. A una piedra de 2 kg, atada a una cuerda, se le hace girar en un plano vertical con una rapidez constante de $10\sqrt{2}$ m/s. Determine el valor del impulso que recibe la piedra entre A y B.

A) 45 N.s
B) 20 N.s
C) 30 N.s
D) 40 N.s
E) 50 N.s



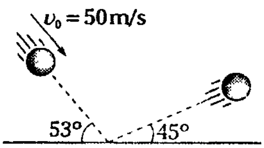
2. La figura muestra una pequeña esfera de 5 kg que es lanzada con una rapidez de 5 m/s sobre el plano inclinado. Si rebota con 3 m/s, determine el módulo del impulso sobre dicha esfera.



A) 20 N.s B) 24 N.s C) 28 N.s
D) 32 N.s E) 35 N.s

3. La canica de 20 g se desplaza sobre una superficie horizontal lisa dirigiéndose hacia una pared lisa y luego de chocar, sigue la trayectoria mostrada. ¿Qué módulo tiene el impulso que le ejerce la pared?

A) 2,5 N.s
B) 1,8 N.s
C) 1,4 N.s
D) 1,2 N.s
E) 1,0 N.s



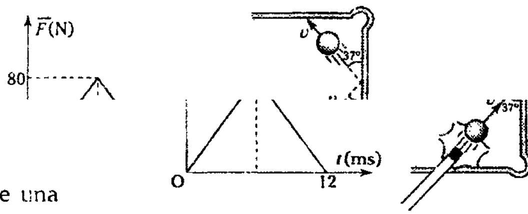
4. Un fusil automático dispara 600 balas por minuto y cada bala de 4 g sale con una rapidez de 500 m/s. ¿Con qué fuerza media retrocede el fusil mientras dispara?

A) 20 N B) 30 N C) 40 N
D) 50 N E) 60 N

5. Un chorro de agua de 6 cm^2 de sección transversal choca con una pared formando 60° con la normal y es despedida por ella sin perder rapidez. ¿Qué fuerza media actúa sobre la pared si la rapidez del chorro de agua es 12 m/s?

A) 105,3 N B) 97,8 N C) 86,4 N
D) 73,5 N E) 69,7 N

6. Una bola de billar de 200 g se impulsa con un bastón que le ejerce una fuerza que varía con el tiempo, tal como indica la gráfica $\vec{F}$ vs. t. Si la bola hace contacto con la banda durante 0,048 s despreciando el rozamiento, determine el módulo de la fuerza media que ejerce la banda sobre la bola.



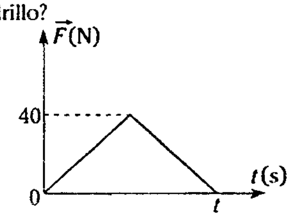
A) 10 N B) 12 N C) 15 N
D) 20 N E) 24 N

7. Una esfera de 2 kg cae al piso con 1 verticalmente y luego de un milésir segundo rebota con la misma ra verticalmente. ¿Qué fuerza media eje piso sobre la esfera durante el impacto

A) 40 kN B) 38 kN C) 40, 02
D) 35,02 kN E) 39,05

8. Un ladrillo de 4 kg reposa sobre una superficie horizontal lisa, si le ejercemos una fuerza horizontal que varía según la gráfica F vs. t. Si al dejar de aplicar la fuerza al ladrillo su rapidez es 30 m/s, ¿durante cuánto tiempo se empujó al ladrillo?

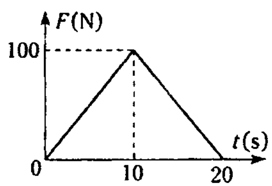
A) 10 s
B) 8 s
C) 6 s
D) 12 s
E) 15 s



9. Una manguera se sostiene como indica la figura descargando agua a partir del reposo, la cual luego de abrir la válvula es 0,60 kg/s a razón de 25 m/s. ¿Qué fuerza horizontal es necesaria ejercer para mantener la boquilla en reposo?

A) 10 N B) 15 N C) 20 N
D) 25 N E) 30 N

10. Sobre un bloque de 10 kg que reposa en una superficie horizontal áspera, cuyos coeficientes de rozamiento son $\mu_S = 0{,}80$ y $\mu_K = 0{,}68$, se aplica una fuerza horizontal F, cuyo módulo varía con el tiempo tal como indica la gráfica. ¿Qué rapidez tiene el bloque en t = 10 s?



A) 1,6 m/s B) 2,8 m/s C) 3,6 m/s
D) 4,4 m/s E) 5,0 m/s

11. Sobre un diccionario de 4 kg que reposa sobre una mesa lisa se aplica una fuerza horizontal cuyo valor varía con el tiempo, así

$$F = \begin{cases} 5t & ;0 \le t \le 2\text{s} \\ 10\ ; & t > 2\text{s} \end{cases}$$

¿Qué rapidez tendrá el diccionario en el instante t = 5 s?

A) 5 m/s B) 7 m/s C) 10 m/s
D) 11 m/s E) 15 m/s

12. Un ladrillo de masa m se encuentra en reposo sobre una superficie lisa horizontal. En el instante t_0 recibe bruscamente un impulso I_0 en dirección paralela a la superficie. En el instante t_1 recibe bruscamente otro impulso I_1 en la misma dirección. ¿Qué distancia habrá recorrido el ladrillo hasta el instante $t > t_1$?

A) $\frac{I_0}{m}(t-t_0)+\frac{I_1}{m}t$

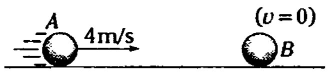
B) $\frac{I_0}{m}(t-t_0)+\frac{I_1}{m}(t-t_1)$

C) $\frac{I_0+I_1}{m}(t-t_1)+\frac{I_0}{m}t_1$

D) $\frac{I_0}{m}t+\frac{I_1}{m}t$

E) $\frac{I_0}{m}(t_1-t_0)+\frac{I_0+I_1}{m}(t-t_1)$

13. Si la bola A de 0,2 kg colisiona frontalmente con B en reposo, transmitiéndole un impulso de 0,2 $\hat{i}$ N.s; ¿qué velocidad tiene la bola A después de la colisión? Desprecie la fuerza de rozamiento.

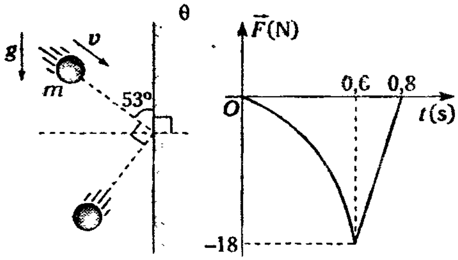


A) $-3\hat{i}$ m/s B) $4\hat{i}$ m/s C) $5\hat{i}$ m/s
D) $3\hat{i}$ m/s E) $-4\hat{i}$ m/s

14. Cuando el bloque que se muestra pasa por P empieza a actuar sobre él una fuerza que depende del tiempo según $\vec{F}=15t^2\,\hat{i}$ N. ¿Qué rapidez tendrá 4 s después?

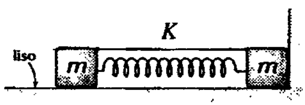
A) 80 m/s
B) 82 m/s
C) 86 m/s
D) 92 m/s
E) 90 m/s

15. En la figura se muestra el instante en que una canica de 0,2 kg va a impactar con un muro liso, al rebotar lo hace en la dirección que se indica y la fuerza que le ejerce la pared varía con el tiempo. Según la gráfica adjunta, ¿qué valor tiene $\vec{v}$?



A) 7, 33 m/s B) 6, 66 m/s C) 8, 16 m/s
D) 8,36 m/s E) 8,73 m/s

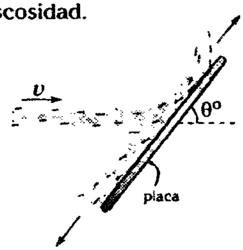
16. Se muestran dos bloques idénticos comprimiendo x_0 a un resorte. Si cortamos el hilo, calcule el módulo del impulso de la fuerza elástica hasta el instante en que el resorte empieza a estirarse



A) $\sqrt{mK}x_0$ B) $\sqrt{2mK}x_0$ C) $2\sqrt{mK}x_0$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{mK}x_0$ E) $\sqrt{\frac{mK}{2}}x_0$

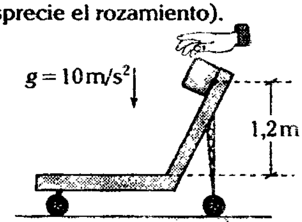
17. Un chorro de un fluido que tiene una sección transversal uniforme de área A y densidad ρ choca contra una placa lisa y fija con una rapidez v. Si el chorro se desvía en dos direcciones determine el módulo de la fuerza normal que le ejerce a la placa. Considere despreciable la viscosidad.

A) $\rho A v^2 \operatorname{sen}\theta$
B) $\rho A v^2$
C) $\rho A v \cos\theta$
D) $\rho A v \tan\theta$
E) $\rho A v \cot\theta$

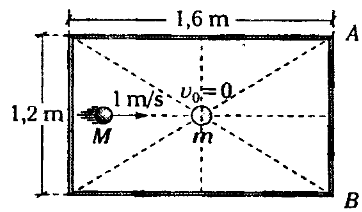


18. En la parte más alta de un coche de 4 kg que se encuentra en reposo, se suelta un bloque de 2 kg. Determine la rapidez que adquiere el coche cuando es abandonado por el bloque. (Desprecie el rozamiento).

A) 1 m/s
B) 2 m/s
C) 3 m/s
D) 4 m/s
E) 5 m/s



19. Sobre una mesa lisa y horizontal, la esfera de acero choca frontalmente con la esfera de vidrio en reposo, partiéndola en dos fragmentos de igual masa y que llegan simultáneamente a los puntos A y B. Determine la rapidez de los fragmentos, si después del choque la esfera de acero tiene una rapidez de 0,2 m/s. ($M=2m$)



A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

20. Un hombre de 80 kg salta a la orilla de un lago desde un bote y el salto le permite recorrer 2 m. ¿Qué distancia retrocede el bote de 32 kg? (Desprecie la resistencia del agua).

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

21. Un gimnasta de masa M lleva un balón de masa m, da una salto de inclinación θ con una rapidez υ. Cuando alcanza su máxima altura, lanza horizontalmente hacia atrás al balón con una rapidez relativa υ. Halle la rapidez del gimnasta inmediatamente después de lanzar el balón y en cuánto consigue aumentar el alcance del salto con dicho lanzamiento.

A) $\upsilon\cos\theta+\left(\dfrac{m}{M+m}\right)\upsilon\,;\,x=\dfrac{m}{M+m}\left(\dfrac{\upsilon^2\operatorname{sen}\theta}{g}\right)$

B) $\upsilon\operatorname{sen}\theta+\left(\dfrac{M}{m}\right)\upsilon\,;\,x=\dfrac{M}{m}\left(\dfrac{\upsilon^2\cos\theta}{g}\right)$

C) $\upsilon\cos\theta+\left(\dfrac{M}{m}\right)\upsilon\,;\,x=\dfrac{m}{M}\left(\dfrac{\upsilon^2\tan\theta}{g}\right)$

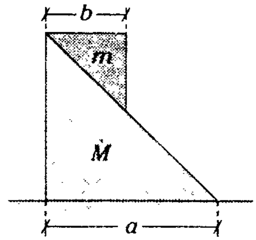
D) $\upsilon\operatorname{sen}\theta-\left(\dfrac{M+m}{m}\right)\upsilon\,;\,x=\dfrac{M}{m}\left(\dfrac{\upsilon^2\operatorname{sen}\theta}{g}\right)$

E) $\upsilon\tan\theta+\left(\dfrac{m}{M+m}\right)\upsilon\,;\,x=\dfrac{m}{M}\left(\dfrac{\upsilon^2\cos\theta}{g}\right)$

22. El bloque de 2 kg se desplaza con velocidad relativa 3 m/s sobre una plataforma de 7 kg que se mueve por inercia con υ=5 m/s y en cierto instante m frena sobre la plataforma ¿qué rapidez común adquiere el sistema a partir de dicho instante?

A) 4 m/s B) 6 m/s C) 8 m/s
D) 4,22 m/s E) 5,66 m/s

23. Dos prismas lisos de masas M y m tienen anchuras a y b, y descansan sobre un piso liso. Si se suelta el sistema a partir de la posición mostrada, determine cuánto retrocede el prisma M cuando el otro empieza a tocar el piso.



A) $\dfrac{M}{m}(a+b)$

B) $\dfrac{m}{M}(a+b)$

C) $\dfrac{m}{M+m}(a-b)$

D) $\dfrac{M}{m}(a-b)$

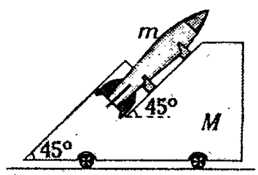
E) $\dfrac{m}{M}(a-b)$

24. Un astronauta de 80 kg va acercándose a la nave cósmica de 220 kg con ayuda de un cable de 30 m y masa despreciable. ¿Cuánto avanzarán el astronauta y la nave hasta unirse?

A) 11 m y 19 m B) 22 m y 8 m
C) 20 m y 10 m
D) 18 m y 12 m E) 23 m y 7 m

25. En la figura el sistema está en reposo y el carrito M puede desplazarse sin fricción. Si el cohete abandona el carrito, ¿con qué rapidez lo hará respecto a un observador fijo en tierra? (Considere M=3m y qué el carrito después del lanzamiento se mueve con 160 m/s).

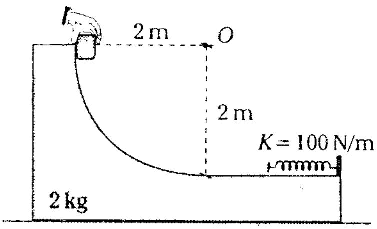
A) 300 m/s
B) 500 m/s
C) 650 m/s
D) 800 m/s
E) 900 m/s



26. Una rana de masa m está sentada en el extremo de una tabla de masa $M=4m$ y de 3 m de longitud. La tabla flota en la superficie de un lago. La rana salta a lo largo de la tabla formando 37° con la horizontal. ¿Con qué rapidez se debe impulsar la rana para que al dar el salto llegue al extremo opuesto de la tabla? (g = 10 m/s^2)

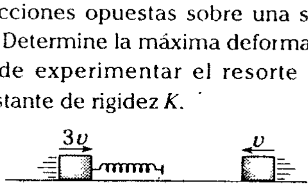
A) 2 m/s B) 3 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 6 m/s

27. Un bloque de 1 kg se suelta sobre una plataforma que presenta la forma mostrada, de 2 kg. Determine la rapidez del bloque cuando el resorte ideal experimenta una deformación de 40 cm. (Desprecie el rozamiento y g= 10 m/s^2).



A) 2 m/s B) 3 m/s C) 4 m/s
D) 5 m/s E) 6 m/s

28. Dos bloques de masas iguales se mueven en direcciones opuestas sobre una superficie lisa. Determine la máxima deformación que puede experimentar el resorte ideal de constante de rigidez K.



A) $\upsilon\sqrt{\frac{m}{K}}$ B) $\upsilon\sqrt{\frac{2m}{K}}$ C) $2\upsilon\sqrt{\frac{2m}{K}}$

D) $\upsilon\sqrt{\frac{m}{2K}}$ E) $3\upsilon\sqrt{\frac{m}{K}}$

29. Una granada es lanzada verticalmente hacia arriba; en el instante que la granada tiene una velocidad de $3{,}5\hat{j}$ m/s explota en dos fragmentos cuya relación de masas es de 2 a 1, de tal forma que debido a la explosión la de mayor masa adquiere velocidad nula. Si ambas están atadas a un hilo inextensible de 21/8 m de longitud, determine luego de cuántos segundos después de la explosión el hilo se tensa. (Desprecie la dimensión de la granada respecto a la longitud del hilo, g = 10 m/s^2)

A) 0,25 s B) 0,50 s C) 0,75 s
D) 1,00 s E) 1,25 s

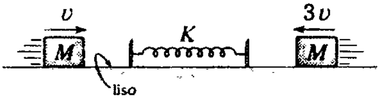
30. Una granada es lanzada desde la superficie con una velocidad $\vec{\upsilon}=(20\hat{i}+30\hat{j})$ m/s . Si en su punto más alto explota y se divide en dos fragmentos, cuyas masas están en la relacion de 1 a 3, el de mayor masa regresa al lugar de lanzamiento. ¿A qué distancia del lugar de lanzamiento impacta el otro fragmento? (g=10 m/s^2)

A) 0,52 km B) 0,68 km C) 0,88 km
D) 0,48 km E) 0,36 km

31. Una granada es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez de 50 m/s. Pasados 2 s, explota, dividiéndose en tres fragmentos de igual masa. Si dos de ellos inmediatamente después de la explosión tienen velocidades iguales a $-10\hat{j}$ m/s y $(\upsilon\hat{i}+60\hat{j})$ m/s, ¿qué altura máxima alcanza el tercer fragmento respecto del lugar de lanzamiento? (Considere g=10 m/s^2)

A) 150 m B) 160 m C) 170 m
D) 175 m E) 180 m

32. En la figura se muestra cómo dos bloques de igual masa (M = 4 kg) se acercan a un resorte ideal sin deformar. Cuando los bloques presenten su menor separación, la energía almacenada por el resorte es (v= 3m/s).

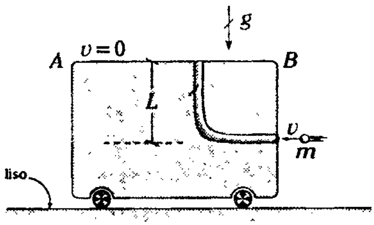


A) 10 J B) 12 J C) 16 J
D) 18 J E) 20 J

33. Un estudiante de 60 kg trota con una rapidez de 8 m/s y alcanza a una plataforma de 40 kg que avanza en la misma dirección con 2 m/s. El estudiante al saltar sobre la plataforma, hace que la energía cinética de esta varíe en

A) 327,25 J B) 347,2 J C) 367,2 J
D) 372, 25 J E) 547,2 J

34. Se muestra el instante en que una canica de masa m hace su ingreso a un canal liso practicado en un coche de masa M en reposo. ¿Cuál es el menor valor de $\vec{v}$ para que la canica alcance una altura $L/2$ respecto de AB?

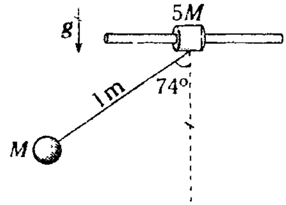


A) $\sqrt{3gL\left(1+\frac{m}{2M}\right)}$ B) $\sqrt{gL\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$

C) $\sqrt{2gL\left(1+\frac{m}{M}\right)}$

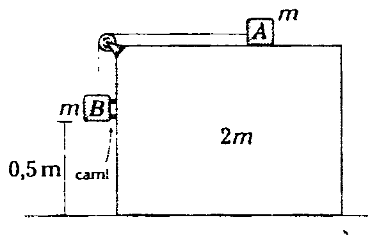
D) $\sqrt{3gL\left(1+\frac{m}{M}\right)}$ E) $\sqrt{\frac{3}{2}gL\left(1+\frac{2m}{M}\right)}$

35. En la figura se muestra el instante en que un sistema es abandonado. ¿Cuánto recorre el collarín cuando la esfera ha dado dos oscilaciones? (Desprecie todo rozamiento)



A) 1,22 m B) 1,28 m C) 1,36 m
D) 1,44 m E) 1,56 m

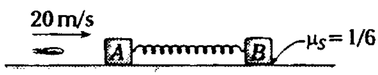
36. El sistema mostrado es abandonado, a partir del reposo, despreciando todo rozamiento. ¿Qué rapidez adquiere el cuerpo $2m$, cuando el cuerpo B llega al piso? (g = 10 m/s^2)



A) $\sqrt{\frac{14}{15}}$ m/s B) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ m/s C) $\sqrt{\frac{3}{7}}$ m/s

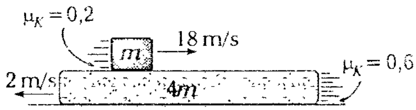
D) $\sqrt{\frac{5}{14}}$ m/s E) $\sqrt{\frac{10}{21}}$ m/s

37. ¿Qué rapidez adquiere el bloque liso A de 900 g cuando el bloque B de 6 kg inicia su movimiento? El proyectil de 100 g se incrusta al bloque A. (Considere K = 100 N/m)



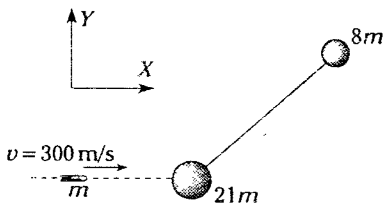
A) 2 m/s B) 1 m/s C) $\sqrt{5}$ m/s
D) $\sqrt{2}$ m/s E) $\sqrt{3}$ m/s

38. En el gráfico se muestra una tabla muy larga y un pequeño bloque deslizando encima de ella. A partir del instante mostrado, ¿cuánto recorre el centro de masa del sistema transcurridos 2 s?



A) 8 m B) 12 m C) 16 m
D) 20 m E) 24 m

39. Sobre una mesa horizontal y lisa se encuentran en reposo dos esferas de igual tamaño unidas por una varilla. Luego, se lanza una bala muy pequeña, la cual se incrusta en el centro de la esfera de mayor masa. Determine la velocidad del centro de masa del sistema luego del impacto. (Considere la masa de la varilla muy pequeña comparada con la masa de las esferas y la del proyectil).



A) $10\,\hat{i}$ m/s B) $10\,\hat{j}$ m/s C) $20\,\hat{i}$ m/s
D) $20\,\hat{j}$ m/s E) $30\,\hat{i}$ m/s

40. Un tablón homogéneo de 60 kg y 4 m de longitud está en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Si en sus extremos opuestos hay un niño de 30 kg y un joven de 60 kg, ¿qué longitud se desplaza el tablón cuando el joven y el niño intercambian de posición?

A) 0,3 m B) 0,4 m C) 0,5 m
D) 0,6 m E) 0,8 m

41. Dos partículas A y B se mueven en el plano XY con velocidades $+5\,\hat{j}$ m/s y $-12\,\hat{i}$ m/s respectivamente; al ser sus masas iguales a 10 g, indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- Sus velocidades respecto a un observador situado en el centro de masa (C.M.) son iguales en valor.
- La cantidad de movimiento del sistema respecto a la cantidad de movimiento del C.M. es nula.
- La energía cinética del sistema respecto del C.M. es 422,5 mJ

A) VFV B) FVV C) VVV
D) FVF E) VVF

42. En una prueba de tiro se lanza un disco y desde el piso se lanza un proyectil que logra impactar cuando el disco alcanza su posición más alta, de manera que el disco se fragmenta y su C.M. regresa por su misma trayectoria. Determine a qué distancia del punto de lanzamiento del proyectil impactará éste nuevamente contra el piso. (Considere $5M_p = m_{disco}$, $g = 10$ m/s^2).

A) 500 m B) 600 m C) 650 m
D) 720 m E) 1 200 m

43. Un cañón dispara un proyectil con $v_0 = 300$ m/s bajo un ángulo de 60° respecto de la horizontal. Al llegar a la cúspide el proyectil explota en dos partes de igual masa y una parte cae al piso como si partiera del reposo en la cúspide. ¿Qué distancia quedan separados estos fragmentos al impactar en el piso? ($g = 10$m/s^2)

A) $3\,000\sqrt{3}$ m B) $4\,500\sqrt{3}$ m C) $5\,000\sqrt{3}$ m
D) $6\,500\sqrt{3}$ m E) $9\,000\sqrt{3}$ m

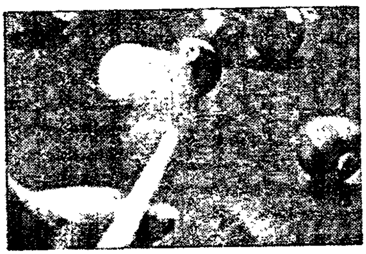
CLAVES

1	D	11	C	21	A	31	B
2	E	12	E	22	E	32	B
3	C	13	D	23	C	33	E
4	A	14	E	24	B	34	D
5	C	15	B	25	D	35	B
6	B	16	A	26	D	36	D
7	C	17	A	27	C	37	E
8	C	18	B	28	C	38	C
9	B	19	B	29	A	39	A
10	D	20	E	30	D	40	E
41	B	42	E	43	B		

CAPÍTULO XII

Choques

(a)



(b)

Los choques, fenómeno ampliamente difundido en la naturaleza y en la práctica. Su estudio y comprensión se hace mediante las leyes de conservación de la cantidad de movimento y de la energía. **Fig. (a)** El impacto de un proyectil sobre un cuerpo. **Fig. (b)** El juego de billas, son ejemplos donde podemos apreciar algunos de los diversos tipos de choques.

LECTURA

DESCUBRIMIENTO DEL NEUTRÓN

Vamos a exponer un diagrama simplificado del aparato, que Chadwick utilizó en uno de sus experimentos que lo condujeron al descubrimiento del neutrón en 1932. Las partículas alfa emitidas por el Polonio (Po) radiactivo, luego de chocar contra una muestra de Berilio (Be), daban lugar a partículas invisibles.

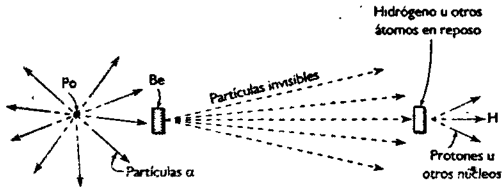


Diagrama del aparato de Chadwick.

Estas partículas posteriormente incidían sobre átomos de hidrógeno o nitrógeno en reposo. Como resultado de las colisiones, eran emitidos protones o núcleos de nitrógeno y Chadwick medía su rapidez.

Luego Chadwick supuso en la región H (ver diagrama) colisiones frontales elásticas. Llamando m a la masa de la partícula invisible y v a su rapidez; así como m_p a la masa del protón y v'_p a su rapidez. Después de plantear leyes de conservación resultó que:

$$v'_p = \frac{2m}{m+m_p}v$$

Del mismo modo, llamamos m_N y v_N respectivamente a la masa y a la rapidez del nitrógeno, luego de plantear las leyes de conservación resulta que:

$$v'_N = \frac{2m}{m+m_N}v$$

En esta ecuación podemos reemplazar m_N por $14\,m_p$, ya que, como sabemos, la masa del nitrógeno es igual a 14 unidades de masa atómica (uma) y la del hidrógeno equivale a 1 uma. Reemplazando m_N por $14\,m_p$ y dividiendo la primera ecuación por la segunda se elimina la rapidez v de la partícula invisible y resulta:

$$\frac{v'_p}{v'_N} = \frac{m+14m_p}{m+m_p}$$

En sus experiencias, Chadwick midió v'_p y v'_N y encontró que la relación $\frac{v'_p}{v'_N}$ valía aproximadamente 7,5. Por tanto,

$$\frac{m+14m_p}{m+m_p} = 7,5$$

O sea $m \approx 1,00\,m_p$

Chadwick repitió sus experiencias con sustancias distintas al hidrógeno o nitrógeno y encontró de nuevo que la masa de la partícula invisible era aproximadamente igual a la de un protón. El error con que determinó la masa en una de las experiencias era menor del 1 por cien. Había comprobado la existencia del neutrón.

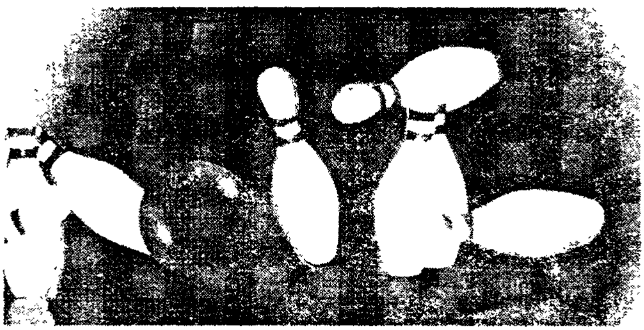
J. Chadwick (1891-1974) destacado científico inglés descubridor del neutrón.

Choques

OBJETIVOS

- Analizar qué sucede físicamente con los cuerpos durante los choques.
- Explicar qué sucede con la energía y cantidad de movimiento de los cuerpos que chocan en forma individual y como sistema.
- Aprender a clasificar los diferentes tipos de choque y establecer sus características.
- Aprender las diferentes formas de cálculo, que permiten evaluar el coeficiente de restitución (e), el cual caracteriza el tipo de choque en diferentes circunstancias o casos.

INTRODUCCIÓN



La escena corresponde a la interacción que se da durante un juego de bolos este es un ejemplo de choque que vemos en la práctica. Durante este choque los pinos inicialmente en reposo adquieren cantidad de movimiento y energía

En el capítulo anterior se vio y discutió una de las leyes más importantes de la mecánica clásica: la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la cual se utilizó para describir ciertos acontecimientos físicos, como por ejemplo la explosión de una bomba, el movimiento de un sistema y sus partes, etc. En esta parte utilizaremos dicha ley para poder explicar los diferentes cambios que se dan en un fenómeno físico difundido ampliamente en la naturaleza: el **choque o colisión.** Este fenómeno lo vemos reflejado en diversos eventos: la interacción entre dos automóviles, cuando se juegan canicas, en los salones de billar, en la presión de los gases sobre el recipiente que los contiene; también cabe mencionar como un problema de choque, la fusión nuclear, lo cual en la actualidad se usa con frecuencia. Un ejemplo de la fusión nuclear viene a ser la interacción de una partícula alfa (átomo de helio doblemente ionizado) con un átomo pesado (isótopo de uranio), lo cual permitiría que el átomo se divida en dos átomos algo más ligeros.

Para algunos de los casos mencionados como ejemplos de choques no vamos a considerar el proceso de interacción, ya que en su mayoría las fuerzas que surgen durante el choque (fuerzas impulsivas) tienen un comportamiento y variación compleja y se manifiestan en intervalos de tiempos muy pequeños; por ejemplo, así ocurre en las fuerzas que surgen en las interacciones nucleares que hasta la fecha no han sido establecida su ley de variación.

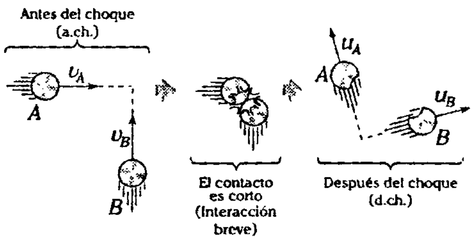
En las siguientes líneas vamos a discutir la teoría del choque, en donde haremos las descripciones bajo el límite de la mecánica clásica, pues los cuerpos que participen en los diferentes choques tendrán rapidez mucho menor que la rapidez de luz, para que así las masas de los cuerpos no varíen por efectos relativistas. Finalmente, se debe recordar que el problema del choque lo estaremos resolviendo, evaluando y analizando las cantidades de movimiento y energía cinética de los cuerpos que participen, también usaremos algo nuevo: el coeficiente de restitución parámetro que nos permitirá caracterizar los tipos de choque.

EL CHOQUE O COLISIÓN

Cuando hemos participado o presenciado un juego con canicas, se logra apreciar una interacción entre las mismas, pero con una particularidad, que dicha interacción es breve, es decir de corta duración casi podríamos decir que instantánea: algo similar se nota cuando impactan dos bolas de billar o lanzamos una pelota contra la pared.

Si en un choque; las partículas que participan son átomos y/o moléculas se puede tener una **reacción química** y si las partículas que colisionan son núcleos entonces se tiene una **reacción nuclear**.

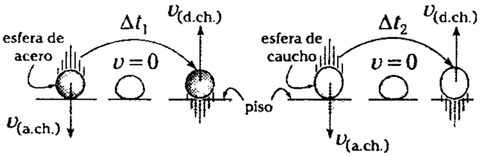
¿Qué es un choque o colisión? Es un fenómeno físico donde se registra una interacción violenta entre dos (o más) cuerpos (partículas) durante un corto intervalo de tiempo. Por ejemplo: el encuentro entre dos discos que sucede en la figura siguiente



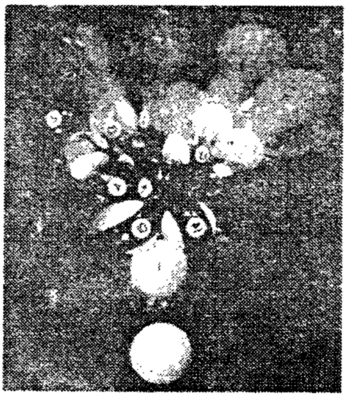
Después del choque los cuerpos participantes quedan parcialmente deformados, esto se da casi en forma general, ya que hay casos donde los cuerpos participantes, si están hechos de acero o marfil, recuperan en un 100% (aproximadamente) su forma como lo muestran los experimentos.

Por otro lado es importante saber que las deformaciones que sufren los cuerpos durante el choque son causadas por fuerzas impulsivas de gran magnitud que actúan sobre los cuerpos. Como se *ve en la práctica, el breve intervalo de tiempo durante el cual actúan dichas fuerzas depende de las* propiedades elásticas del material del cual están hechos los cuerpos que participan en el choque.

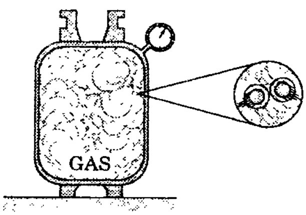
Por ejemplo podemos ver



Como la esfera de caucho se deforma más en el contacto, por ello hace contacto durante más tiempo con el piso $(\Delta t_2 > \Delta t_1)$.

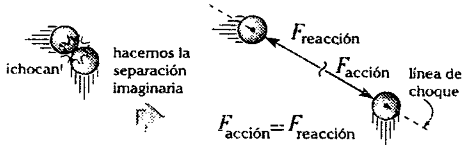


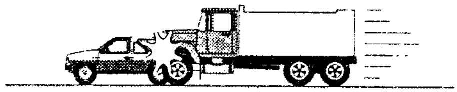
A escala macroscópica las bolas de billar entran en contacto durante el choque



A escala microscópica las moléculas no se tocan durante el choque.

Las fuerzas impulsivas que se manifiestan sobre los cuerpos o partículas durante el choque son fuerzas que se subordinan a la Tercera Ley de Newton, es decir, son fuerzas de acción y reacción. Entonces durante el choque las fuerzas impulsivas son colineales, opuestas y de igual módulo.





Las fuerzas impulsivas que surgen durante la colisión tienen gran valor y originan las deformaciones en los automóviles.

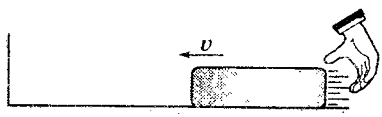
ANÁLISIS DE CHOQUES

Como ya lo hemos planteado, durante la colisión de los cuerpos ocurren internamente ciertas deformaciones y luego ciertas recuperaciones que nos permiten plantear que durante el proceso de un choque se manifiestan ciertas etapas.

Etapas en un choque

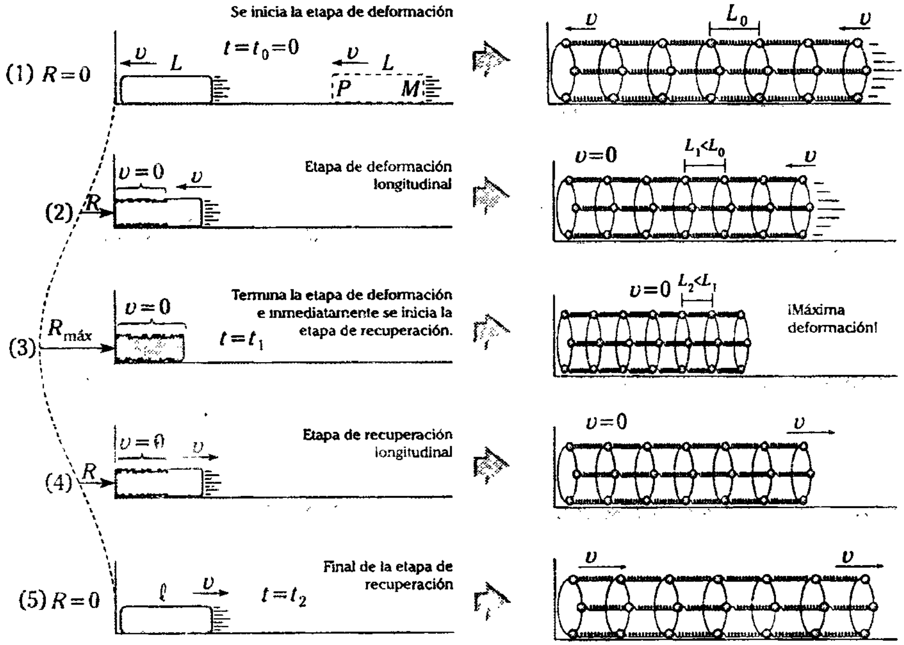
Cuando dos cuerpos (o más) chocan se desarrollan dos etapas bien definidas durante el intervalo de tiempo que dura el choque, una es la etapa de **deformación** y la otra es de **recuperación**. Aquí un ejemplo:

Consideremos que una barra de goma de longitud L ha sido lanzada sobre una superficie horizontal lisa tal como se muestra.



El lanzamiento es frontal con la finalidad de que la barra impacte perpendicularmente en la pared.

Bien, ahora analicemos todo lo que acontece hasta que la barra de goma rebote.



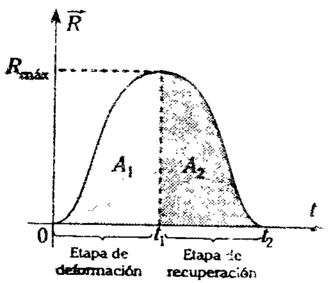
Toda esta secuencia gráfica nos describe lo que acontece desde que se inicia el choque hasta que termina y se explica de la siguiente manera:

- En el esquema (1) la parte delantera (P) de la barra está por hacer contacto con la pared, por ello que la reacción de la pared hasta ese instante es nula ($R = 0$) y la longitud de la barra es L.
- En el esquema (2) la barra ya hace contacto con la pared, producto de ello hay una reacción de la misma, la cual hace que la parte delantera de la barra se detenga, mientras que la otra parte, en virtud a la inercia continúa avanzando con $\vec{v}$ y determina que esta se comprima y disminuya su longitud.
- Cuando se pasa del esquema (2) al esquema (3) toda la barra queda detenida por un instante y la reacción de la pared sobre ella es máxima (R_{max}); todo esto, debido primero a que en el interior de la barra surgen fuerzas entre sus partes lo cual al final frenan a las partes que continuaban en movimiento. La reacción aumenta su móduló hasta R_{max} porque las partes que continuaban por la inercia hacían que la cara P de la barra presione cada vez más a la pared.
- En el esquema (4) notamos que una parte de la barra empieza a moverse hacia la derecha, mientras que la otra parte aún queda en reposo. En el párrafo anterior señalamos que en el interior de la barra surgían fuerzas elásticas que frenaban las partes, estas mismas fuerzas son las que hacen que algunas de las partes de la barra se muevan hacia la derecha, mientras que otras partes no se mueven por estar bloqueadas y presionadas contra la pared estática.

Cuando pasamos del esquema (4) al esquema (5) la barra recupera casi toda su longitud ($\ell < L$) y la reacción de la pared se hace nula, como vemos que parte de la barra se aleja de la pared, esto en cierta forma hace que la barra poco a poco recupere algo de su longitud inicial y por otro lado como la presión que ejerce sobre la pared disminuye, la reacción disminuye, y se hace cero cuando la barra pierde contacto con la pared.

Después de haber explicado detalladamente el proceso, podemos añadir unos detalles que son importantes tenerlos en cuenta.

Mientras la barra choca con la pared se nota que la fuerza de reacción $(\vec{R})$ de la pared varía su módulo, en la etapa de deformación aumenta mientras en la etapa de recuperación disminuye. Ahora, construyamos una grafica que nos muestre aproximadamente cómo varía la reacción de la pared sobre la barra en función del tiempo transcurrido durante el choque.



donde

A_1 : nos expresa el impulso sobre la barra durante la etapa de deformación.

A_2 : nos determina el impulso sobre la barra durante la etapa de recuperación.

Notar que $A_1 + A_2$ nos expresa el impulso total sobre la barra durante el choque.

Por otro lado, durante el choque la energía experimenta transformación, en tal sentido:

Durante la etapa de deformación

La energía cinética (E_C) de la barra se transforma en energía potencial elástica (E_{PE}) de deformación para la misma y otra parte en calor o energía disipada (Q_{dis}), es decir

$$E_C = E_{PE} + Q_{dis} \qquad \text{(I)}$$

Durante la etapa de recuperación

La energía potencial elastica (E_{PE}) que adquirió la barra se va transformando en energía cinética $\left(E_C'\right)$ hasta que la barra recupera aproximadamente toda su forma o longitud inicial; es decir

$$E_{PE} = E_C' \qquad \text{(II)}$$

Al comparar las expresiones (I) y (II) podemos plantear que

$$\underbrace{E_C}_{\substack{\text{antes}\\ \text{de chocar}}} = \underbrace{E_C'}_{\substack{\text{después}\\ \text{de chocar}}} + \underbrace{Q_{dis}}_{\substack{\text{durante la etapa}\\ \text{de deformación}}} \qquad \text{(III)}$$

De la expresión (III) tenemos

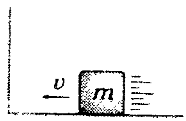
$$E_C > E_C'$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}v^2}{2} > \frac{\cancel{m}u^2}{2}$$

$\therefore\ v > u$ ... ¡La barra rebota con menor rapidez!

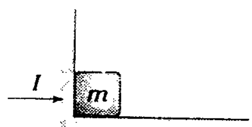
Hecho el análisis energético, ¿qué ocurrió con la cantidad de movimiento de la barra?

Notamos que

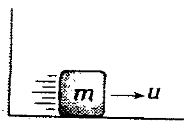


Antes del choque (a.ch.)

$\Rightarrow\ \vec{p}_0 = -mv(\hat{i})$



Durante el choque recibe un impulso $(\vec{I})$



Después del choque (d.ch.)

$\Rightarrow\ \vec{p}_F = +mu\hat{i}$

A partir del cálculo realizado vemos que el impulso $(\vec{I})$ recibido por la barra durante el choque, le modificó (por lo menos en dirección) la cantidad de movimiento a la barra

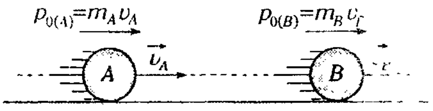
$$\vec{I} = \Delta\vec{p}_{(barra)}$$

Para comenzar a desarrollar el tema de choques hemos considerado el choque de un cuerpo contra una pared rígida, por ser uno de los casos más sencillos, mas en la naturaleza podemos notar otras variantes, por ejemplo:

Examinemos el choque de dos esferas de masas m_A y m_B que deslizan inicialmente sobre el piso liso con $v_A > v_B$; así

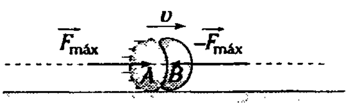
PROCESO DE CHOQUE

1. Antes del choque

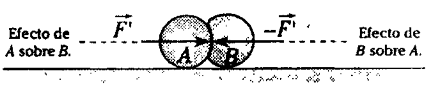


2. Impulsos deformadores

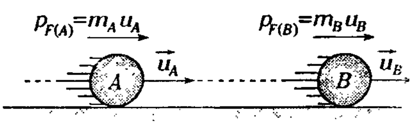
3. Deformación máxima



4. Impulso recuperador



5. Después del choque



En la figura 2 como producto del choque surgen fuerzas de acción y reacción, las cuales originan impulsos que ocasionan la deformación de las esferas y modificarán sus velocidades.

Mientras la rapidez de A sea mayor que la rapidez de B habrá deformación y esta termina cuando las esferas alcanzan igual rapidez allí la deformación de las esferas es máxima.

La figura 3 muestra tal situación, es en dicho instante que las esferas experimentan máxima deformación. Ello significa que en esta posición la fuerza impulsiva es máxima.

Luego, debido a los impulsos recuperadores las esferas tienden a recobrar su forma original, la figura 4 permite ilustrar esta situación.

Finalmente, la figura 5 muestra las esferas instantes después del choque $(u_B > u_A)$

En el proceso de choque las esferas intercambian cantidad de movimiento y energía. La energía cinética se transforma en energía potencial elástica y otra parte en energía disipada (calor).

Ahora, considerando a las esferas como un sistema, se observa que en todo instante el impulso resultante externo es nulo, ya que **durante el choque la fuerza resultante sobre dicho sistema es nula**. Por lo tanto, la cantidad de movimiento del sistema se debe conservar, es decir:

$$\vec{p}_{(a\,ch)} = \vec{p}_{(d\,ch)}$$

$$\therefore \; m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{u}_A + m\vec{u}_B$$

donde

$\vec{p}_{(a\,ch)}$: cantidad de movimiento del sistema antes del choque.

$\vec{p}_{(d\,ch)}$: cantidad de movimiento del sistema después del choque.

A manera de resumen del análisis, podemos afirmar que

- La cantidad de movimiento de un sistema durante una colisión no varía, pero sí varía la cantidad de movimiento de cada uno de los objetos componentes del sistema debido a los impulsos internos que se dan en el proceso de choque.

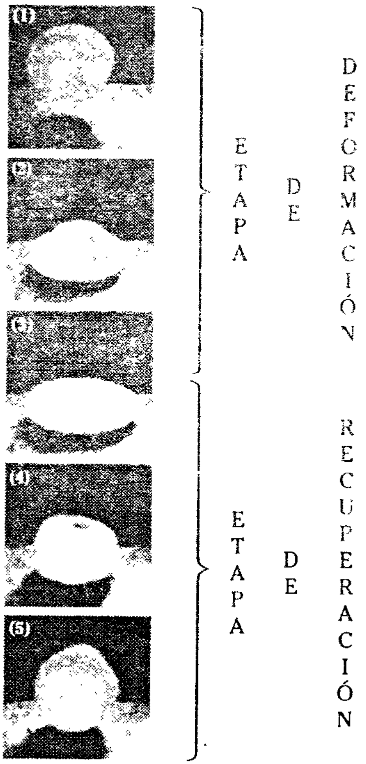
Nota:

Cuando se analice un choque y se quiera determinar una relacion con las velocidades despues del choque es conveniente usar la conservación de la cantidad de movimiento del sistema. Se establece que un instante antes, durante y un instante después de un choque la cantidad de movimiento del sistema es la misma.

$$\boxed{\vec{p}^{\,\text{sist. instante}}_{\text{a ch}} = \vec{p}^{\,\text{sist. durante}}_{\text{el choque}} = \vec{p}^{\,\text{sist. instante}}_{\text{d ch}}}$$

o de manera práctica también se expresa

$$\boxed{\sum \vec{p}_{\text{a ch}} = \sum \vec{p}_{\text{d ch.}}}$$

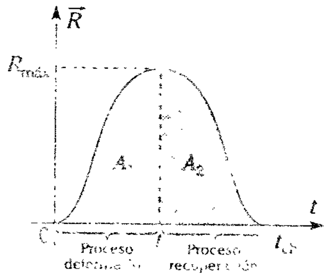


Aquí las fotografías nos muestran de manera secuencial las etapas que se dan durante el impacto (choque) de una bola elástica contra el piso.

CLASIFICACIÓN DE CHOQUES

Tomando en cuenta el análisis anterior, se pudo verificar que hay transformación energética y fuerzas internas que determinan impulsos.

Como sabemos, durante el choque la barra recibe una fuerza de reacción $\vec{R}$ de la pared que, como lo hemos planteado, varía aproximadamente según la gráfica



Al formar en una gráfica una dependencia entre algunas magnitudes físicas, de ella podemos obtener cierta información. La gráfica $\vec{R}$ vs t nos permite caracterizar el tipo de choque que ha ocurrido y esto lo conseguimos comparando áreas que representan impulsos

$A_1 = I_{\text{deformador}}$
(caracteriza el grado de deformación)

$A_2 = I_{\text{recuperador}}$
(caracteriza el grado de recuperación)

Comparando estos impulsos definimos:

$$\boxed{\frac{A_2}{A_1} = \frac{I_{\text{recuperador}}}{I_{\text{deformador}}} = \text{coeficiente de restitución del choque} = e}$$

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN (e)

Es un factor adimensional que nos permite comparar el impulso de recuperación con respecto al de deformación y de esta manera caracterizar el grado de recuperación después del choque y precisar el tipo de choque que sucedió.

CLASIFICACIÓN DE CHOQUES SEGÚN EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN (e)

Choque elástico (e=1)

En este choque el impulso deformador y recuperador sobre los cuerpos son iguales en módulo, y esto trae como consecuencia que los cuerpos después del choque recuperen toda su forma, y quedan sin deformar, por otro lado la energía disipada es nula, y por lo tanto se debe cumplir:

a. Como $\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right| = \left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|} = 1$$

b. Como $Q_{\text{dis}} = 0 \ \Rightarrow \ E_{C(\text{a ch.})}^{\text{sistema}} = E_{C(\text{d.ch.})}^{\text{sistema}}$

Conclusión

Un choque elástico se caracteriza porque $e=1$ y se conserva de la energía cinética del sistema.

Choque inelástico (0<e<1)

Para este tipo de choque, el impulso en la etapa de recuperación es menor que el de la etapa de deformación, esto trae como consecuencia que los cuerpos después del choque no recuperen su forma inicial, y queden parcialmente deformados.

Por otro lado, durante la etapa de deformación hay disipación de energía en forma de calor principalmente aunque también en forma de sonido. Esto último por lo general no se considera en el balance energético, de ahí que

a. Como $\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right| > \left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|} < 1$$

b. Como $Q_{\text{dis}} \neq 0 \ \Rightarrow \ E_{C(\text{a.ch.})}^{\text{sistema}} = E_{C(\text{d ch.})}^{\text{sistema}} + Q_{d}$.

Conclusión

Un choque inelástico se caracteriza porque: $0 < e < 1$ y hay variación de la energía cinética del sistema (disminuye).

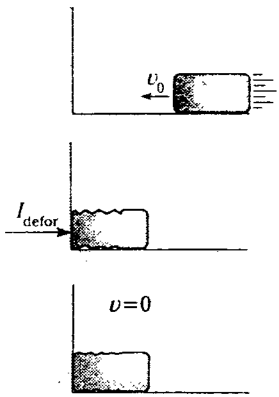
Choque plástico (e=0)

Este choque en realidad es un caso particular de choque inelástico, por ello también se le suele llamar completamente inelástico. En este choque, sobre los cuerpos que participan, el impulso recuperador es prácticamente despreciable (no ocurre la etapa recuperadora), y como tal después del choque los cuerpos quedan totalmente deformados y la disipación de energía durante el choque es máxima. Según esto tenemos

No hay recuperación de la forma original del cuerpo.

$$\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right| = 0 \ \Rightarrow \ e = \frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|} = 0$$

Por ejemplo



Antes de la colisión

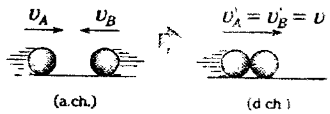
Deformación y disipación de calor

¡No rebota!

El choque plástico se caracteriza porque no hay rebote de los cuerpos luego de la colisión. En cuanto al análisis energético, del ejemplo tendremos

$$E_{C(\text{a ch.})} = Q_{\text{dis(máx)}}$$

En general, el choque plástico entre dos cuerpos móviles sería así



En el balance energético tendremos

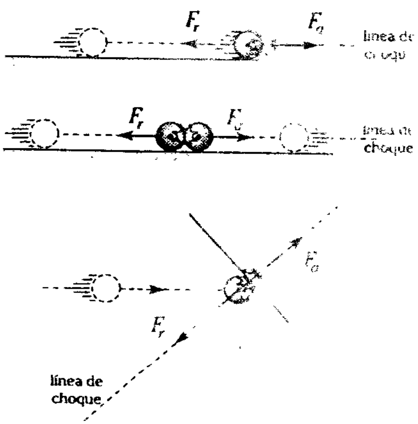
$$E_{C(\text{a ch.})} = E_{C(d.\text{ch.})} + Q_{\text{dis}}$$

Luego del choque no hay alejamiento de un cuerpo respecto del otro, es decir, los cuerpos se moverán juntos, como uno solo.

CLASIFICACIÓN DE CHOQUES SEGÚN LA LÍNEA DE CHOQUE

Antes debemos tener claro que es línea de choque. Se denomina línea de choque a aquella línea que contiene a la [illegible] de acción de las fuerzas de acción y reacción $(\vec{F}$ y $\vec{F}_r)$ que se manifiestan durante el choque.

Ejemplos

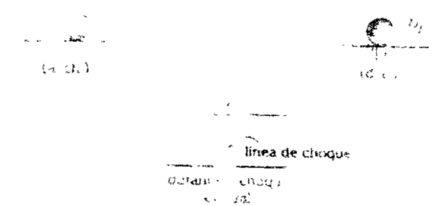


[illegible] siempre contiene a las fuerzas [illegible] reacción que se manifiestan sobre los cuerpos durante la colisión.

Teniendo en cuenta esta característica los choques geométricamente también pueden ser clasificados en

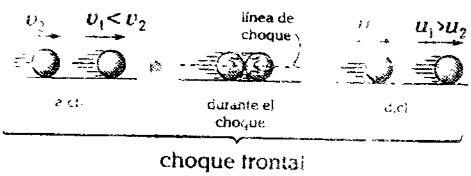
Choque central

Es aquel [illegible] porque la línea [illegible] masa (C.M.) de los [illegible] línea de [illegible] choque central [illegible] después del [illegible]



O es el C.M. [illegible] y la línea de choque lo contiene, entonces [illegible] un choque central. No obstante también [illegible] que la velocidad de la esfera antes y después del choque es paralela a la línea de choque [illegible] estaremos ante un choque frontal [illegible]

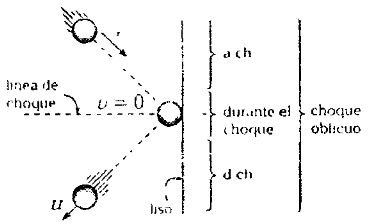
Otro ejemplo de choque central (frontal) puede ser cuando dos esferas de igual dimensión se encuentran, tal como se grafica



Un choque frontal también se define como aquel donde los cuerpos antes y después del choque se mueven sobre la misma línea.

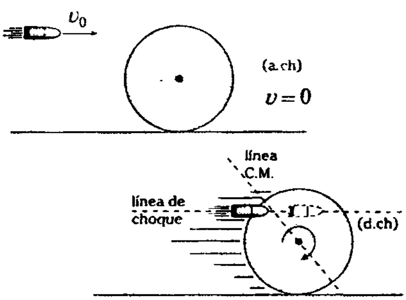
Nota

Así como tenemos choques centrales y frontales también se pueden tener choques centrales oblicuos, los cuales se caracterizan porque antes y después de chocar las velocidades de los cuerpos que participan no son paralelas a la línea de choque, es decir, antes y después del choque los cuerpos se mueven sobre líneas distintas. Por ejemplo, cuando una pelota impacta sobre una pared lisa.

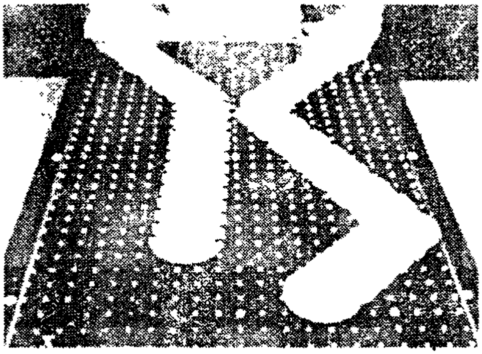


Choque excéntrico

Es aquel que se caracteriza porque la línea de choque no coincide con la línea que contiene a los centros de masa de los cuerpos que colisionan.



Después del choque excéntrico como la línea de C.M. con la línea de choque no coinciden, las fuerzas de acción y reacción durante el choque van a generar un movimiento de traslación y rotación después del choque.



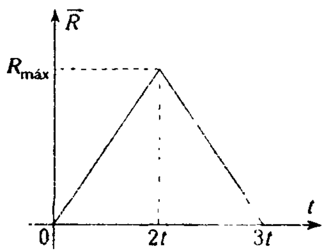
Dos discos que se desplazan sobre un colchon de aire, experimentan un choque oblicuo

CARACTERÍSTICAS PARTICULARES AL EVALUAR EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN (e)

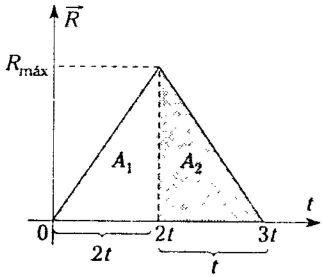
Plantearemos a continuación una serie de ejemplos prácticos que servirán para analizar y evaluar choques.

Caso I: Utilizando la gráfica $\vec{F}$ vs. t

Podemos poner como ejemplo un choque frontal de una esfera contra una pared y consideraremos que la fuerza de reacción de la pared viene dada por la grafica adjunta. Calcule el coeficiente de restitución.



De la gráfica $\vec{R}-t$



Comparando los impulsos mediante áreas, planteamos que

$$e=\frac{I_{\text{recuperador}}}{I_{\text{deformador}}}=\frac{A_2}{A_1} \qquad \text{(I)}$$

Los triángulos de áreas A_1 y A_2 al tener igual altura, sus áreas resultan proporcionales a sus bases.

$$\left.\begin{aligned} A_2&=\frac{R_{\text{máx}}(t)}{2} \\ A_1&=\frac{R_{\text{máx}}(2t)}{2} \end{aligned}\right\} \frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, en (I)

$$e=\frac{1}{2}=0{,}5$$

Por lo tanto, el choque es inelástico y después del choque la esfera queda parcialmente deformada y disipa energía en forma de calor durante la colisión.

Caso II: Choque entre una pared fija y una partícula móvil

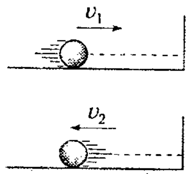
Un cuerpo impacta frontalmente con una rapidez v_1 contra una superficie rígida y rebota con una rapidez v_2. Si el coeficiente de restitución es e; demuestre que

$$\boxed{v_1=ev_2}$$

donde

v_1 : rapidez de incidencia o de acercamiento a la superficie.

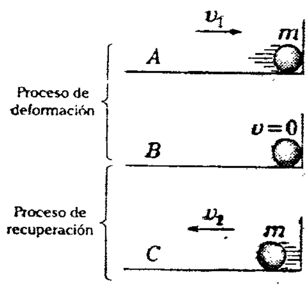
v_2 : rapidez de rebote o alejamiento de la superficie.



Demostración

Es conveniente para demostrar la relación, plantear los procesos que ocurren durante el choque y calcular los impulsos respectivos.

Representemos gráficamente lo que acontece.



Examinemos lo acontecido

Etapa de deformación de $A \rightarrow B$.

$$\vec{I}_{\text{deformador}}=\Delta\vec{p}_{\text{esfera}}$$

$$\vec{I}_{\text{deformador}}=\cancel{\vec{p}_{(B)}}-\vec{p}_{(A)}=0-(+mv_1)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|=mv_1 \qquad \text{(I)}$$

Etapa de recuperación de $B \rightarrow C$.

$$\vec{I}_{\text{recuperador}}=\Delta\vec{p}_{\text{esfera}}$$

$$\vec{I}_{\text{recuperador}}=\vec{p}_{(C)}-\cancel{\vec{p}_{(B)}}=(-mv_2)-0$$

$$\Rightarrow \left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|=mv_2 \qquad \text{(II)}$$

Ahora, por definición de coeficiente de restitución (e) tenemos

$$e=\frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|}=\frac{\cancel{m}v_1}{\cancel{m}v_2}$$

de donde, deducimos que

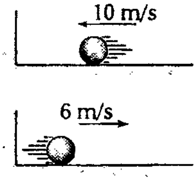
$$\boxed{v_1=ev_2}$$

Observación

$\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$ son perpendiculares a la superficie.

Ejemplo 1

En la figura se muestra cómo una pequeña esfera elástica de 2 kg impacta frontalmente contra una pared. Determine e.



Resolución

Para el choque frontal de la esfera, podemos usar la relación anteriormente demostrada

$$v_2=ev_1 \qquad (\alpha)$$

donde

$v_1=10$ m/s (rapidez de incidencia)

$v_2=6$ m/s (rapidez de rebote).

Reemplazando en (α)

$$6=e(10)$$

$$\Rightarrow\ e=\frac{6}{10}=0{,}6$$

El choque es frontal inelástico y en este tipo de choque se disipa calor, que puede determinarse mediante la ley de conservación de la energía.

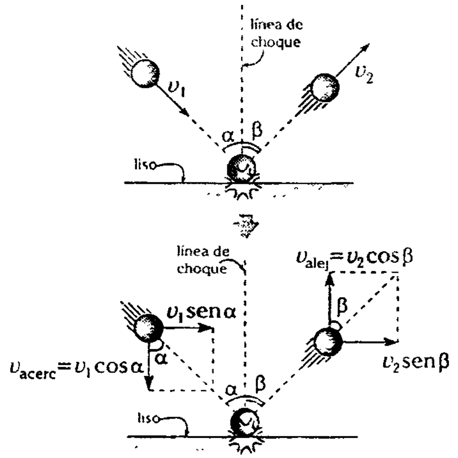
$$E_{C_0}=E_{C_f}+Q_{\text{dis}}$$

$$\frac{1}{2}(2)(10)^2=\frac{1}{2}(2)(6)^2+Q_{\text{dis}}$$

$$\therefore\ Q_{\text{dis}}=64\text{ J}$$

¿Cómo hallamos e en choque central oblicuo?

La fórmula que se ha utilizado en el ejemplo anterior también se puede utilizar cuando un cuerpo impacta oblicuamente sobre una superficie lisa en reposo. pero se considera las componentes de las velocidades que definen el acercamiento o alejamiento perpendicular a la superficie. Según esto, planteamos



En el gráfico donde se muestran las componentes de las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ se observa que:

$v_1\cos\alpha$ define la rapidez de acercamiento (v_{acerc}) a la superficie de incidencia.

$v_2\cos\beta$ define la rapidez de alejamiento (v_{alej}) respecto de la superficie.

Ahora podemos usar la expresión anteriormente demostrada

$$v_{alej} = ev_{acerc}$$

en este caso sería

$$v_2\cos\beta = e(v_1\cos\alpha)$$

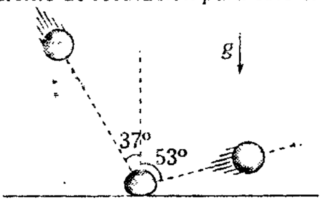
$$e = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$$

Observación

En este caso se ha considerado que la superficie es lisa, porque en caso contrario durante el choque surgiría la fuerza de rozamiento, la cual haría que después del choque la esfera se traslade y rote a la vez para así tener un **choque excéntrico**.

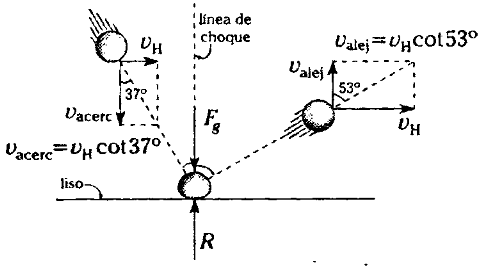
Ejemplo 2

Se muestra a una esfera antes y después de impactar sobre un piso horizontal liso, determine el coeficiente de restitución para este choque.



Resolución

Este ejemplo lo podemos resolver haciendo uso del análisis anterior, pero además debemos señalar que durante el impacto de la esfera sobre el piso, sobre ella solo actúan fuerzas verticales, la reacción del piso liso $(\vec{R})$ y la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$, y como horizontalmente no hay fuerzas la componente horizontal de la velocidad de la esfera no se modifica, es decir antes y después del choque la velocidad horizontal de la esfera es la misma $(\vec{v}_H)$. Entonces al descomponer la velocidad tendremos:



Para calcular el coeficiente de restitución (e) usamos la relación demostrada

$$v_{alej} = ev_{acerc}$$

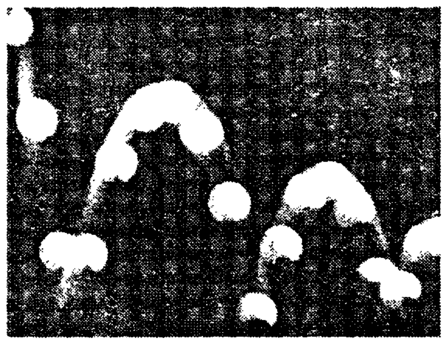
Reemplazando valores tenemos

$$\cancel{v_H}\cot 53° = e(\cancel{v_H}\cot 37°)$$

$$\frac{3}{4} = e\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\therefore\ e = \frac{9}{16}$$

El valor obtenido nos indica que el choque es inelástico, la esfera rebota sufriendo deformación permanente y debido a que la componente vertical de su velocidad disminuye, luego del choque la altura que alcance respecto del piso será menor que la altura desde la que fue lanzada.



Los continuos choques oblicuos inelásticos sobre una superficie horizontal, traen como consecuencia pérdida de energía cinética, es por ello que la esfera ya no alcanza la altura anterior.

Caso III: Choque frontal entre dos cuerpos móviles

Cuando dos cuerpos (esferas) chocan frontalmente, el coeficiente de restitución (e) se puede evaluar a partir de la velocidad relativa de acercamiento antes del choque y la velocidad relativa de alejamiento después del choque según la siguiente relación:

$$\boxed{e=\frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R.(\text{d.ch.})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R.(\text{a.ch.})}\right|}} \qquad (\theta)$$

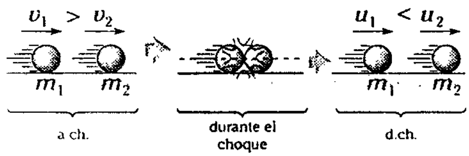
donde

$\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R\,(\text{d ch.})}$: velocidad relativa de alejamiento después del choque.

$\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R\,(\text{a ch})}$: velocidad relativa de acercamiento antes del choque.

Demostración

Consideremos el choque central y frontal entre dos esferas tal como lo indicamos.

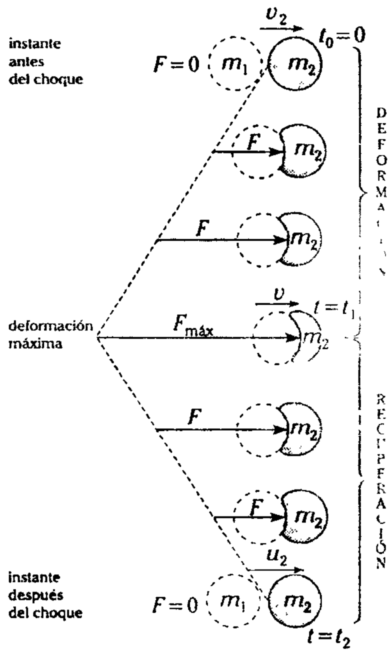


Para poder llegar a establecer la expresión (θ) debemos partir de la ecuación general:

$$e=\frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|}$$

Será suficiente analizar solo la acción de una de ellas sobre la otra. Esto se hará en forma análoga al análisis del choque frontal de una esfera contra una pared rígida.

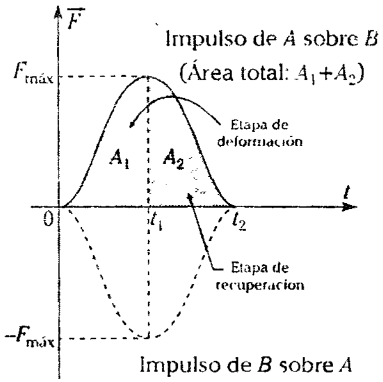
Examinemos lo que sucede con la fuerza (acción) de parte de m_1 sobre m_2.



Durante la colisión de las esferas se presentan dos etapas: la etapa de deformación y la de recuperación. En la primera de ellas, el módulo de la fuerza impulsiva aumenta con el tiempo, mientras que en la segunda etapa esta fuerza decrece con el tiempo hasta hacerse nula. En el instante en que la fuerza entre ellos es máxima (F_{max}), la velocidad relativa entre ellas es nula, lo que significa que tienen una velocidad común $(\vec{v})$.

En el gráfico $\vec{F}-t$ se muestra cómo varía la fuerza impulsiva sobre m_2 con el tiempo. Note que la fuerza que actuó sobre m_2 varía según la curva que tiene forma de campana.

Gráfica $\vec{F}-t$



En el intervalo $t\in[0;t_1]$, se manifiesta el impulso deformador sobre m_2. Según el gráfico tenemos

$$\vec{I}_{\text{deformador}}=\Delta\vec{p}_{\text{deformador}}$$
$$=m_2\vec{v}-m_2\vec{v}_2=m_2\left(\vec{v}-\vec{v}_2\right)$$

También en el intervalo $t\in[t_1;t_2]$ se manifiesta el impulso recuperador sobre m_2. Según el gráfico tenemos

$$\vec{I}_{\text{recuperador}}=\Delta\vec{p}_{\text{recuperador}}$$
$$=m_2\vec{u}_2-m_2\vec{v}=m_2\left(\vec{u}_2-\vec{v}\right)$$

Sabemos que el coeficiente de restitución (e) se define por

$$e=\frac{\left|\vec{I}_{\text{recuperador}}\right|}{\left|\vec{I}_{\text{deformador}}\right|}$$

$$\Rightarrow\ e=\frac{\left|\cancel{m_2}\left(\vec{u}_2-\vec{v}\right)\right|}{\left|\cancel{m_2}\left(\vec{v}-\vec{v}_2\right)\right|}$$

Como $\vec{v}_2$, $\vec{v}$ y $\vec{u}_2$ están dirigidos hacia la derecha, entonces son positivos, por lo que se tiene

$$e=\frac{u_2-v}{v-v_2} \qquad \text{(I)}$$

Análogamente, si hacemos lo mismo sobre la esfera m_1 durante el choque, es decir graficamos sobre él la fuerza que le ejerce m_2, luego determinaremos los respectivos impulsos deformador y recuperador, así el coeficiente de restitución quede expresado por

$$e=\frac{v-u_1}{v_1-v} \qquad \text{(II)}$$

Por último hacemos que la expresión (I) se iguale con (II), entonces tenemos

$$e=\frac{u_2-v}{v-v_2}=\frac{v-u_1}{v_1-v}$$

Si recordamos la propiedad de proporciones

$$K=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\ \Rightarrow\ K=\frac{a+b}{b+c}$$

tenemos

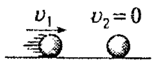
$$e=\frac{(u_2-v)+(v-u_1)}{(v-v_2)+(v_1-v)}=\frac{u_2-u_1}{v_1-v_2}$$

El numerador nos expresa el módulo de la velocidad relativa de alejamiento de un objeto respecto del otro después del choque, mientras que el denominador viene a ser el módulo de la velocidad relativa de acercamiento de un objeto respecto del otro. Es por esto que el coeficiente de restitución para el choque frontal entre m_1 y m_2 viene dado por

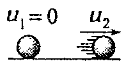
$$\boxed{e=\frac{|\text{velocidad relativa después del choque}|}{|\text{velocidad relativa antes del choque}|}=\frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R\,(\text{d.ch.})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R\,(\text{a.ch.})}\right|}}$$

Antes de aplicar lo que se ha demostrado, tengamos en cuenta cómo determinamos la velocidad relativa antes y después del choque para los diferentes casos que se pueden presentar

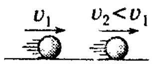
Casos posibles a.ch. Casos posibles d.ch.



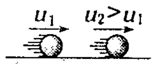
$|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|=v_1$



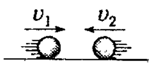
$|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|=u_2$



$|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|=v_1-v_2$



$|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|=u_2-u_1$



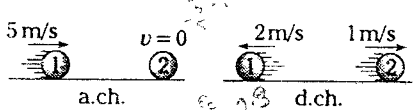
$|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|=v_1+v_2$

$|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|=u_1+u_2$

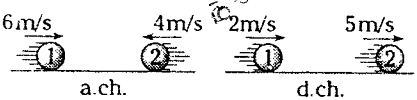
Ejemplo 3

Se muestran a dos esferas antes y después de chocar frontalmente, determine el coeficiente de restitución en cada caso.

a.



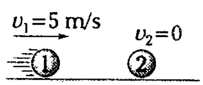
b.



Resolución

Analicemos el caso (a)

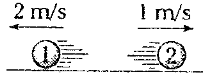
Antes del choque



La esfera 1 se acerca a 2 con

$$|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|=v_1=5\text{ m/s} \qquad \text{(I)}$$

Después del choque; respecto a tierra, nótese que



- La esfera 1 en 1 s se aleja 2 m.
- La esfera 2 en 1 s se aleja 1 m.

∴ La esfera 1 respecto a la esfera 2 en 1 se aleja 3 m.

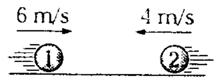
$$\Rightarrow \ |\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|=3\text{ m/s} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) definimos

$$e=\frac{|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|}{|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|}=\frac{3}{5}=0{,}6 \text{ (El choque es inelástico)}$$

Analizando en forma similar el caso (b)

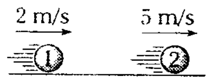
(a.ch.)



Se aprecia que 2 se acerca a 1 con

$$|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}|=6+4=10\text{ m/s}$$

(d.ch.)



Ahora 2 se aleja de 1 con

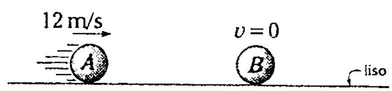
$$|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}|=5-2=3\text{ m/s}$$

$$\therefore \ e=\frac{|\vec{u}^{\,alej.}_{R(d.ch.)}|}{|\vec{v}^{\,acerc.}_{R(a.ch.)}|}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

El choque es inelástico. Note que la energía cinética del sistema ha disminuido.

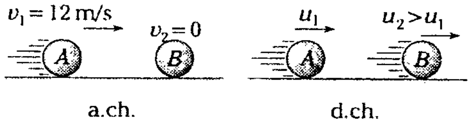
Ejemplo 4 (choque elástico)

Si las esferas de igual radio van a chocar frontal y elásticamente, calcule la rapidez de las esferas después del choque. ($m_A=2m_B$)



Resolución

Como el choque es frontal, en forma práctica planteamos que antes y después del choque las velocidades de los cuerpos que participan son paralelas. Entonces tenemos



Si queremos determinar u_1 y u_2 para el sistema, podemos considerar la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_{\text{a ch}} = \vec{p}_{\text{d ch.}}$$

$$\Rightarrow \quad m_A v_1 = m_A u_1 + m_B u_2$$

$$(2\cancel{m})(12) = (2\cancel{m})u_1 + (\cancel{m})u_2$$

$$2u_1 + u_2 = 24 \qquad \text{(I)}$$

Para encontrar otra relación entre u_1 y u_2 podemos hacer uso del coeficiente de restitución ($e = 1$), aunque también se puede hacer uso de un balance de energía cinética para el sistema, pero resultaría algo operativo. Entonces planteamos

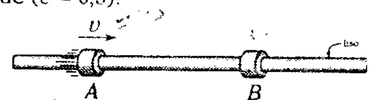
$$e = \frac{|\vec{u}_{R(\text{d ch})}|}{|\vec{v}_{R(\text{a ch})}|} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2 - u_1}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \quad u_2 - u_1 = 12 \qquad \text{(II)}$$

Después de resolver (I) y (II) se determina $u_1 = 4$ m/s y $u_2 = 16$ m/s.

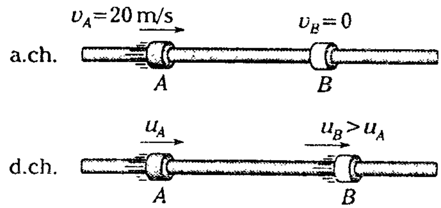
Ejemplo 5 (choque inelástico)

El collarín A se mueve con una rapidez de 20 m/s y si choca inelásticamente con el otro collarín B de igual masa, que se hallaba en reposo; determine la rapidez de los collarines después del choque ($e = 0,5$).



Resolución

Según las condiciones que nos dan, podemos proyectar que el choque entre los collarines será frontal inelástico y como sabemos se dará cierta disipación de energía durante el choque.



Luego del choque hemos supuesto que A y B se mueven en la misma dirección. Ahora para calcular u_A y u_B utilizaremos el principio de conservación de la cantidad de movimiento del sistema.

$$\vec{p}_{\text{a ch}} = \vec{p}_{\text{d.ch}}$$

$$\cancel{m_A} v_A = \cancel{m_A} u_A + \cancel{m_B} u_B \qquad (m_A = m_B)$$

$$\Rightarrow \quad u_A + u_B = 20 \qquad \text{(I)}$$

Luego, para encontrar otra relación entre u_A y u_B, consideraremos el coeficiente de restitución $\left(e = \frac{1}{2}\right)$. Según la definición

$$e = \frac{|\vec{u}_{R(\text{d ch})}|}{|\vec{v}_{R(\text{a ch})}|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_B - u_A}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u_B - u_A = 10 \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo (I) y (II) se obtiene

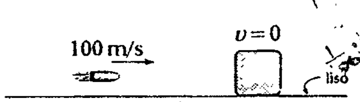
$u_A = 5$ m/s y $u_B = 15$ m/s

Nota

Cuando después del choque no se conozca la dirección de las velocidades, estas deben asumirse arbitrariamente. ¿Cómo saber si lo asumido es correcto o no? Si luego de hallar la rapidez de los cuerpos (d. ch.) obtenemos valores positivos, entonces lo que hemos supuesto es correcto y en caso de obtener valores negativos, las direcciones supuestas se tienen que invertir, pero los valores absolutos correspondientes son correctos.

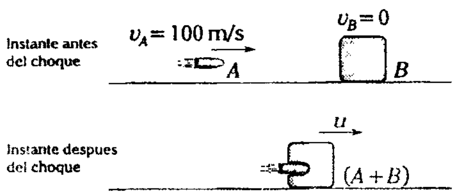
Ejemplo 6 (choque plástico)

Sabiendo que luego del choque la bala de 0,1 kg se incrusta en el madero de 1,9 kg, determine la rapidez del bloque después del choque y la energía disipada.



Resolución

Como después del choque la bala se incrusta en el bloque, entonces los cuerpos se moverán con la misma rapidez experimentando así un choque plástico, por ello planteamos



Para determinar u solo es necesario aplicar conservación de la cantidad de movimiento para el sistema.

$$\vec{p}_{(a\,ch.)} = \vec{p}_{(d\,ch.)}$$

$$m_A v_A = (m_A + m_B)u$$

$$\Rightarrow \quad (0,1)(100) = 2u$$

$$\therefore \quad u = 5 \text{ m/s}$$

Ahora, para determinar la energía disipada planteamos un balance de energía para el sistema.

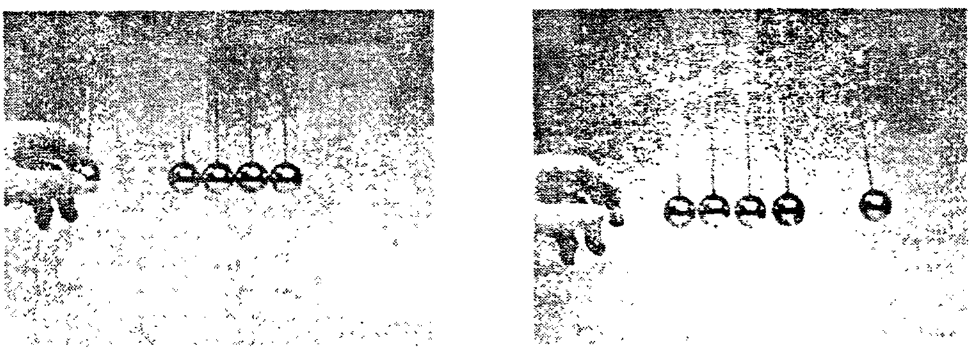
$$E_{C(a\,ch.)} = E_{C(d\,ch.)} + Q_{dis}$$

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 + Q_{dis}$$

$$\frac{1}{2}(0,1)(100)^2 = \frac{1}{2}(2)(5)^2 + Q_{dis}$$

$$500 = 25 + Q_{dis}$$

$$\therefore \quad Q_{dis} = 475 \text{ J}$$



La fotografía muestra la transmisión total de la cantidad de movimiento y de la energía cinética por medio de continuos choques elásticos frontales.

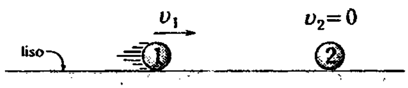
Problema 1

Se muestra a una esfera que va a impactar frontal y elásticamente con otra de igual dimensión. Determine la velocidad de cada esfera después del choque, si

a. $m_1 > m_2$

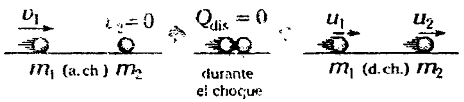
b. $m_1 = m_2$

c. $m_1 < m_2$



Resolución

Se indica que el choque es frontal y elástico, entonces durante el choque no hay disipación de energía, es decir hay conservación de la energía cinética del sistema y la dirección de movimiento de las esferas antes y después del choque es paralela a la línea de choque, tal como se indica



Con respecto a la dirección de movimiento de m_2, durante el choque, recibe un impulso hacia la derecha. Es evidente que esa es la única posibilidad y sobre la dirección de movimiento de m_1 ésta puede mantener su dirección de movimiento, puede quedar en reposo o también rebotar, pero solo una de esas tres situaciones es posible, la cual queda completamente definida después de calcularse $\vec{u}_1$.

Entonces determinemos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. La cantidad de movimiento, es decir para el sistema se conserva.

$$\vec{p}_{(a.ch)} = \vec{p}_{(d.ch)}$$

$$\Rightarrow \; +m_1\upsilon_1 = +m_1u_1 + m_2u_2 \qquad \text{(I)}$$

Se requiere otra relación entre u_1 y u_2, si bien se puede usar conservación de la energía cinética del sistema pues no se disipa calor, trae como consecuencia muchas operaciones. Más apropiado es usar el coeficiente de restitución (e) ya que para este choque es $e = 1$. Tenemos de esta manera

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,alej}_{R\,(d.ch)}\right|}{\left|\vec{\upsilon}^{\,acerc}_{R\,(a.ch.)}\right|} \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{\upsilon_1} = 1$$

$$\Rightarrow \; u_2 - u_1 = \upsilon_1 \qquad \text{(II)}$$

Después de resolver simultáneamente (I) y (II) se obtiene que

$$u_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1 \; ; \; u_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1$$

Analicemos estos resultados

a. ¿Qué sucede si $m_1 > m_2$?

Reemplazando en las ecuaciones obtenidas se obtiene $u_1 > 0$; significa que m_1 después del choque se mueve hacia la derecha.

Por lo tanto, después del choque ambas esferas se mueven en la misma dirección.

b. En el caso que $m_1 = m_2$

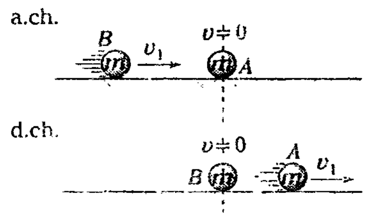
Reemplazando en las ecuaciones

$u_1 = 0$ (m_1 queda en reposo) y

$$u_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_1}\right)\upsilon_1 = \upsilon_1$$

$\therefore \; u_2 = \upsilon_1$ (m_2 se mueve con υ_1)

En resumen para este caso

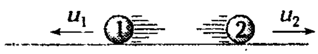


¡Hay transferencia total de cantidad de movimiento y energía cinética!

c. Y por último si $m_1 < m_2$
Reemplazando en las ecuaciones
$u_1 < 0$; significa que m_1 después del choque se mueve hacia la izquierda.
Por lo tanto después del choque las esferas se mueven en direcciones opuestas, es decir m_1 rebota

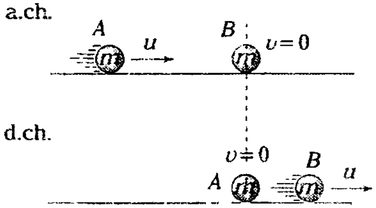
a.ch.

d.ch.



Propiedad

Cuando un cuerpo realiza un choque frontal elástico contra otro cuerpo de **igual masa en reposo**, le transfiere totalmente su cantidad de movimiento y energía cinética, quedándose al final en reposo.

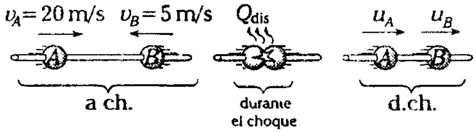


Problema 2

Las cuentas que se muestran van a chocar inelásticamente ($e = 0{,}8$) ¿Aumenta o disminuye la energía cinética de la cuenta B?
(Considere $m_B = 2m_A = 10$ g)

Resolución

Como $e=0{,}8$ el choque entre las cuentas será frontal inelástico. Esto implica que habrá deformación parcial de las cuentas y disipación de energía (calor y sonido).



Las direcciones de movimiento de las cuentas después del choque las hemos elegido en forma arbitraria, lo cual se puede someter a rectificación.
Si deseamos establecer qué pasa con la energía cinética de la cuenta B planteamos para ella

$$\Delta E_{C(B)} = E_{C(\text{d ch})} - E_{C(\text{a ch.})} = \frac{m_B}{2}u_B^2 - \frac{m_B}{2}v_B^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E_{C(B)} = \frac{m_B}{2}\left(u_B^2 - v_B^2\right)$$

$$\Delta E_{C(B)} = \frac{10\times10^{-3}}{2}\left(u_B^2 - (5)^2\right)\text{ J} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere u_B.
Para determinar u_B podemos considerar primero conservación de la cantidad de movimiento del sistema.

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_{(\text{a ch.})} = \vec{p}_{(\text{d ch.})}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B$$

$$\Rightarrow \quad (+m_A v_A) + (-m_B v_B) = (+m_A u_A) + (+m_B u_B)$$

$$\Rightarrow \quad +\cancel{m}(20) - 2\cancel{m}(5) = +\cancel{m}u_A + 2\cancel{m}u_B$$

$$\Rightarrow \quad u_A + 2u_B = 10 \qquad \text{(II)}$$

Se requiere otra relación entre u_A y u_B, la cual podemos obtenerla si consideramos el coeficiente de restitución ($e=0{,}8$).

$$e = \frac{|\vec{u}_{rel\,(\text{d ch.})}|}{|\vec{v}_{rel\,(\text{a ch.})}|} = \frac{u_B - u_A}{v_A + v_B} = 0{,}8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_B - u_A}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad u_B - u_A = 20 \qquad \text{(III)}$$

Resolviendo (II) y (III) se obtiene que

$u_A = -10$ m/s y $u_B = 10$ m/s

El signo (–) para u_A solo implica que después del choque la cuenta A se mueve en dirección contraria a la establecida.

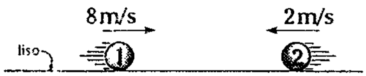
Al reemplazar u_B en (I) se obtiene

$$\Delta E_{C(B)} = +0{,}375\ \text{J}$$

El signo (+) implica que la E_C de la cuenta B aumenta en el valor que se indica, es decir A realizó trabajo sobre B durante la colisión, le transfirio parte de su E_C.

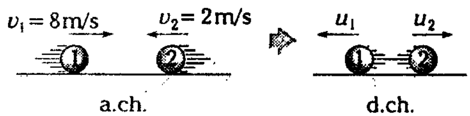
Problema 3

Si las esferas mostradas chocan frontalmente, y se disipa durante el choque 78 J, determine el coeficiente de restitución del choque.
($m_1 = 3$ kg ; $m_2 = 13$ kg)



Resolución

Representemos gráficamente el sistema un instante antes y un instante después del choque como $m_1 < m_2$ y es probable que 1 rebote así



Después del choque no podemos precisar con anticipación en qué dirección se moverán las esferas, por ello lo que hacemos es asumir una dirección y posteriormente los resultados determinarán si asumimos correcta o incorrectamente la dirección d.ch.

Como u_1 y u_2 son módulos de velocidad, deben ser positivos. En caso que el resultado final, como el problema anterior, resulte ser negativo, entonces la dirección asumida es incorrecta (debe ser la dirección contraria).

Nos piden evaluar

$$e = \frac{\left|\vec{u}_{R\,(\text{d.ch.})}^{\ \text{alej}}\right|}{\left|\vec{v}_{R\,(\text{a.ch.})}^{\ \text{acerc}}\right|} = \frac{u_1 + u_2}{v_1 + v_2}$$

$$\Rightarrow\ e = \frac{u_1 + u_2}{8 + 2} = \frac{u_1 + u_2}{10} \qquad \text{(I)}$$

El sistema conserva su cantidad de movimiento, debido a que sobre el sistema $\vec{F}_R = \vec{0}$

$$\Rightarrow\ \vec{p}_{0(\text{a ch})} = \vec{p}_{F(\text{d ch})}$$

$$m_1(+v_1) + m_2(-v_2) = m_1(-u_1) + m_2(+u_2)$$

$$(3)(+8) + (13)(-2) = -3u_1 + 13u_2$$

$$-2 = 13u_2 - 3u_1 \qquad \text{(II)}$$

Resulta conveniente hacer un balance de energía para el sistema, ya que durante la colisión se disipó calor.

$$\therefore\ E_{C_0} = E_{C_F} + Q_{\text{dis}}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + Q_{\text{dis}}$$

$$\frac{1}{2}(3)(8)^2 + \frac{1}{2}(13)(2)^2 = \frac{1}{2}(3)u_1^2 + \frac{1}{2}(13)u_2^2 + 78$$

$$96 + 26 = \frac{3}{2}u_1^2 + \frac{13}{2}u_2^2 + 78$$

$$88 = 3u_1^2 + 13u_2^2 \qquad \text{(III)}$$

Resolviendo (II) y (III)

$$u_1 = 5\ \text{m/s} \quad \text{y} \quad u_2 = 1\ \text{m/s}$$

(Como ambas son positivas las direcciones asumidas son correctas).

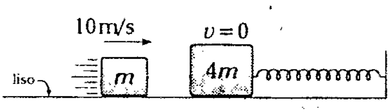
Reemplazando en (I)

$$e = \frac{(5) + (1)}{10} = 0{,}6$$

El choque es inelástico.

Problema 4

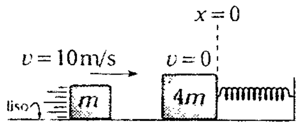
Si entre los bloques se da un choque frontal plástico, determine la máxima deformación del resorte de K = 200 N/m (m = 0,1 kg)



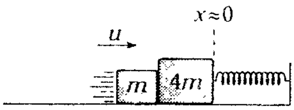
Resolución

Después del choque frontal plástico los bloques se mueven pegados con una rapidez común (u).

a.ch.



un instante
d.ch.



Un instante antes e inmediatamente d.ch. sobre el sistema la $\vec{F}_R = \vec{0}$, entonces se conserva la cantidad de movimiento del sistema.

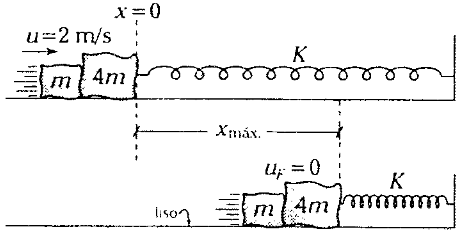
$$\vec{p}_{(\text{a ch.})} = \vec{p}_{(\text{d ch.})}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}(+\upsilon) = 5\cancel{m}(+u)$$

$$\Rightarrow 10\text{ m/s} = 5u$$

$$\Rightarrow u = 2\text{ m/s}$$

Con una rapidez de 2 m/s los bloques inmediatamente d.ch. empiezan a comprimir al resorte; la máxima deformación de resorte ($x_{\text{máx}}$) se tendrá cuando los bloques ya no puedan seguir avanzando, es decir cuando $u_F = 0$.



Para determinar $x_{\text{máx}}$ hacemos un balance de energía d.ch., como no hay rozamiento del gráfico establecemos que $E_{C(\text{d ch})}^{\text{bloque}}$ se transforma en E_{PE}^{resorte} (es decir ésta se conserva para el sistema).

$$\Rightarrow E_{C(\text{d ch})}^{\text{bloque}} = E_{PE}^{\text{resorte}}$$

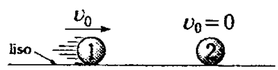
$$\Rightarrow \frac{(5m)u^2}{\cancel{2}} = \frac{Kx_{\max}^2}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow 5(0,1)(2)^2 = 200x_{\max}^2$$

$$\therefore x_{\max} = 0,1\text{ m}$$

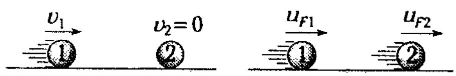
Problema 5

Dos esferas de igual tamaño y de masas m_1 y m_2 respectivamente se encuentran sobre una superficie horizontal lisa. Si el choque entre ellas es frontal, determine el coeficiente de restitución de tal manera que la esfera (1) luego del choque no rebote.



Resolución

Como la condición del problema es que la esfera (1) no rebote, entonces luego del choque debe seguir moviéndose hacia la derecha o quedarse en reposo.



a.ch. d.ch.

De la figura, para la condición del problema es necesario que

$$u_1 \geq 0 \qquad \text{(I)}$$

El coeficiente de restitución para el choque se determina como

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,alej}_{R(d.ch.)}\right|}{\left|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}\right|} = \frac{u_2 - u_1}{v_1}$$

$$\Rightarrow \quad u_2 = u_1 + ev_1 \qquad \text{(II)}$$

Como los datos en el problema son m_1 y m_2, se debe expresar e en función de ellas.

Ahora, la cantidad de movimiento para el sistema se conserva, entonces

$$\Sigma\vec{p}_{a.ch.} = \Sigma\vec{p}_{d.ch.}$$

$$\Rightarrow \quad m_1(+v_1) = m_1(+u_1) + m_2(+u_2) \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) en (III)

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2(u_1 + ev_1)$$

$$m_1v_1 = m_1u_1 + m_2u_1 + em_2v_1$$

$$v_1(m_1 - em_2) = u_1(m_1 + m_2)$$

$$\therefore \quad u_1 = \frac{v_1(m_1 - em_2)}{(m_1 + m_2)}$$

Pero la condición (I) es necesaria

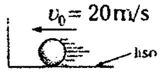
$$\frac{v_1(m_1 - em_2)}{m_1 + m_2} \geq 0$$

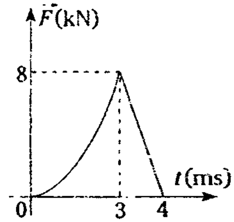
$$m_1 - em_2 \geq 0$$

$$\therefore \quad e \leq \frac{m_1}{m_2}$$

Problema 6

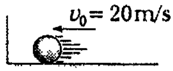
La gráfica nos muestra el comportamiento de la fuerza de la pared sobre la esfera de jebe, durante el choque frontal. Determine el coeficiente de restitución del choque y además la energía potencial elástica que como máximo adquiere la esfera. (m_{esfera}=0,5 kg)



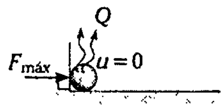


Resolución

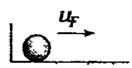
Instante antes del choque, luego se iniciará la deformación



Fin de la fase deformadora. Instante en el cual es máxima la energía potencial elástica.



En este instante la fuerza de la pared es máxima. Luego, recupera sus dimensiones y



finaliza el choque, alejándose de la pared.

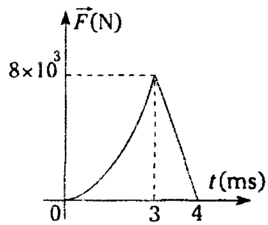
Para el choque frontal de la esfera contra la pared rígida, definimos

$$e = \frac{u_F}{v_0} = \frac{u_F}{20} \qquad \text{(I)}$$

Ahora, analizando solo la fase recuperadora del choque tenemos

$$\underbrace{\vec{I}_{recuperador}} = \vec{p}_F - \cancel{\vec{p}_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{(\triangle)}{\text{Área Triángulo}} = m\,u_F$$



$$\frac{(8\times10^3)(10^{-3})}{2}=(0,5)(u_F)$$

$\therefore\; u_F=8$ m/s

Reemplazando en (I)

$e=0,4$

Esto significa que el choque es inelástico, se disipa calor, lo cual ocurre durante la fase deformadora del choque, aunque durante la fase recuperadora la energía mecánica se conserva. Por lo tanto entre el inicio y fin, solo de la fase recuperadora tenemos que

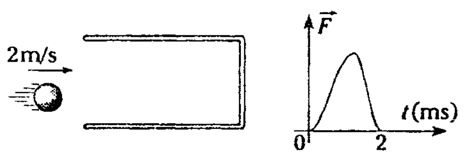
$$E_{PF(\max)}=E_{C_F}=\frac{1}{2}mu_F^2$$

$$E_{PE(\text{máx})}=\frac{1}{2}(0,5)(8)^2$$

$$\Rightarrow\; E_{PE(\max)}=16\text{ J}$$

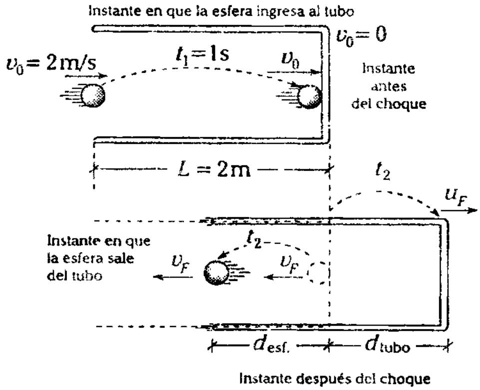
Problema 7

Se muestra un tubo liso de 2 m de largo y paredes muy delgadas que reposa sobre una superficie horizontal lisa. El tubo está abierto en un extremo y cerrado en el otro. Si la pequeña esfera permanece dentro del tubo 3,502 s determine el coeficiente de restitución del choque. La gráfica muestra el comportamiento de la fuerza que la esfera ejerce sobre el tubo durante el choque frontal.



Resolución

Representemos gráficamente algunos de los momentos más importantes antes y después del choque. Tenga en cuenta que pudiendo ser la masa de la esfera muy pequeña en comparación con la masa del tubo, lo más probable es que luego del choque rebote.



Como sabemos el coeficiente de restitución se determina como

$$\Rightarrow\; e=\frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R(\text{d ch})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R(\text{a ch})}\right|}$$

$$e=\frac{v_F+u_F}{v_0}=\frac{v_F+u_F}{2} \qquad \text{(I)}$$

Note del segundo gráfico que

$$d_{\text{esfera}}+d_{\text{tubo}}=L_{\text{tubo}}$$

$$v_Ft_2+u_Ft_2=2$$

$$\therefore\; v_F+u_F=\frac{2}{t_2} \qquad \text{(II)}$$

Ahora, debemos tener presente que el tiempo total (t_{total}) que la esfera permanece dentro del tubo vendría determinado por t_1, t_2 y por la duración del choque (Δt).

$$t_{\text{total}}=t_1+\Delta t_{\text{choque}}+t_2 \qquad \text{(III)}$$

Se ha deducido que t_1=4 s, según dato t_{total}=3,502 s y según la gráfica $\vec{F}-t$, se observa y se deduce

$$\Delta t_{\text{choque}}=0,002\text{ s}$$

Reemplazando estos valores en (III)

$$3,502=1+0,002+t_2$$

$$\therefore\; t_2=2,5\text{ s}$$

Reemplazando en (I)

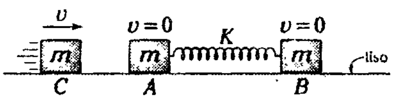
$$v_F + u_F = 0{,}8$$

Finalmente, reemplazando en (I)

$$e = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4 \quad \text{(El choque es inelástico)}$$

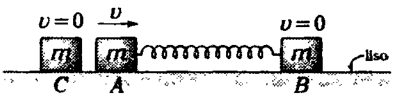
Problema 8

El bloque que está en movimiento tiene una energía cinética (E_C). Si luego choca frontal y elásticamente con el bloque A, determine la máxima deformación que experimenta el resorte.



Resolución

Por condición del problema los bloques A y B están en reposo unidos a un resorte sobre una superficie lisa, esto solo es posible si el resorte está sin deformar. Se sabe que los bloques son de igual masa y que el bloque C chocará frontal y elásticamente al bloque A; después del choque, C se quedará en reposo y A adquirirá la rapidez de C, tal como lo mostramos a continuación (ver propiedad del problema 1).

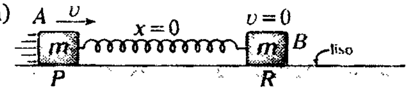


Asimismo se entiende que durante el choque el bloque C le transmitió toda su energía cinética (E_C) al bloque A, ya que por darse choque elástico la energía disipada se desprecia ($E_{C(B)} = E_{C(C)}$)

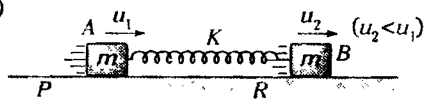
Ahora calculemos la máxima deformación ($x_{máx}$) del resorte. ¿En qué instante se tendrá $x_{máx}$?

Inmediatamente después del choque entre los bloques C y A, el bloque A empieza a comprimir al resorte y mientras esto ocurre el bloque B empieza a moverse hacia la derecha debido a la fuerza que le ejerce el resorte comprimido. Esto nos haría entender que los bloques A y B se van a mover simultáneamente mientras el resorte se va comprimiendo. ¿Por qué se le sigue comprimiendo al resorte? Después del choque el bloque A es más rápido que el bloque B. Esto produce el acercamiento de A sobre B con lo cual el resorte se comprime y a partir de aquí podemos deducir que la máxima deformación del resorte se tendrá cuando A ya no pueda acercarse a B, siempre y cuando sus velocidades sean iguales tal como lo indicamos en la siguiente figura:

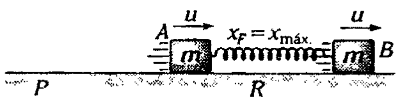
(a)



(b)



(c) El acercamiento de A hacia B termina cuando.



Para calcular $x_{máx}$ podemos hacer un balance de energía mecánica para el sistema de (a) a (c).

$$E_{C(A)} = E'_{C(A)} + E'_{C(B)} + E_{PE}^{\text{resorte}}$$

$$\Rightarrow \quad E_C = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{Kx_{máx}^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_C = mu^2 + \frac{Kx_{máx}^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere u^2, y se puede determinar de (a) a (c) si se considera la conservación de la cantidad de movimiento del sistema, ya que sobre el sistema en todo instante la fuerza resultante es nula ($F_R = 0$). De esta manera

$$\vec{P}_{(a)} = \vec{P}_{(c)}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}v = \cancel{m}u + \cancel{m}u$$

$$\Rightarrow u = \frac{v}{2} \qquad \text{(II)}$$

Ahora reemplazamos (II) en (I)

$$E_C = m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{K}{2}x_{\text{máx}}^2$$

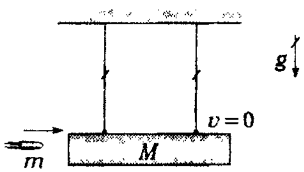
$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{mv^2}{2}\right)}_{E_C} + \frac{K}{2}x_{\text{máx}}^2$$

$$\Rightarrow \frac{K}{2}x_{\max}^2 = \frac{E_C}{2}$$

$$\therefore x_{\max} = \sqrt{\frac{E_C}{K}}$$

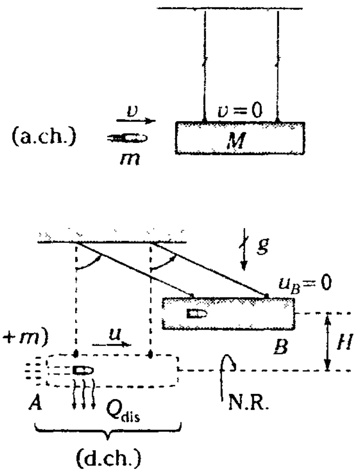
Problema 9

El sistema mostrado es llamado péndulo balístico, si el bloque logra elevarse como máximo H determine la rapidez del proyectil antes que se incruste.



Resolución

Un péndulo elástico permite estimar la rapidez de los proyectiles (balas) que se disparan desde pistola, rifles, escopeta, etc. En el problema nos piden la rapidez antes del impacto, lo cual lo podemos bosquejar según el siguiente gráfico:



Sobre el sistema, al no haber antes, durante y después del choque fuerzas horizontales, la cantidad de movimiento en dicha dirección no varía, además como el proyectil se incrusta en el bloque, entendemos que es un choque plástico. Si inmediatamente después del choque dichos cuerpos se mueven con una rapidez común (u), esta rapidez se anulará cuando el bloque alcance su altura máxima (H).

Si tenemos que calcular la rapidez (v), para el sistema (proyectil-tablón) es conveniente considerar la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección horizontal puesto que $\vec{F}_{R(H)} = \vec{0}$. Por lo tanto

$$\vec{P}_{(a\,ch)} = \vec{P}_{(d\,ch)}$$

$$\Rightarrow mv = (M+m)u$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{M+m}{m}\right)u \qquad \text{(I)}$$

Como vemos, en (I), se requiere calcular u, lo cual lo podríamos determinar considerando que la energía cinética de dicho sistema, (bloque –proyectil) cuando va A hacia B se transforma en energía potencial gravitatoria. Por consiguiente

$$E_{C(A)}=E_{PE(B)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{(M+m)}u^2}{2}=\cancel{(M+m)}gH$$

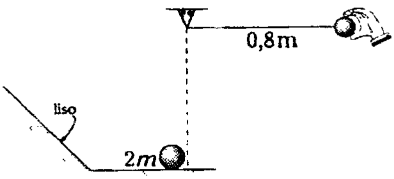
$$\Rightarrow \quad u=\sqrt{2gH} \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, reemplazamos (II) en (I)

$$\therefore \quad v=\left(\frac{M+m}{m}\right)\sqrt{2gh}$$

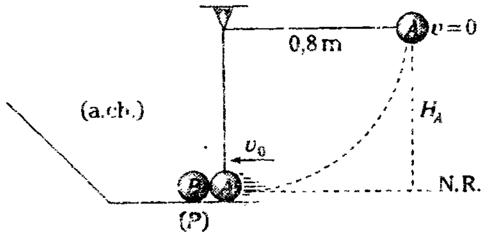
Problema 10

Se muestra el instante en que se suelta a una esfera. Si choca inelásticamente (e = 0,8) a la que está en reposo, ¿qué altura máxima alcanzará cada esfera? (g = 10 m/s^2)



Resolución

Al soltar la esfera A ésta cae y describe parte de una circunferencia, mas al llegar a la parte más baja de su trayectoria experimenta un choque frontal inelástico con la esfera B, lanzando a ésta hacia la superficie inclinada. Ahora para determinar la altura que alcanza cada esfera luego del choque existe la necesidad de conocer las velocidades que adquieren luego del choque.



Observe que antes del choque con B, la esfera A conserva su energía mecánica para A.

$$E_{M_0}=E_{M_P}$$

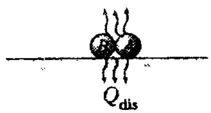
$$\cancel{m_A}gH_A=\frac{1}{2}\cancel{m_A}v_0$$

$$(10)\left(\frac{8}{10}\right)=\frac{1}{2}v_0$$

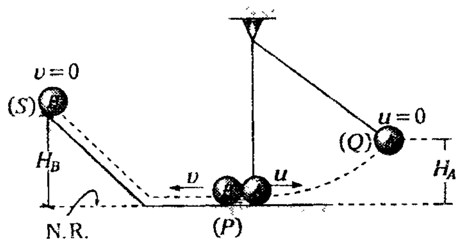
$$\therefore \quad v_0=4\text{ m/s}$$

Es la rapidez de A un instante antes del choque con B.

Durante el choque (e = 0,8) se tiene



Después del choque sucede



Durante un choque inelástico la energía cinética no se conserva, pero sí se conserva la cantidad de movimiento del sistema formado por las esferas.

$$\vec{p}_{(\text{a.ch.})} = \vec{p}_{(\text{d ch.})}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{m}v_0 = 2\cancel{m}(-v) + \cancel{m}u$$

$$-4 = -2v + u \qquad \text{(I)}$$

Como para el choque $e = 0{,}8$

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R(\text{d.ch.})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R(\text{a ch.})}\right|}$$

$$e = \frac{v+u}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{10} = \frac{v+u}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 16 = 5v + 5u \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) se obtiene

$$v = 2{,}4 \text{ m/s}$$
$$u = 0{,}8 \text{ m/s}$$

Luego del choque, B se desplaza por una superficie lisa, y su energía mecánica se conserva. La altura máxima que logra alcanzar será cuando su velocidad sea nula y de P hacia S verifica que

$$E_{M(P)} = E_{M(S)}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}_B v^2 = \cancel{m}_B g H_B$$

$$\frac{1}{2}(2{,}4)^2 = (10)H_B$$

$$\Rightarrow \quad H_B = 0{,}288 \text{ m} = 28{,}8 \text{ cm}$$

Análogamente, luego del choque la esfera A conserva su energía mecánica. De P hacia Q.

$$\Rightarrow \quad E_{M(P)} = E_{M(Q)}$$

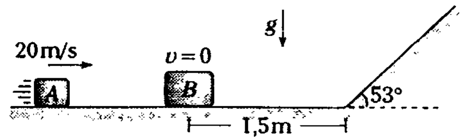
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{m}_A u^2 = \cancel{m}_A g H_A$$

$$\frac{1}{2}(0{,}8)^2 = (10)H_A$$

$$\Rightarrow \quad H_A = 0{,}032 \text{ m} = 3{,}2 \text{ cm}$$

Problema 11

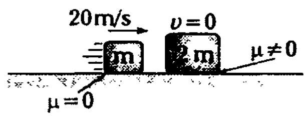
A partir del gráfico, después del choque frontal inelástico ($e = 0{,}8$), calcule la altura máxima que logra alcanzar el bloque respecto del piso. (Considere al bloque A liso, el coeficiente de rozamiento cinético entre B y la superficie igual a $1/3$ $g = 10$ m/s^2 y $m_B = 2m_A$



Resolución

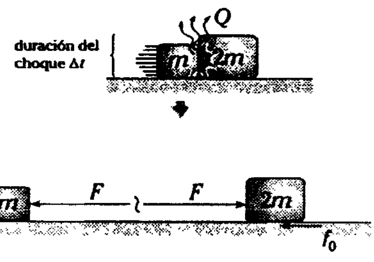
Para calcular la altura que logra alcanzar el bloque B, previamente debemos determinar la rapidez que adquiere B inmediatamente después del choque.

Instante antes del choque

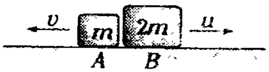


El bloque A mantiene su velocidad hasta un instante antes de chocar con B, al ser liso y no manifestarse sobre él la fuerza de rozamiento.

Luego ocurre el choque, de esta manera



La duración del choque (Δt), es breve; es decir $\Delta t \approx 0$ y el impulso de la fuerza de rozamiento que se manifiesta sobre el bloque $2m$, es $\vec{I}_f = \vec{f}.\Delta t \approx \vec{0}$. En consecuencia analizando ahora el sistema vemos que en la figura anterior $\vec{I}_{res} = \vec{0}$; e inmediatamente después del choque, m rebota pues es menor que $2m$ luego:



Para el sistema, durante el choque $\vec{I}_{res} = \vec{0}$; entonces se conserva su cantidad de movimiento

$$\Rightarrow \vec{p}_{(a.ch.)} = \vec{p}_{(d\ ch.)}$$

$$\Rightarrow m(20) = 2m(+u) + m(-v)$$

Simplificando

$$2u - v = 20 \qquad \text{(I)}$$

Ahora, para determinar otra relación entre u y v consideramos el coeficiente de restitución ($e = 0{,}8$).

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,alej}_{R(d\ ch.)}\right|}{\left|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}\right|} = 0{,}8$$

Del gráfico deducimos

$$\frac{v+u}{20} = \frac{8}{10}$$

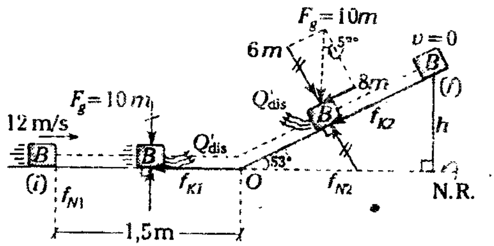
$$\Rightarrow \quad v + u = 16 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$u = 12 \text{ m/s}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

Para calcular la altura máxima (h) que alcanza B establecemos un balance de energía después del choque, desde (i) hacia (f).



Cuando el bloque se traslada de (i) hacia (f), su energía cinética se transforma en energía potencial gravitatoria y en calor (Q_{dis}) debido al rozamiento. Entonces de (i) hacia (f) al hacer el balance de energía sería

$$E_{C(i)} = E_{PG(f)} + Q_{dis} + Q'_{dis}$$

$$\Rightarrow \quad E_{C(i)} = E_{PG(f)} + \left|W^{f_{K1}}_{i\to o}\right| + \left|W^{f_{K2}}_{o\to f}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mv_i^2}{2} = mgh + f_{K1}.d_{io} + f_{K2}.d_{of}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{mv_i^2}{2} = mgh + \mu_K f_{N1} d_{io} + \mu_K f_{N2} d_{of}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{m}(12)^2}{2} = \cancel{m}(10)h + \frac{1}{3}(10\cancel{m})(1{,}5) + \frac{1}{3}(6\cancel{m})\left(\frac{5h}{4}\right)$$

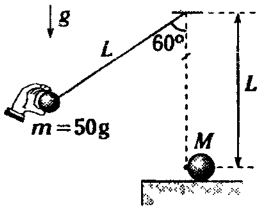
$$\Rightarrow \quad 72 = 10h + 5 + \frac{5h}{2}$$

$$\therefore \quad h = 5{,}36 \text{ m}$$

Como se puede notar el problema ha sido resuelto teniendo en cuenta un balance de energía después del choque, pero podría resolverse aplicando conceptos de dinámica y cinemática en cada tramo cuya superficie sea rugosa. Se deja para ejercicio del lector el ensayo de dicha resolución.

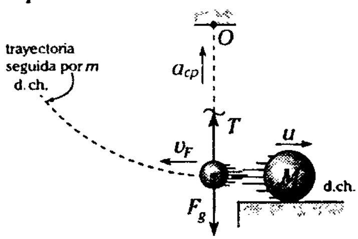
Problema 12

La figura muestra el instante en que la esfera, atada a una cuerda, es soltada. Posteriormente, esta esfera choca frontal e inelásticamente contra otra de mayor masa en reposo. Determine el valor de tensión en la cuerda inmediatamente después del choque. ($g = 10$ m/s^2 ; $L = 40$ cm ; $e = 0,5$; $M = 4m$)



Resolución

Luego de soltar a la esfera de masa m, ésta descenderá y describirá parte de una circunferencia con una rapidez que se irá incrementando hasta el instante que impacte contra la esfera de masa M. Producto del choque esta última esfera empezará a moverse. Debido a su menor masa es razonable suponer que la esfera atada a la cuerda después del choque frontal rebotará. Inmediatamente después del choque, la esfera atada a la cuerda iniciará un movimiento cuya trayectoria será parte de una circunferencia. En ese instante su velocidad es horizontal y las fuerzas que actúan sobre ésta son verticales.



Para calcular el módulo de la tensión, debemos notar que m describe movimiento circunferencial

$$\Rightarrow \quad F_{cp} = ma_{cp}$$

$$T - F_g = m\frac{v_F^2}{L}$$

de donde

$$T = \frac{mv_F^2}{L} + F_g \qquad \text{(I)}$$

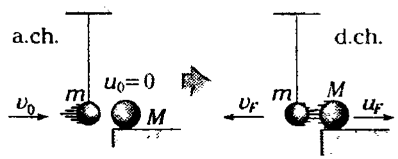
Reemplazando datos tenemos

$$T = 0,125v_F^2 + 0,5 \qquad \text{(II)}$$

Ahora necesitamos conocer el módulo de la velocidad de la esfera (v_F) y para determinarlo consideramos

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R(\text{d.ch.})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acerc}}_{R(\text{a.ch.})}\right|} = 0,5 \qquad \text{(III)}$$

Analizando las velocidades



Del gráfico anterior y considerando para el choque las direcciones de las velocidades tenemos en la relación (III)

$$\frac{u_F + v_F}{v_0} = 0,5$$

$$\Rightarrow \quad v_F + u_F = 0,5v_0 \qquad \text{(IV)}$$

Otra relación que vincula la rapidez de las esferas justo antes y después del choque, se obtiene con la conservación de la cantidad de movimiento del sistema pues un instante antes, durante y un instante después del choque, la fuerza resultante sobre el sistema en la dirección horizontal es nula.

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_{(\text{a.ch.})} = \vec{p}_{(\text{d.ch.})}$$

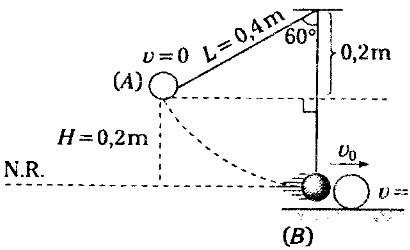
$$m\vec{v}_0 = M\vec{u}_F + m\vec{v}_F$$

$$mv_0 = Mu_F + (-mv_F)$$

$$\cancel{m}v_0 = (4\cancel{m})u_F - \cancel{m}v_F$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = 4u_F - v_F \qquad \text{(V)}$$

Ahora necesitamos el módulo de la velocidad de m un instante antes de chocar $(\vec{v}_0)$, este puede determinarse si se tiene en cuenta que la energía mecánica de la esfera m se conserva cuando va de (A) hacia (B).



A partir del gráfico planteamos

$$E_{M(A)} = E_{M(B)}$$

$$\cancel{m}gH = \frac{\cancel{m}v_0^2}{2}$$

$$10(0,2) = \frac{v_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = 2\text{ m/s}$$

Reemplazando en (IV) y (V) tenemos

$$v_F + u_F = 1$$

$$4u_F - v_F = 2$$

Resolviendo simultáneamente se obtiene

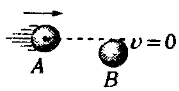
$$u_F = \frac{3}{5}\text{ m/s} \;\text{ y }\; v_F = \frac{2}{5}\text{ m/s}$$

Reemplazando v_F en (II)

$$T = 0,52\text{ N}$$

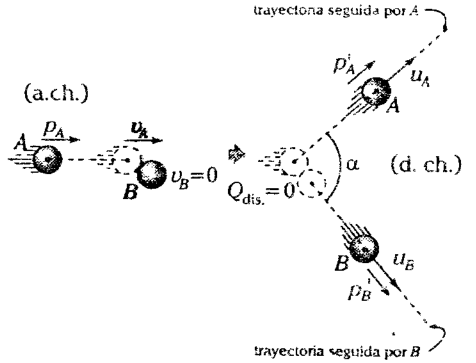
Problema 13

La esfera A le va a impactar elásticamente a la esfera B. Si sus masas son iguales, ¿qué medida tiene el ángulo que forman sus trayectorias después del choque? (Considere que todo se desarrolla sobre una superficie horizontal lisa)



Resolución

Según las condiciones geométricas que se dan antes del choque, las esferas experimentarán un choque elástico oblicuo y después del choque se trasladarán aproximadamente como se indica.

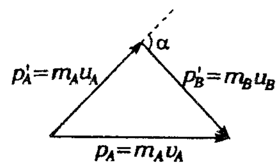


Para este tipo de choque también la cantidad de movimiento del sistema se conserva. Entonces planteamos

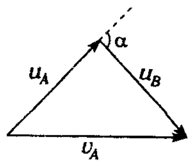
$$\vec{p}_{(a.ch.)} = \vec{p}_{(d.ch.)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_A = \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B$$

Procediendo geométricamente con las cantidades de movimiento $\vec{p}_A, \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B$ formamos un triángulo



Por condición se plantea que $m_A = m_B$, entonces el triángulo formado puede expresar sus lados en función de las velocidades.



Ahora como el choque es elástico no se disipa energía (calor) entonces se conserva la energía (cinética) para el sistema.

$$E_{C(\text{a.ch.})} = E_{C(\text{d.ch.})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_A u_A^2 + \frac{1}{2}m_B u_B^2$$

Como $m_A = m_B$; simplificando queda

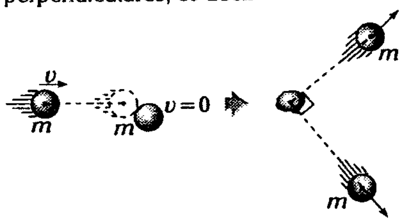
$$v_A^2 = u_A^2 + u_B^2 \qquad (\theta)$$

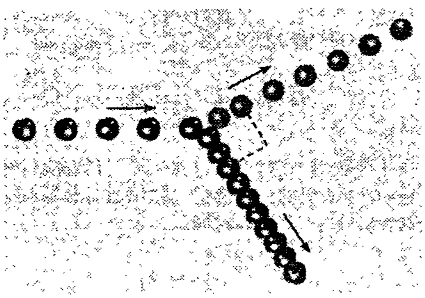
Esta expresión nos representa el teorema de Pitágoras y en donde para el triángulo construido, u_A y u_B son catetos y v_A la hipotenusa. Con esto se concluye que $\vec{u}_A \perp \vec{u}_B$, y $\alpha = 90°$.

Las trayectorias seguidas por las esferas después del choque son perpendiculares.

Propiedad

Si un cuerpo le impacta oblicua y elásticamente a otro de igual masa en reposo, después del choque las trayectorias que siguen los cuerpos son perpendiculares, es decir





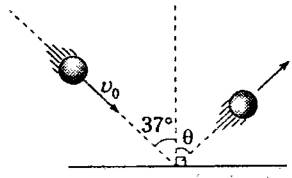
En la práctica se demuestra que si dos discos idénticos chocan oblicua y elásticamente, inmediatamente después del choque siguen trayectorias perpendiculares. Esto lo muestra la fotografía estroboscópica.

Problema 14

Una esfera se desplaza sobre el tablero horizontal de una mesa de billar y colisiona con la baranda tal como se muestra. Despreciando el rozamiento, determine θ cuando

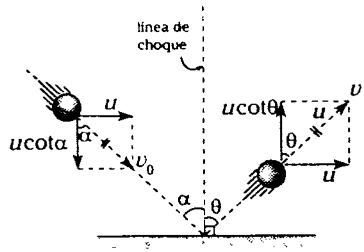
a. $e = 1$

b. $e = \frac{3}{4}$



Resolución

Como se trata de un choque oblicuo de modo que no hay rozamiento, entonces en la horizontal la componente de la velocidad no varía (u = cte.)



Sobre la línea de choque definimos

$$e = \frac{\left|\vec{u}_{R(\text{d.ch})}^{\text{alej}}\right|}{\left|\vec{v}_{R(\text{a.ch})}^{\text{acerc}}\right|} = \frac{u\cot\theta}{u\cot\alpha}$$

Simplificando

$$\Rightarrow \quad \cot\theta = e\cot\alpha$$

de donde

$$\tan\theta = \frac{\tan\alpha}{e} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Relación de} \\ \text{choque oblicuo}\end{array}\right) \qquad (\text{I})$$

A partir de esta relación reemplazamos los coeficientes de restitución e para cada caso

a. En el caso de un choque elástico, tenemos que $e = 1$

En (I) $\tan\theta = \dfrac{\tan\alpha}{1}$

$\therefore\ \theta = \alpha$

En nuestro caso, $\alpha = 37°$, entonces $\theta = 37°$.

b. En el caso de un choque inelástico, tenemos que $0 < e < 1$, en nuestro caso $e = \dfrac{3}{4}$ y

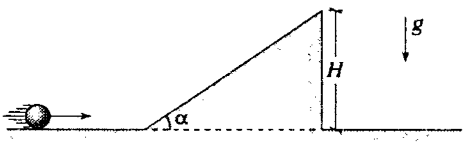
$\alpha = 37°$, luego en (I)

$$\tan\theta = \frac{\tan 37°}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1$$

$\therefore\ \theta = 45°$

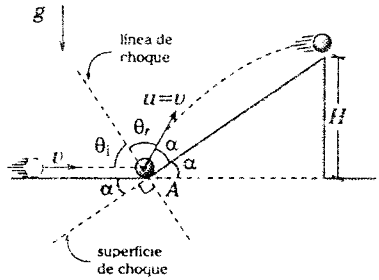
Problema 15

Una pequeña esfera que se mueve horizontalmente por un plano liso choca elásticamente contra la rampa inclinada, tal como se muestra. Determine la rapidez de la esfera para que luego del rebote deba pasar rozando la parte más alta de la rampa, de pendiente α y altura H.



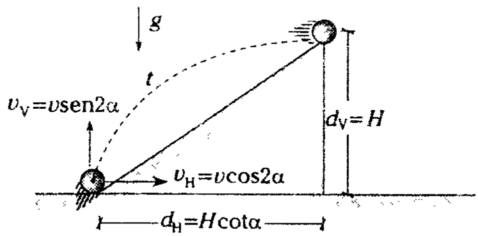
Resolución

La esfera que va impactar sobre la rampa lo hace oblicuamente bajo un ángulo de incidencia $(\theta_i = 90° - \alpha)$. Como el impacto es elástico, la esfera después del choque rebota con la misma rapidez con la cual impactó. Además el ángulo de reflexión (θ_r) es igual al de incidencia, es decir $\theta_i = \theta_r = 90° - \alpha$.



Se observa que la pequeña esfera después del choque elástico inmediatamente rebota con $u = \upsilon$ y empieza a describir un M.P.C.L. bajo un ángulo de elevación 2α.

Para determinar la rapidez (υ) de la esfera y para que esta pase la rampa se plantea el esquema



Analizando el movimiento parabólico horizontalmente

$d_H = \upsilon_H t$

$H\cot\alpha = \upsilon\cos 2\alpha \cdot t$

$$\Rightarrow\ t = \frac{H\cot\alpha}{u\cos 2\alpha} \qquad \text{(I)}$$

Verticalmente usamos

$$d_V = u_V t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow\ H = u\operatorname{sen}2\alpha(t) - \frac{1}{2}gt^2$$

Reemplazando (I) tenemos

$$H = \tan(2\alpha)(H\cot\alpha) - \frac{g}{2\upsilon^2}\frac{(H\cot\alpha)^2}{\cos^2(2\alpha)}$$

Si recordamos que

$$\frac{1}{\cos^2(2\alpha)}=\sec^2(2\alpha)=1+\tan^2(2\alpha)$$

y dividimos por H

$$\Rightarrow\quad 1=\tan(2\alpha).\cot\alpha-\frac{gH}{2v^2}\cot^2\alpha\left(1+\tan^2(2\alpha)\right)$$

Si despejamos v^2 tenemos

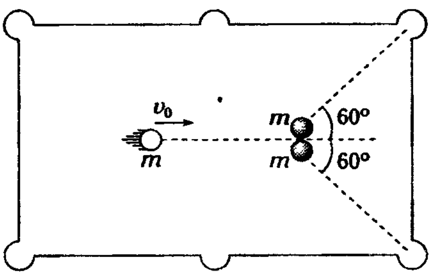
$$v^2=\frac{gH}{2}\frac{\cot^2\alpha\left(1+\tan^2(2\alpha)\right)}{\tan(2\alpha)(\cot\alpha-1)}$$

Después de hacer uso de identidades trigonométricas se obtiene

$$\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{gH}{2}\frac{\cot\alpha}{\cos^2(2\alpha)}}$$

Problema 16

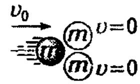
Se muestra una billa que va a chocar elásticamente con las otras que están en reposo. Si éstas ingresan a las buchacas con 6 m/s cada una y la otra retrocede después del choque, determine v_0 Desprecie el rozamiento.



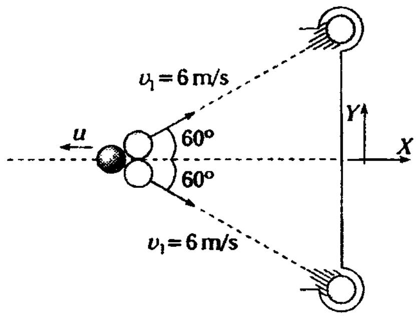
Resolución

Luego del choque elástico, las billas negras se desplazan sin experimentar fuerzas de rozamiento, entonces, mantienen su velocidad constante (u_1 = 6 m/s).

Antes del choque



Como por condición del problema las esferas en reposo deben ingresar a las buchacas y la otra rebota, entonces después del choque debemos tener



En el choque elástico la energía cinética del sistema se conserva, pues no se disipa calor.

$$\Rightarrow\quad E_{M(\text{a.ch.})}=E_{M(\text{d.ch.})}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(6)^2+\frac{1}{2}m(6)^2+\frac{1}{2}mu^2$$

$$v_0^2=72+u^2 \qquad \text{(I)}$$

Se conserva la cantidad de movimiento para el sistema y solo se consideran cantidades de movimiento en la dirección X.

$$\Rightarrow\quad \vec{P}_{(\text{a.ch.})(x)}=\vec{P}_{(\text{d.ch.})(x)}$$

$$\cancel{m}v_0=\cancel{m}v_1\cos 60°+\cancel{m}v_1\cos 60°+\cancel{m}(-u)$$

Simplificando

$$v_0=v_1-u$$

$$v_0=6-u$$

$$\therefore\quad u=6-v_0 \qquad \text{(II)}$$

(II) en (I)

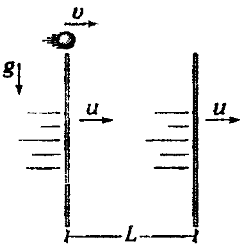
$$v_0^2 = 72 + (6 - v_0)^2$$

$$v_0^2 = 72 + (36 - 12v_0 + v_0^2)$$

$$\therefore \; v_0 = 9 \text{ m/s}$$

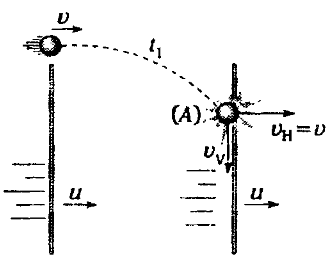
Problema 17

Una pequeña esfera lisa irrumpe horizontalmente con rapidez v entre dos planos verticales que se mueven con rapidez u. Determine la rapidez del cuerpo después de la n-ésima colisión contra la pared delantera, dado que las colisiones son elásticas. Considere los planos muy largos, a $v > u$ y $M_{planos} >> M_{esfera}$

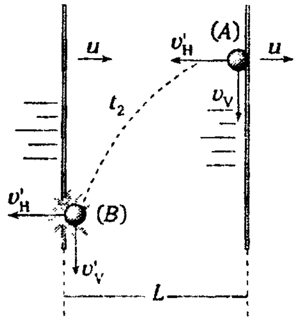


Resolución

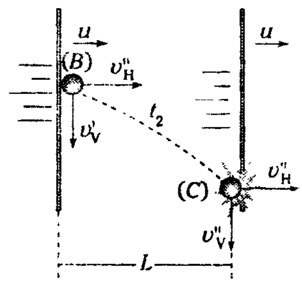
Al considerar los planos muy largos se garantiza que la esfera chocará contra ellos un número ilimitado de veces, pues los choques son elásticos.



La condición $v > u$ garantiza que la esfera alcanzará al plano delantero e impactara contra él y rebotará.



Representemos en un gráfica la trayectoria que aproximadamente describirá la esfera. Luego impactará con el plano retrasado y así volverá a impactarle al plano delantero. Esto continuará indefinidamente.



Tenga en cuenta que entre choque y choque los planos continúan desplazándose hacia la derecha. Además siendo los planos de mucha mayor masa que la esfera, la velocidad de estas prácticamente no cambia con los choques.

Como la esfera es lisa y la duración de cada choque (Δt) es despreciable, el $\Delta t_{ch} \approx 0$, la proyección vertical del movimiento parabólico que desarrolla la esfera entre choque y choque no será afectada por los choques. Por lo tanto, la componente vertical de la velocidad de la esfera se determinará como

$$v_V = \cancel{v_0} + gt$$

$$\therefore \; v_V = gt_1$$

Donde v_V es el módulo de la componente vertical de la velocidad luego de n choques contra la pared delantera y t_1 es el respectivo tiempo transcurrido. Debido al choque la que sí se verá afectada es la componente horizontal de la velocidad. Analicemos para un instante antes y un instante después del primer choque. (Recuerde que los choques son elásticos y que durante el movimiento parabólico la componente horizontal de la velocidad no cambia)

$$e=\frac{\left|\vec{u}_{R(\text{d.ch.})}^{\text{alej}}\right|}{\left|\vec{v}_{R(\text{a.ch.})}^{\text{acerc}}\right|}=\frac{v_H'+u}{v-u}=1$$

$$\therefore\ v_H'=v-2u$$

Del mismo modo analizamos el segundo choque (que sería el primero contra la pared de atrás).

$$e=\frac{\left|\vec{u}_{R(\text{d.ch.})}^{\text{alej}}\right|}{\left|\vec{v}_{R(\text{a.ch.})}^{\text{acerc}}\right|}=\frac{v_H''-u}{v_H'+u}=1$$

$$v_H''=v_H'+2u=(v-2u)+2u$$

$$\therefore\ v_H''=v$$

Luego de chocar contra la pared posterior, la esfera vuelve nuevamente a tener una velocidad en la horizontal igual a la velocidad inicial, entonces luego del tercer choque (segundo contra la pared delantera) la esfera tendrá

$$v_H=v-2u \qquad (1)$$

y este mismo resultado se obtendrá luego de n choques contra la pared delantera.

Solo nos faltaría definir v_V, pero para ello debemos determinar t tal como así lo indica la expresión (I).

Entre el instante del lanzamiento y el primer choque transcurre un tiempo

$$t_1=\frac{L}{v-u}$$

y entre el primer y segundo choque

$$t_2=\frac{L}{v_H'+u}=\frac{L}{(v-2u)+u}$$

Como luego del segundo choque se repiten las condiciones iniciales, entre choque y choque transcurre el mismo intervalo de tiempo.

$$t_2=\frac{L}{v-u}$$

Por lo tanto, el tiempo total (t_T) que debe transcurrir a partir del instante del lanzamiento hasta el instante del choque número n contra la pared delantera inducimos que es

$$t_T=t_1+(n-1)(2t_2)$$

y como $t_1=t_2=\dfrac{L}{v-u}$; reemplazando se tiene

$$t_T=(2n-1)\left(\frac{L}{v-u}\right)$$

Reemplazando en (I), considerando t_T

$$v_V=gL\frac{(2n-1)}{(v-u)} \qquad (2)$$

Conociendo las expresiones (1) y (2) que son para las componentes de la velocidad, determinamos la velocidad como

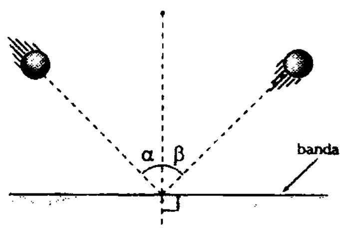
$$v=\sqrt{v_H^2+v_V^2}$$

Reemplazando tenemos

$$\therefore\ v=\sqrt{(v-2u)^2+\left(\frac{gL(2n-1)}{v-u}\right)^2}$$

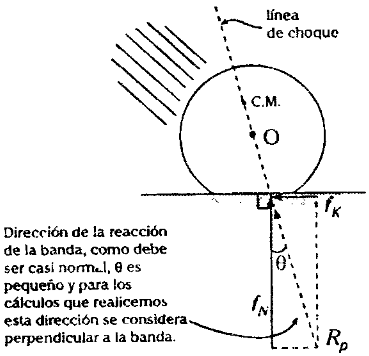
Problema 18

En la figura se muestra a una bola de billar que incide y rebota sobre una banda de la mesa de billar. Calcule el coeficiente de restitución (e), si el coeficiente de rozamiento entre la bola y la banda es μ_K y la reacción (casi normal) de la banda pasa por el centro de masa de la bola.



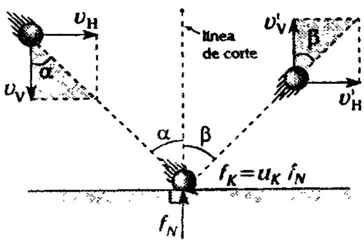
Resolución

Según las condiciones dadas, entendemos que el choque es central oblicuo, es decir después del choque la bola se aleja de la banda sin experimentar rotación, ¿Por qué? porque la reacción de la banda, casi normal a ella, pasa por el C.M. de la bola no homogénea, tal como lo indicamos en la figura siguiente.



Durante el choque la parte de la bola que hace contacto con la banda se deforma y a la vez experimenta un pequeño deslizamiento, esto es debido a la componente horizontal de la velocidad, lo cual trae como consecuencia el surgimiento de la fuerza de rozamiento por deslizamiento (f_K).

Ahora para calcular el coeficiente de restitución (e) consideramos



En la dirección de la línea de choque (dirección vertical) relacionemos las componentes de las velocidades antes y después del choque, así

$$e = \frac{\left|\vec{u}_{\text{alej (a ch.)}}\right|}{\left|\vec{v}_{\text{acerc (a ch.)}}\right|} = \frac{v'_V}{v_V} \Rightarrow v'_V = e v_V$$

Ahora se requiere una relación entre v'_V y v_V

De la figura tenemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_H}{v_V} \Rightarrow v_H = v_V \tan\alpha \qquad \text{(I)}$$

$$\tan\beta = \frac{v'_H}{v'_V} \Rightarrow v'_H = v'_V \tan\beta = e v_V \tan\beta \qquad \text{(II)}$$

Durante el choque la esfera recibe un impulso debido a la f_K que provoca un cambio de su cantidad de movimiento en la dirección horizontal.

$$\therefore\ \vec{I}_H = \Delta\vec{p}_H$$

$$-f_K \Delta t = (+m v'_H) - (+m v_H)$$

$$\Rightarrow \mu_K f_N \Delta t = m(v_H - v'_H) \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (I) y (II) en (III)

$$\mu_K f_N \Delta t = m(v_V \tan\alpha - e v_V \tan\beta)$$

$$\Rightarrow \mu_K f_N \Delta t = m v_V (\tan\alpha - e\tan\beta) \qquad \text{(IV)}$$

La fuerza normal del piso ejerce un impulso vertical a la esfera y altera su cantidad de movimiento en la dirección vertical.

$$\Rightarrow \vec{I}_V = \Delta\vec{p}_V$$

$$+(f_N \Delta t) = (+m v'_V) - (-m v_V)$$

$$f_N \Delta t = m(e v_V) + m v_V$$

$$\Rightarrow f_N \Delta t = m v_V (e + 1) \qquad \text{(V)}$$

Finalmente dividimos (IV) y (V)

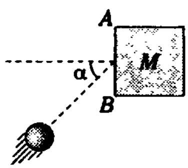
$$\frac{\mu_K \cancel{f_N \Delta t}}{\cancel{f_N \Delta t}} = \frac{\cancel{m v_V}(\tan\alpha - e\tan\beta)}{\cancel{m v_V}(e+1)}$$

Despejando el coeficiente de restitución se obtiene

$$\therefore \; e = \frac{\tan\alpha - \mu_K}{\tan\beta + \mu_K}$$

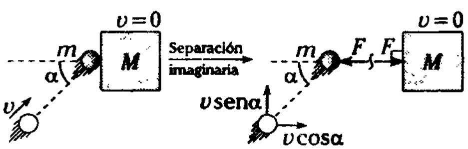
Problema 19

En la figura se muestra cómo una esfera de masa m le va a impactar central y elásticamente a un taco de madera liso en reposo. Si todo se desarrolla sobre una superficie horizontal lisa, ¿qué relación existe entre el ángulo α y el ángulo de rebote para la esfera?



Resolución

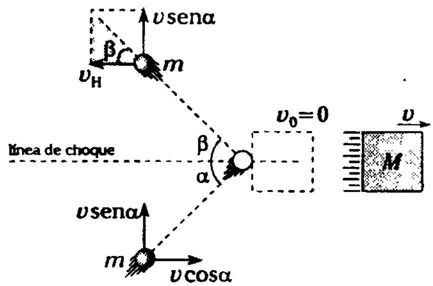
Se indica que la esfera le impacta central y elásticamente al taco, ello implica que después del choque la esfera y el taco se trasladan sin experimentar rotación, además no hay disipación de energía durante el choque y también $e = 1$. Durante el choque tendremos



A partir del gráfico, de la separación imaginaria, se deduce que:

- El taco empezaría a moverse en la dirección de F, que es la fuerza resultante sobre él durante el choque.
- La fuerza F sobre la esfera es perpendicular a la componente $v\,\text{sen}\,\alpha$ de su velocidad, entonces después del choque dicha componente conserva su valor, mientras que la componente $v\cos\alpha$ de su velocidad va a cambiar debido a la acción de F.

Ahora podemos plantear



Del gráfico nos piden β, entonces analizando el rebote de m tendremos la relación

$$\tan\beta = \frac{v\,\text{sen}\,\alpha}{v_H} \qquad \text{(I)}$$

Según la relación (I) se requiere $\left(\frac{v}{v_H}\right)$, esto lo podemos obtener a partir de la conservación de la cantidad de movimiento del sistema ¿Por qué? porque sobre el sistema la fuerza resultante es nula, entonces sobre la dirección horizontal planteamos.

$$\vec{P}_{(\text{a.ch.})} = \vec{P}_{(\text{d.ch.})}$$

$$+mv\cos\alpha = +Mv + (-mv_H)$$

$$\Rightarrow \; mv\cos\alpha = Mv - mv_H \qquad (\theta)$$

Además el choque es elástico

$$\Rightarrow \quad e=\frac{\left|\vec{u}^{\,\text{alej}}_{R(\text{d.ch.})}\right|}{\left|\vec{v}^{\,\text{acer}}_{R(\text{a ch.})}\right|}=1$$

(A lo largo de la línea de choque)

A partir de la figura deducimos que

$$\Rightarrow \quad \frac{v_H+v}{v\cos\alpha}=1$$

$$\Rightarrow \quad v\cos\alpha=v_H+v \qquad (\rho)$$

Hacemos $(\rho)\times M-(\theta)$ y se obtiene

$$(M-m)v\cos\alpha=(M+m)v_H$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{v_H}=\left(\frac{M+m}{M-m}\right)\frac{1}{\cos\alpha} \qquad (\text{II})$$

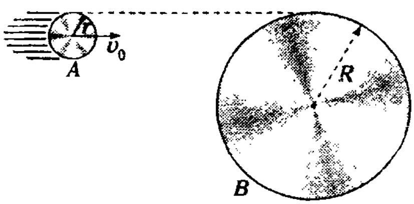
Finalmente, reemplazamos (II) en (I)

$$\tan\beta=\left(\frac{M+m}{M-m}\right)\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\therefore \quad \tan\beta=\left(\frac{M+m}{M-m}\right)\tan\alpha$$

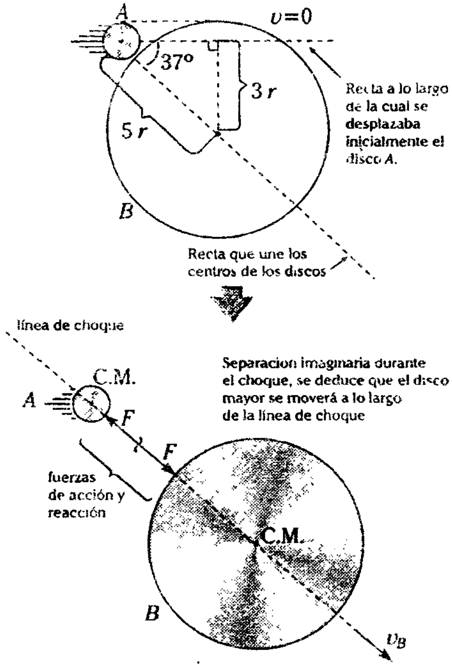
Problema 20

Un disco de 0,2 kg de masa desliza sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez de 25 m/s. Si luego de chocar con otro disco de 0,5 kg, que se hallaba en reposo, describen trayectorias mutuamente perpendiculares, determine la rapidez de cada disco después del choque. (Considere $R=4r$.)



Resolución

Examinemos el momento en que se produce la colisión

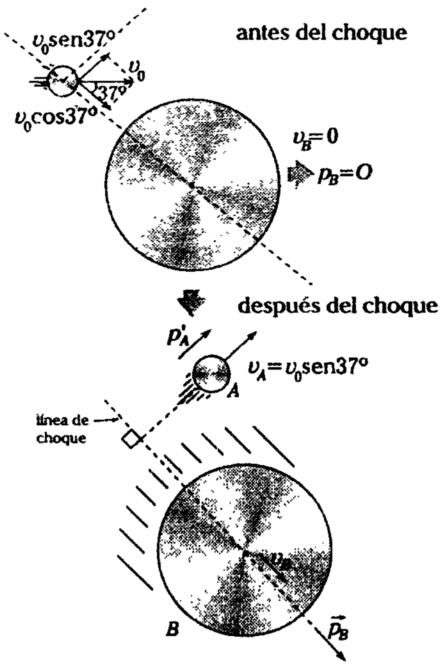


Mediante la fuerza $F(\searrow)$ el disco grande se mueve en la dirección señalada $v_B(\searrow)$.

Como consecuencia del choque, la velocidad de los discos cambia, el cambio en la velocidad implica necesariamente un cambio en la cantidad de movimiento de cada disco.

Si bien la cantidad de movimiento de cada uno de los discos cambia, la cantidad de movimiento del sistema, constituido por los dos discos, permanece constante porque la fuerza resultante sobre el sistema en todo instante, incluso durante el choque, es nula: las fuerzas entre los discos son *fuerzas internas al sistema, por lo tanto no provoca* cambio en la cantidad de movimiento de este.

En la siguiente figura, vamos a descomponer rectangularmente a la velocidad del disco pequeño, en la línea de choque y perpendicular a ella. Ahora como solo se manifiestan fuerzas a lo largo de la línea de choque, entonces los componentes de la velocidad perpendicular a esta dirección no modifican su módulo. Analicemos, pues las cantidades de movimiento a.ch. y d.ch.; así

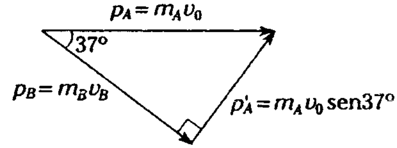


Por lo expuesto anteriormente, se debe cumplir para el sistema

$$\vec{p}_{(a.ch.)} = \vec{p}_{(d.ch.)}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_A = \vec{p}'_A + \vec{p}_B$$

Como las cantidades de movimiento a.ch. y d.ch. no son paralelas y es conveniente usar método geométrico. Con dichas cantidades de movimiento formamos un triángulo.



Del ⊾ planteamos

$$\tan 37° = \frac{m_A v_0 \text{sen}37°}{m_B v_B}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{0,2(25)(3/5)}{0,5\, v_B}$$

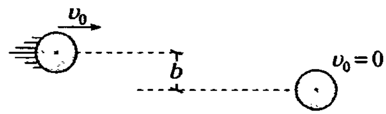
$$\therefore\ v_B = 8 \text{ m/s}$$

Después del choque nótese que el disco pequeño se mueve con v_0 sen37° $= 25\left(\frac{3}{5}\right) = v_A$

$$\Rightarrow\ v_A = 15 \text{ m/s}$$

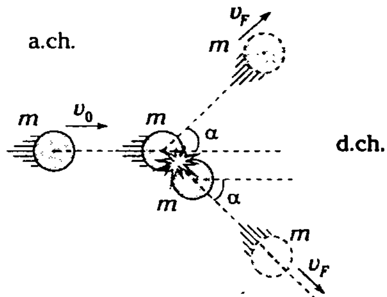
Problema 21

Se muestra dos discos homogéneos lisos e idénticos que se encuentran sobre una mesa horizontal. Determine el coeficiente de restitución del choque, dado que luego del mismo los discos se mueven en direcciones que forman con la horizontal el mismo ángulo. (b = 1,2r, r: radio de las monedas)

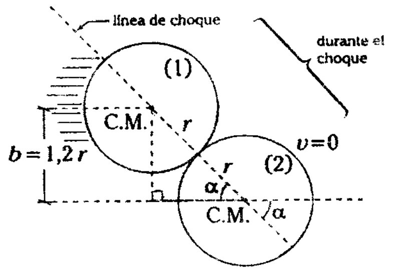


Resolución

Representemos en un gráfico lo que acontece antes, durante y después del choque.



Como los discos son lisos, se entiende que es lisa su superficie plana y también sus bordes, por lo tanto la fuerza entre estas está contenida en una línea que une sus centros y que por ser homogéneas serían también sus centros de masa. Entonces el choque entre las monedas es un choque central y como se puede ver es tambien un choque oblicuo.

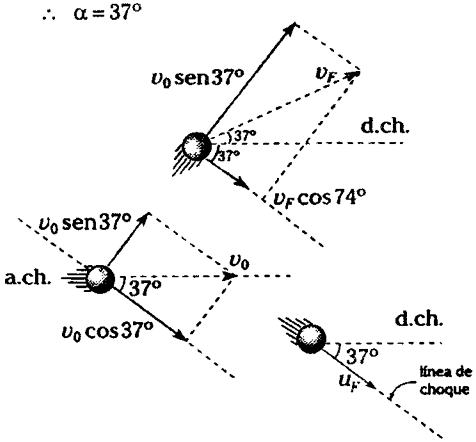


Como el disco (2) se encontraba inicialmente en reposo, luego del choque se verá obligado a moverse a lo largo de la línea del choque, pues sobre esta línea actuó la fuerza del disco (1) sobre el disco(2) que forma un ángulo α con la horizontal.

Del gráfico hallamos α y planteamos que

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{b}{2r}=\frac{1{,}2\cancel{r}}{2\cancel{r}}=0{,}6=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \alpha=37^\circ$$



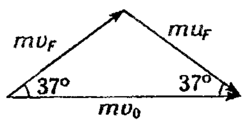
Como se pide determinar el coeficiente de restitución e, este debe evaluar en la línea del choque las velocidades relativas de acercamiento y alejamiento.

$$e=\frac{\left|\vec{u}^{\,alej}_{R(d\,ch)}\right|}{\left|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a\,ch)}\right|}$$

Relacionando con la figura anterior

$$e=\frac{u_F-v_F\cos 74^\circ}{v_0\cos 37^\circ}=\frac{u_F-\frac{7}{25}v_F}{\frac{4}{5}v_0} \qquad (*)$$

Como sobre el sistema se debe cumplir $\vec{p}_{(a\,ch.)}=\vec{p}_{(d\,ch.)}$, geométricamente, con las cantidades de movimiento formamos un triángulo tal como lo indicamos a continuación.



De donde se deduce que

$$v_F=u_F$$

$$\Rightarrow\ \cancel{m}v_0=2\cancel{m}u_F\cos 37^\circ$$

$$\therefore\ v_0=\frac{8}{5}u_F$$

Reemplazando en (I)

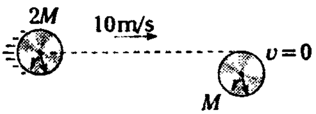
$$e=\frac{u_F-\left(\frac{7}{25}\right)(u_F)}{\frac{4}{5}\left(\frac{8}{5}u_F\right)}=\frac{\frac{18}{\cancel{25}}\cancel{u_F}}{\frac{32}{\cancel{25}}\cancel{u_F}}$$

$$\therefore\ e=\frac{9}{16}=0{,}5625$$

El choque es inelástico pero hay disipación de energía durante el choque y la energía cinética del sistema disminuye.

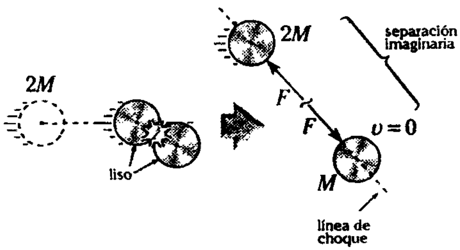
Problema 22

Los discos que se muestran son homogéneos, lisos y están sobre una superficie horizontal. Si ellos chocan elásticamente, ¿qué medida tiene el ángulo que forman sus trayectorias después del choque?

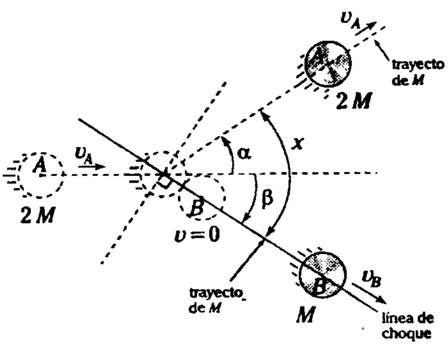


Resolución

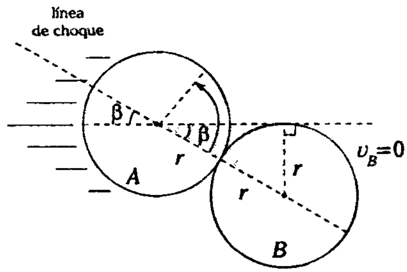
De acuerdo al enunciado los discos son lisos y durante el choque se manifiestan fuerzas de acción y reacción de cuyas prolongaciones pasaran por sus centros tal como a continuación se esboza.



Según la separación imaginaria la fuerza que surge entre los discos lisos es la fuerza resultante sobre ellos. Como el disco M está en reposo empezará a moverse en la dirección de $\vec{F}$, mientras que el disco $2M$ alterará la dirección de su movimiento, en la siguiente gráfica mostramos lo que sucede

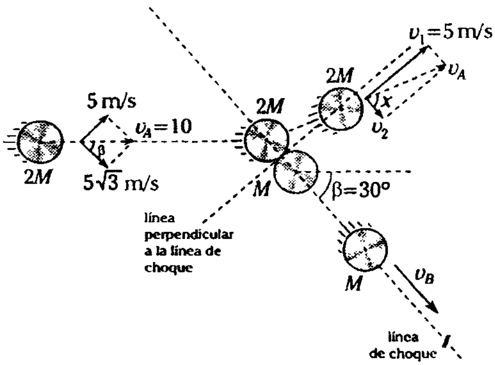


A partir de la figura, el ángulo β lo podemos determinar en las condiciones geométricas durante el choque.



Del ⊿ sombreado, $\beta = 30°$

Con el fin de hallar x, examinemos las cantidades de movimiento a.ch. y d.ch., así



Nótese que durante el choque la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el disco B no modifica el módulo de los componentes de la velocidad perpendicular a la línea de choque, entonces $\upsilon_1 = 5$ m/s.

Sobre la línea de choque se manifiestan fuerzas que alteran la cantidad de movimiento de cada disco en esta dirección, pero la cantidad de movimiento del sistema no varía

$$\Rightarrow \quad \vec{p}_{(a\ ch.)} = \vec{p}_{(d\ ch.)}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cancel{M}\left(v_A\sqrt{3}\right) = 2\cancel{M}u_2 + \cancel{M}v_B$$

$$\Rightarrow \quad 2u_2 + v_B = 10\sqrt{3} \qquad \text{(I)}$$

Considerando el coeficiente de restitución (e) con las componentes de las velocidades a lo largo de la línea de choque, planteamos

$$e = \frac{\left|\vec{u}^{\,alej}_{R(d\ ch.)}\right|}{\left|\vec{v}^{\,acerc}_{R(a.ch.)}\right|} = 1 \text{ (choque elástico)}$$

Del gráfico tenemos

$$\Rightarrow \quad \frac{v_B - u_2}{5\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad v_B - u_2 = 5\sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Después de resolver (I) y (II) simultáneamente se obtiene

$$u_2 = \frac{5}{3}\sqrt{3}\text{ m/s} \quad \text{y} \quad v_B = \frac{20}{3}\sqrt{3}\text{ m/s}$$

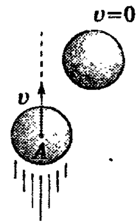
Después del choque para el disco $2M$; planteamos

$$\tan x = \frac{u_1}{u_2} = \frac{5}{\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}\right)} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 60°$$

Este resultado significa que después del choque las trayectorias de los discos forman 60°.

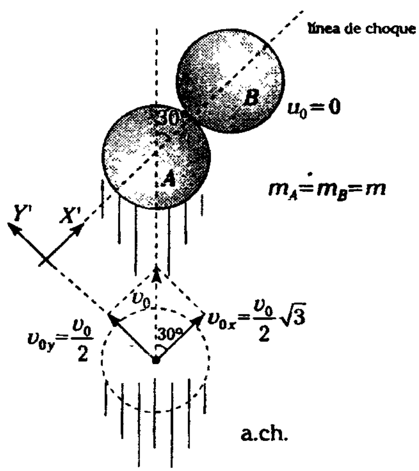
Problema 23

Dos esferas homogéneas lisas de igual dimensión están sobre una superficie horizontal y cuando están por chocar la dirección de movimiento de la esfera (A) con la línea que une los centros forman un ángulo de 30°. ¿Qué parte de la energía cinética de (A) se ha transformado en calor cuando las esferas presentan su máxima deformación?



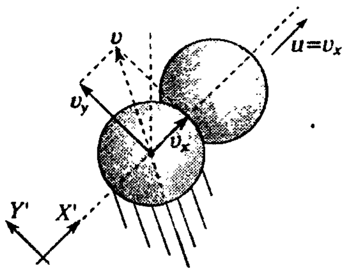
Resolución

De acuerdo a cómo se presenta el gráfico antes del choque se puede deducir que el choque será oblicuo y como las esferas son lisas será también un choque central (no hay rotación después del choque). A continuación representemos el instante que inicia el choque.



En el instante mostrado los cuerpos recién entran en contacto y se hace referencia al instante de máxima deformación debido a que ello ocurre cuando la rapidez relativa de A respecto a B a lo largo de la línea del choque es nula. (Cuando finaliza la etapa deformadora e inicia la etapa recuperadora).

Según lo planteado, para que el instante mostrado a continuación sea el de máxima deformación debe cumplirse que en la figura $u=v_x$



Para determinar qué fracción de la energía cinética inicial de A se disipó como calor, planteamos un balance de energía desde el inicio del choque hasta el instante mostrado.

$$E_{C_0(A)}+E_{C_0(B)}=E_{C_F(A)}+E_{C_F(B)}+Q_{dis.}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}\cancel{mv_B^2}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mu^2+Q_{dis.}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)+\frac{1}{2}m(v_x)^2+Q_{dis.}$$

$$\therefore\ Q_{dis.}=\frac{1}{2}m(v_0^2-2v_x^2-v_y^2) \qquad \text{(I)}$$

Ahora hace falta una relación entre v_0, v_x y v_y ya que para el sistema, la cantidad de movimiento un instante del choque y durante el choque debe ser la misma. Por ende sobre la dirección X'.

$$\vec{p}_{x(a.ch.)}=\vec{p}_{x(d.ch.)}$$

$$\cancel{m}(+v_{0x})=\cancel{m}(+v_x)+\cancel{m}(+u)$$

$$v_{0x}=v_x+u=2v_x \Rightarrow v_x=\frac{v_{0x}}{2} \qquad \text{(II)}$$

También sobre la dirección Y'

$$\vec{p}_{y(a.ch.)}=\vec{p}_{y(d.ch.)}$$

$$\cancel{m}(+v_{0y})=\cancel{m}(+v_y)$$

$$\Rightarrow v_y=v_{0y} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando en (II) y (III) en (I) tendremos

$$Q_{dis.}=\frac{1}{2}m\left[v_0^2-2\left(\frac{v_{0x}}{2}\right)^2-v_{0y}^2\right]$$

Pero, del primer esquema

$$v_0^2=v_{0x}^2+v_{0y}^2$$

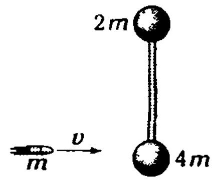
Reemplazando

$$Q_{dis.}=\frac{1}{2}m\left(\frac{v_{0x}^2}{2}\right)=\frac{1}{2}m\frac{\left(\frac{v_0\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}$$

$$Q_{dis.}=\frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{3}{8}\right) \Rightarrow Q_{dis}=\frac{3}{8}E_{C_0(A)}$$

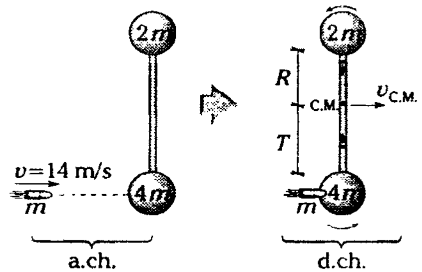
Problema 24

Sobre la superficie lisa de una mesa reposan $4m$ y $2m$ unidas por una varilla rígida de masa despreciable. Un proyectil de masa m que se mueve a razón de 14 m/s se incrusta en $4m$. ¿Qué tipo de movimiento realiza el sistema inmediatamente después del choque? ¿Con qué velocidad debe moverse un observador para que aprecie solo movimiento de rotación de la varilla después del impacto plástico del proyectil?



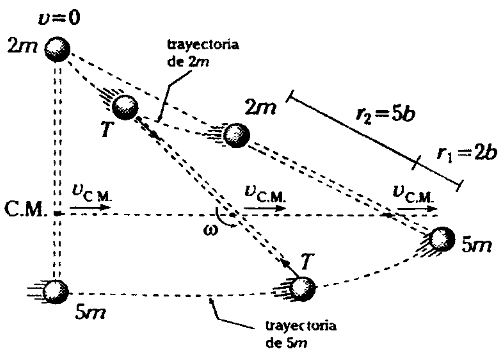
Resolución

Según las condiciones dadas, cuando el proyectil se incrusta en $4m$ le transfiere movimiento a $4m$, pero no a $2m$ en forma inmediata. ¿Qué sucede con $2m$? $2m$, debido a su inercia, tiende a reposar y $4m$ con el proyectil, tiende a moverse, motivo por el cual el sistema después del choque experimentará movimiento de rotación y también de traslación, grafiquemos lo que sucede



En la figura $(m+4m)$ por inercia tiende a avanzar; pero $2m$ como reposa, tiende también por inercia a seguir en reposo. En consecuencia podemos afirmar que, respecto al C.M. del sistema, las masas rotan y la varilla experimenta una tensión (T) que desempeña el papel de fuerza centrípeta (F_{cp}); pues $2m$ gira con un radio $r_2=5b$ y $5m$ gira con radio $r_1=2b$ respecto al C.M.

En consecuencia graficamos.



Antes del impacto el sistema posee cantidad de movimiento debido al proyectil, entonces planteamos

$$\vec{p}_{sist}=\vec{p}_{proyec}=m\vec{v}$$

$$\therefore\ \vec{p}_{sist}=+14m\hat{i} \qquad \text{(I)}$$

Después del impacto, al ser la superficie lisa no hay oposición al movimiento del sistema, se desprecia la fuerza del aire por lo que la cantidad de movimiento del sistema no se altera. Si se considera la cantidad de movimiento el centro de masa (C.M.) del sistema

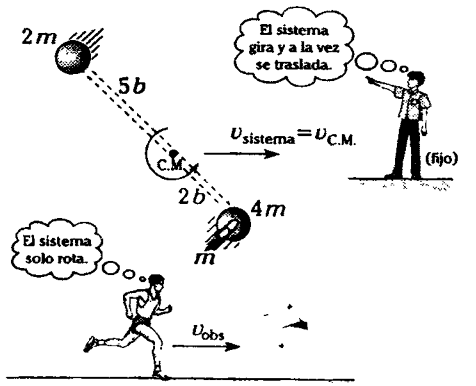
$$\Rightarrow\ \vec{p}_{sist.}=m_{sist.}\vec{v}_{sist.}=7m\vec{v}_{sist.} \quad \text{(II)}$$

Como el sistema es el mismo (I) = (II)

$$+14\cancel{m}\hat{i}=7\cancel{m}\vec{v}_{sist.}$$

$$\therefore\ \vec{v}_{sist.}=2\hat{i}\ \text{m/s}$$

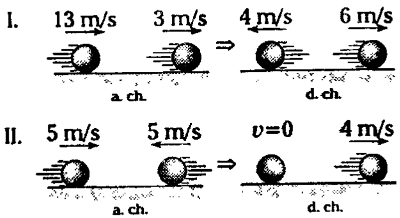
Esta es la velocidad de traslación del sistema luego del choque. Es decir la velocidad del centro de masa. ¿Quién observará la rotación pura del sistema? Un observador situado en el centro de masa del sistema ¿También existirá un observador en Tierra que solo vea rotación pura del sistema? Este tendría que trasladarse con la misma velocidad que tiene el centro de masa. Todo esto lo podemos ver reflejado en el siguiente gráfico.



El observador debe correr con $\vec{v}_{obs}=2\hat{i}$ m/s

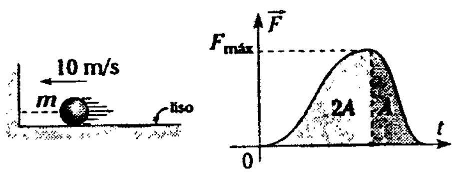
Problemas Propuestos

1. En el gráfico se muestran canicas lisas antes y después de chocar frontalmente, determine el coeficiente de restitución en cada caso.



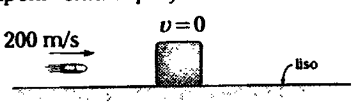
A) 0,8 y 0,4 B) 1 y 0,6 C) 0,9 y 0,8
D) 1 y 0,4 E) 0,9 y 0,4

2. La esfera que se muestra va a impactar frontalmente contra la pared. Si la fuerza que le ejerce la pared durante el choque varía con el tiempo según la gráfica adjunta, determine la energía que se disipa en forma de calor durante el choque (m=2 kg).



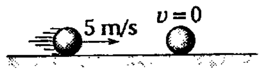
A) 25 J B) 50 J C) 75 J
D) 60 J E) 45 J

3. Se muestra el instante en que un proyectil de 100 g se va incrustar en un bloque de 9,9 kg; determine el módulo del impulso que experimenta el proyectil.



A) 20 N.s B) 20,2 N.s C) 19,8 N.s
D) 18,8 N.s E) 20,6 N.s

4. Se muestran dos esferas de igual dimensión que chocarán frontal y elásticamente. ¿Qué separación hay entre ellas 3 s después del choque?

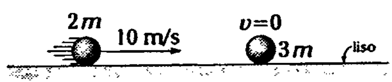


A) 10 m B) 12,5 m C) 15 m
D) 17,5 m E) 20 m

5. Se muestra a una esfera de 0,5 kg que va a impactar frontal e inelásticamente contra la pared. Si el impacto duró 10^{-2} s, determine el módulo de la fuerza media que experimenta la esfera durante el choque. (e = 0,75)

A) 1 000 N B) 1 050 N C) 1 100 N
D) 2 100 N E) 1 150 N

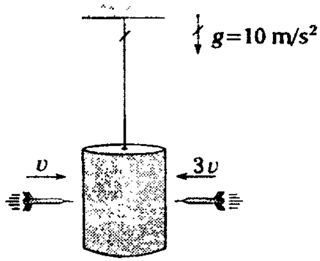
6. Se muestran dos esferas de igual dimensión que van a chocar frontal e inelásticamente (e = 0,5). ¿Cuánta energía se disipó en forma de calor durante el choque? (m = 1 kg)



A) 40 J B) 42 J C) 45 J
D) 48 J E) 50 J

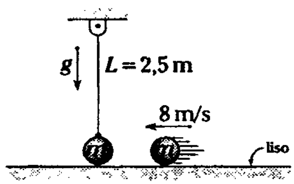
7. En la figura se muestra el instante en que dos dardos de 100 g cada uno se incrustan simultáneamente en un tronco. Si la cuerda de 1 m se desvía como máximo 37° con respecto a la vertical; determine v, dado que el tronco tiene 4,8 kg de masa.

A) 40 m/s
B) 45 m/s
C) 50 m/s
D) 60 m/s
E) 65 m/s



8. Las esferas que se muestran son idénticas y van a chocar frontal e inelásticamente ($e = 1/4$). ¿Cuál es la máxima desviación que experimenta el hilo ideal luego del choque? Considere $g = 10$ m/s^2.

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



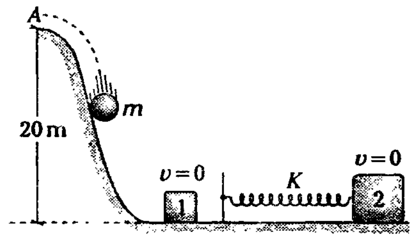
9. Se muestra tres esferas insertadas en un alambre muy largo y liso. Si a la esfera más pequeña se le comunica una rapidez v; ¿cuál es la rapidez de las otras cuando dejan de producirse choques? Considere $M >> m$ y que los choques son elásticos.

A) $v\sqrt{\frac{8m}{M}}$ B) $v\sqrt{\frac{4m}{M}}$ C) $v\sqrt{\frac{2m}{M}}$

D) $v\sqrt{\frac{m}{2M}}$ E) $v\sqrt{\frac{m}{5M}}$

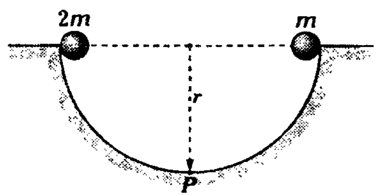
10. La esfera que se muestra resbalando fue soltada en A. Si al chocar con el bloque (1) se disipa la máxima cantidad de energía, ¿cuál es la máxima deformación del resorte? Considere $g = 10$ m/s^2, superficies lisa

$$\frac{m_2}{6} = \frac{m_1}{3} = m = 4 \text{ kg} \quad ; \quad K = 60 \text{ N/cm}$$



A) 5 cm B) 10 cm C) 12 cm
D) 14 cm E) 20 cm

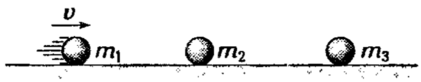
11. Se muestra el instante en que se suelta a dos pequeñas esferas sobre una superficie semicilíndrica lisa. Con respecto a las siguientes proposiciones, indique si son verdaderas o falsas.



I. Chocan a la derecha de P.
II. Después de chocar frontal y plásticamente, la máxima altura que alcanzan es $r/3$.
III. Después de chocar elásticamente alcanzan sus mismas posiciones iniciales.
IV. Después de chocar elásticamente, la esfera de menor masa alcanza una posición por encima de su posición inicial.

A) VFFV B) VFVV C) FFVV
D) FFFV E) FVVF

12. Se muestran tres esferas idénticas si dos de ellas reposan sobre la superficie lisa, ¿qué valor debe tener la masa m_2 para que después de los choques elásticos m_3 se traslade con la mayor rapidez posible? (Problema propuesto por C. Huygens).



A) m_1+m_3

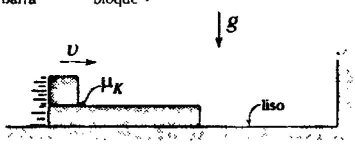
B) $m_3\sqrt{\dfrac{m_1}{m_3}}$

C) $m_1\sqrt{\dfrac{m_3}{m_1}}$

D) $\sqrt{m_1m_3}$

E) $\sqrt{\dfrac{m_1m_3}{m_1+m_2}}$

13. En la figura se muestra un bloque apoyado sobre una barra de longitud L, el sistema se dirige en forma perpendicular a una pared. ¿Cuál es el menor valor de v, de tal forma que después del choque elástico de la barra, contra la pared, el pequeño bloque se caiga de la barra? (Desprecie el tiempo de duración del choque de la barra y considere $m_{\text{barra}}=3m_{\text{bloque}}$.)



A) $2\sqrt{\dfrac{\mu_K gL}{3}}$

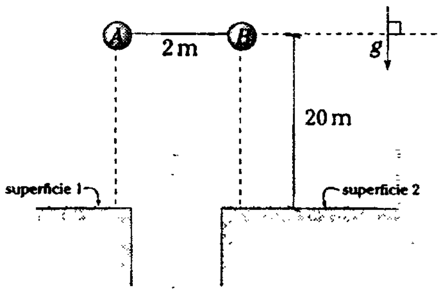
B) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\mu_K gL}$

C) $\sqrt{\dfrac{2}{3}\mu_K gL}$

D) $\sqrt{\dfrac{3}{2}\mu_K gL}$

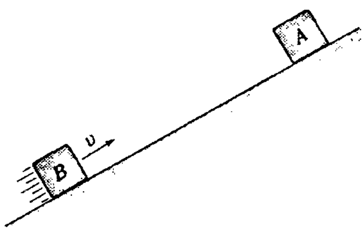
E) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\mu_K gL}$

14. Dos esferas idénticas están unidas mediante una barra rígida de masa despreciable, las cuales se sueltan en la posición mostrada. Determine la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque. (Desprecie la resistencia del aire, $g=10$ m/s^2, los coeficientes de restitución son $e_{A/1}=0{,}20$ y $e_{B/2}=0{,}30$)



A) 1 rad/s B) 2 rad/s C) 3 rad/s
D) 4 rad/s E) 5 rad/s

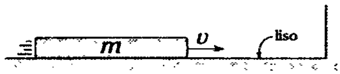
15. En el instante que el bloque A es soltado sobre la superficie lisa, el bloque B es lanzado con rapidez v e impactan luego ambos con igual rapidez. Si un instante después del choque inelástico ($e=0{,}5$) el bloque A rebota con $v/4$; determine la cantidad de calor disipada durante el choque. ($m_B=m_A=3$ kg)



A) $\dfrac{9v^2}{16}$ J B) $\dfrac{21v^2}{16}$ J C) $\dfrac{7v^2}{16}$ J

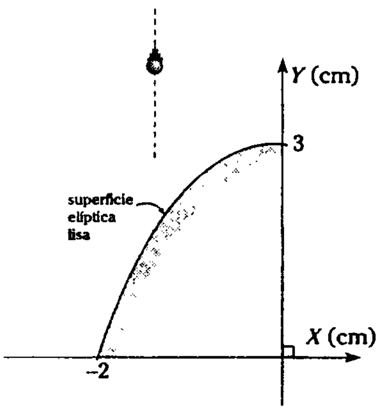
D) $\dfrac{9v^2}{8}$ J E) $\dfrac{21v^2}{8}$ J

16. Una barra de plomo de 2 kg desliza con una rapidez de 20 m/s e impacta frontalmente con una pared. Si el choque es inelástico ($e = 0,5$) y durante el choque se disipa 200 J de energía calorífica; ¿qué energía potencial almacena dicha barra debido a su deformación?



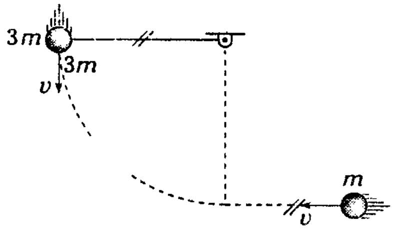
A) 50 J B) 80 J C) 90 J
D) 100 J E) 200 J

17. En la figura se muestra a una partícula que va a impactar inelásticamente ($e = 0,5$) sobre una superficie curva, cuyo perfil es el de una elipse. Si la partícula rebota horizontalmente, ¿qué ordenada corresponde al lugar de impacto? Considere durante el choque que la reacción de la superficie es mucho mayor que la fuerza de gravedad sobre la partícula.



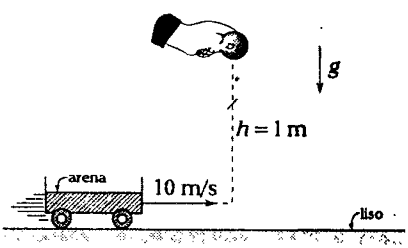
A) 1,72 cm B) 2,71 cm C) 1,94 cm
D) 2,18 cm E) 2,52 cm

18. Las esferas mostradas se mueven sobre una superficie horizontal lisa, de tal forma que chocan frontal y plásticamente. Determine el valor de la tensión en la cuerda ideal después del choque.



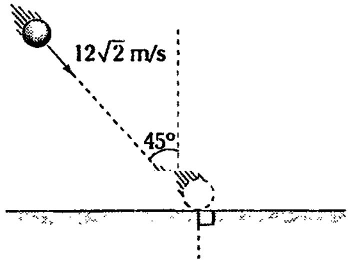
A) igual al valor de la tensión antes del choque.
B) la mitad del valor de la tensión antes del choque.
C) el doble de la tensión inicial en la cuerda.
D) el triple de la tensión inicial en la cuerda.
E) la tercera parte de la tensión inicial en la cuerda.

19. Si la esfera que se abandona luego impacta sobre el coche ¿cuánta energía pierde el sistema debido a este impacto?
(Considere $M_{coche} = 9$ kg, $m_{esfera} = 1$ kg y $g = 10$ m/s^2)



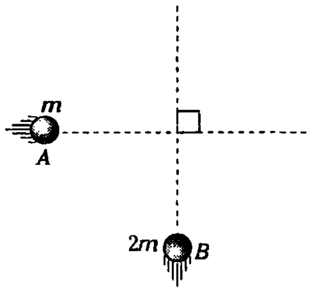
A) 35 J B) 40 J C) 45 J
D) 55 J E) 65 J

20. Se muestra cómo una esfera de 1 kg impacta inelásticamente ($e = 5/12$) sobre un piso horizontal liso, determine el módulo del impulso resultante que experimenta la esfera y la energía disipada durante el choque.



A) 15 N.s ; 59,5 J B) 17 N.s ; 25 J
C) 12 N.s ; 25 J
D) 17 N.s ; 59,5 J E) 15 N.s ; 25 J

21. Se muestra a dos pequeños discos, A y B, moviéndose sobre una superficie horizontal lisa, sus cantidades de movimiento son en módulo p y $p/2$ respectivamente. Si después de chocar intercambian sus cantidades de movimiento ¿cuánta energía se transforma en calor durante el choque?



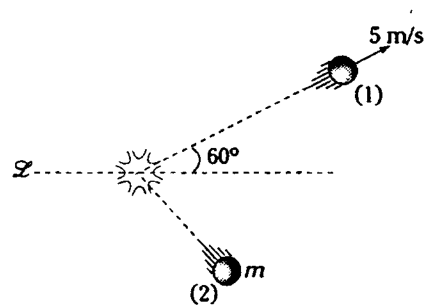
A) $\frac{5}{8}\frac{p^2}{m}$ B) $\frac{3}{16}\frac{p^2}{m}$ C) $\frac{3}{8}\frac{p^2}{m}$

D) $\frac{7}{15}\frac{p^2}{m}$ E) $\frac{8}{15}\frac{p^2}{m}$

22. Una pequeña esfera de 2 kg es soltada desde 12,8 m de altura y los choques que experimenta con el piso tiene un $e = 0{,}25$. ¿Cuánta energía mecánica se disipa hasta el segundo choque? (Considere $g = 10$ m/s^2 y se desprecia la resistencia del aire).

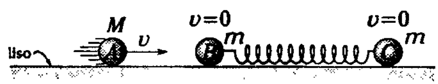
A) 250 J B) 255 J C) 240 J
D) 235 J E) 225 J

23. Se muestran a dos esferas idénticas ($m = 2$ kg) moviéndose sobre una superficie horizontal lisa, después de chocar elásticamente. Si antes de chocar la esfera (1) estaba en reposo; determine la energía cinética inicial de la esfera (2) que se movía a lo largo de $\mathscr{L}$.



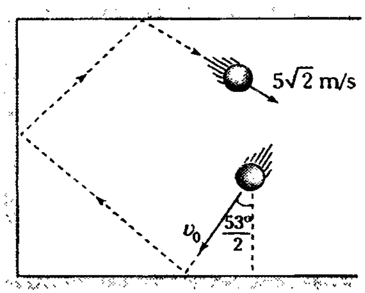
A) 25 J B) 40 J C) 50 J
D) 80 J E) 100 J

24. En la figura las esferas (A) y (B) chocan frontal y elásticamente. Determine la relación $\frac{m}{M}$ para que (A) y (B) choquen nuevamente.



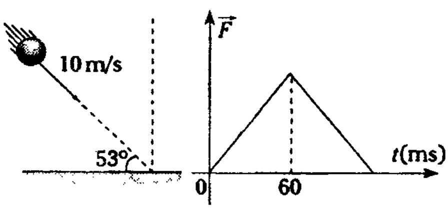
A) 1 B) 0,5 C) 2,1
D) 0,21 E) 0,8

25. Se muestra el trayecto seguido por una bola de billar sobre una mesa con bandas. Si se consideran superficies lisas y que en cada choque el coeficiente de restitución es 0,5; determine v_0.



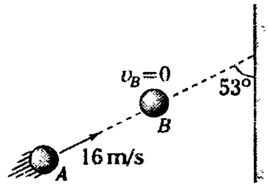
A) $5\sqrt{5}$ m/s B) $7{,}5\sqrt{2}$ m/s C) $10\sqrt{5}$ m/s
D) $10\sqrt{2}$ m/s E) $20\sqrt{5}$ m/s

26. Se muestra a una esfera de goma que va a impactar sobre una superficie horizontal lisa. Si la esfera rebota con una rapidez de $2\sqrt{10}$ m/s y la fuerza resultante sobre la esfera durante el choque viene expresada por la gráfica adjunta, ¿cuánto duró el choque?



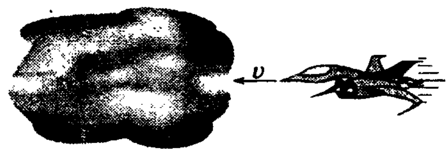
A) 70 ms B) 75 ms C) 80 ms
D) 85 ms E) 90 ms

27. La esfera A impacta frontal e inelásticamente ($e = 1/2$) con la esfera B. Si después ésta choca inelásticamente ($e = 9/16$) con la pared lisa, ¿qué rapidez tiene la esfera B al final? Las esferas están sobre una superficie horizontal lisa y $m_A = m_B$



A) 7,8 m/s B) 8 m/s C) 9 m/s
D) 10 m/s E) 8,8 m/s

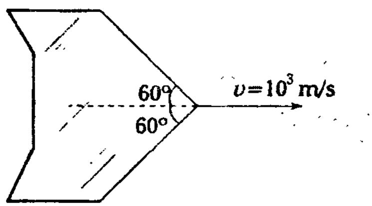
28. Una nave espacial que se encuentra en el espacio cósmico se mueve a velocidad constante tal como se muestra. Si esta pasa por una nube de polvo de densidad ρ ¿qué empuje debe desarrollar el motor de la nave para que se siga moviendo a velocidad constante? Considere el área de la sección transversal de la nave A. Desprecie la masa de combustible que se quema y que las partículas de polvo quedan adheridas a la nave en el choque.



A) $\rho A v^2$ B) $2\rho A v^2$ C) $\dfrac{\rho A v^2}{2}$

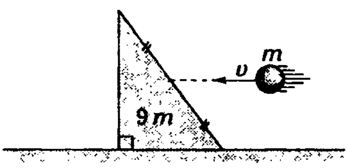
D) $\dfrac{\rho A v^2}{3}$ E) $4\rho A v^2$

29. La parte delantera de cierta nave se traslada en un medio gaseoso tal como se muestra. Determine la energía cinética por unidad de tiempo que transmite la nave a las moléculas del medio gaseoso, cuya concentración es 10^{11} moléculas por 1 m^3.
Considere $m_{\text{molécula}} = 4{,}5\times10^{-26}$ g, choques elásticos y que las moléculas al inicio están en reposo.



A) 0,43 mJ B) 0,48 mJ C) 0,56 mJ
D) 0,63 mJ E) 0,72 mJ

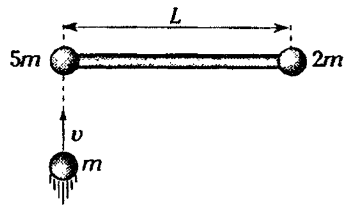
30. Se muestra una pequeña esfera que está por impactarle a un prisma homogéneo. Si después del choque elástico la esfera describe un M.V.C.L.; ¿cuánto trabajo realizó la cuña sobre la esfera durante el choque? Desprecie todo rozamiento.



A) $\dfrac{mv^2}{9}$ B) $\dfrac{2mv^2}{9}$ C) $\dfrac{mv^2}{18}$

D) $\dfrac{mv^2}{27}$ E) $\dfrac{2mv^2}{27}$

31. El sistema que se muestra está sobre una superficie horizontal lisa. Con respecto a las siguientes proposiciones indique si son verdaderas (V) o falsas (F). Considere varilla de masa despreciable.



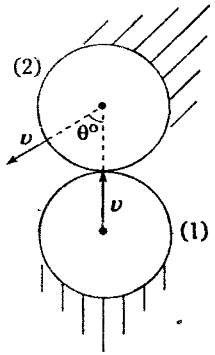
I. Inmediatamente después del choque plástico el C.M. del sistema estará a $\frac{2}{3}L$ de $2m$.
II. Antes y después del choque plástico la $\vec{v}_{C.M.}$ del sistema es la misma.
III. Después del choque plástico el sistema realiza movimiento de rotación únicamente.
IV. Inmediatamente después del choque plástico si un observador se sitúa sobre la varilla a $\frac{L}{4}$ de $5m$, solo apreciará rotación pura de las esferas.

A) VVFV B) FFFV C) FVVV
D) VVFV E) FVFV

32. Dos discos homogéneos y lisos, cada uno de 12,5 cm de radio se desplazan sobre un plano horizontal con velocidades de $50\hat{j}$ m/s y $-50\hat{j}$ m/s. Si los trayectos que siguen sus centros están separados 15 cm, ¿qué porcentaje de la energía mecánica del sistema se disipa durante el choque ($e=0$)?

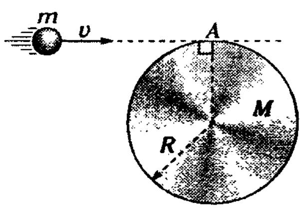
A) 32% B) 36% C) 43%
D) 57% E) 64%

33. Se muestra el instante en que dos esferas que se trasladan sobre una superficie horizontal chocan elásticamente. Determine la rapidez de cada esfera inmediatamente después del choque. Considere esferas idénticas, homogéneas y lisas.



A) $u_1 = v$; $u_2 = v\cos\theta$
B) $u_1 = v\cos\theta$; $u_2 = v\sqrt{1+\text{sen}^2\theta}$
C) $u_1 = v\cos\theta$; $u_2 = v\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}$
D) $u_1 = v\,\text{sen}\,\theta$; $u_2 = v\sqrt{1+\cos^2\theta}$
E) $u_1 = v\,\text{sen}\,\theta$; $u_2 = v\sqrt{1-\cos^2\theta}$

34. El disco mostrado está en reposo apoyado sobre una mesa horizontal lisa. Este disco puede rotar en torno a un eje, perpendicular a la mesa, que pasa a través de su centro. Si la partícula mostrada se adhiere al disco en A, determine la rapidez angular del sistema disco-partícula.

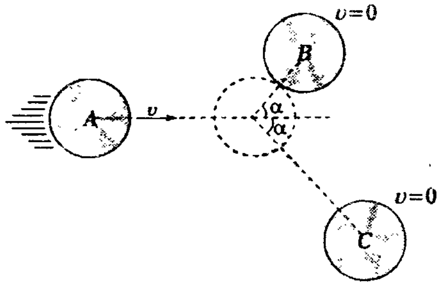


Sugerencia: Tenga en cuenta que durante la adhesión de la partícula al disco, la cantidad de movimiento angular del sistema se conserva.

A) $\dfrac{mv}{R\left(m+\frac{1}{2}M\right)}$ B) $\dfrac{mv}{MR}$ C) $\dfrac{v}{R}$

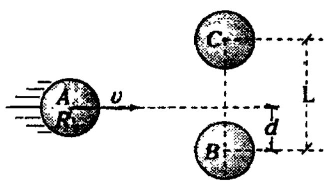
D) $\dfrac{(m+M)v}{mR}$ E) $\dfrac{2v}{R}$

35. Sobre un plano horizontal liso se encuentran tres discos iguales A, B y C. Al disco A se le comunica la velocidad v, después de lo cual este choca elásticamente con B y luego con C. ¿Para qué ángulo α el disco A se detiene luego del segundo choque?



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 60° E) 75°

36. En la figura se muestran tres esferas idénticas sobre una superficie horizontal lisa. Si el choque entre la esfera A y B es elástico, ¿qué valor debe tomar d para que el choque entre las esferas A y C sea frontal?



A) R^2/L B) $2R^2/L$ C) $8R^2/L$
D) $4R^2/L$ E) $16R^2/L$

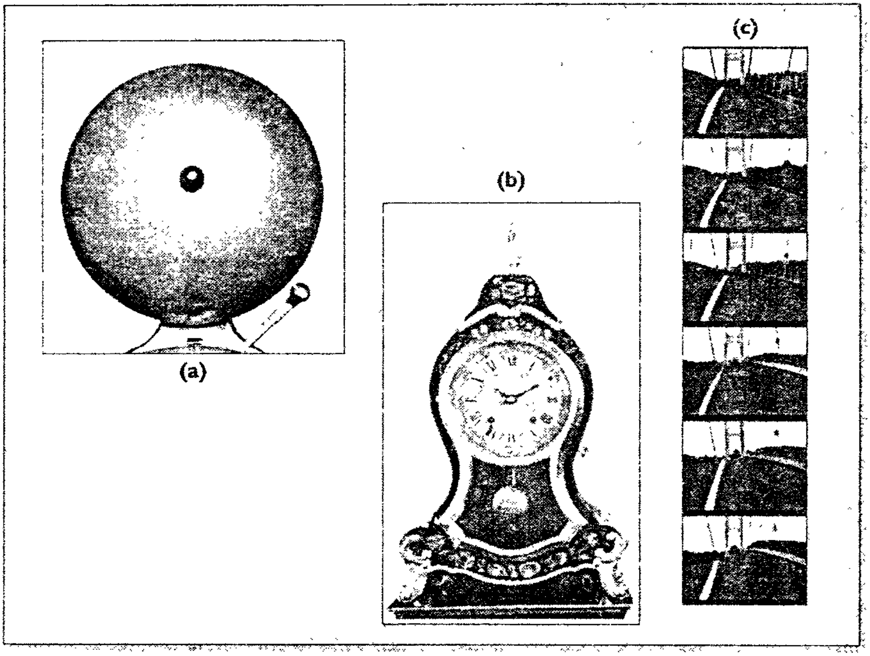
CLAVES

1	D	13	C	25	C
2	C	14	A	26	B
3	C	15	D	27	C
4	C	16	A	28	A
5	B	17	D	29	D
6	C	18	E	30	C
7	C	19	D	31	E
8	E	20	D	32	E
9	D	21	B	33	B
10	E	22	B	34	A
11	D	23	E	35	C
12	D	24	D	36	D

XIII

CAPÍTULO

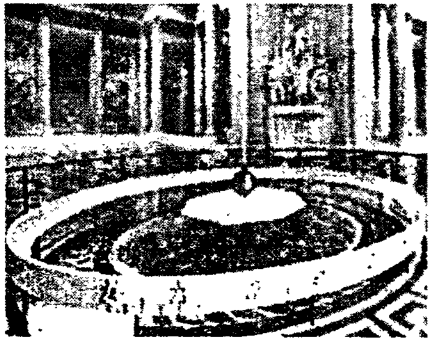
Oscilaciones mecánicas



Las oscilaciones mecánicas son muy importantes, ya que en cualquier lugar que estemos siempre habrá una de ellas **Fig. (a)** El sonido, por medio de un timbre. **Fig. (b)** El movimiento pendular, por medio de un reloj. **Fig. (c)** Las oscilaciones forzadas, por ejemplo el viento sobre un puente.

LECTURA

EL PÉNDULO DE FOULCAULT



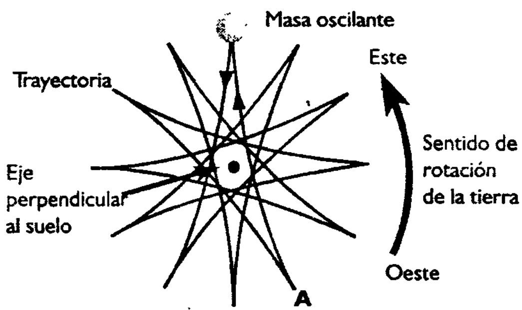
El péndulo que utilizó Foulcault en 1851 para demostrar que la Tierra rotaba. Tenía una masa de 5 kg y estaba suspendida por un cable de acero de 60 m de longitud.

Galileo Galilei, después de haber inventado su telescopio y hacer observaciones hacia el firmamento, comenzó a refutar de varias formas los argumentos de los filósofos aristótelicos que pregonaban la inmovilidad de la Tierra. En su época, Galilei, no encontró un argumento o experimento que pudiese convencer de manera irrefutable su posición acerca de la movilidad de nuestro planeta.

Galilei, a pesar de haber trabajado con los péndulos y haber establecido varias de sus propiedades, no pudo advertir la invariabilidad del plano de oscilación de un péndulo. Por los años 1851 el fránces León Foulcault pudo demostrar a través de sus observaciones, sobre su célebre péndulo en el interior de la cúpula del panteón de París, que nuestro planeta es un sistema rotatorio y no un cuerpo fijo. La explicación del comportamiento del péndulo en los polos es más básica que cuando se encuentra en algunos de los hemisferios. La trayectoria que va marcando el péndulo en 24 horas (ver dibujo) se explica con la conservación de su plano de oscilación. Esto es consecuencia de que las fuerzas sobe la masa oscilante (fuerza de gravedad y tensión) no la hacen desviarse en ningún momento hacia un costado. Toda persona sabe hoy en día que la Tierra rota en todo instante, pero si no se toma en cuenta la rotación de la Tierra, se creerá que es el péndulo que desvía su plano de oscilación.

Un péndulo al estar oscilando en uno de los hemisferios terrestre varía su plano de oscilación, esto es consecuencia del efecto de coriolis, que es una fuerza inercial que se manifiesta en un sistema de referencia rotatorio como es nuestro planeta.

En este caso la descripción de las oscilaciones del péndulo se hacen un poco más complejas.



La figura muestra la trayectoria de la masa oscilante del péndulo de Foulcault en el polo norte.

Oscilaciones mecánicas

OBJETIVOS

- Conocer que en la naturaleza están difundidos los movimientos vibratorios u oscilatorios.
- Diferenciar entre movimiento periódico y oscilatorio; además conocer e interpretar lo que es frecuencia y periodo de las oscilaciones.
- Reconocer que el movimiento armónico simple (M.A.S.) es el movimiento oscilatorio más sencillo de describir tanto cualitativamente como cuantitativamente.
- Conocer las características cinemáticas, dinámicas y energéticas en un M.A.S.
- Estudiar el movimiento pendular.

INTRODUCCIÓN

En la naturaleza encontramos diversas formas de movimiento mecánico, pero una de los que se encuentra ampliamente difundida en nuestro entorno es el movimiento vibratorio u oscilatorio. Un ejemplo directo de este tipo de movimiento puede ser el vaivén de un péndulo; o el vaivén de las ramas de un árbol por acción del viento; etc. Por supuesto que el lector está familiarizado con otros ejemplos más de oscilaciones mecánicas: las vibraciones de las cuerdas de una guitarra; de nuestras cuerdas bucales, cuando hablamos. También el lector está enterado sobre oscilaciones de otra naturaleza en las ondas electromagnéticas los vectores de campo eléctrico y magnético oscilan, en los circuitos eléctricos se pueden tener voltajes y corrientes oscilantes, etc. A pesar de que mencionamos diferentes tipos de oscilaciones mecánicas e incluso oscilaciones de otra naturaleza; el aparato matemático que las describe es el mismo. Esto es de una gran utilidad ya que si nosotros podemos describir cuantitativamente las oscilaciones mecánicas tendremos la posibilidad de extender muchos resultados, por ejemplo, a los circuitos oscilantes; a las vibraciones de los átomos y moléculas en un sólido. En esto radica la importancia de preocuparnos y estudiar las oscilaciones mecánicas, de las cuales la más sencilla es el movimiento armónico simple (M.A.S.)

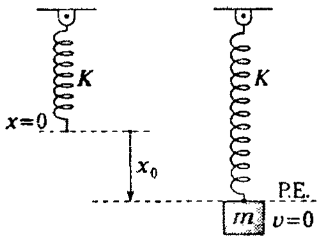
Casi todo el contenido de este capítulo está dedicado al M.A.S. y al movimiento pendular sin embargo las leyes físicas que se deduzcan se podrán usar en la acústica, física molecular, electricidad, óptica y mecánica cuántica. Conocer el movimiento oscilatorio y sus elementos es un requisito indispensable para hacer una buena descripción de las ondas de diversa índole: mecánica o electromagnética.

Algunas aplicaciones y usos del movimiento oscilatorio

- La oscilación forzada del pistón sobre el cilindro del motor de automóvil.
- Las oscilaciones de los electrones en los cables conductores derivados a un osciloscopio se muestran la razón de denominarse corriente alterna.
- Las oscilaciones de las partículas de un sólido que ha sido golpeado.
- En medicina la respuesta de nuestro corazón o cabeza a ciertos estímulos eléctricos; registran señales vibratorios en una pantalla, placa o papel (electrocardiogramas, electroencefalogramas) que sirven para realizar análisis y diagnóstico clínico. Existen otras aplicaciones en radio, T.V., Telefonía celular etc; pero empecemos en este capítulo de la mecánica con el estudio de las oscilaciones.

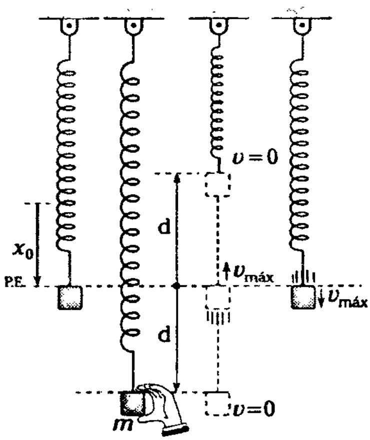
OSCILACIONES MECÁNICAS

Examinemos el estado inicial de un bloque unido a un resorte de masa despreciable, así



El bloque cuelga del resorte y lo estira x_0 quedando en posición de equilibrio (P.E.)

Ahora si al bloque lo hacemos descender y luego lo soltamos, ¿qué notaremos?



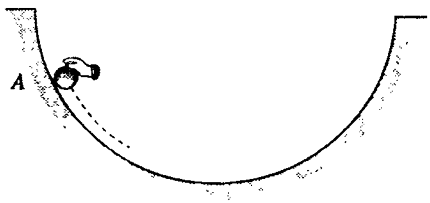
El bloque realiza movimientos de ascenso y descenso vertical, es decir de vaivén. El vaivén del bloque es respecto a su posición de equilibrio (P.E.).

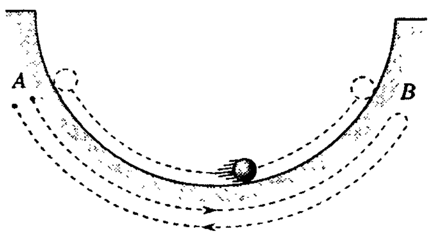
Observe que

- En los extremos: $v = 0$
- En la posición de equilibrio (P.E.): $v = v_{max}$

Aquel movimiento de vaivén realizado por un cuerpo con respecto a su posición de equilibrio mecánico se denomina **movimiento oscilatorio**

El movimiento de ida y vuelta es una oscilación mecánica tal como se muestra:





Del gráfico anterior podemos plantear

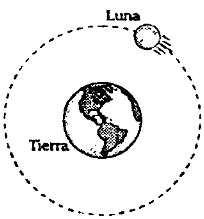
1 oscilación mecánica	<>	1 movimiento de vaivén	<>	movimiento de ida y retorno sobre la misma trayectoria

Además se puede señalar

a. Movimiento de A hacia B
 Movimiento de B hacia A } media oscilación

b. Movimiento de $A \rightarrow B \rightarrow A$ } oscilación completa o simplemente una oscilación

En este último ejemplo, si se desprecia todo tipo de rozamiento la esfera va a repetir en las mismas condiciones su movimiento. Esta característica determina que el movimiento de la esfera sea un **movimiento periódico**. En nuestro entorno podemos notar muchos fenómenos naturales que son periódicos: la sucesión del día y la noche, la sucesión de las estaciones, los latidos de nuestro corazón, etc. Habría que tener presente que en la técnica y en la ingeniería también podemos notar fenómenos periódicos: el movimiento de la lenteja en un reloj de péndulo, la rotación de las piezas de diversas máquinas.



El movimiento de la Luna se puede considerar un movimiento periódico, se repite cada 28 días (aprox.)

Ahora ya podemos definir un movimiento periódico: Es aquel movimiento en donde las magnitudes que lo describen; posición, velocidad y aceleración repiten sus cambios del mismo modo al cabo de un intervalo de tiempo perfectamente determinado, al cual se le denomina **periodo** y se le señala con la letra T.

Por ejemplo tenemos que el paso de un día a otro demora 24 horas (aprox.); aquí el periodo sería T=24 h.

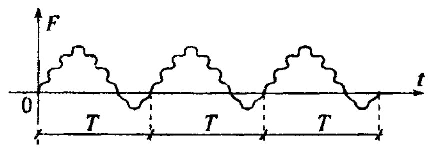
Nota

Al periodo (T) también se le suele definir como el mínimo intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el movimiento de un cuerpo se repita en las mismas condiciones, es decir se encuentre en la misma posición, con la misma rapidez y moviéndose en la misma dirección.

Por otro lado podemos dar una definición matemática de una magnitud física periódica. Si tenemos una magnitud dependiente del tiempo $F(t)$ y cuyo periodo es T; entonces proponemos que para cualquier instante t se debe verificar.

$$F(t+T) = F(t)$$

En las matemáticas podemos encontrar varias funciones con esta característica, entre ellas las funciones trigonométricas (sen, cos, tan, etc.). Finalmente al respecto, la gráfica de la magnitud física que varía periódicamente se repite exactamente para un tiempo igual a un periodo; por ejemplo:



Nota

Téngase presente que un movimiento periódico no es necesariamente oscilatorio y un movimiento oscilatorio no es necesariamente periódico; por ejemplo, el movimiento de la Luna en torno a la Tierra es periódico pero no oscilatorio.

Hemos señalado que un movimiento oscilatorio libre de rozamiento es un movimiento repetitivo y periódico. El intervalo de tiempo invertido en una oscilación es el mismo para que se repita la primera, segunda y todas las demás oscilaciones siguientes. Esto representa una de las características más importantes de las oscilaciones ideales.

En oscilaciones repetitivas el periodo es constante

$\therefore \quad T = \text{constante}$

Otro aspecto importante en las oscilaciones periódicas es poder controlar el número de oscilaciones en cierto intervalo de tiempo; es por ello que se introduce una magnitud física escalar llamada **frecuencia** (f). Matemáticamente se define por

$$\boxed{f = \frac{N}{t}}$$

Unidad: s^{-1} <> Hertz (Hz)

donde

N : número de oscilaciones.

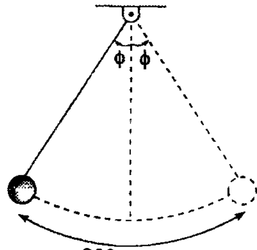
t : intervalo de tiempo en el cual se dan las N oscilaciones.

Ejemplo 1

Un péndulo simple o matemático realiza 300 oscilaciones en un minuto. Determine su frecuencia y su periodo.

Resolución

Un péndulo simple es un sistema conformado por un cuerpo de dimensiones despreciables, unido a un hilo ideal (de masa despreciable e inextensible). El péndulo da 300 oscilaciones en un minuto (60 s).



La frecuencia queda definida por

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{tiempo}} = \frac{N}{t}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{300}{60\ s} = 5\ s^{-1} = 5\ \text{Hz} \qquad \text{(I)}$$

Para determinar el periodo (T) planteamos una regla de tres

$\div 300$ (300 oscilaciones se hacen en 60 s) $\div 300$
1 oscilación se hará en T s

$$\Rightarrow \quad T = \frac{60\ s}{300} = \frac{1}{5}\ s \qquad \text{(II)}$$

Si multiplicamos los resultados (I) y (II), se obtiene que

$$f.T = (5).\left(\frac{1}{5}\right) = 1$$

$$\therefore \quad f.T = 1 \qquad \text{(III)}$$

Nota

El resultado que expresa la última relación (III) nos permite decir que el periodo es la inversa de la frecuencia o la frecuencia es la inversa del periodo.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \quad \text{o} \quad \boxed{T = \frac{1}{f}}$$

Ejemplo 2

Si un cuerpo oscila con una frecuencia de 10 Hz. ¿cuántas oscilaciones da en un minuto?

Resolución

Primero interpretemos físicamente la frecuencia

$f = 10\text{ Hz} = 10^{-1}\text{ s}$

$$f = \frac{\text{número de oscilac.}}{\text{tiempo}} = \frac{10}{1\text{ s}}$$

Comparando, se establece que el cuerpo da 10 oscilaciones en 1 s, entonces en un minuto (60 s) el cuerpo dará $10 \times 60 = 600$ oscilaciones.

Después de ver este ejemplo podemos concluir que el valor de la frecuencia (f) nos indica directamente el número de oscilaciones que se llevan a cabo en 1 s.

TIPOS DE OSCILACIONES

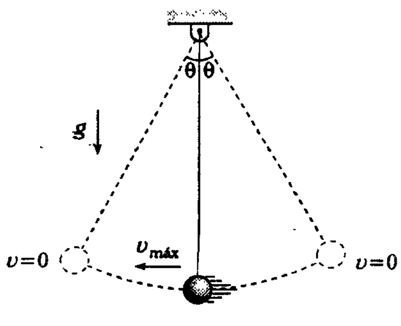
En la naturaleza encontramos varias formas de oscilar para un cuerpo, entre las cuales tenemos

Oscilaciones libres

Son aquellas que se originan en un sistema por acción de fuerzas internas, cuando el sistema es desviado de su posición de equilibrio no hay acción de fuerzas externas sobre el sistema.

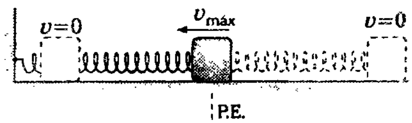
Por ejemplo

- Un péndulo simple realiza oscilaciones libres, si despreciamos la resistencia del aire



En este caso el péndulo oscila debido al efecto combinado de la atracción terrestre y la fuerza de tensión se debe tener en cuenta que la Tierra forma parte del sistema.

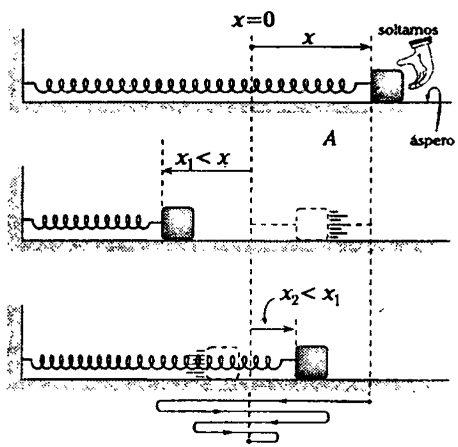
- Un sistema: bloque–resorte efectúa oscilaciones libres sobre el plano horizontal liso.



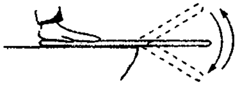
En este caso se desprecia el rozamiento del aire y el piso, es decir no actúan fuerzas externas al sistema, este se mueve gracias a la fuerza elástica del resorte que es una fuerza interna para el sistema (bloque – resorte).

Oscilaciones amortiguadas

Son aquellas oscilaciones en donde el máximo alejamiento del cuerpo que oscila, respecto de la P.E., disminuye debido a la acción de fuerzas externas, como el rozamiento que atenúa el movimiento del objeto, hasta finalmente detenerlo. Por ejemplo, el sistema bloque-resorte oscilando en un plano horizontal áspero.



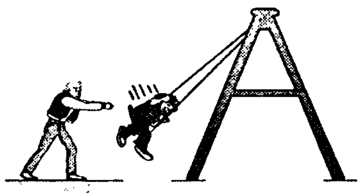
Conforme oscila el bloque su alejamiento respecto de su posición de equilibrio va disminuyendo a causa del rozamiento hasta que se detiene. Otro ejemplo más podría ser



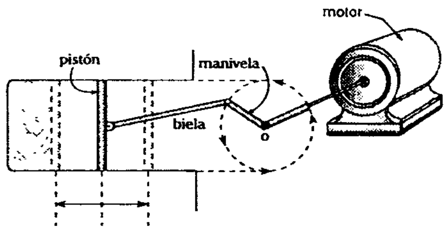
La regla después de ser golpeada, su extremo vibra, pero luego se detiene, es decir se amortigua sus oscilaciones.

Oscilaciones forzadas

Son aquellas oscilaciones causadas por la acción de fuerzas externas, que varían periódicamente sobre el cuerpo oscilante. Esto lo podemos evidenciar cuando empujamos un columpio.



En la figura, el pistón oscila sobre las paredes del cilindro, gracias a la biela que está unida a una manivela que a su vez realiza un movimiento de rotación debido a su acoplamiento con un motor que hace girar en forma forzada a la manivela en forma periódica.



Las oscilaciones que realiza el pistón son forzadas periódicamente por la fuerza que le ejerce la biela al pistón.

En la práctica las oscilaciones se amortiguan al cabo de más o menos tiempo, como el caso del columpio. Por esta razón, para mantener la oscilación es necesario forzarla mediante una fuerza periódica externa aplicada al sistema oscilante.

OSCILACIONES LIBRES

Las oscilaciones libres, las cuales son gobernadas por la acción de fuerzas internas, nos sirven como modelo de comparación a muchos fenómenos que suceden en la naturaleza, así por ejemplo tenemos: las comunicaciones entre nosotros se hacen a través de movimientos oscilatorios (vibraciones de las partículas) que al incidir en nuestro tímpano este oscila o vibra. En otros casos, cuando calentamos el extremo de una varilla de fierro, las oscilaciones moleculares se hacen más intensas de tal modo que aumenta la temperatura en toda la varilla.

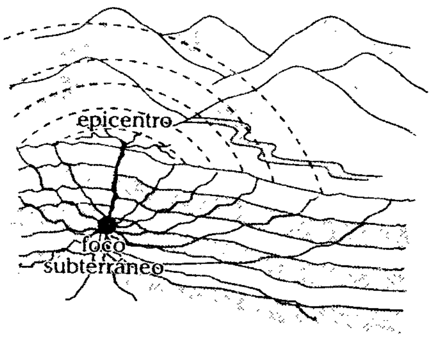
Las oscilaciones libres con sus carecterísticas constituyen un modelo físico aproximado para explicar los fenómenos sísmicos, y también las ondas electromagnéticas dentro de las cuales destacan las ondas de radio, T.V., etc.

Condiciones para las oscilaciones libres

Para que en un sistema se produzca oscilaciones libres deben cumplirse dos condiciones:

1. Al desplazar el cuerpo de su posición de equilibrio. En el sistema debe surgir una fuerza dirigida hacia dicha posición y por tanto tiende a volver el cuerpo a ella.

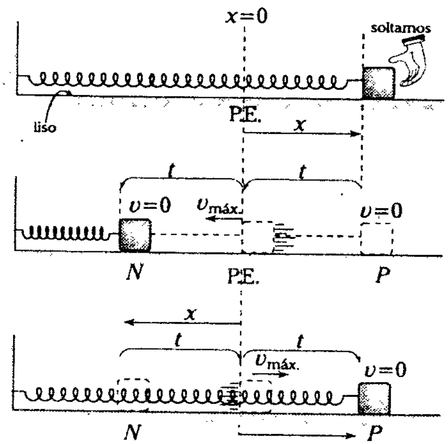
2. El rozamiento debe ser suficientemente pequeño en el sistema, de lo contrario las oscilaciones se amortiguan.



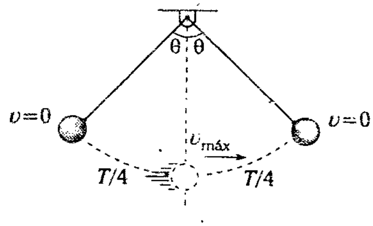
El estudio de los sismos se realiza con ayuda de un sismógrafo, el cual aproximadamente desarrolla oscilaciones libres.

Características

En consecuencia las oscilaciones libres se caracterizan por ser ideales y periódicas, es decir se repiten en iguales intervalos de tiempo. Por ejemplo tenemos:



Del gráfico $t=\frac{T}{4}$, donde T viene a ser el periodo de oscilación del bloque.



El péndulo realiza oscilaciones libres de modo que si no hay influencia del aire ni de otros agentes externos su periodo de oscilación no varía.

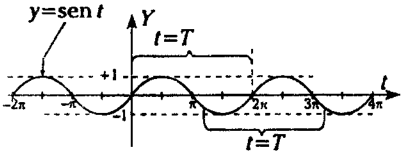
¿Qué diferencia existe entre las oscilaciones libres del péndulo y el bloque? La diferencia se encuentra en lo siguiente

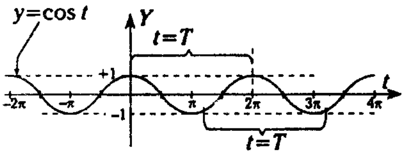
1. La trayectoria del bloque es rectilínea y la del péndulo es curvilínea.
2. El tipo de fuerza interna que sobre el bloque actúa es la fuerza elástica $\left(\vec{F}_E\right)$ que resulta directamente proporcional al desplazamiento, mientras que sobre el péndulo actúa una componente proporcional a la función seno del desplazamiento angular (θ). A estas fuerzas las podemos llamar fuerzas recuperadoras $\left(\vec{F}_{rec}\right)$.

¿Cómo caracterizamos estas diferencias entre oscilaciones libres? Las oscilaciones libres realizadas en trayectoria rectilínea y cuya fuerza interna es proporcional al opuesto de la posición de la masa oscilante se les denomina **oscilaciones armónicas** porque matemáticamente obedecen a una ley representada por una función $\operatorname{sen}\theta$ o $\cos\theta$. Al mismo movimiento lo denominaremos **movimiento armónico simple (M.A.S.)**

Nota

Para describir gráficamente un movimiento armónico utilizamos las funciones trigonométricas seno o coseno ya que estas son funciones periódicas. A continuación mostramos las gráficas correspondientes a estas funciones.





La parte de la gráfica de la función seno y coseno en un intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ representa un periodo o ciclo; esta representa una variación completa en una función senoidal o cosenoidal.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S.)

Es aquel movimiento mecánico rectilíneo oscilatorio y periódico realizado por un cuerpo o partícula cuando sobre él, la fuerza resultante sea directamente proporcional al opuesto de su posición $\left(\vec{x};\ \vec{y}\ \text{o}\ \vec{r}\right)$, es decir

$$\vec{F}_R \text{ D.P. } -\vec{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = -b\vec{x}} \qquad \text{(I)}$$

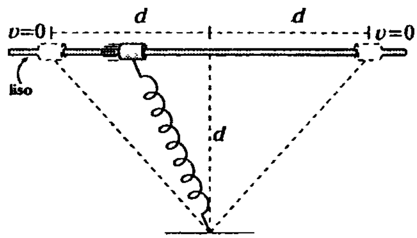
En (I), b es una constante de proporcionalidad; su valor dependerá de la forma del sistema que se estudie. Tener muy presente que la expresión (I) asegura que un cuerpo experimente un M.A.S.

Nota

Que un cuerpo oscile en forma rectilínea y periódica **no garantiza** que experimente un M.A.S.. Esto lo determina el aspecto dinámico, es decir la fuerza resultante.

Ejemplo

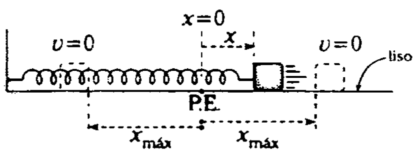
Un collarín unido a un resorte tal como se muestra



En estas condiciones sobre el collarín se demuestra que la fuerza resultante no depende en forma directa de su posición por lo tanto, el collarín no experimenta un M.A.S. a pesar que su movimiento del collarín tiene las características cinemáticas del M.A.S. (rectilíneo, oscilatorio y periódico).

ECUACIÓN DEL M.A.S.

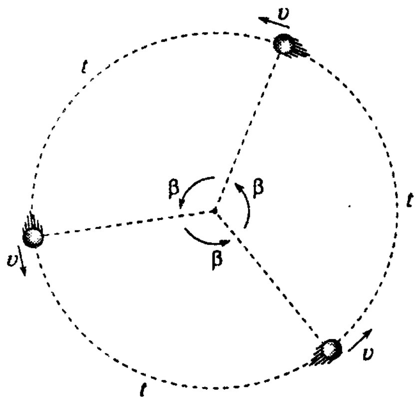
Un bloque unido a un resorte, libre de toda resistencia, puede experimentar un M.A.S.



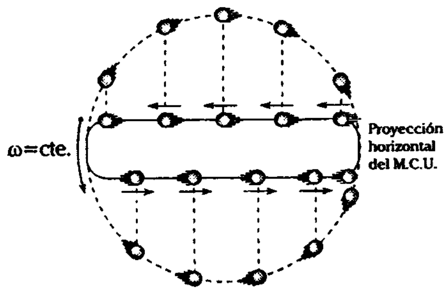
Para este gráfico notamos que el bloque, a medida que transcurre el tiempo, va cambiando de posición. Para determinar la posición del bloque en cualquier instante se necesita de su ecuación de movimiento.

La ecuación del movimiento es una relación entre la posición y el tiempo y la ecuación del movimiento del M.A.S. se obtiene de manera correcta y precisa aplicando la Segunda Ley de Newton al cuerpo que oscila (bloque) y luego de resolver una ecuación diferencial de segundo orden. El procedimiento señalado se suele hacer sin ningún incoveniente si se conoce la matemática superior, pero nosotros vamos a proceder de manera práctica debido a que haremos uso de un Movimiento Circunferencial Uniforme (M.C.U.)

Recordemos que un M.C.U. es un movimiento periódico de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ donde ω (rapidez angular que es constante).



Cuando proyectamos las diferentes posiciones de la partícula, que expenmenta un M.C.U. sobre una superficie plana, se obtiene **un movimiento con las características cinemáticas del M.A.S.**



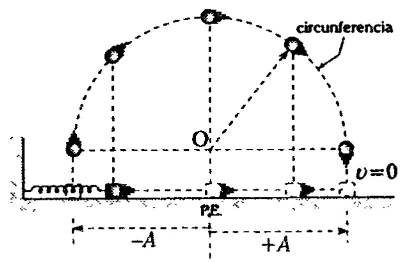
Al proyectar el M.C.U en un plano horizontal, se concluye que la proyección resulta ser como un M.A.S.

Según este gráfico podemos deducir que la partícula al dar una vuelta en el M.C.U. la proyección completa una oscilación. Con esto se tiene que

Tiempo en una oscilación <> Tiempo en una vuelta

$$\therefore \boxed{T_{proyec} = T_{M.C.U.}}$$

Ahora si a la proyección la reemplazamos por el bloque unido al resorte se tiene

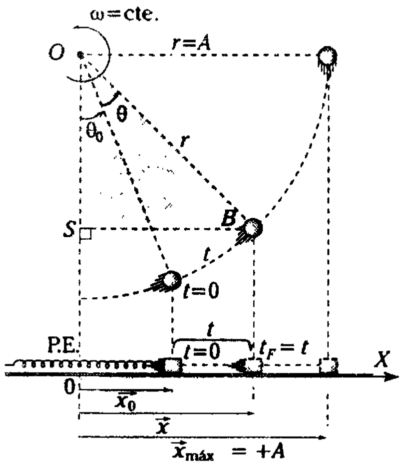


A partir de esta comparación se establece que

1. El máximo alejamiento del bloque respecto de su P.E., a cual llamaremos amplitud (A), es igual al radio del M.C U.

$$\boxed{r = A}$$

2. El centro de la circunferencia está por encima de la P.E., con estos detalles ya podemos obtener la ecuación del M.A.S. Primero hacemos coincidir el **origen** de coordenadas del eje X con la P.E. del bloque y por encima graficamos el M.C.U., tal como lo mostramos a continuación.



Se nota que la partícula que hace el M.C.U. está por encima del bloque que oscila en todo instante. Para el instante t la posición $(\vec{x})$ del bloque sería

$$\vec{x} = SB \qquad \text{(I)}$$

Pero a partir del $\triangle OSB$; $SB = r\,\mathrm{sen}(\theta+\theta_0)$ como $r = A$ y $\theta = \omega t \Rightarrow SB = A\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0)$
Reemplazando en (I) tenemos

$$\boxed{\vec{x} = A\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0)} \qquad \text{(II)}$$

Ecuación del M.A.S.

En caso que sobre un cuerpo que oscila se demuestra que la fuerza resultante depende de su posición en forma directa, entonces sus oscilaciones cumplen con la ecuación (II).

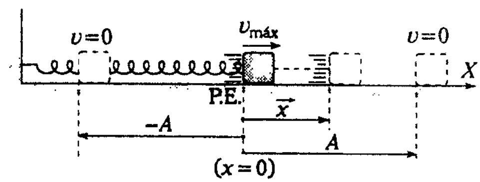
Se muestra la sinusoide que va formando el álabe de una turbina cuando va rotando y trasladándose en el agua.

ELEMENTOS CARACTERÍSTICOS DE UN M.A.S.

Entre ellos tenemos

Posición de equilibrio (P.E.)

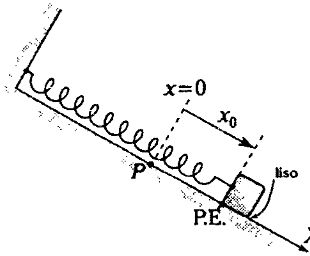
Es aquella posición donde la fuerza resultante es nula $(\vec{F}_R = \vec{0})$ y además la rapidez del cuerpo oscilante es máxima y a partir de esta posición se definen las diversas posiciones del cuerpo oscilante en cualquier instante de tiempo.



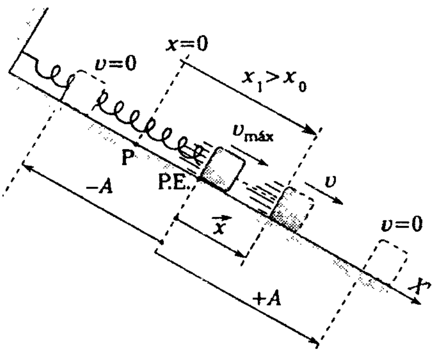
Tenga en cuenta que las posiciones del cuerpo que oscila se definen a partir de la P.E. por comodidad matemática ya que en realidad también se pueden definir a partir de otra posición diferente.

Cuando el plano de oscilación es horizontal coinciden la deformación del resorte y la posición del bloque, es decir $|\vec{x}| = x$ Pero, si el plano de oscilación es inclinado, ¿se cumple lo mismo?

Resorte deformado una longitud x_0:



Resorte deformado una longitud X_1:



En este caso no coincide la posición de equilibrio (P.E.) con la posición donde el resorte está sin deformar, es por ello que en éste ejemplo no coincida la posición con la deformación. Por ello será importante en estos casos, antes de analizar las oscilaciones, definir previamente su posición de equilibrio.

Posición $(\vec{x})$

Es aquel vector que se traza a partir del origen de coordenadas, que usualmente lo hacemos coincidir con la posición de equilibrio (P.E.) hasta el objeto. Este vector nos define la posición del objeto en un instante cualquiera respecto a la posición de equilibrio (P.E.)

Amplitud (A)

Es el máximo alejamiento del cuerpo que oscila respecto a la posición de equilibrio, esto es equivalente a que el objeto oscilante llega a uno de los extremos. Por eso planteamos $\vec{x}_{máx} = \pm A$.

Periodo (*T*)

Es el tiempo que demora un vaivén u oscilación. Es constante en un M.A.S.

El periodo también se suele definir como el mínimo intervalo de tiempo que debe transcurrir para que el cuerpo oscilante exhiba las mismas características cinemáticas.

Frecuencia de las oscilaciones (*f*)

Es una magnitud física escalar que nos permite determinar el número de oscilaciones libres en un cierto intervalo de tiempo, matemáticamente se define por

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{intervalo de tiempo}}$$

Unidades: s^{-1} < > Hertz (Hz)

Siendo el número de oscilaciones o vaivenes: N.

$$\therefore \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Frecuencia cíclica o angular (ω)

Es una magnitud física escalar que nos expresa el número de oscilaciones que se desarrollan en un intervalo de tiempo igual a 2π s. Y matemáticamente queda expresado por

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Unidad: rad/s

Nota

La frecuencia de las oscilaciones libres suele ser denominada *frecuencia propia* o *frecuencia natural*.

Fase de las oscilaciones

Llamada simplemente fase, y viene a ser la expresión que sigue al signo de seno o coseno. En los cursos de matemáticas es llamado argumento. Por lo dicho si la posición de un cuerpo que experimenta un M.A.S. viene dada por

$$\vec{x} = A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

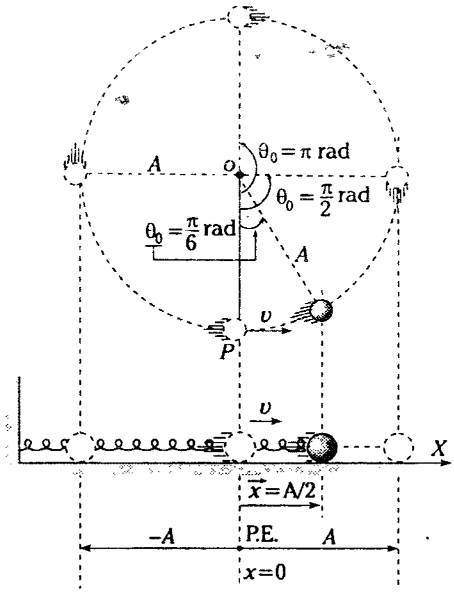
Entonces su fase será $\omega t + \theta_0$, la cual se expresa en radianes (rad). En las matemáticas (trigonometría) a la fase sele denomina argumento.

Conocida la fase para un instante dado y la amplitud de las oscilaciones, podemos definir para dicho instante la posición del cuerpo oscilante. No solamente podemos determinar la posición, sino también su velocidad y aceleración, ya que estas magnitudes como sabemos en el M.A.S. varían armónicamente. Con esto establecemos que al contar con la fase $(\omega t + \theta_0)$ y conocer la amplitud (A) se puede definir el estado mecánico del sistema oscilante en cualquier instante.

Fase inicial (θ_0)

Viene a ser la fase del M.A.S. evaluada en el instante inicial, es decir $t_0=0$. Ella nos permite determinar las condiciones iniciales del M.A.S., es decir la posición $(\vec{x})$ y velocidad $(\vec{v})$ en $t=0$.

Gráficamente podemos deducir el valor de la fase inicial (θ_0) si utilizamos un movimiento circunferencial uniforme (M.C.U.) de radio R=A, cuyo centro está por encima de la posición de equilibrio.



En la figura, el ángulo de fase inicial (θ_0) se mide a partir de la vertical (OP) en sentido antihorario.

1. Si el M.A.S. empieza en $\vec{x}=\vec{0}$ (P.E.) hacia la derecha, $\theta_0 = 0$ rad
2. Si el M.A.S. empieza en $\vec{x}=\vec{0}$ (P.E) hacia la izquierda, $\theta_0 = \pi$ rad
3. Si el M.A.S. empieza en $\vec{x}=+A/2$, $\theta_0 = \pi/6$ rad
4. Si el M.A.S. empieza en $\vec{x}=+A$, $\theta_0 = \pi/2$ rad
5. Si el M.A.S. empieza en $\vec{x}=-A$, $\theta_0 = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

Nota

La fase inicial (θ_0) puede tomar un conjunto de valores comprendidos entre 0 y 2π rad; es decir $0 \le \theta_0 < 2\pi$ rad.

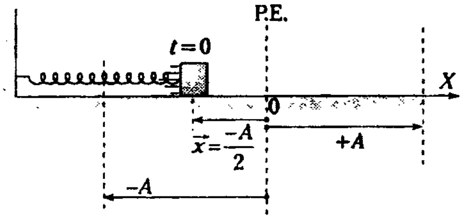
Ejemplo 3

Determine la fase inicial de un bloque unido a un resorte que oscila sobre una superficie horizontal lisa, si en el instante inicial su posición es $\vec{x}=-\frac{A}{2}$ (donde A: amplitud y el bloque se mueve hacia la derecha).

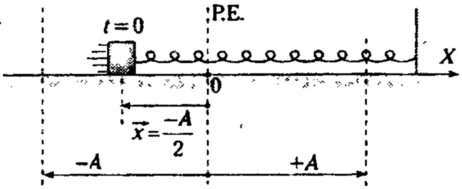
Resolución

Según lo planteado por el enunciado podríamos tener los siguientes casos

A.

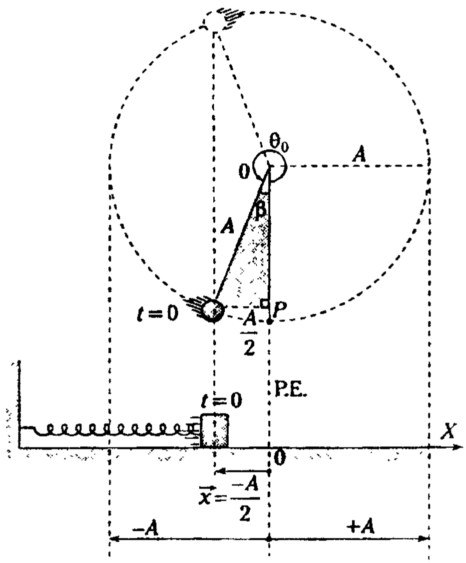


B.



Ahora para determinar la fase inicial (θ_0), podríamos trabajar con cualquiera de los dos casos, ya que se obtendría la misma respuesta. Se sugiere para el caso de oscilaciones horizontales, hacer lo siguiente:

1. Primero por la P.E. se traza una línea vertical.
2. Se toma un punto de esa línea, la cual sirve de centro de una circunferencia.
3. La circunferencia a trazar tiene un radio igual a la amplitud y se puede graficar por encima del bloque.
4. El cuerpo que oscila en todo instante está debajo de la partícula que describe el M.C.U. Según esto, planteamos el siguiente gráfico para el caso (a).



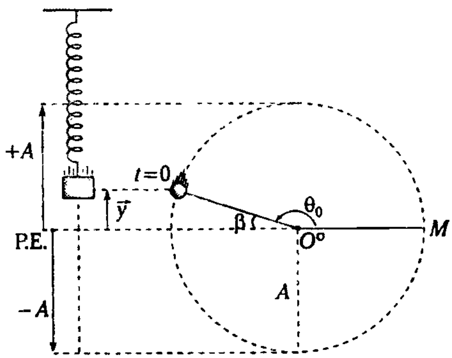
Como vemos, la partícula que describe el M.C.U. está por encima del bloque que oscila, pero en dos posiciones, ¿cuál le corresponde?

El bloque se dirige hacia la derecha y en dicho instante la partícula que da las vueltas debe estar orientándose en tal dirección. Por tanto al bloque le asociamos la partícula en la posición más baja.

Para terminar, trazamos el radio en la circunferencia hacia la partícula (en $t=0$) y luego a partir de *OP* trazamos un ángulo en sentido antihorario hasta intersectar al radio mencionado, dicho ángulo viene a ser la fase inicial (θ_0), del gráfico $\theta_0=2\pi-\beta$. Por la geometría podemos deducir $\beta=\frac{\pi}{6}$rad

$$\therefore\ \theta_0=\frac{11}{6}\pi\text{rad}$$

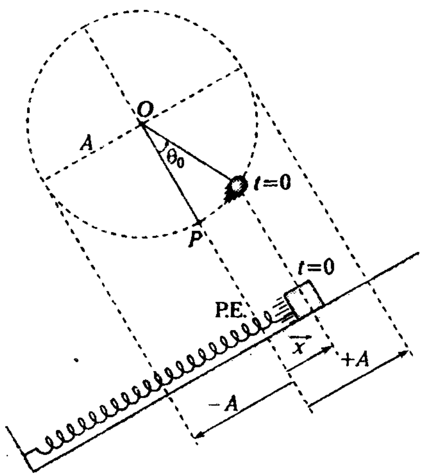
Para las oscilaciones verticales se plantea en forma similar, para determinar el ángulo de fase inicial se empieza a marcar a partir de la línea horizontal que se traza por la posición de equilibrio.



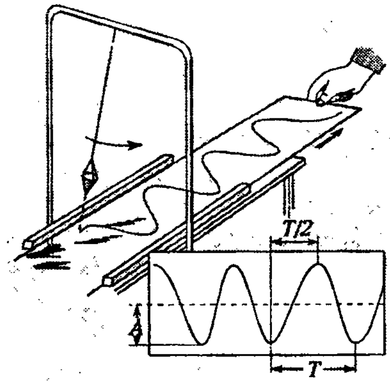
Para este caso el cuerpo que oscila y la partícula que da las vueltas están a un mismo nivel y la fase inicial se marca a partir de OM.

Aquí $\theta_0=\pi-\beta$, donde β depende de la posición inicial. $(\vec{y})$

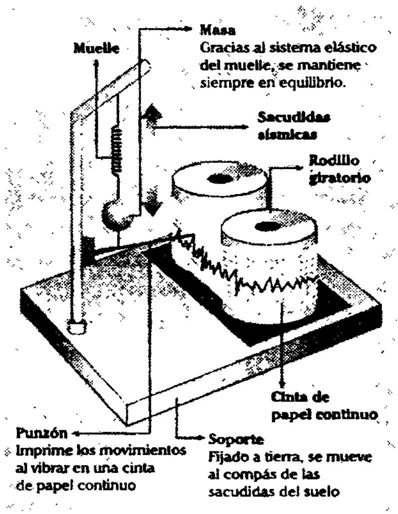
Para el caso de oscilaciones sobre una superficie inclinada trabajamos como si a las oscilaciones horizontales se les haya hecho rotar cierto ángulo.



En este caso la fase inicial la medimos a partir de OP en sentido antihorario. Tenga en cuenta que la fase inicial (θ_0) puede determinarse con las ecuaciones del M.A.S. y las condiciones iniciales.



El gráfico muestra el desarrollo de las oscilaciones de una pesa que oscila



La figura muestra un sismógrafo que registra las oscilaciones debido a un sismo, con esto se puede determinar la intensidad del sismo.

Ejemplo 4

Un bloque unido a un resorte tiene por ecuación de movimiento $\vec{x}=0{,}4\,\text{sen}\left(4t+\dfrac{3\pi}{2}\right)\text{m}$

Determine su posición inicial, su periodo de oscilación y su posición para el instante $t = \pi$ rad.

Resolución

Según la ecuación $\vec{x}=0{,}4\,\text{sen}\left(4t+\dfrac{3\pi}{2}\right)\text{m}$ el bloque experimenta un M.A.S. a lo largo del eje X comparando con la ecuación de todo M.A.S.

$\vec{x}=A\,\text{sen}\,(\omega t+\theta_0)$ se establece que

$$A = 0{,}4\text{ m};\ \omega = \text{rad/s}\ \text{ y }\ \theta_0=\frac{3\pi}{2}\text{ rad}$$

La posición inicial $\left(\vec{x}_0\right)$ la podemos obtener al evaluar la ecuación de M.A.S. para $t = 0$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 = 0{,}4\,\text{sen}\left(4(0)+\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}4\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\ \vec{x} = -0{,}4\text{ m}$$

¡En el extremo izquierdo!

El periodo de oscilación lo podemos determinar haciendo uso de la frecuencia cíclica (ω).

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\ \Rightarrow\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}$$

$$\therefore\ T=\frac{\pi}{2}\text{s}$$

Con esto podemos decir que el bloque realiza

1 oscilación en $\dfrac{\pi}{2}\text{s} = T$

1/2 oscilación en $\dfrac{\pi}{4}\text{s} = \dfrac{T}{2}$

1/4 oscilación en $\dfrac{\pi}{8}\text{s} = \dfrac{T}{4}$

Finalmente calculemos la posición del bloque en $t = \pi$s. Como este tiempo representa dos veces el periodo del bloque. Este en dicho intervalo y para dos oscilaciones y se ubicará nuevamente en su posición inicial.

Entonces

$$\text{en } t=\pi\text{s};\ \text{es}\ \ \vec{x} = \vec{x}_0 = -\frac{A}{2}$$

A este resultado también podemos llegar si evaluamos la ecuación del M.A.S para $t = \pi$s

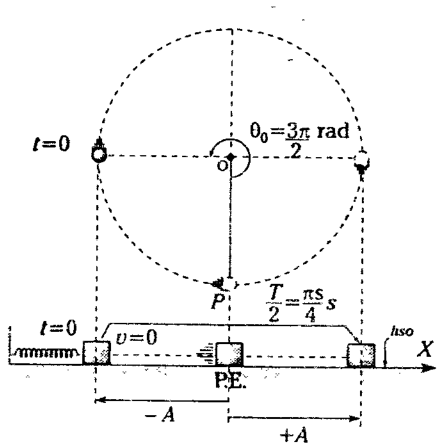
$$\vec{x}=0{,}4\,\text{sen}\left(4(\pi)+\frac{3\pi}{2}\right)\text{m}$$

¡Reducimos al primer cuadrante!

$$\Rightarrow\ \vec{x}=0{,}4\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\text{m}$$

$$\therefore\ \vec{x}=-0{,}4\text{ m}$$

Un gráfico que exprese lo desarrollado

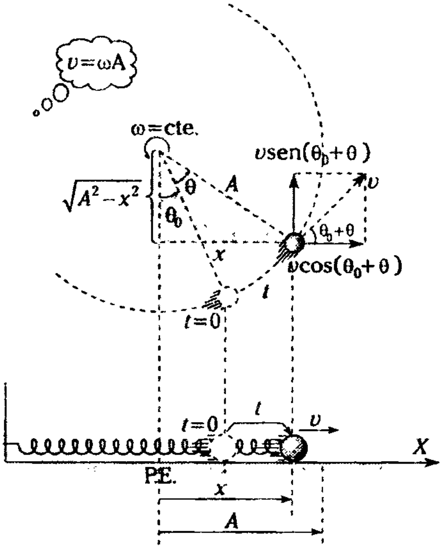


Constate que el bloque se ubica en el extremo izquierdo en los instantes:

$$t = 0;\ \frac{\pi}{2}\text{s};\ \pi\text{s}\ \ldots$$

ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN EN EL M.A.S.

Estas ecuaciones las podemos obtener en forma práctica, también haciendo uso del M.C.U.



En el mismo intervalo de tiempo t, el cuerpo que experimenta el M.A.S y la partícula que desarrolla el M.C.U. presentan el mismo desplazamiento horizontal. Esto nos permitirá plantear que la velocidad y aceleración del cuerpo que desarrolla el M.A.S. son iguales a la componente horizontal de la velocidad y aceleración de la partícula que experimenta el M.C.U.

La velocidad del oscilador luego de t segundos es υ y la componente horizontal de la partícula que realiza movimiento circunferencial uniforme es $\omega A\cos(\theta_0+\theta)$ de lo cual se desprende que $\vec{\upsilon}=\omega A\cos(\theta_0+\theta)$, como $\theta=\omega t$.

$$\boxed{\vec{\upsilon}=\omega A\cos(\omega t+\theta_0)}$$

Ecuación de la velocidad del M.A.S.

Nota

La velocidad en el M.A.S. también se puede expresar en función de la posición $(\vec{x})$. Usamos $\upsilon=\omega A\cos(\theta_0+\theta)$ pero del gráfico anterior

$$\cos(\theta_0+\theta)=\sqrt{\frac{A^2-x^2}{A}}$$

reemplazando

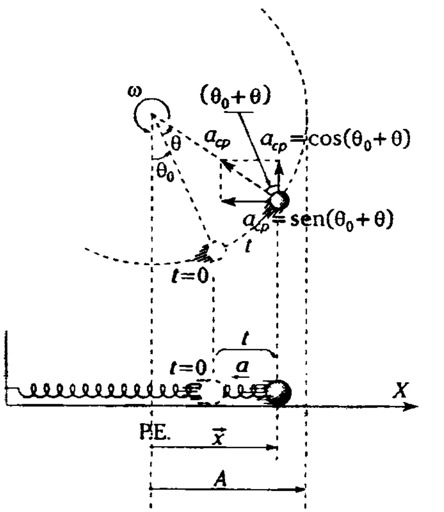
$$\boxed{\upsilon=\omega\sqrt{A^2-x^2}}$$

A partir de esta expresión podemos determinar la rapidez máxima ($\upsilon_{máx}$), la cual se obtiene en la posición de equilibrio ($x=0$).

$$\Rightarrow\ \upsilon_{máx}=\omega\sqrt{A^2-0^2}$$

$$\boxed{\upsilon_{máx}=\omega A}$$

Ahora determinemos la aceleración, en el movimiento circunferencial uniforme solo hay aceleración centrípeta la cual como sabemos se calcula con $a_{cp}=\omega^2R=\omega^2A$. Luego, graficando tendremos



El cuerpo unido al resorte tiene una aceleración dirigida hacia la izquierda y la partícula que realiza movimiento circunferencial uniforme tiene la componente horizontal dada por $a_H = a_{cp}\,\text{sen}(\theta_0+\theta)$ hacia la izquierda, dichas aceleraciones deben ser iguales

$$\vec{a} = -a_{cp}\,\text{sen}(\theta_0+\theta)$$

siendo: $a_{cp} = \omega^2 A$ y $\theta = \omega t$ al reemplazar se obtiene

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 A\text{sen}(\omega t+\theta_0)}$$

Ecuación de la aceleración del M.A.S.

Nota

Así como expresamos la velocidad en función de la posición, también podemos hacer lo mismo con la aceleración. En la ecuación de la aceleración. Se tiene el factor $A\text{sen}(\omega t+\theta_0)$, que no es otra cosa que la posición $(\vec{x})$ del cuerpo que experimenta M.A.S. Entonces tenemos:

$$\vec{a} = \omega^2 \underbrace{\left[A\text{sen}(\omega t+\theta_0)\right]}_{\vec{x}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \omega^2 \vec{x}}$$

A partir de esta expresión, se tendrá la máxima aceleración si la posición es máxima, es decir $\vec{x}_{máx} = \pm A$

$$\boxed{a_{máx} = \omega^2 A}$$

Después de haber determinado las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración en el M.A.S. con ayuda del M.C.U., podemos pasar ahora a demostrarlas, pero haciendo uso de las derivadas ya que dichas magnitudes se definen con dicho operador matemático. La ecuación de la posición de un cuerpo que experimenta M.A.S. en un instante cualquiera, como ya lo hemos planteado queda expresado por

$$\vec{x} = A\text{sen}(\omega t+\theta_0) \qquad \text{(I)}$$

A partir de esta ecuación podemos hallar la ecuación de la velocidad y aceleración instantánea.

En cinemática de la partícula se obtuvo al derivar la posición respecto al tiempo.

Para la velocidad instantánea

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(A\,\text{sen}\,\omega t+\theta_0)$$

$$\vec{v} = A\frac{d}{dt}\text{sen}\,(\omega t+\theta_0) = A\omega\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$\boxed{\vec{v} = \omega A\cos(\omega t+\theta_0)} \qquad \text{(II)}$$

Donde ω y A son constantes. Para determinar la velocidad máxima, planteamos que $\cos(\omega t+\theta_0)$ debe ser máximo, de las matemáticas se sabe que $\left(\cos(\omega t+\theta_0)\right)_{máx} = 1$

$$\boxed{v_{máx} = \omega A}$$

Para la aceleración instantánea derivamos la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\omega A\cos(\omega t+\theta_0)\right)$$

$$= \omega A\frac{d}{dt}\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$\vec{a} = \omega A\left(-\omega\text{sen}(\omega t+\theta_0)\right)$$

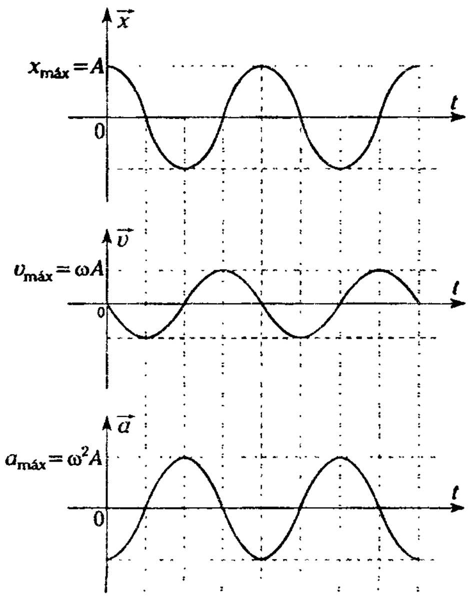
$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 A\text{sen}(\omega t+\theta_0)} \qquad \text{(III)}$$

El máximo valor de la aceleración se puede deducir de la expresión (III). Para esto se debe tener en cuenta que el máximo valor de la expresión $\text{sen}(\omega+\theta_0)$ es 1.

Entonces en (III) tenemos

$$\boxed{a_{máx}=\omega^2 A}$$

Cuando un cuerpo o partícula realiza oscilaciones armónicas, su posición (coordenadas), su rapidez y su aceleración también cambian armónicamente. Como se ha demostrado la velocidad del cuerpo oscilante está expresada poı la función coseno, mientras que la posición y la aceleración por la función seno. Esto nos permite plantear, de acuerdo a criterios trigonométricos, que las oscilaciones de la velocidad adelantan en fase a las oscilaciones de la posición en $\frac{\pi}{2}$rad, mientras que las oscilaciones de la aceleración adelantan en fase a las oscilaciones de la posición en π rad. Ahora lo establecido lo podemos expresar gráficamente sobre sistemas de coordenadas.

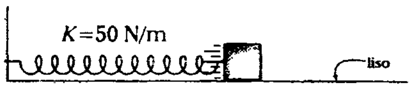


Finalmente según las gráficas podemos establecer

1. Cuando la posición y la aceleración alcanzan sus máximos valores, la velocidad es nula y viceversa.
2. La posición y la aceleración alcanzan sus valores máximos y mínimos simultáneamente. Pero también respecto a sus máximos se alcanzan con signos contrarios (direcciones contrarias), en este caso se suele decir que sus oscilaciones se cumplen en oposición de fase.

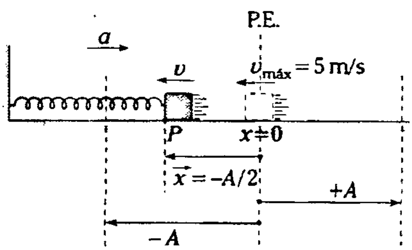
Ejemplo 5

El bloque que se muestra es de 0,5 kg y experimenta un M.A.S. Si su máxima velocidad es 5 m/s, determine el valor de su velocidad y aceleración para cuando pase por la posición $\vec{x}=-\frac{A}{2}$ (A: amplitud).



Resolución

Cuando el bloque pasa por la posición planteada $\left(\vec{x}=\frac{A}{2}\right)$, puede hacerlo moviéndose hacia la izquierda o hacia la derecha, pero como solo nos piden el valor de la rapidez y aceleración, entonces no es necesario conocer hacia dónde se mueve.



Para la posición P del bloque, el valor de su velocidad y aceleración quedaría definido por:

$$v=\omega\sqrt{A^2-x^2} \quad y \quad a=\omega^2 x$$

pero $x=\dfrac{A}{2}$; entonces

$$v=\omega\frac{A}{2}\sqrt{3} \quad y \quad a=\omega^2\frac{A}{2} \qquad \text{(I)}$$

Como vemos, se requiere la mitad de los valores máximos de la rapidez y aceleración.

De dato nos han dado $v_{máx}=\omega A=5$ m/s, reemplazando en (I)

$$v=\frac{5\text{ m/s}}{2}=2{,}5\sqrt{3}\text{ m/s}$$

$$a=\frac{\omega(\omega A)}{2}=\frac{\omega(5)}{2}=2{,}5\,\omega \qquad \text{(II)}$$

Como vemos para hallar el valor de la aceleración se requiere la frecuencia cíclica (ω), la cual se puede calcular así:

$\omega=\sqrt{\dfrac{K}{m}}$; reemplazando datos tenemos.

$$\omega=\sqrt{\frac{50}{0{,}5}}=10\text{ rad/s}$$

Luego en (II)

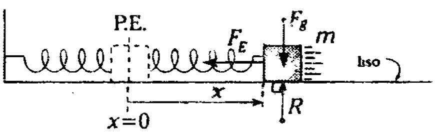
$$a=2{,}5\,(10)=25\text{ m/s}^2$$

Por lo tanto el valor de la velocidad y aceleración para la posición $\vec{x}=-\dfrac{A}{2}$ es

$$v=2{,}5\sqrt{3}\;\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}\text{ m/s} \quad y \quad a=25\text{ m/s}^2$$

PERIODO DE OSCILACIÓN DE UN BLOQUE UNIDO A UN RESORTE

El periodo de oscilación se puede hallar analizando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo oscilante



Sobre el bloque actúa una fuerza resultante dada por

$$F_R=ma$$

$$F_E=K\cancel{x}=m(\omega^2\cancel{x})$$

de donde

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Esta fórmula nos permite calcular la frecuencia cíclica (ω) del sistema bloque-resorte.

Por otro lado sabemos que el periodo (T) está ligado la frecuencia cíclica (ω)

$$T=\frac{2\omega}{\omega} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \qquad \text{(I)}$$

Unidades

m : kg

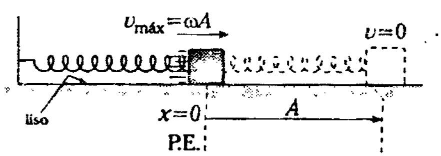
K : N/m

T : s

Nota

La fórmula para el cálculo del periodo de un M.A.S. no depende de la amplitud (A) de las oscilaciones. Esto nos permite plantear que para cualquier amplitud el periodo (T) es el mismo, siempre que la masa y la rigidez no cambien.

Otra forma de demostrar la relación (I) sería usando la ley de conservación de la energía mecánica



Como no hay rozamiento la energía mecánica del sistema bloque - resorte no varía, entonces en la P.E. y en el extremo se cumple

$$E_C^{\text{bloque}} = E_{PE}^{\text{resorte}}$$

$$\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

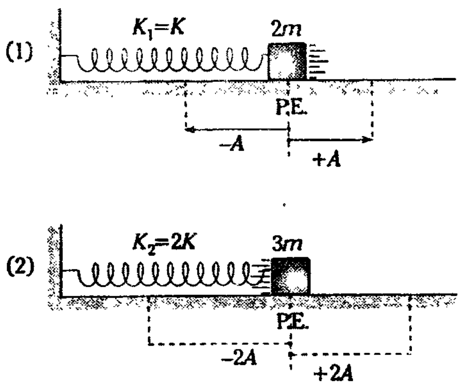
$$m(\omega A)^2 = KA^2 \Rightarrow m\omega^2 = K$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Ejemplo 6

Se muestran dos oscilaciones armónicas. ¿En qué relación están sus periodos de oscilación T_1/T_2?



Resolución

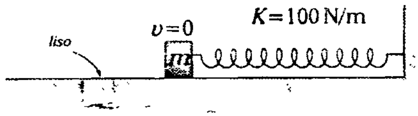
Primero aclaremos que el periodo de los osciladores mostrados es independiente de la amplitud (A); por ello la relación que nos piden T_1/T_2, no depende si la amplitud de un oscilador es menor, igual o mayor que el otro. Ahora proponemos $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ para cada oscilador.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{2m}{K}}}{\sqrt{\frac{3m}{2K}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

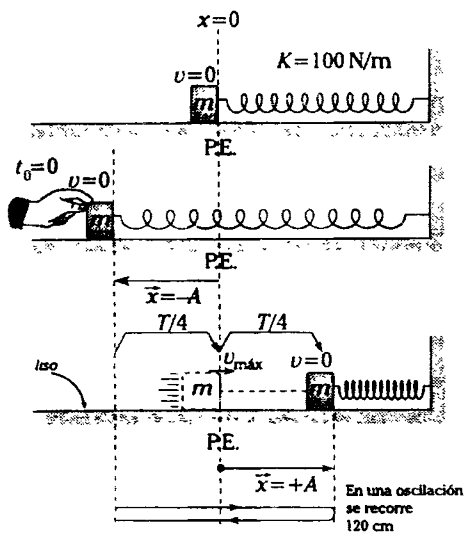
Ejemplo 7

El bloque que se muestra es de 1 kg y si se le desplaza hacia la izquierda y se le suelta, en cada oscilación recorre 120 cm. Determine la ecuación de su movimiento.



Resolución

Se entiende que si el bloque está en reposo y unido al resorte, entonces este último está sin deformar.



Cuando al bloque lo trasladamos hacia la derecha de su P.E. y lo soltamos, empieza a describir un M.A.S., entonces la ecuación de su movimiento viene dada por

$$\vec{x} = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

¿Qué implica determinar la ecuación del M.A.S.? Tan solo calcular la amplitud (A), la frecuencia cíclica (ω) y la fase inicial (θ_0)

El recorrido en una oscilación completa es 120 cm; note que el recorrido es igual a cuatro amplitudes.

$$e = 4A = 120 \text{ cm}$$

$$A = 30 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ m} \qquad \text{(II)}$$

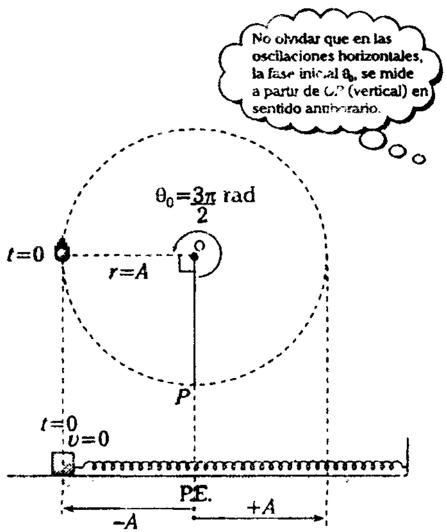
La frecuencia cíclica se determina con

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s} \qquad \text{(III)}$$

La fase inicial la calculamos con ayuda del M.C.U., veamos para las condiciones dadas en el instante inicial ($t_0 = 0$).

Del gráfico se deduce que

$$\theta_0 = \frac{3}{2}\pi \text{ rad} \qquad \text{(IV)}$$

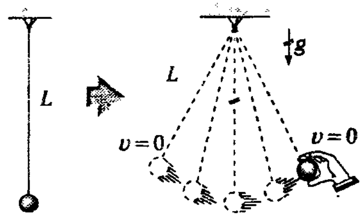


Finalmente reemplazamos

$$\vec{x} = 0{,}3\,\mathrm{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}$$

PÉNDULO SIMPLE (MATEMÁTICO)

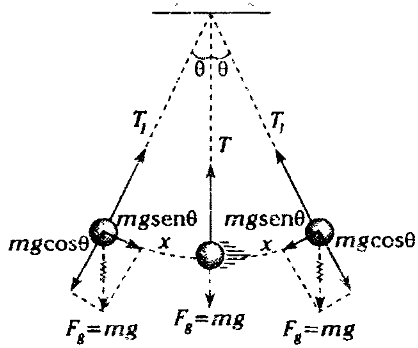
Es un sistema constituido por un hilo ideal, es decir de masa despreciable e inextensible. Está unido a un cuerpo cuyo tamaño también es despreciable en comparación con la longitud del hilo; el cual al ser desviado de su posición de equilibrio y soltado, empieza a realizar un movimiento oscilatorio



Al analizar el movimiento de la esfera despreciando la resistencia del aire, se observa que cada oscilación se repite exactamente en tiempos iguales, por lo que señalamos que es periódico.

¿Cómo determinamos el periodo del péndulo

Para ello analicemos las fuerzas que actuen sobre la esfera para diferentes posiciones de ésta.



Se observa que el movimiento de ida y vuelta se debe a la componente de la fuerza de gravedad, $mg\,\text{sen}\,\theta$ (fuerza recuperadora $\vec{F}_{rec}$)

$$\vec{F}_{rec} = mg\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(I)}$$

Se observa que el movimiento es curvilíneo y además la fuerza recuperadora es proporcional al $\text{sen}\,\theta$.

Sin embargo, si θ, es pequeño el $\text{sen}\,\theta$ es casi igual a θ (en radianes).

Por ejemplo si $\theta = 0{,}1$ rad (unos 6°), el $\text{sen}\,\theta = 0{,}0988$, con una diferencia de solo 0,2%, con esta aproximación

$\text{sen}\,\theta = \theta$ y como $x = \theta . L$

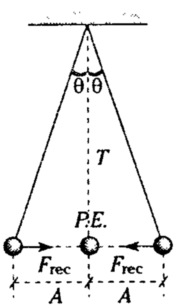
Luego $\text{sen}\,\theta = \left(\dfrac{x}{L}\right)$

en (II): $F_{rec} = mg \cdot \left(\dfrac{x}{L}\right)$

Como la fuerza recuperadora es proporcional a x (posición) y la trayectoria se aproxima a una recta, entonces la esfera efectúa un M.A.S.

Conclusión

Para valores pequeños de θ, ($\theta < 8°$), el movimiento del péndulo se aproxima a un M.A.S.



De (I)

$$F_{rec} = \left(\frac{mg}{L}\right)x \qquad \text{(II)}$$

En el M.A.S.

$$F_{rec} = F_R$$
$$\Rightarrow F_{rec} = ma$$
$$\Rightarrow F_{rec} = m(\omega^2 x) \qquad \text{(III)}$$

Igualando (II) y (III)

$$m(\omega^2 x) = \left(\frac{mg}{L}\right)x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El periodo en un M.A.S.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Por tanto el periodo de un péndulo simple viene dado por

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Unidades

L : en metros (m)

g : en m/s^2

t : en segundos (s)

Observar que el periodo no depende de la masa del cuerpo oscilante ni de la amplitud de las oscilaciones, pero sí de la longitud del hilo y de la aceleración de la gravedad.

- A mayor longitud del hilo (L), mayor es el periodo (T).
- A mayor valor de la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$, menor periodo (T).

Nota

1. El periodo calculado tiene un margen de error del 1% con respecto a su valor real

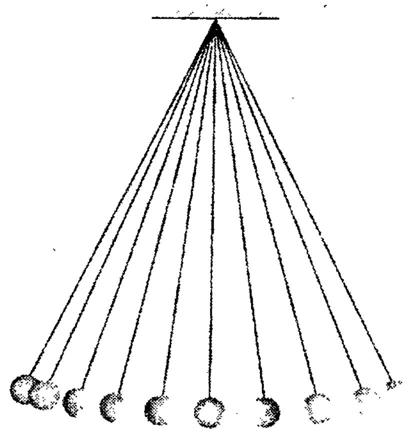
$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)+..\right)$$

2. Cuando un péndulo simple realiza vaivenes de 2 s de duración; se dice que dicho péndulo *bate segundos*, es decir, su periodo es $T = 2$ s.

Un péndulo simple, o una variante de este, también es un método preciso y práctico para medir el valor de la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$ pues es fácil medir con precisión L y T.

Tales mediciones son comunes en geofísica, los depósitos locales de mineral o petróleo afectan el valor local de g porque su densidad difiere de la del entorno, las mediciones precisas de esta cantidad en el área estudiada a menudo proporcionan información valiosa sobre la naturaleza de los depósitos subyacentes. Esta aplicación de péndulo se denomina gravitometría.

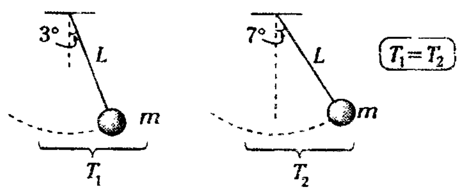
También con esta expresión $\left(T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$ podemos comparar el andar de los animales como de las personas al caminar, nuestras piernas se balancean con ayuda de la gravedad como un péndulo. Así como un péndulo largo tiene un periodo más largo, una persona de piernas largas tiende a dar pasos más lentos que una persona de piernas cortas. Esto es aún más notorio en los animales de patas largas como las jirafas, los caballos y las avestruces, los cuales corren con un trote más lento que los animales de patas cortas como los perros, gatos y los ratones.



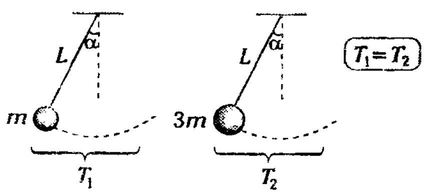
En el gráfico se muestran diferentes posiciones de un cuerpo que oscila

Propiedades de un péndulo simple

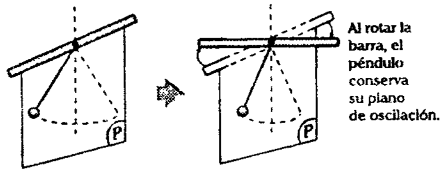
1. Para amplitudes angulares menores que 8°, el periodo del péndulo simple es independiente de la amplitud angular:



2. El periodo de oscilación es independiente de la masa del cuerpo



3. El plano de oscilación del péndulo permanece invariable cuando al punto de suspensión del hilo se le hace rotar. Por ejemplo podemos tener



Esta propiedad de conservación del plano de oscilación de un péndulo simple, le permitió al científico francés L. Foulcault, demostrar que la Tierra estáa rotando y por lo tanto no puede ser considerada un sistema de referencia inercial.

Ejemplo 8

¿Qué longitud debe tener un péndulo simple para que bata segundos en una región donde $g = \pi$ m/s^2?

Resolución

Si se quiere que el péndulo simple bata segundos, su periodo de oscilación debe ser 2 s, entonces como nos piden la longitud de hilo planteamos

$T = 2$ s

$$\Rightarrow \cancel{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \cancel{2}\;;\; \text{pero } g = \pi^2 \text{ m/s}^2$$

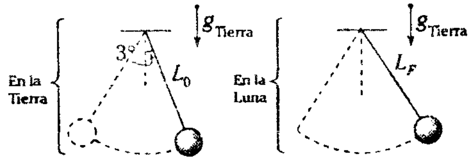
$$\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}} = 1$$

de donde $L = 1$ m

Ejemplo 9

Un péndulo simple oscila en la superficie de la Tierra. Si es trasladado a la superficie de la Luna, ¿qué hay que hacer con la longitud del péndulo para que su periodo no cambie?

$\left(\text{Considere } g_{\text{Luna}} = \frac{1}{6} g_{\text{Tierra}}\right)$



$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g_{\text{Tierra}}}} \qquad T_F = 2\pi\sqrt{\frac{L_F}{g_{\text{Luna}}}}$$

Resolución

Para saber qué le debemos hacer a la longitud del péndulo, debemos relacionar L_F y L_0, si usamos la condición del ejemplo, el periodo no debe cambiar.

$$\Rightarrow T_0 = T_F$$

$$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g_{\text{Tierra}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_F}{g_{\text{Luna}}}} \quad \text{elevamos al cuadrado}$$

$$\Rightarrow \frac{L_0}{g_{\text{Tierra}}} = \frac{L_F}{g_{\text{Luna}}}$$

como $g_{\text{Luna}} = \frac{1}{6} g_{\text{Tierra}}$; reeemplazando

$$\Rightarrow \frac{L_0}{\cancel{g_{\text{Tierra}}}} = \frac{L_F}{\frac{1}{6}\cancel{g_{\text{Tierra}}}}$$

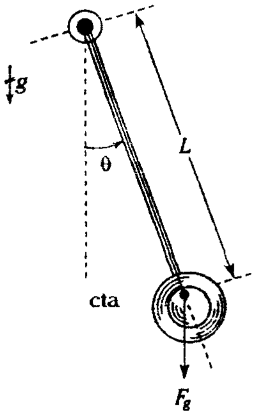
$$\Rightarrow L_F = \frac{L_0}{6}$$

Este resultado nos permite señalar que la longitud del péndulo debe reducirse a la sexta parte o que su longitud disminuya en $\frac{5L_0}{6}$, para que el periodo no cambie.

Otros péndulos

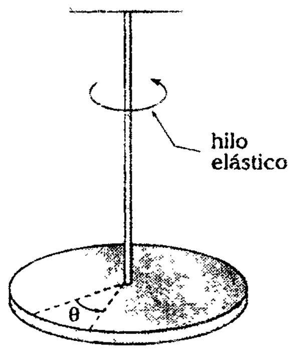
Solo hemos visto el péndulo simple o también llamado matemático. Pero en realidad existen otros tipos de péndulo, entre los cuales podemos resaltar a los péndulos físicos o compuestos y los péndulos de torsión.

A. Péndulo físico

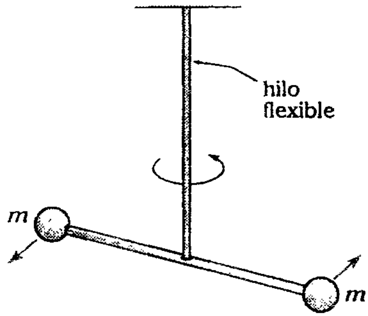


Un péndulo compuesto o físico, es un sólido cualquiera capaz de oscilar en un plano alrededor de cierto punto de suspensión situado a una distancia L de centro de masas. Estos péndulos son los que forman parte de los relojes que se empezaron a utilizar a partir de mediados del siglo XVIII.

B. Péndulo de torsión



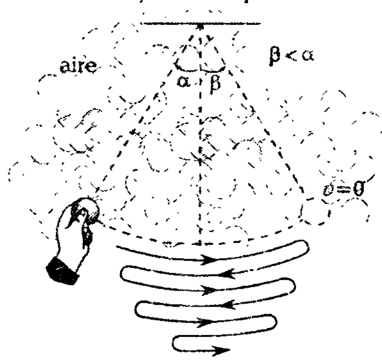
Este péndulo realiza oscilaciones torsionales o de torsión. Se aprecia ello cuando al disco se le hace rotar cierto ángulo y se le suelta. Las fuerzas de elasticidad que surgen en el hilo elástico flexible tienden a restituir al disco a su posición inicial, estas fuerzas son proporcionales al ángulo que se desvia al disco. Una de las aplicaciones de este péndulo la podemos encontrar cuando se quiere determinar la constante de gravitación universal (G)



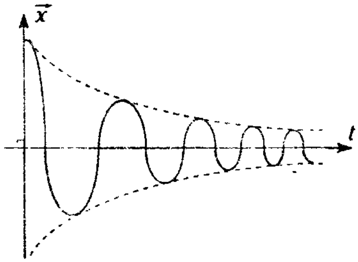
Péndulo de torsión usado por Cavendish

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Todo lo que hemos descrito hasta ahora corresponde a un tipo de oscilación muy particular: las oscilaciones armónicas. En todas las oscilaciones mecánicas ocurre algo inevitable: el rozamiento. Esto trae como consecuencia que las oscilaciones se vayan amortiguando, es decir, la amplitud va disminuyendo. Sin embargo, las oscilaciones no dejan de ser periódicas.

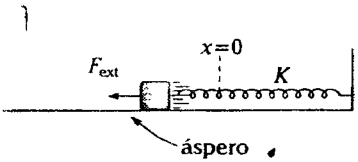


Oscilaciones amortiguadas de un péndulo



Esta gráfica muestra aproximadamente como disminuye la amplitud del péndulo.

Cuando soltamos un péndulo, después de haberlo sacado de su posición de equilibrio, sus oscilaciones se van atenuando a causa del rozamiento con el aire. Si quisieramos mantener oscilando al péndulo o a cualquier sistema mecánico la experiencia nos muestra que se debe ejercer una acción externa periódica, es decir, que se manifieste rítmicamente con las oscilaciones del sistema que oscila. Como se ha mencionado al comenzar el capítulo, producir oscilaciones bajo una acción externa que varía periódicamente es ocasionar oscilaciones forzadas.



Todos nosotros alguna vez nos hemos sentado en un columpio y si nos empiezan a empujar suavemente con el mismo ritmo que los balanceo del columpio, entonces las oscilaciones aumentan cada vez más su amplitud. A este fenómeno del incremento de la amplitud bajo oscilaciones forzadas lo denominamos **resonancia**.

En el ejemplo del columpio, cuando se empuja al compas de las oscilaciones, se tiene que los empujes se hacen con el mismo periodo de las oscilaciones, esto equivale a decir que la frecuencia con la cual se dan los empujones ($f_{externa}$) coincide con la frecuencia propia o natural del columpio ($f_{columpio}$).

Conclusión

El **fenómeno de resonancia** se manifiesta cuando la frecuencia de las acciones externas se aproximan o es igual a la frecuencia propia o natural de sistema oscilador.

En resonancia es máxima la amplitud de las oscilaciones forzadas porque se crean las condiciones más favorables para la transmisión de energía de la fuente exterior de la fuerza periódica del sistema.

Como la fuerza periódica actúa al compás de las oscilaciones libres, durante todo el periodo su sentido coincide con el de la velocidad del cuerpo oscilante. Por eso, durante todo el periodo, dicha fuerza realiza únicamente trabajo positivo, lo cual significa que la energía del sistema oscilante aumenta.

Si la frecuencia de la fuerza exterior no es igual a la frecuencia propia de las oscilaciones del sistema, la fuerza exterior solo realiza trabajo positivo en una parte del periodo. Durante el resto del periodo la fuerza está dirigida en sentido opuesto a la velocidad y su trabajo es negativo.

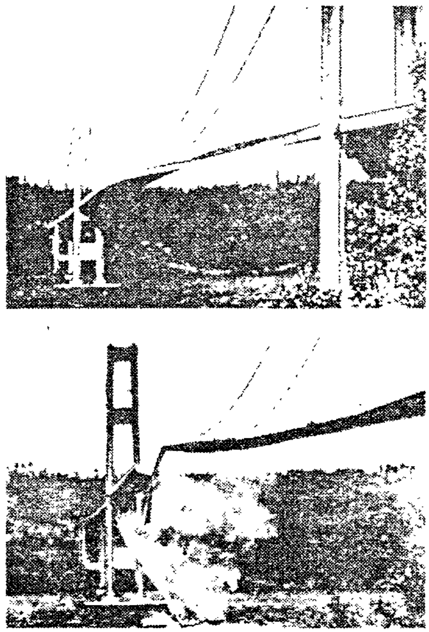
En total el trabajo de la fuerza externa es pequeño y, respectivamente también es pequeña la amplitud de las oscilaciones estables.

Seguramente cada uno de nosotros hemos tenido de cerca al fenómeno de resonancia mecanica y no le hemos prestado la importancia del caso, debido a que desconocemos más por completo las causas de dicho fenómeno. Cuando un camión pasa cerca a nuestros hogares. ¿Qué ocurre? la vajilla o cristales de una vitrina empiezan a vibrar ¿Cómo justificamos estos? las vibraciones que el camión produce sobre la pista, son transmitidas o a través del terreno a nuestro hogar, al piso de nuestra sala, llegando así a vibrar la vitrina, luego la vajilla y sus cristales. Esto ocurrió gracias a la resonancia mecánica.

En muchos casos la resonancia se presenta de manera perjudicial y nociva en la ingeniería y la técnica. Cuando un pelotón de soldados va a pasar un puente inmediatamente se da la orden de romper filas. Esto se hace para que los pasos de los soldados no se hagan en concordancia, ya que producirán vibraciones forzadas con frecuencias que pueden ser iguales a la frecuencia de su estructura este oscilará con una amplitud cada vez mayor que lo llevaria al colapso. Ahora, los ingenieros a la hora de proyectar puentes procuran hacerlo de modo que la frecuencia propia de la estructura sea diferente a la frecuencia de las posibles acciones externas que puede experimentar. En la técnica, los cimientos (bases) de las máquinas presentan algo similar, se tiene especial cuidado a la hora de hacer los cimientos de tal manera que su frecuencia es diferente de la frecuencia de vibración de las partes móviles de la máquina.

Para reflexionar

¿Por qué cuando las cuerdas de un violín vibran, una copa de cristal que está cerca se puede quebrar?



El puente Tacoma Narrows se colapsó cuatro meses y seis días después de abrirse al tráfico. El claro principal tenía unos 850 m de largo y cerca de 12 m de ancho con vigas de 2.4 m de altura para darle rigidez en ambos costados. La amplitud máxima de las vibraciones por torsión fue de 35°; la frecuencia fue de cerca de 0.2 Hz.

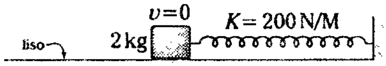
Nota

Cuando se estudian los procesos oscilatorios periódicos, lo que más interesa son los rasgos generales, que caracterizan la repetición del movimiento, y no la posición y la velocidad del cuerpo oscilante en un instante cualquiera. Importa conocer la amplitud y el periodo de las oscilaciones, las magnitudes que caracterizan el proceso en conjunto. Cuando las oscilaciones son forzadas hay que conocer la relacion entre las frecuencias de la fuerza impulsadora y de las oscilaciones libres. Ella precisamente define el carácter del proceso.

Problemas Resueltos

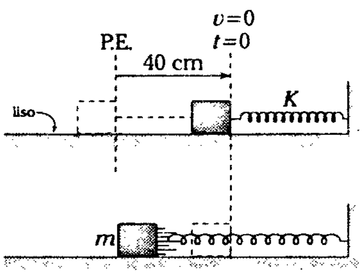
Problema 1

Al bloque que se muestra, se le desplaza 40 cm hacia la derecha y se le suelta. Determine el periodo de sus oscilaciones y la ecuación de su movimiento.



Resolución

Según el gráfico, el bloque está en reposo sobre una superficie horizontal lisa, esto implica que el resorte está sin deformar. Si al bloque se le traslada 40 cm hacia la derecha y se le suelta se tendría.



El bloque se moverá realizando M.A.S.

Para calcular el periodo del bloque (T) podemos hacer uso de

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

como $m = 2$ kg y $K = 200$ N/m

entonces al reemplazar

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{200}} = 2\pi\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{\pi}{5}\text{ s}$$

Este resultado implica que en una oscilación el bloque emplea $\frac{\pi}{5}$ s .

También, nos piden determinar la ecuación de movimiento del bloque, por ello planteamos la ecuación del M.A.S.

$$\vec{x} = A\,\text{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

Para cumplir con nuestro objetivo debemos, previamente, obtener la amplitud (A), la frecuencia cíclica (ω), la fase inicial (θ_0) y reemplazarlo en (I).

Para el cálculo de ω sabemos que

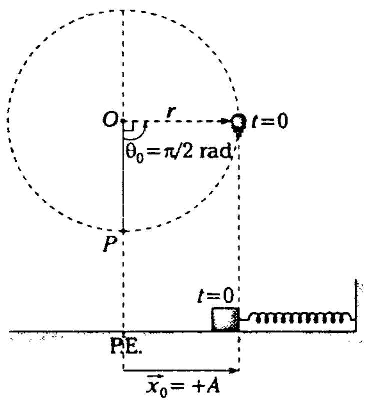
$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10\text{ rad/s} \qquad \text{(II)}$$

Para el cálculo de A, recordamos lo siguiente:

Cuando un bloque unido a un resorte está en su P.E. y luego se le desplaza cierta distancia $d = 40$ cm y se suelta, entonces d es la amplitud de las oscilaciones.

$$A = 40\text{ cm} = 0{,}4\text{ m} \qquad \text{(III)}$$

Para el cálculo de θ_0, lo más práctico será hacer uso del M.C.U. y se plantea lo siguiente



Recuerde que para las oscilaciones horizontales la fase inicial (θ_0) se mide a partir de OP.

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente (II), (III), (IV) en (I) tenemos

$$\vec{x} = 0{,}4\operatorname{sen}\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}$$

Observación

Con respecto a la determinación de la fase inicial (θ_0) se tiene otro método, el cual sería hacer uso de la ecuación del M.A.S para el instante inicial, es decir

$$\vec{x} = A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

En $t = 0$ tenemos que $\vec{x}_0 = +A$, reemplazando en (I)

$$+\cancel{A} = \cancel{A}\operatorname{sen}(\theta_0)$$

$$\operatorname{sen}\theta_0 = +1$$

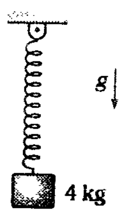
Como $0 \le \theta < 2\pi$ rad entonces el único valor posible para θ_0 sería $\frac{\pi}{2}$rad.

$$\Rightarrow \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Como vemos hemos obtenido la misma respuesta que habiendo usado el M.C.U. En la práctica el lector puede seguir cualquiera de los procedimientos aunque se recomienda hacer uso del M.C.U. pues nos puede conducir hacia otros cálculos adicionales.

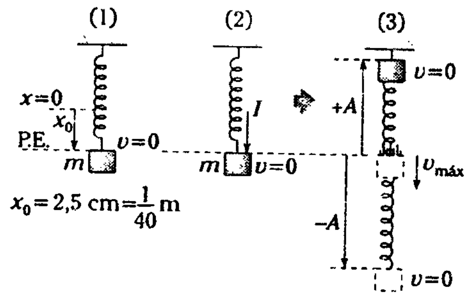
Problema 2

Se muestra un bloque en reposo que ha estirado 2,5 cm al resorte. Si el bloque experimenta un impulso de $\vec{I} = -40\hat{j}$ N.s, determine la ecuación de su movimiento. (g = 10 m/s²).



Resolución

El bloque inmediatamente después de haber recibido el impulso (hacia abajo) empezará a experimentar un M.A.S. (despreciando la resistencia del aire), tal como lo indicamos a continuación:



Para este caso, la ecuación de movimiento del bloque está definida por

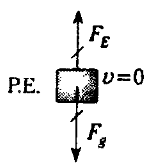
$$\vec{y} = A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

Ahora se requiere A, ω y θ_0

Para el cálculo de ω, sabemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \text{(II)}$$

Pero del equilibrio del bloque en el gráfico (1)



$$\begin{cases} F_E = F_g \\ Kx_0 = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{m} = \frac{9}{x_0} = \frac{10}{1/40} = 400$$

En (II)

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{400} = 20 \text{ rad/s} \qquad \text{(III)}$$

El cálculo de A lo podemos hacer si se tiene en cuenta que el bloque empezó su M.A.S. a partir de su P.E., en dicha posición su rapidez es máxima $(v_{máx})$ y se expresa por

$$v_{máx} = \omega A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{v_{máx}}{20} \qquad \text{(IV)}$$

Como el bloque recibió el impulso en la P.E. se tendría que

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_F = m\vec{v}_F = m\vec{v}_{\max}$$

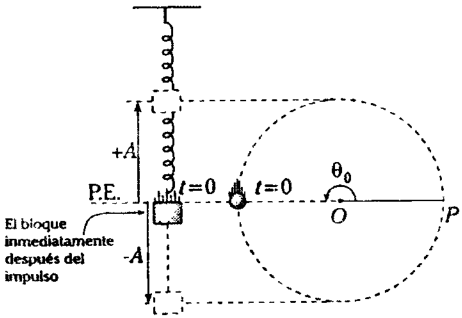
tomando módulo a los extremos

$$\Rightarrow v_{\text{máx}} = \frac{I}{m} = \frac{40}{4} = 10 \text{ m/s}$$

Ahora reemplazamos en (III)

$$A = \frac{1}{2} \text{ m} = 0{,}5 \text{ m} \qquad \text{(V)}$$

Finalmente calculamos θ_0 ; esto lo haremos con ayuda del M.C.U. tal como lo indicamos a continuación.



Para este caso la fase inicial (θ_0) la medimos en sentido antihorario a partir de $\overline{OP}$ y se deduce que

$$\theta_0 = \pi \text{ rad} \qquad \text{(VI)}$$

Ahora reemplazamos (III), (V) y (VI) en (I)

$$\vec{y} = 0{,}5\text{sen}(20t + \pi) \text{ m}$$

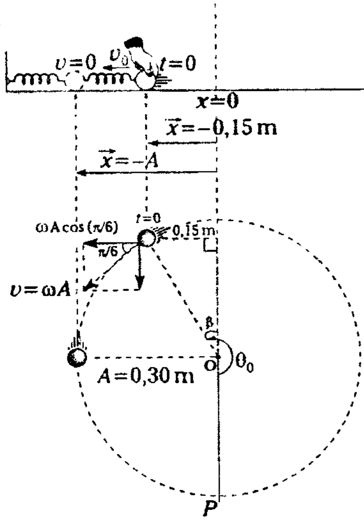
Problema 3

Una esfera de 2 kg, unida a un resorte de rigidez K=50 N/m, reposa sobre una superficie horizontal lisa. El extremo opuesto del resorte está unido a una pared vertical, la esfera se desplaza hacia la izquierda 15 cm y luego la lanzamos hacia la izquierda de modo que en cada oscilación recorra 120 cm. Determine la ecuación del movimiento de la esfera y la velocidad con la cual fue lanzada.

Resolución

Inicialmente tenemos

Luego



Tenga en cuenta que

1 oscilación = 1 vaivén

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{recorrido}\\ \text{de 1 vaivén}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{recorrido}\\ \text{ida}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{recorrido}\\ \text{regreso}\end{pmatrix}$$

$$120 \text{ cm} = 2A + 2A$$

$$\therefore \quad A = 30 \text{ cm} = 0{,}30 \text{ m} \qquad \text{(I)}$$

Este resultado es el radio de la circunferencia donde una partícula desarrolla el M.C.U.

Para hallar la fase inicial θ_0, del gráfico

$$\theta_0 = \pi + \beta$$

pero por la geometría se establece que

$$\beta = \frac{\pi}{6}\text{rad} \Rightarrow \theta_0 = \frac{7\pi}{6}\text{rad} \qquad \text{(II)}$$

Por otro lado la frecuencia cíclica (ω) se define por

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = 5 \text{ rad/s} \qquad \text{(III)}$$

Como nos piden la ecuación del movimiento de la esfera que experimenta un M.A.S. proponemos

$$\vec{x} = A\text{sen}(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (I), (II) y (III) en (IV)

$$\vec{x}=0{,}3\,\mathrm{sen}\left(5t+\frac{7\pi}{6}\right)\mathrm{m}$$

Para calcular la velocidad inicial $\vec{v}_0$ se puede proceder de varias formas, pero haremos uso de la ecuación de la velocidad del M.A.S.

Recuerde $\vec{v}=\omega A\cos(\omega t+\theta_0)$

En $t=0$; tenemos que $\vec{v}=\vec{v}_0$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_0=\omega A\cos(\theta_0)$$

$$\vec{v}_0=(5)(0{,}30)\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

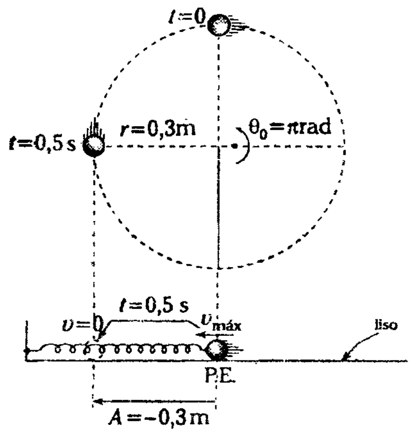
$$\therefore\ \vec{v}_0=-0{,}75\sqrt{3}\ \mathrm{m/s}$$

Problema 4

Una partícula realiza un M.A.S. unida a un resorte sobre un plano horizontal liso de modo que en $t=0$ se dirige hacia la izquierda con su máxima rapidez y luego recorre 30 cm en 0,5 s, inmediatamente después cambia la dirección de su movimiento. Determine la ecuación de su movimiento y el módulo de su máxima aceleración.

Resolución

Según el enunciado la partícula inicialmente, se desplaza de su P.E. hacia su extremo izquierdo en 0,5 s. Grafiquemos lo que acontece



La partícula experimenta en M.A.S. la ecuación de su movimiento forma

$$\vec{x}=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0) \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico podemos deducir que

$A=0{,}3$ m y $\theta_0=\pi$ rad

También se deduce que $T=2$ s

$$\Rightarrow\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\ \mathrm{rad/s}$$

Reemplazando lo obtenido en (I)

$$\theta_0=\pi\mathrm{rad}\ \Rightarrow\ 0{,}3\,\mathrm{sen}(\pi t+\pi)\,\mathrm{m}$$

También piden la $a_{máx}$, sabemos

$$a_{máx}=\omega^2 A$$

$$a_{máx}=(\pi)^2(0{,}3)$$

$$\therefore\ a_{máx}=0{,}3\pi^2\ \mathrm{m/s^2}$$

Otro método

Para calcular la fase inicial (θ_0) podemos hacer uso de la ecuación de la velocidad del M.A.S. si la evaluamos en el instante inicial ($t_0=0$) veamos

$$\vec{v}=\omega A\cos(\omega t+\theta_0)$$

En $t=0$ tenemos que $\vec{v}_0=-\omega A$

$$\Rightarrow\ -\omega A=\omega A\cos(0+\theta_0)$$

$$\Rightarrow\ \cos\theta_0=-1$$

$$\therefore\ \theta_0=\pi\ \mathrm{rad}$$

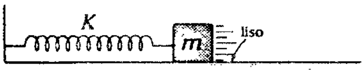
Nota

En los problemas donde nos pidan formar la ecuación de un M.A.S, tenemos que determinar según las condiciones existentes, la amplitud (A), la frecuencia cíclica (ω) y la fase inicial (θ_0) ; de esta manera podremos obtener la ecuación del movimiento.

Problema 5

El bloque realiza un M.A.S., de modo que en cualquier instante su velocidad está determinada por la expresión

$$\vec{v} = -0{,}8\text{sen }2t\ (\text{m/s})$$



Determine la velocidad del bloque cuando pasa por segunda vez por la la posición
$\vec{x} = +0{,}32$ m

Resolución

Se ha demostrado que la velocidad de un cuerpo que experimenta un M.A.S., en cualquier instante de tiempo viene dado por

$$\vec{v} = \omega A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

Por dato

$\vec{v} = -0{,}8\text{sen}2t$

Transformando a una función coseno y para ello hacemos lo siguiente:z

$$\vec{v} = 0{,}8\text{sen}(-2t)$$

$$\vec{v} = 0{,}8\cos\left[\frac{\pi}{2} - (-2t)\right]$$

$$\vec{v} = 0{,}8\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

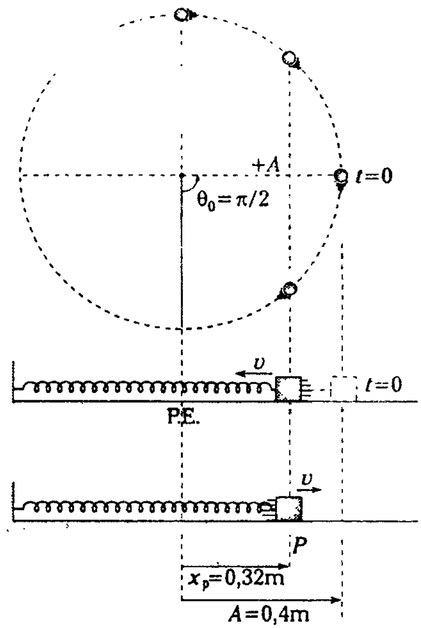
Luego de comparar (I) y (II) deducimos que

$\omega A = 0{,}8$ m/s

$\omega = 2$ rad/s

$\Rightarrow A = 0{,}4$ m

también $\theta_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$; este valor de la fase inicial permite establecer que el bloque inicia su movimiento en el extremo derecho. A partir del siguiente gráfico notaremos que el bloque pasa por segunda vez por $\vec{x} = +0{,}32\,\text{m}$ cuando se mueve hacia la derecha.



En P, la velocidad del bloque queda definida por

$$\vec{v} = +\omega\sqrt{A^2 - x_P^2}$$

$$\vec{v} = +2\sqrt{(0{,}4)^2 - (0{,}32)^2}$$

$$\vec{v} = 0{,}48\hat{i}\ \text{m/s}$$

Problema 6

La ecuación del movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal, presenta la forma. ¿Cuánto será el menor tiempo que transcurrirá entre la posición $\vec{x} = 10\sqrt{2}$ cm y $\vec{x} = -10$ cm?

Resolución

Recordemos que si la ecuación del movimiento está definida por una función armónica: seno o coseno, el cuerpo realiza un M.A.S. En tal sentido, como la ecuación del movimiento del cuerpo en nuestro problema está definida por la función coseno, el cuerpo realizará un M.A.S.

De la ecuación del movimiento se deduce:

$$\vec{x} = 20\cos(4\pi t + 0)\ (\text{cm})$$

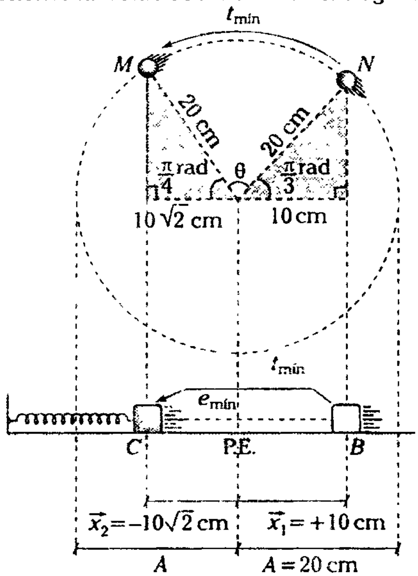
El cuerpo oscila a lo largo del eje x.

Fase inicial $\theta_0 = 0$

Frecuencia cíclica: $\omega = 4\pi$ rad/s

Amplitud: $A = 20$ cm $= 0{,}2$ m

Consideremos que el cuerpo es un bloque y está unido a un resorte si relacionamos su movimiento con el M.C.U. de una partícula, luego tendríamos que el menor tiempo que emplea el cuerpo en ir de la posición $\vec{x}_1$ a la posición $\vec{x}_2$ se dará cuando realice el menor recorrido ($e_{\text{mín}}$) entre estas dos posiciones tal como se muestra en el diagrama:



Luego: $t_{\text{mín}} = t_{NM}$

Del M.C.U. $\quad \omega = \dfrac{\theta}{t}$

$$\Rightarrow \quad t_{\text{mín}} = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)}{4\pi}$$

$$\therefore \quad t_{\text{mín}} = \frac{5}{48}\,\text{s}$$

Problema 7

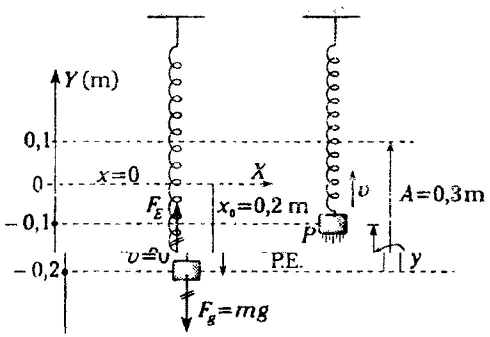
De un techo está colgado un bloque mediante un resorte estirado 20 cm Cuando el bloque se mueve verticalmente, tal movimiento se describe con la ecuación $\vec{y} = [-0{,}2 + 0{,}3\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)]\,m$, determine cuál será la rapidez del bloque, cuando pase por la posición $\vec{y} = -0{,}1$ m ? ($g = 10$ m/s^2).

Resolución

Como la ecuación del movimiento está dado por

$$\vec{y} = -0{,}2 + 0{,}3\ \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

Deducimos que el bloque experimenta un M.A.S. y que el origen del sistema de coordenadas no coincide con la posición de equilibrio (P.E.) del bloque; ya que está 0,2 m por encima de la P.E. Se sabe además que la amplitud es $A = 0{,}3$ m; pero la frecuencia cíclica (ω) y la fase inicial (θ_0) son desconocidos. Respecto del ángulo de fase inicial, puede ser $\theta_0 = 0$, si el bloque es impulsado al inicio hacia arriba o también puede ser: $\theta_0 = \pi$ rad, dado que el bloque es impulsado al inicio hacia abajo.



Cuando el bloque está en $\vec{y} = 0{,}1$ m, respecto a la P.E. está alejado 0,1 m.

La rapidez del bloque en P esta dada por

$$v=\omega\sqrt{A^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \quad v=\omega\sqrt{(0,3)^2-(0,1)^2} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere ω y sabemos que

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \text{(II)}$$

Ahora en la posición de equilibrio (P.E.)

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\Rightarrow \quad F_E=F_g$$

$$\Rightarrow \quad Kx_0=mg$$

$$\Rightarrow \quad K(0,2)=m(10)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K}{m}=50$$

Reemplazando en (II)

$$\omega=5\sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

Reemplazando en (I)

$$v=5\sqrt{2}\sqrt{(0,3)^2-(0,1)^2}$$

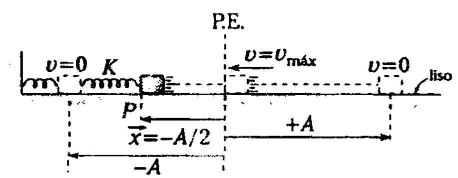
$$v=2\ \text{m/s}$$

Problema 8

Un oscilador armónico, conformado por un bloque unido a un resorte, tiene una energía mecánica E. Cuando el bloque pase por la posición $\vec{x}=-\frac{A}{2}$ (A = amplitud), ¿que energía cinética tiene?

Resolución

Por lo que señala el problema, podemos suponer que el oscilador está sobre un plano horizontal liso.



Como vemos el bloque unido al resorte al resbalar sobre una superficie lisa, convierte al sistema (bloque – resorte) en un sistema conservativo, es decir la energía mecánica del sistema se conserva. En la posición P del bloque, tenemos

$$E_M^{sist}=E_C^{bloque}+E_{PE}^{resorte}=E\ (\text{cte.}) \qquad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \quad E_C^{bloque}+\frac{Kx^2}{2}=E \quad \text{y} \quad \text{como } x=\frac{-A}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_C^{bloque}=E-\frac{K}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_C^{bloque}=E-\frac{1}{4}\left(\frac{KA^2}{2}\right) \qquad \text{(II)}$$

Notamos que se requiere la E_M^{sist}; en la expresión (I) y podemos plantear que el bloque llega a uno de sus extremos $\vec{x}=\pm A$ si en dicha posición su rapidez es nula ($v=0$),

$$E_M^{sist.}=\cancel{E}_C^{bloque}+E_{PE}^{resorte}$$

$$E=0+\frac{KA^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E=\frac{KA^2}{2} \qquad \text{(III)}$$

Finalmente reemplazamos (III) en (I)

$$E_C^{bloque}=E-\frac{1}{4}(E)$$

$$\therefore \quad E_C^{bloque}=\frac{3}{4}E$$

Nota

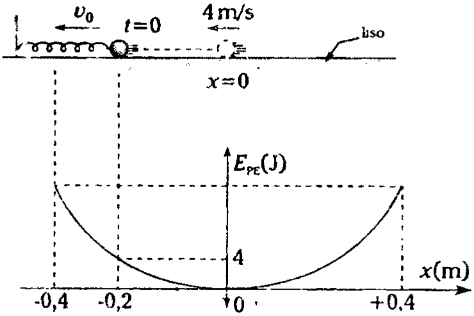
Después de haber resuelto el problema anterior, en la expresión (III) notamos que la energía mecánica del sistema oscilador es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud, es decir

$$E_M^{sist}=\frac{1}{2}KA^2 \qquad \text{(I)}$$

Esta expresión nos permite señalar que si aumenta la amplitud (A) la energía del oscilador aumenta; pero según la relación (I) podemos establecer que si la amplitud se duplica, la energía mecánica del sistema se cuatriplica o si la amplitud se reduce a la mitad la energía se reduce a la cuarta parte.

Problema 9

Determine la velocidad inicial de la esfera y la ecuación de las oscilaciones a partir de las gráficas mostradas; una de las gráficas nos indica como varía la energía potencial elástica del resorte cuando la esfera cambia de posición.



Resolución

Observando la esfera que realiza M.A.S., deducimos que en $t=0$ es lanzada hacia la izquierda con v_0 en la posición $\vec{x}_0=-0{,}2$ m; donde su energía potencial es $E_{PE}=4$ J

En la posición de equilibrio

$$v=v_{máx}=\omega A=4 \text{ m/s} \qquad \text{(I)}$$

y de la gráfica $E_{PE}-x$ deducimos $A=0{,}4$ m

En (I)

$$\omega(0{,}4)=4$$

$$\therefore\ \omega=10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La ecuación del movimiento tiene la forma

$$\vec{x}=A\text{sen}(\omega t+\theta_0) \qquad \text{(II)}$$

Hallemos θ_0, si en $t=0$ la posición del cuerpo es $\vec{x}=-0{,}2$ m.

Reemplazando en (II)

$$-0{,}2=0{,}4\text{sen}[10(0)+\theta_0]$$

$$-\frac{1}{2}=\text{sen}\theta_0$$

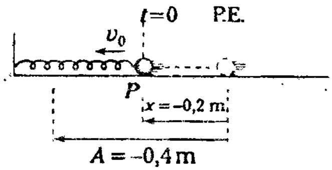
$$\Rightarrow\ \theta_0=210°=\frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

En (II)

$$\vec{x}=0{,}4\text{sen}\left(10t+7\frac{\pi}{6}\right)\text{ m} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Ecuación del}\\ \text{M.A.S.}\end{array}\right)$$

¿Con qué velocidad inició sus oscilaciones la esfera?

Según los datos tenemos:



Para la esfera en P tenemos

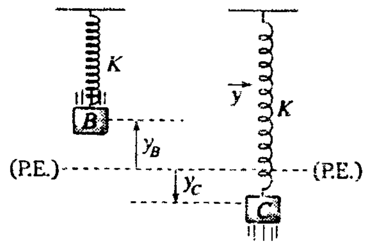
$$\vec{v}_0=-\omega\sqrt{A^2-x_0^2}$$

$$\vec{v}_0=-10\sqrt{(0{,}4)^2-(-0{,}2)^2}$$

$$\therefore\ \vec{v}_0=-2\sqrt{3}\,\hat{i}\text{ m/s}$$

Problema 10

Dos bloques B y C de igual masa oscilan con amplitudes iguales a A. Luego de transcurrido un tiempo t que empezaron a oscilar verticalmente el bloque B está en $\vec{y}=+A/2$ descendiendo y C está en $\vec{y}=-\frac{\sqrt{3}}{2}A$ ascendiendo. En dicho instante halle el ángulo de fase de C con respecto a B.

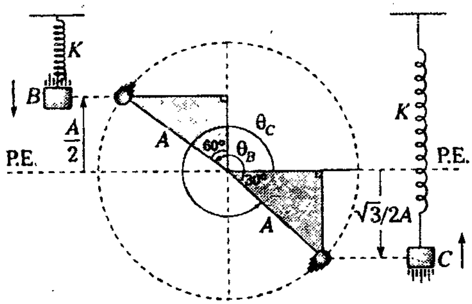


Resolución

Los bloques B y C tienen igual masa m y están unidos a resortes de igual rigidez K. ¿Qué implica esta información? Implica que ambos bloques tienen igual frecuencia cíclica pues ella se calcula con

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Además ambos bloques, por dato del problema, oscilan con igual amplitud A y para poder hallar las fases (θ) de cada uno de los bloques, podemos apoyarnos en el M.C.U. de una partícula cuyo radio de trayectoria sea igual a A.



De la figura

El ángulo de fase de C es

$$\theta_C = 270° + 60° = 330° = 11\frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

El ángulo de fase de B es

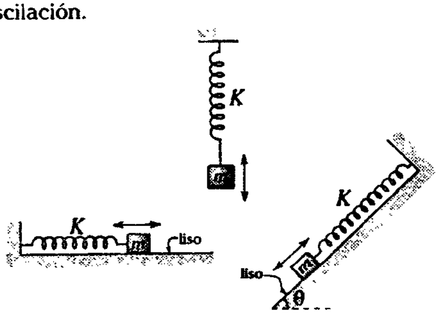
$$\theta_B = 90° + 60° = 150° = 5\frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

De donde deducimos que ángulo de fase de C respecto de B es

$$\theta_C - \theta_B = \pi\text{ rad}$$

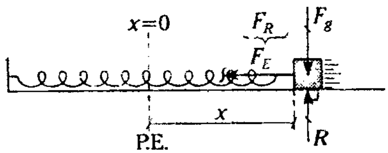
Problema 11

Demuestre que los periodos de oscilación de los bloques de igual masa (m) unidos a resortes con igual constante de rigidez son iguales y no dependen de la orientación del plano de oscilación.



Demostración

1. M.A.S. en el plano horizontal



En una posición cualquiera, sobre el bloque oscilante actúa una fuerza resultante que se puede expresar por

$$F_R(\leftarrow) = ma(\leftarrow)$$

$$Kx = m(\omega^2 x)$$

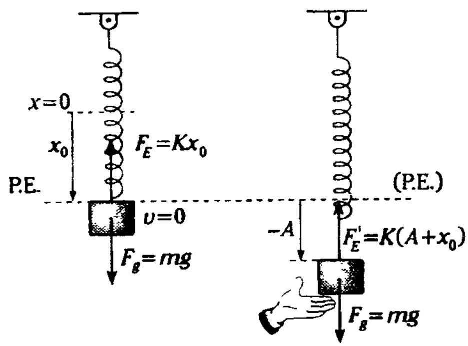
$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Este resultado nos indica que ¡El periodo (T) de oscilación de un bloque unido a un resorte solo depende de m y K!

2. M.A.S. en el plano vertical



Del primer gráfico en la posición de equilibrio

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$Kx_0 = mg \qquad \text{(I)}$$

Del segundo gráfico, al soltar el bloque este oscila con amplitudes $\pm A$ y sobre él actúa una fuerza resultante.

Luego en el extremo inferior

$$F_R = ma$$

$$K(A+x_0) - mg = m(\omega^2 A)$$

$$KA + \cancel{Kx_0} - \cancel{mg} = m\omega^2 A$$

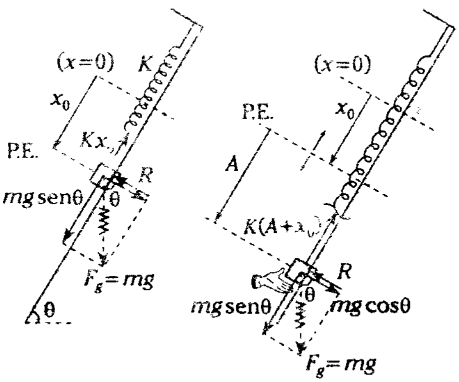
Simplificando

$$K\cancel{A} = m\omega^2 \cancel{A} \Rightarrow K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

El periodo de oscilación solo depende de m y K y no de la orientación del plano donde suceden las oscilaciones.

3. M.A.S. en el plano inclinado liso



Al soltar el bloque oscila con amplitudes $\pm A$ las oscilaciones ocurren con respecto a la posición de equilibrio (P.E.). Entonces del primer gráfico en equilibrio

$$\sum F(\nearrow) = \sum F(\swarrow)$$

$$Kx_0 = mg\operatorname{sen}\theta$$

En el segundo gráfico, planteamos la segunda ley de Newton para el bloque

$$F_R = ma$$

$$K(A+x_0) - mg\operatorname{sen}\theta = m(\omega^2 A)$$

$$KA + \cancel{Kx_0} - \cancel{mg\operatorname{sen}\theta} = m\omega^2 A$$

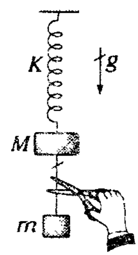
$$\cancel{K}\cancel{A} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cancel{A}$$

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

¿Qué propiedad podemos resaltar al examinar estos tres casos? Podemos afirmar que el periodo T de oscilación solo depende de la masa (m) oscilante y de la rigidez (K) del resorte, no depende de la orientación del plano donde se efectúan las oscilaciones (puede ser horizontal, vertical o inclinada) y tampoco depende de la amplitud de las oscilaciones.

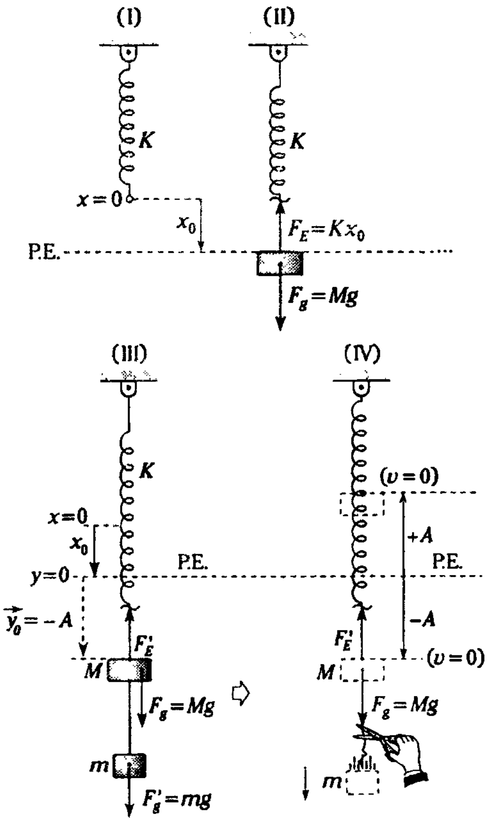
Problema 12

En la figura, el sistema se encuentra en reposo. Si se corta la cuerda que une a los bloques de masas M y m; entonces se observa que M oscila verticalmente. Determine la ecuación de su movimiento.



Resolución

Al cortar el hilo m debido a la atracción terrestre este desciende verticalmente experimenta un M.V.C.L., mas M debido a que está conectado al resorte empezará a oscilar verticalmente con respecto a su posición de equilibrio. En consecuencia será necesario tener cuidado en definir la posición de equilibrio de M (masa oscilante).



Del gráfico (II) como el bloque esta en reposo

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$Kx_0=Mg \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico (III) (aún sin cortar la cuerda) en equilibrio

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\Rightarrow \; F_E'=K(x_0+A)=Mg+mg$$

$$\Rightarrow \; \underbrace{Kx_0}+KA=Mg+mg$$

$$\Rightarrow \; \cancel{Mg}+KA=\cancel{Mg}+mg$$

$$\therefore \; A=\left(\frac{m}{K}\right)g \qquad \text{(II)}$$

Del gráfico (IV) (luego de cortar la cuerda) sobre M actúa en ese instante una fuerza resultante dirigida hacia arriba dada por

$$F_R=Ma$$

$$\Rightarrow \; F_E'-Mg=M(\omega^2A)$$

$$\Rightarrow \; K(x_0+A)-Mg=M(\omega^2A)$$

$$\Rightarrow \; \cancel{Kx_0}+KA-\cancel{Mg}=M\omega^2A$$

$$\Rightarrow \; K=M\omega^2$$

$$\therefore \; \omega=\sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \text{(III)}$$

(Es la frecuencia cíclica de las oscilaciones de M)

Entonces M oscila con amplitud A y la ecuación de las oscilaciones será

$$\vec{y}=A\,\text{sen}(\omega t+\theta_0) \qquad \text{(IV)}$$

donde, en $t=0$ M tiene una posición $\vec{y}_0=-A$, por lo que se deduce que

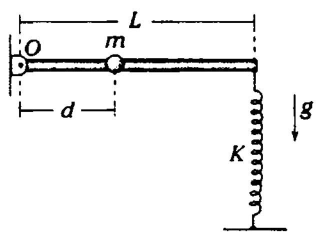
$$\theta_0=\frac{3\pi}{2}\text{rad} \qquad \text{(V)}$$

Reemplazando en (II), (III) y (V) en (IV) tenemos

$$y=\frac{mg}{K}\text{sen}\left[\sqrt{\frac{K}{M}}t+\frac{3\pi}{2}\right]$$

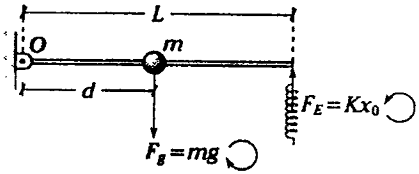
Problema 13

La varilla de masa despreciable está en reposo tal como se muestra y a una distancia d tiene fija una pequeña esfera de masa m. Si ligeramente comprimimos al resorte y lo abandonamos el sistema, determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del sistema.



Resolución

En la posición mostrada debido a la atracción de la Tierra sobre la esfera el resorte de rigidez K debe estar comprimido x_0. Para determinar x_0, aprovechamos el equilibrio del sistema y tomamos momentos respecto de la articulación O.



En el equilibrio se verifica

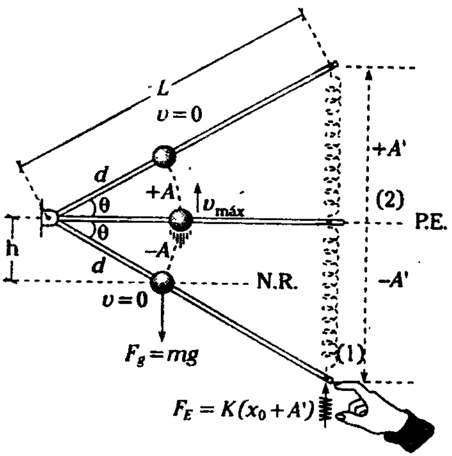
$$\Sigma M_0 \circlearrowright = \Sigma M_0 \circlearrowleft$$

$$\Rightarrow M_0^{F_g} = M_0^{F_E}$$

$$\Rightarrow (mg)d = (Kx_0).L$$

$$\therefore\ x_0 = \frac{mg}{K}\left(\frac{d}{L}\right) \qquad \text{(I)}$$

Para que el sistema oscile debemos ejercer cierta acción sobre la barra



Al presionar con la mano el resorte, éste incrementa su deformación por compresión y su deformación resulta x_0+A'. Para que la pequeña esfera realice un M.A.S. será necesario que oscile en línea casi recta, para ello es necesario que θ sea un ángulo pequeño.

Además sobre el sistema luego de retirar la mano no actúan fuerzas externas como el viento, ni el rozamiento. Entonces la energía mecánica del sistema se conservará, y podemos plantear en las posiciones (1) a (2) un balance de energía mecánica.

$$E_{PE(1)}^{resorte} = E_C^{esfera} + E_{PG}^{esfera} + E_{PE(2)}^{resorte}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}K(x_0+A')^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{máx}^2 + mgA + \frac{1}{2}Kx_0^2$$

$$\Rightarrow\ \cancel{\frac{1}{2}Kx_0^2} + Kx_0A' + \frac{1}{2}K(A')^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m(\omega A)^2 + mgA + \cancel{\frac{1}{2}Kx_0^2}$$

Reemplazando (I)

$$\Rightarrow\ K\left[\frac{mg}{K}\left(\frac{d}{L}\right)\right]A' + \frac{1}{2}K(A')^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + mgA \qquad \text{(II)}$$

Además, de la figura (ver los arcos que se describe) tenemos

$$\left.\begin{matrix}\theta d = A\\ \theta L = A'\end{matrix}\right\} \frac{d}{L} = \frac{A}{A'}$$

$$\therefore\ A' = \left(\frac{L}{d}\right)A$$

En (II)

$$mg\frac{\cancel{d}}{\cancel{L}}\left(\frac{\cancel{L}}{\cancel{d}}A\right) + \frac{1}{2}K\left(\frac{L}{d}A\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + mgA$$

Simplificando

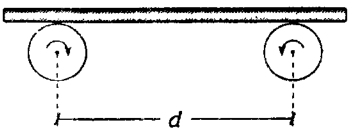
$$\cancel{\frac{1}{2}}K\frac{L^2}{d^2}\cancel{A^2} = \cancel{\frac{1}{2}}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cancel{A^2}$$

de donde

$$T = 2\pi\frac{d}{l}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Problema 14

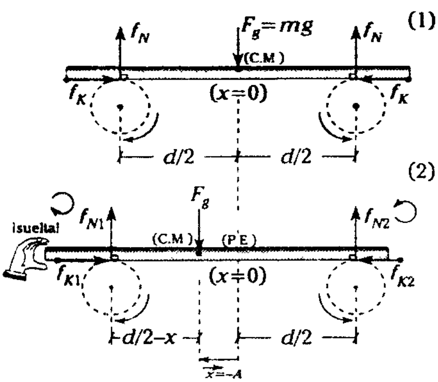
Una barra homogénea descansa libremente sobre dos rodillos cilíndricos idénticos que rotan en sentidos opuestos como indica la figura. La distancia entre los centros geométricos de los rodillos es d. Si se desplaza ligeramente la barra hacia la izquierda de su posición de equilibrio, determine el periodo de las oscilaciones de la barra. El coeficiente de rozamiento entre la barra y cada uno de los rodillos es μ_K. Defina la ecuación del movimiento oscilatorio de la barra, si en $t=0$, se tiene para ella $\vec{v}_0=\vec{0}$ y $\vec{x}=-A$.



Resolución

La barra inicialmente está en reposo, esto sucede cuando su centro de masa (C.M) está sobre el punto medio de la distancia entre los centros de los rodillos. ¿Qué hacemos para que la barra se mueva?

Su centro de masa lo desviamos ligeramente x hacia la izquierda y luego la soltamos



f_K: Es el módulo de la fuerza de rozamiento cinético, ¿por qué? porque hay deslizamiento entre las superficies en contacto.

¿Qué sucede al soltar la barra?

Analicemos

1. Verticalmente, como su C.M se desplazó hacia la izquierda entonces $f_{N1}>f_{N2}$ (puede comprobarlo tomando momentos en el C.M.).

2. Horizontalmente

$$\left.\begin{array}{l} f_{K1}=\mu_K f_{N1} \\ f_{K2}=\mu_K f_{N2} \end{array}\right\} (\div)\ \frac{f_{K1}}{f_{K2}}=\frac{f_{N1}}{f_{N2}}>1$$

$$\Rightarrow\ f_{K1}>f_{K2}$$

3. Este resultado significa que sobre la barra hay fuerza resultante $\left(\vec{F}_R\right)$ hacia la derecha la cual determina que la barra empiece a moverse hacia la derecha.

4. ¿Pero, la F_R $(\rightarrow)$ siempre es constante?
La barra se desplazará hacia la derecha acelerando, mas esta aceleración disminuye hasta que el centro de masa de la barra llega a la posición de equilibrio de ahí, $f_{N1}=f_{N2}$; entonces $f_{K1}=f_{K2}$ y $\vec{a}=\vec{0}$. No obstante, la barra tiene su máxima velocidad (v_{max}) y por inercia se sigue moviendo hacia la derecha pero ahora $f_{N2}>f_{N1}$, con lo cual $f_{K2}>f_{K1}$ y surge sobre ella una fuerza resultante hacia la izquierda y la barra desacelera hasta frenarse y en dicho instante reinicia su movimiento hacia la izquierda ya que $f_{K2}>f_{K1}$. Esto nos reflejaría que la barra se pondrá a oscilar. Para saber si sus oscilaciones son armónicas, determinemos la fuerza resultante sobre la barra en la posición (2).

$$F_R=f_{K1}-f_{K2}$$

$$F_R=\mu_K f_{N1}-\mu_K f_{N2}$$

$$F_R=\mu_K(f_{N1}-f_{N2}) \qquad \text{(I)}$$

Por equilibrio en la vertical se deduce que

$$f_{N1}-f_{N2}=mg$$

Además como la barra no rota y sólo experimenta traslación se debe verificar que

$$M^{R}_{\text{C.M.}}=0$$

$$M^{f_{N1}}_{\text{C M}}=M^{f_{N2}}_{\text{C M}}$$

$$\Rightarrow\ f_{N1}\left(\frac{d}{2}-x\right)=f_{N2}\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

Efectuando

$$(f_{N1}-f_{N2})\frac{d}{2}=\underbrace{(f_{N1}+f_{N2})}_{mg}x$$

$$\Rightarrow\ (f_{N1}-f_{N2})=2mg\left(\frac{x}{d}\right)$$

En (I)

$$F_R=\left(\frac{2mg.\mu_K}{d}\right)x$$

y en forma vectorial sería

$$\vec{F}_R=\left[\frac{2mg\mu_K}{d}\right]\vec{x}$$

Esto comprueba que la fuerza resultante sobre la barra es directamente proporcional al desplazamiento de su C.M. y de dirección contraria a éste. Implica que la barra experimenta un M.A.S. respecto de su P.E.

Ahora calculemos su periodo (T) haciendo uso de la segunda ley de Newton.

$$F_R=ma_{\text{M.A.S}}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{2\cancel{m}g\mu_K}{d}\right)x=\cancel{m}(\omega^2 x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{2g\mu_K}{d}=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\frac{d}{2g\mu_K}}\quad\left(\text{periodo de la oscilación de la barra}\right)$$

Finalmente determinemos la ecuación del movimiento de la barra. Como se tiene un M.A.S. planteamos

$$\vec{x}=A\operatorname{sen}(\omega t+\theta_0)\qquad\text{(I)}$$

Por las condiciones iniciales $\vec{x}_0=-A$ (extremo izquierdo)

se logra deducir que

$$\theta_0=\frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

asimismo

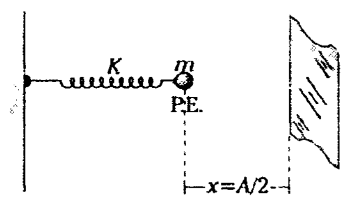
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{2g\mu_K}{d}}$$

Reemplazamos en (I)

$$\vec{x}=A\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{2g\mu_K t}{d}}+\frac{3\pi}{2}\right)$$

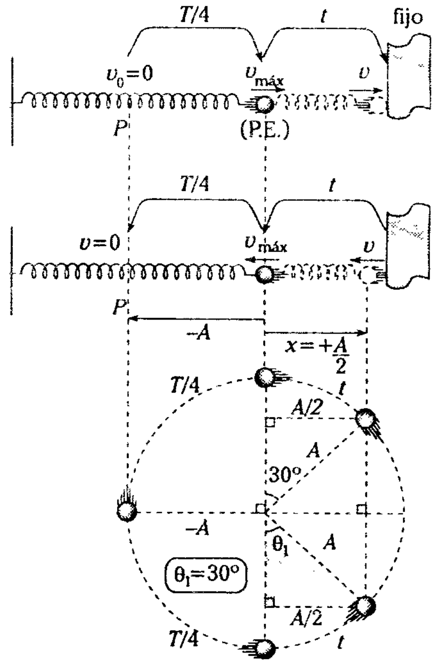
Problema 15

Una pequeña esfera de masa m sujeta a un resorte cuya rigidez es K y realiza oscilaciones armónicas de amplitud A. A la distancia $\vec{x}=+A/2$ de la posición de equilibrio se coloca una plancha de acero de gran masa, de modo que la esfera realiza choques perfectamente elásticos contra ella. ¿Qué periodo tienen las oscilaciones de la esfera? (La esfera se desliza sin fricción por un plano horizontal).



Resolución

Como bien sabemos en el choque elástico de la esfera contra la plancha, debido a que esta última es de gran masa, la esfera rebotará con la misma rapidez con que impacta y la plancha en todo instante se mantendrá en reposo. Así podemos plantear el siguiente gráfico, considerando que la esfera fue soltada en P.



Si no estuviese la plancha de acero ¿qué sucedería? No habría choque y la esfera oscilaría horizontalmente con un período dado por

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Sin embargo debido a la presencia de la plancha no se completa el movimiento y el tiempo para completar 1 oscilación en este caso será menor al planteado.

Si se desprecia el tiempo de duración del choque elástico, la esfera demorará en hacer una oscilación en un tiempo dado por T_0. Según el gráfico se verifica

$$T_0 = 2\left(\frac{T}{4}+t\right) \qquad \text{(I)}$$

donde

T : *período simple de oscilación* $= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ *(sin considerar los choques)*

¿Cómo hallamos t? Observando detalladamente el M.C.U. de la partícula y relacionándolo con las oscilaciones de la esfera, manejamos proporción entre el ángulo barrido y el tiempo transcurrido

Para $2\pi\,\text{rad} \xrightarrow{\text{transcurre}} T$

Entonces para $\theta_1=\frac{\pi}{6}\text{rad} \xrightarrow{\text{transcurre}} t$

$$\Rightarrow\ 2\cancel{\pi}t=\frac{\cancel{\pi}}{6}T$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{T}{12}$$

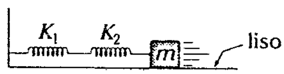
Reemplazando en (I)

$$T_0=2\left(\frac{T}{4}+\frac{T}{12}\right)=\frac{2}{3}T=\frac{2}{3}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\right)$$

$$\therefore\ T_0=\frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

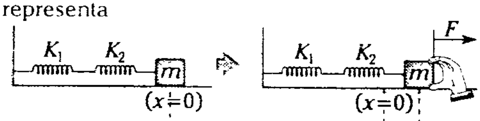
Problema 16

Determine el periodo de oscilación del bloque de masa m unido a 2 resortes ideales cuyas constantes de rigidez son K_1 y K_2.

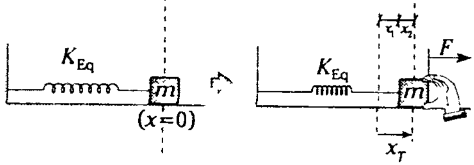


Resolución

Puede apreciarse dos resortes en serie: K_1 y K_2 los cuales pueden ser reducidos a un resorte equivalente ¿cómo? bueno para que el resorte reemplazante sea equivalente debe experimentar la misma deformación que el sistema al cual representa



Para el resorte equivalente



- Donde K_{Eq} es la rigidez del resorte equivalente.
- Para el sistema de resortes la deformación total es la suma de las defomaciones de cada uno de los resortes $(x_1 + x_2)$.
- Para el resorte equivalente su deformación es x_T. Entonces para que exista equivalencia

$$x_T = x_1 + x_2 \qquad \text{(I)}$$

También como están conectados uno a continuación del otro (en serie), los resortes experimentan fuerza elástica e igual módulo.

Luego

1. Si analizamos al resorte de rigidez K_1 su tensión será

$$F = K_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{F}{K_1} \qquad \text{(II)}$$

2. Si analizamos al resorte de rigidez K_2, su tensión será

$$F = K_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{F}{K_2} \qquad \text{(III)}$$

3. Si analizamos al resorte de rigidez equivalente K_{Eq} su tensión será

$$F = K_{Eq} x_T \quad \Rightarrow \quad x_T = \frac{F}{K_{Eq}} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (II), (III) y (IV) en (I)

$$\frac{\cancel{F}}{K_{Eq}} = \frac{\cancel{F}}{K_1} + \frac{\cancel{F}}{K_2}$$

Simplificando

$$\frac{1}{K_{Eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

En general, para n resortes en serie la rigidez del resorte equivalente será

$$\boxed{\frac{1}{K_{Eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \ldots + \frac{1}{K_n}} \quad \left(\begin{array}{c}\text{fórmula para} \\ n \text{ resortes} \\ \text{en serie}\end{array}\right)$$

En nuestro caso, nos piden hallar el periodo de oscilación del bloque. Entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{Eq}}} \qquad \text{(V)}$$

Donde K_{Eq} corresponde a la rigidez equivalente de 2 resortes en serie

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{K_{Eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} = \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}$$

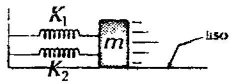
$$\Rightarrow \quad K_{Eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \qquad \text{(VI)}$$

Finalmente (VI) en (V)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 \cdot K_2}(K_1 + K_2)}$$

Problema 17

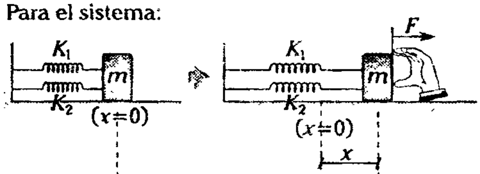
Halle el periodo de oscilación del bloque de masa m unido a los resortes ideales de rigidez K_1 y K_2



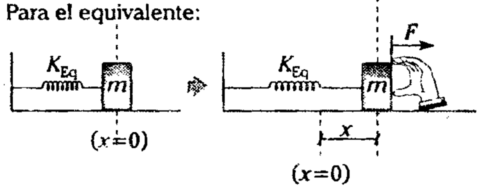
Resolución

En esta ocasión se nota que los resortes están instalados en paralelo y podemos pensar en reducirlos a un resorte equivalente análogamente al problema anterior. El sistema de resortes y el resorte equivalente deben experimentar la misma deformación longitudinal

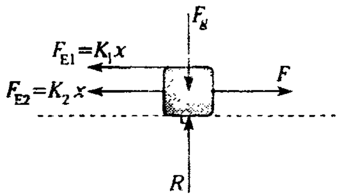
Para el sistema:



Para el equivalente:



Tanto el resorte de rigidez K_1 y el resorte de rigidez K_2 se estiran x, por ende sobre el bloque el diagrama de fuerzas sería

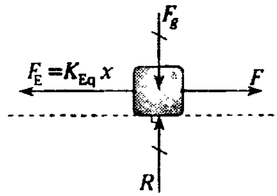


$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$F=K_1x+K_2x$$

$$\therefore\ F=(K_1+K_2)x \qquad \text{(I)}$$

También el resorte de rigidez equivalente, el ser jalado con la misma fuerza de módulo F, debe experimentar la misma deformación longitudinal (x). Luego



$$\sum F(\rightarrow)=\sum F(\leftarrow)$$

$$F=K_{Eq}x \qquad \text{(II)}$$

Como, se ejerció igual fuerza hacemos (I) = (II)

$$K_{Eq}\cancel{x}=(K_1+K_2)\cancel{x}$$

Simplificando

$$K_{Eq}=K_1+K_2$$

En general, entonces para n resortes instalados en paralelo la rigidez del resorte equivalente será:

$$\boxed{K_{Eq}=K_1+K_2+...+K_n} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Fórmula para } n\\ \text{resortes en paralelo}\end{array}\right)$$

En este caso nos piden el periodo de oscilación del bloque

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{Eq}}} \qquad \text{(I)}$$

Como los resortes están en paralelo se define la rigidez equivalente así

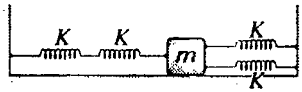
$$K_{Eq}=K_1+K_2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazando (II) en (I)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$$

Problema 18

Determine el periodo de oscilación del bloque de masa m sobre el plano liso y unido a los resortes mostrados.



Resolución

Observamos en el sector izquierdo del bloque, 2 resortes en serie, entonces su equivalente será:

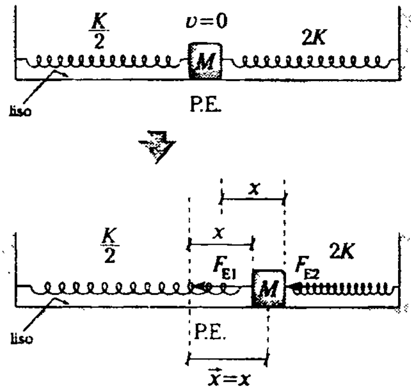
$$\frac{1}{K_{Eq}}=\frac{1}{K}+\frac{1}{K}=\frac{2}{K}$$

$$\therefore\ K_{Eq}=\frac{K}{2}$$

En el sector derecho del bloque se observan 2 resortes en paralelo, su equivalente es

$$K_{Eq}=K+K=2K$$

Reemplazando esta rigide equivalente en la figura, tendremos



Desviamos x al bloque de su posición de equilibrio y luego lo soltamos para que oscile. Para calcular su periodo (T), en este caso sobre él usamos la Segunda Ley de Newton

$$F_R = ma$$

$$F_{E1} + F_{E2} = ma_{\text{M.A.S.}}$$

$$\frac{K}{2}x + 2Kx = m(\omega^2 x)$$

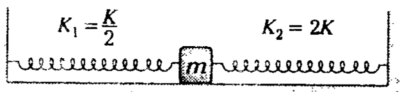
$$\frac{5}{2}K\cancel{x} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cancel{x}$$

Simplificando y despejando

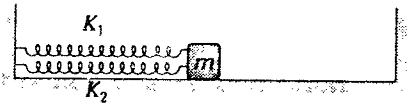
$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5K}}$$

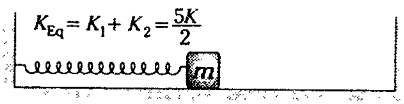
Observación

En el problema 18, los dos resortes finales unidos al bloque, podemos reemplazarlos por un equivalente así



< >





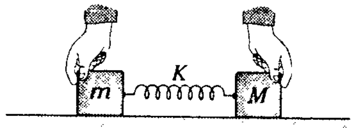
En estas condiciones, el periodo (T) del bloque viene dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{Eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{5K}{2}}}$$

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{5K}}$$

Problema 19

Dos bloques de masas m y M están unidos por un resorte ideal de constante de rigidez K, apoyados sobre una superficie lisa. Se comprime el resorte y luego se sueltan a los bloques. Halle el periodo de oscilación del centro de masa del sistema y el periodo de oscilación de cada uno de los bloques.



Resolución

Analicemos el sistema desde su estado inicial con el resorte sin deformar

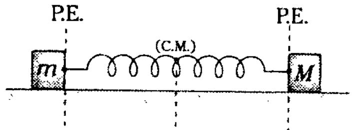


Fig. (I)

Se comprime hasta el reposo y esto se consigue aplicando fuerzas opuestas

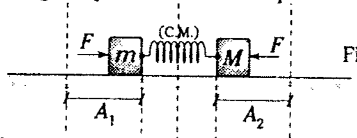


Fig. (II)

y luego soltamos

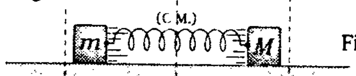
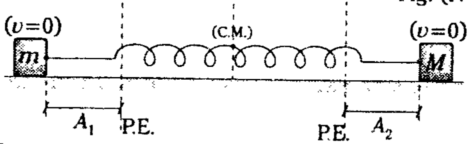


Fig. (III)

Fig. (IV)



Sobre el sistema en todo instante, mientras se comprime al resorte e inclusive cuando se sueltan los bloques, la fuerza resultante es nula y el centro de masa (C.M). Por este motivo como estaba en reposo, se mantendrá igual

$$\therefore\ T_{\text{sist.}} = T_{\text{C.M}} = 0$$

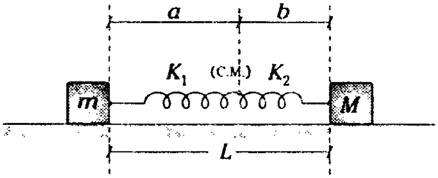
¿Ahora qué sucede con cada uno de los bloques al ser soltados? Cada uno oscilará respecto de su posición de equilibrio, así por ejemplo vemos que

m oscila con amplitudes A_1 (ver fig. II y IV)

M oscila con amplitudes A_2 (ver fig. II y IV)

Mientras que el C.M. está fijo.

¿Cómo hallamos el periodo de oscilación de cada uno de los bloques? Para esto fraccionaremos al resorte de rigidez K asumiendo una pared vertical que pasa por el centro de masa (C.M) ya que este punto está fijo.



Donde $L = a + b$

Considerando propiedad del C.M. se establece:

$$m(a) = M(b)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{M}{m} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{M+m}{m} \Rightarrow \frac{L}{b} = \frac{M+m}{m}$$

Luego se deduce

$$b = \left(\frac{m}{M+m}\right)L \quad \text{y} \quad a = \left(\frac{M}{M+m}\right)L \quad \text{(I)}$$

Recordemos que para los resortes su rigidez es inversamente proporcional a su longitud natural, entonces se verifica

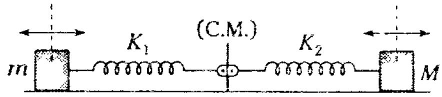
$$\text{(rigidez)}.\text{(longitud)} = \text{cte.}$$

$$\therefore \; K_1 a = K_2 b = KL \qquad \text{(II)}$$

Después de combinar (I) y (II) se demuestra que

$$K_1 = \left(\frac{M+m}{M}\right)K \quad \text{y} \quad K_2 = \left(\frac{M+m}{m}\right)K$$

Entonces; m y M oscilan así



m oscila con un periodo (T), dado por

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(\frac{M+m}{M}\right)K}}$$

$$\therefore \; T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{(M+m)K}}$$

M oscila con un periodo (T), dado por

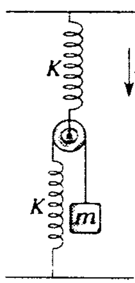
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{\left(\frac{M+m}{m}\right)K}}$$

$$\therefore \; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M\,m}{(M+m)K}}$$

En conclusión tanto m como M oscilan con igual periodo; pero el centro de masa del sistema no oscila.

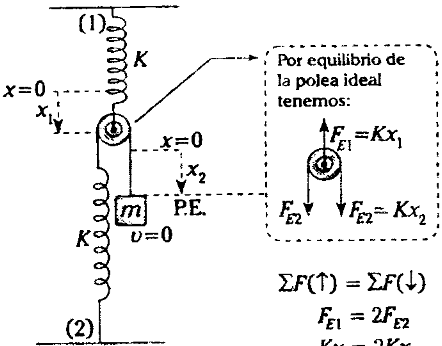
Problema 20

El sistema mostrado está en equilibrio, siendo la polea ideal. Determine el periodo de las oscilaciones verticales del bloque.



Resolución

El enunciado señala que el bloque está en equilibrio y en estas condiciones los resortes deben estar estirados, tal como lo indicamos a continuación.

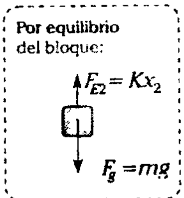


$$\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$$

$$F_{E1} = 2F_{E2}$$

$$Kx_1 = 2Kx_2$$

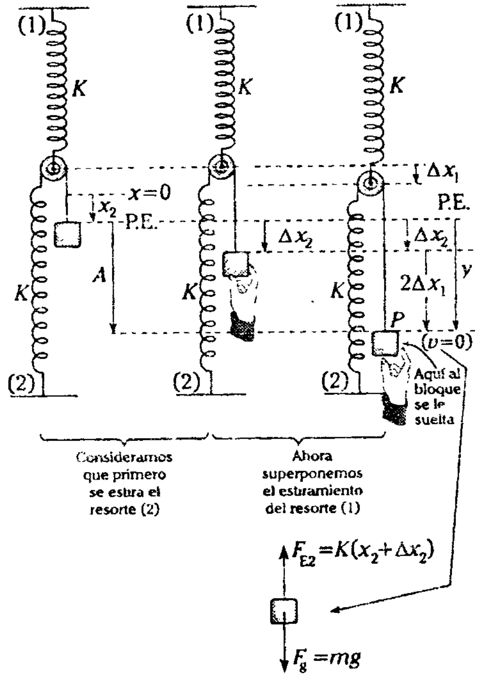
$$\Rightarrow \; x_1 = 2x_2 \quad \text{(I)}$$



$$\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$$

$$\Rightarrow \; Kx_2 = mg \qquad \text{(II)}$$

Ahora para que el bloque oscile verticalmente solo debemos desplazarlo lentamente hacia abajo y soltarlo. Por otro lado también debemos entender de que cada uno de los resortes experimenta una deformación adicional



Se debe tener en cuenta que cuando el resorte (1) se estira Δx_1, la polea móvil desciende Δx_1 aunque el bloque debido a esto desciende adicionalmente $2\Delta x_1$, (de la propiedad de la polea móvil).

A partir de la posición que se indica desde donde se suelta al bloque, él empieza a oscilar en torno de su P.E. con una amplitud dada por

$$y = \Delta x_2 + 2\Delta x_1$$

No hay resistencias, y como tal el bloque al oscilar verticalmente describe un M.A.S. Por consiguiente, para calcular su periodo (T) podríamos usar la Segunda Ley de Newton sobre el bloque, estando en la posición P.

$$F_R = m\,a_{M.A.S.}$$

$$F_{E2} - F_g = m(\omega^2 y)$$

$$\underbrace{K(x_2 + \Delta x_2) - mg}_{\cancel{Kx_2} + K\Delta x_2 - \cancel{mg}} = m\omega^2(\Delta x_2 + 2\Delta x_1)$$

$$\Rightarrow \quad K\Delta x_2 = m\omega^2(\Delta x_2 + 2\Delta x_1) \qquad \text{(III)}$$

Como de (I)

$$x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 = 2\Delta x_2$$

La expresión (III) se reduce *a*

$$K(\cancel{\Delta x_2}) = m\omega^2(5\cancel{\Delta x_2})$$

$$\Rightarrow \quad K = 5m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{5m}{K}}$$

Problema 21

Un reloj de péndulo hecho en la Tierra es llevado a un planeta x, donde la aceleración de la gravedad tiene el valor que es 4 veces mayor que en la superficie de la Tierra.

Después de transcurrido 1 hora en la Tierra, ¿cuánto habrá transcurrido según el reloj en el planeta x?

Resolución

Se sabe que para un péndulo simple

$$\begin{pmatrix}\text{Periodo de}\\ \text{oscilación}\end{pmatrix} = \frac{\text{intervalo de tiempo}}{\text{número de oscilaciones}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{t}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- En la Tierra

  Consideremos que el péndulo realiza N oscilaciones en 1 hora

  $$\therefore \quad T_{(\text{tierra})} = \frac{1\text{h}}{\text{N}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}} \qquad \text{(I)}$$

- En el planeta x

  El mismo péndulo realiza N oscilaciones pero en t horas.

  $$\therefore \quad T_{\left(\substack{\text{planeta}\\ x}\right)} = \frac{t\text{h}}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_P}} \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (II)/(I)

$$t = \sqrt{\frac{g_T}{g_P}} = \sqrt{\frac{g_T}{4g_1}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad T = 0{,}5\text{ h} = 30\text{ min}$$

Problema 22

Un péndulo simple realiza 16 oscilaciones y otro péndulo en el mismo intervalo de tiempo realiza 6 oscilaciones. Si la diferencia entre las longitudes de ambos péndulos es 110 cm; ¿qué longitud tiene el hilo de cada uno de los péndulos?

Resolución

En un intervalo de tiempo Δt_1 el primer péndulo tiene un periodo de oscilación definido por

$$T_1 = \frac{\text{intervalo de tiempo}}{\text{número de oscilaciones}} = \frac{\Delta t_1}{16} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \qquad \text{(I)}$$

El segundo péndulo posee otro periodo de oscilación

$$T_2 = \frac{\text{intervalo de tiempo}}{\text{número de oscilaciones}} = \frac{\Delta t_2}{6} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} \qquad \text{(II)}$$

Como los intervalos de tiempo son iguales, $(\Delta t_1 = \Delta t_2)$, podemos dividir (I) entre (II), obteniendo

$$\frac{6}{16} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{9}{64} \qquad \text{(III)}$$

Por dato

$$\ell_2 - \ell_1 = 110 \qquad \text{(IV)}$$

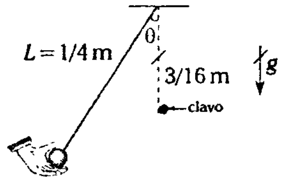
De (III) y (IV); resolviendo obtenemos que

$$\ell_1 = 18\text{ cm}$$

$$\ell_2 = 128\text{ cm}$$

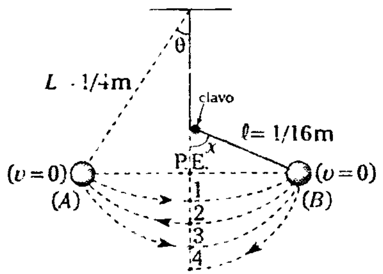
Problema 23

El péndulo mostrado es soltado en la posición que se indica ($\theta < 4°$). Determine luego de qué intervalo de tiempo estará pasando por cuarta vez por su posición más baja (Considere $g \approx \pi^2$ m/s^2)



Resolución

Una vez soltada la esfera, debido a la atracción terrestre, desciende hasta su posición más baja, si esta libre de resistencias, su energía mecánica se conserva y recupera el nivel desde donde se le soltó y luego aproximadamente sigue lo que se muestra en el siguiente gráfico



Notamos que

- La esfera desde A hasta 1 emplea un cuarto de periodo ($T/4$) con una longitud L.
- La esfera desde 1 hasta el extremo B emplea un cuarto de otro período ($T'/4$) con una longitud ℓ.

¿Cuánto tiempo demora el péndulo en pasar por cuarta vez por su posición de equilibrio?

Vemos que en total demora (t_{pedido})

$$t_{\text{pedido}}=3\left(\frac{T}{4}\right)+4\left(\frac{T'}{4}\right)$$

$$t_{\text{pedido}}=\frac{3}{4}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)+2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Reemplazando datos

$$t_{\text{pedido}}=\frac{3}{4}\left(2\pi\sqrt{\frac{1/4}{\pi^2}}\right)+2\pi\sqrt{\frac{1/16}{\pi^2}}=1{,}25\text{ s}$$

Observación

Con la condición dada por el problema $\theta<4°$, se garantiza que el movimiento del péndulo con longitud L sea un M.A.S. ¿Qué ocurre con el péndulo de longitud ℓ? Será un M.A.S. si se cumple que $\alpha<8°$. Dejamos al lector que compruebe si esta condición se cumple.

Problema 24

Un péndulo simple de 1 m de longitud en un minuto realiza 120 oscilaciones. ¿Qué debemos hacer con su longitud para que el péndulo efectúe 100 oscilaciones en 90 segundos?

Resolución

En un primer caso el péndulo debe dar 120 oscilaciones en 60 s y luego tan solo 100 oscilaciones en 90 s. Esto implica que el movimiento pendular en el segundo caso es más lento, implica un periodo mayor, por lo que se concluye que la longitud del péndulo en el segundo caso es mayor y como tal se debe aumentar la longitud del péndulo.

Ahora demostremos nuestra conclusión cuantitativamente. Sabemos que el periodo de un péndulo simple se define así

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{\text{intervalo de tiempo}}{\text{número de oscilaciones}}=\frac{T}{N}$$

En el primer caso

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\frac{1\text{ min}}{120}=\frac{60\text{ s}}{120} \qquad \text{(I)}$$

En el segundo caso hay un nuevo periodo y esto se consigue variando la longitud.

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}=\frac{90\text{ s}}{100} \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) entre (II)

$$\sqrt{\frac{L}{\ell}}=\frac{5}{9} \Rightarrow \frac{L}{\ell}=\frac{25}{81} \text{ y como } L=1\text{ m}$$

$$\therefore\ \ell=3{,}24\text{ m}$$

Se debe aumentar la longitud del péndulo en 2,24 m

Problema 25

Un reloj de péndulo da la hora exacta (bate segundos: significa el periodo es 2 s) en un lugar donde $g = 9{,}8$ m/s^2, pero se atrasa 10 segundos por día cuando el reloj es situado en el pico de una montaña. ¿Cuánto es el valor de la aceleración de la gravedad en la montaña?

Resolución

Como en el problema anterior, veamos las cosas primero descriptivamente (cualitativamente). Si un reloj de péndulo se atrasa, es por que el movimiento de la masa pendular se hace más lento, esto implica que se tiene mayor periodo. Siendo la longitud del péndulo invariable y recordando la fórmula del periodo, concluimos que la aceleración de la gravedad debe ser menor en la montaña que en el llano.

Ahora comprobemos nuestra conclusión con números (cuantitativamente):

El reloj de péndulo en

$$2\text{ s} \xrightarrow{\text{realiza}} 1 \text{ oscilación}$$

$$1 \text{ día} = 86\,400 \text{ s} \xrightarrow{\text{realizara}} N \text{ oscilaciones}$$

De donde, en un día se tendría

$N = 43\,200$ oscilaciones

Pero, en lo alto de la montaña, el mismo reloj de péndulo se atrasa (demora) 10 segundos más por día. ¿Qué significa esto?

Significa que el péndulo da

$N = 43\,200$ oscilaciones

en un tiempo de 1 día retrasado = 86 410 s

Entonces, definimos el período del péndulo en un día normal

$$T_N = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{t}{N} = \frac{86\,400}{N} \qquad \text{(I)}$$

En la montaña, el periodo del mismo péndulo será

$$T'_N = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}} = \frac{t'}{N} = \frac{86\,410}{N} \qquad \text{(II)}$$

Dividendo (I) entre (II)

$$\sqrt{\frac{g_M}{g}} = \frac{86\,400}{86\,410}$$

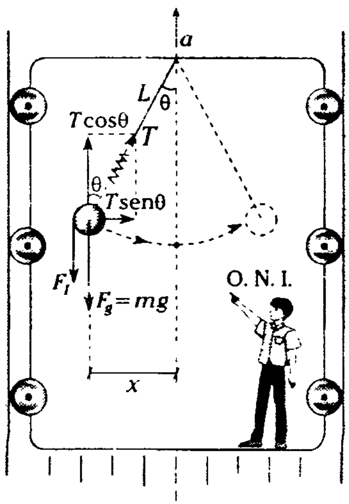
$$\therefore \; g_M = 9{,}797 \text{ m/s}^2$$

Problema 26

Un péndulo simple de longitud L oscila con pequeña amplitud colgado del techo de la cabina de un ascensor, que se eleva verticalmente con una aceleración constante a. Determine el periodo de oscilación.

Resolución

Si deseamos analizar únicamente el movimiento oscilatorio del péndulo, nos conviene situarnos dentro de la cabina del ascensor, así que seremos un Observador No Inercial (O.N.I). Si hacemos el análisis desde fuera, sería más complejo ya que además del movimiento oscilatorio, el péndulo tendrá el movimiento de traslación del ascensor. En estas condiciones seria más apropiado analizar el movimiento pendular desde la cabina del ascensor. Según el O.N.I. sobre la masa pendular actúan tres fuerzas ($\vec{F}_g$, $\vec{T}$ y la fuerza inercial: $\vec{F}_I$) tal como se indica a continuación.



Como por condición θ es pequeño, el movimiento que percibe el O.N.I. es casi rectilíneo (horizontal); mientras en la vertical aproximadamente para él existe equilibrio.

- Horizontalmente el péndulo oscila y sobre él, la fuerza resultante viene dada por

$$F_R = m\,a_{\text{M.A.S.}}$$

$$T\,\text{sen}\,\theta = m(\omega^2 x) \qquad \text{(I)}$$

- Verticalmente se debe verificar.

$$\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$$

$$T\cos\theta = mg + F_I$$

$$T\cos\theta = mg + ma \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

$$\tan\theta = \frac{\omega^2 x}{g+a} \qquad \text{(III)}$$

Pero, como θ es un ángulo pequeño

$\Rightarrow \tan\theta \approx \text{sen}\,\theta \approx \theta$

Además se debe cumplir $x \approx \theta L$

En (III)

$$\cancel{\theta} = \frac{\omega^2(\cancel{\theta}L)}{g+a}$$

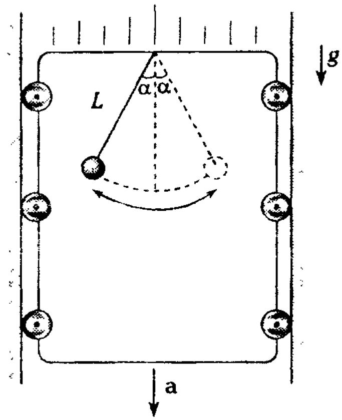
$$\frac{g+a}{L} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$$

Note que si el ascensor no acelera (está en reposo o se mueve con M.R.U.), se tendrá $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ que es una expresión bien conocida por nosotros. Esta expresión y la obtenida se diferencian en que en vez de g ahora va g_{ef} y a esto último también se le conoce como la gravedad efectiva.

Nota

Para el caso en que la cabina del ascensor descienda con una aceleración $\vec{a}$; donde $a < g$; el periodo de una masa pendular para pequeñas amplitudes de oscilación vendría dado por

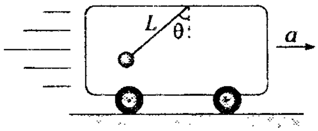


$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}} \qquad \text{(I)}$$

- La fórmula (I) se puede demostrar si se sigue lo que se hizo en el problema anterior, pero se debe invertir la dirección a la fuerza inercial.
- Si la cabina descendiese con $a = g$, estaría el péndulo en estado de ingravidez y en estas condiciones el periodo del péndulo se hace muy grande (infinito), lo cual significa que prácticamente no oscila.
- Analice que ocurre cuando la cabina desciende con una aceleración constante $\vec{a}$, tal que $a > g$

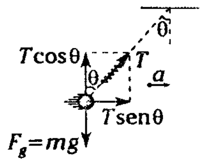
Problema 27

En la figura mostrada el coche acelera hacia la derecha. Si a la esfera la desviamos ligeramente y la soltamos, determine el periodo de sus oscilaciones.



Resolución

Si la esfera no se mueve respecto del coche entonces θ será constante y quedará definida la posición de equilibrio de la esfera respecto al coche.



Para un observador en Tierra horizontalmente sobre la bolita actúa una resultante dada por

$F_R = ma$

$T\,\text{sen}\,\theta = ma$ (I)

Verticalmente no se percibe movimiento

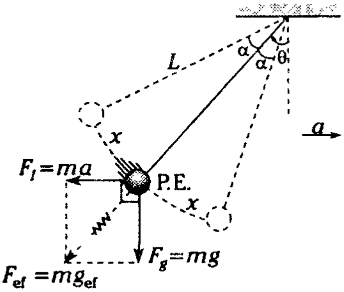
$\Rightarrow \quad \sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)$

$T\cos\theta = mg$ (II)

Dividimos (I) entre (II)

$\tan\theta = \dfrac{a}{g}$

Para analizar las oscilaciones de la esfera; ahora nos situamos dentro del carrito (como el problema anterior) y la desviamos respecto de su posición estable un ángulo α pequeño y la soltamos.



En la posición de equilibrio (P.E.) podemos considerar que sobre la esfera se manifiesta una fuerza de gravedad total o efectiva (F_{ef}), que viene a ser la resultante entre la fuerza de gravedad y la fuerza inercial.

Según el gráfico la fuerza de gravedad efectiva vendría dada por

$$F_{ef} = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} \qquad \text{(I)}$$

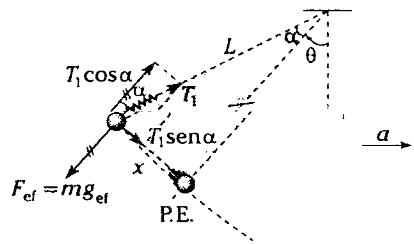
Si a la $\vec{F}_{ef}$ le asociamos una aceleración de la gravedad efectiva (g_{ef}) se tendría.

$$F_{ef} = mg_{ef} \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) y (II) se obtiene que

$$g_{ef} = \sqrt{a^2 + g^2} \qquad \text{(III)}$$

Si analizamos a la esfera en el extremo superior y planteamos lo mismo que el problema anterior tendremos



En la dirección de $\vec{F}_{ef}$ hay equilibrio (aprox.)

$\sum F(\nearrow) = \sum F(\swarrow)$

$$T_1\cos\alpha = mg_{ef} \qquad \text{(IV)}$$

Pero perpendicular a la dirección $\vec{F}_{ef}$ hay una fuerza resultante dada por

$F_R = ma$

$\Rightarrow \quad T_1\,sen\alpha = ma_{M.A.S.}$

$$\Rightarrow \quad T_1\,\text{sen}\,\alpha = m(\omega^2 x) \qquad \text{(V)}$$

Hacemos (V) entre (IV)

$$\tan\alpha = \frac{\omega^2 x}{g_{ef}} \qquad \text{(VI)}$$

α es ángulo pequeño, entonces $\alpha = \text{sen}\,\alpha = \tan\alpha$ y también $x \approx \alpha L$

En (VI)

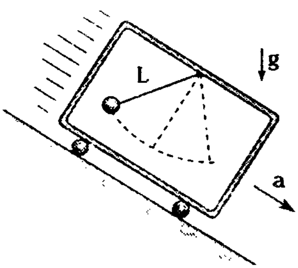
$$\cancel{\alpha} = \frac{\omega^2 (\cancel{\alpha} L)}{g_{ef}}$$

$$\frac{g_{ef}}{L} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{a^2+g^2}}}$$

Observación

Después de haber resuelto el problema anterior, notamos que la fórmula que nos permite calcular el periodo de un péndulo en el interior de un sistema acelerado, depende de la aceleración de la gravedad efectiva $\left(\vec{g}_{ef}\right)$, la cual se presenta en el interior del sistema acelerado.



Entonces el periodo de un péndulo (simple) al interior de un coche que acelera se calcula con

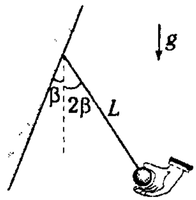
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{ef}}}}$$

en donde el módulo de $\vec{g}_{ef}$ se obtiene a partir de

$$\boxed{\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{a}}$$

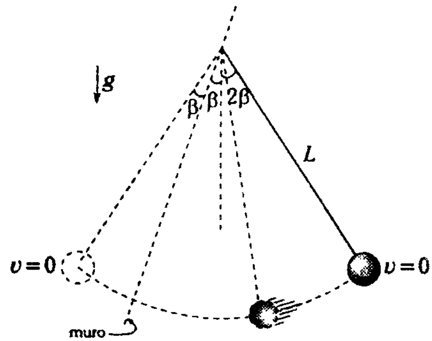
Problema 28

En la figura se muestra el instante en que se abandona a una pequeña esfera, siendo 2β un ángulo pequeño y los choques de la esfera con el muro elásticos. Determine su periodo de oscilación (desprecie el tiempo que dura los choques).



Resolución

Una vez que la esfera es soltada, ella empezaría a describir un M.A.S. (aprox). Si no estuviese el muro, su trayectoria sería tal como lo indicamos



Para esta situación el periodo (T) de la esfera vendría dado por

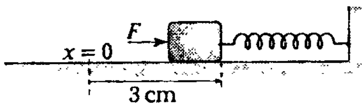
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sabemos que en realidad está el muro y con esto la esfera no presentaría la trayectoria en forma completa, además presentaría menor recorrido y por ende menor tiempo en cada vaivén. (menor periodo). Con esto establecemos que el periodo (T_p) es menor que el periodo sin muro (T), es decir

$$T_p < T$$

Problemas Propuestos

1. Un bloque de 1 kg se fija a un resorte de $K = 25$ N/m, de tal manera que oscila en una superficie horizontal lisa. En $t = 0$ s el resorte está comprimido 3 cm y es soltado. Determine las ecuaciones de la posición y la velocidad, respectivamente.



A) $\vec{x} = 6\text{sen}(5t + \pi/6)$ cm
$\vec{v} = 30\text{sen}(5t + \pi/6)$ cm/s

B) $\vec{x} = 30\text{sen}(5t + \pi/6)$ cm
$\vec{v} = 6\text{sen}(5t + 2\pi/3)$ cm/s

C) $\vec{x} = 6\text{sen}(5t + \pi/6)$ cm
$\vec{v} = 30\cos(5t + 2\pi/3)$ cm/s

D) $\vec{x} = 3\text{sen}(5t + \pi/2)$ cm
$\vec{v} = 15\cos(5t + \pi/2)$ cm/s

E) $\vec{x} = 0{,}6\text{sen}(5t + \pi/6)$ cm
$\vec{v} = 3\text{sen}(5t + \pi/3)$ cm/s

2. Un bloque adherido a un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm respecto de la posición de equilibrio y se suelta. La aceleración inicial del bloque es 0,16 m/s^2 hacia arriba. Si el bloque realiza un M.A.S., determine la ecuación del movimiento.

A) $0{,}4\ \text{sen}(2t + 3\pi/2)\ m$
B) $4\ \text{sen}(2t + \pi/2)$ cm
C) $4\ \text{sen}(2t + 5\pi/2)$ cm
D) $0{,}04\ \text{sen}(2t + \pi/2)$ m
E) $4\ \text{sen}(2t + 3\pi/2)$ cm

3. Al suspender un bloque de 10 kg de un resorte, este se estira 6,25 cm. Determine el periodo de oscilación al suspender un bloque de 16 kg del mismo resorte. (considere M.A.S. y $g = 10$ m/s^2)

A) π s B) 2π s C) $0{,}2\pi$ s
D) $0{,}6\pi$ s E) 3π s

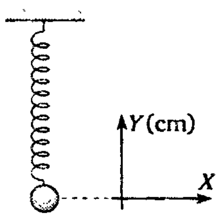
4. Un bloque de 100 g, unido a un resorte de rigidez 10 N/m y oscila con una amplitud de 10 cm, sobre un piso liso horizontal. Si rápidamente añadimos otro bloque de 300 g sobre el primero en el extremo de una oscilación, determine la nueva amplitud y el nuevo periodo.

A) 10 cm ; $\frac{\pi}{5}$ s B) 10 cm; $\frac{4\pi}{5}$ s

C) 5 cm ; $\frac{2\pi}{5}$ s

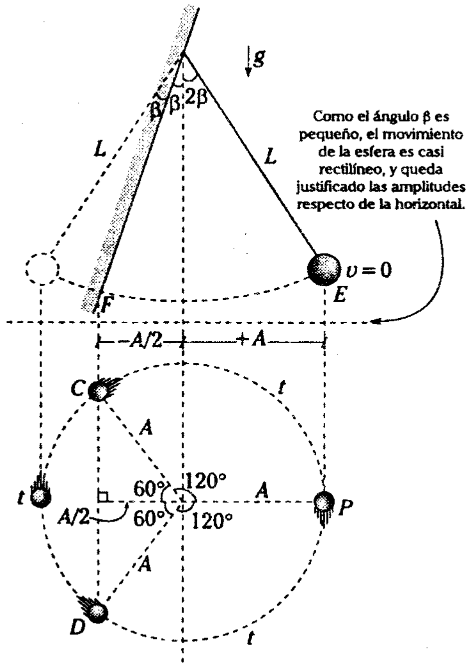
D) 10 cm ; $\frac{2\pi}{5}$ s E) 20 cm ; $\frac{\pi}{5}$ s

5. Una esfera de 1 kg permanece en equilibrio, suspendida de un resorte de rigidez 100 N/m. La esfera es elevada 4 cm y luego es lanzada con una rapidez de $0{,}4\sqrt{3}$ m/s hacia abajo. Determine su posición luego de $2\pi/15$ s de su lanzamiento ($g = 10$ m/s^2).



A) $-2\,\hat{j}$ cm
B) $+2\,\hat{j}$ cm
C) $+4\,\hat{j}$ cm
D) $-4\,\hat{j}$ cm
E) $+8\,\hat{j}$ cm

Ahora para determinar T_p, podríamos nuevamente ayudarnos del M.C.U. ya que para el caso de calcular intervalo de tiempo en oscilaciones resulta cómodo hacer uso del movimiento circunferencial. Según lo planteado bosquejamos lo siguiente



Tener en cuenta que cuando la esfera va de *E hacia F*, la partícula que describe el M.C.U. va de *P hacia C* y cuando la esfera va de *F hacia E*, en el M.C.U. la partícula iría de *D* hacia *P*.

Ahora según lo planteado establecemos que

$$T_P = t_{PC} + t_{DP} = 2t \qquad \text{(I)}$$

Pero apartir del gráfico se verifica

$$t = \frac{T_{\text{vuelta}}}{3}\text{ ; luego en (I)}$$

$$T_P = \frac{2}{3}T_{\text{vuelta}} \qquad \text{(II)}$$

Pero el periodo del M.C.U. debe ser igual al periodo del péndulo sin el muro

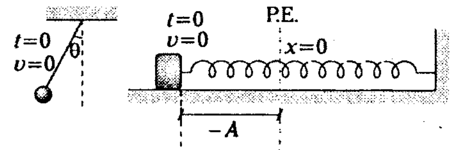
$$\Rightarrow \quad T_{\text{vuelta}} = T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

En (II) tenemos

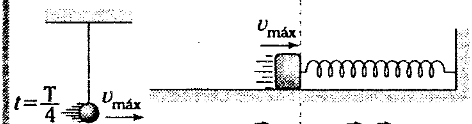
$$T_P = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Nota

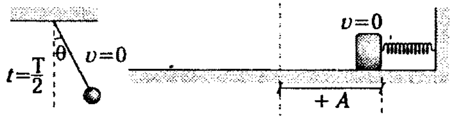
Las características de un M.A.S. se extienden a las oscilaciones del péndulo simple. A continuación mostramos la respectiva comparación



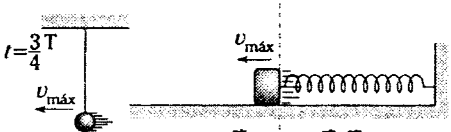
Se tiene $\vec{v}=\vec{0}$; $\vec{a}=+\omega^2 A$



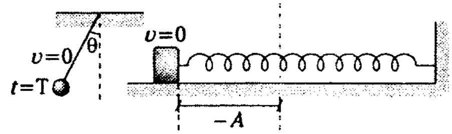
Se tiene $\vec{v}=+\omega A$; $\vec{a}=\vec{0}$



Se tiene $\vec{v}=\vec{0}$; $\vec{a}=-\omega^2 A$

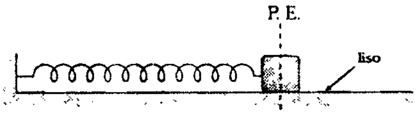


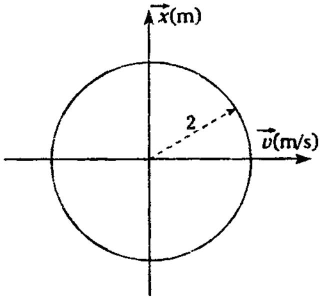
Se tiene $\vec{v}=-\omega A$; $\vec{a}=\vec{0}$



Se tiene $\vec{v}=\vec{0}$; $\vec{a}=+\omega^2 A$

6. El bloque mostrado es desplazado a la derecha de su posición de equilibrio y lanzado con una rapidez de $\sqrt{3}\,\hat{i}$ m/s . Determine su aceleración para $t=\frac{\pi}{3}$ s si su posición varía con la velocidad de acuerdo a la gráfica adjunta:





A) $2\sqrt{3}\;\hat{i}$ m/s^2 B) $-2\sqrt{3}\,\hat{i}$ m/s^2

C) -2 m/s^2 $\hat{i}$

D) -3 m/s^2 $\hat{i}$ E) 5 m/s^2 $\hat{i}$

7. Un bloque unido a un resorte oscila sobre un piso horizontal liso. Si se observa que entre los extremos de cada oscilación existe una distancia de 40 cm; determine su velocidad en función del tiempo, considere que en $t=0$ el bloque pasa por $\vec{x}=+10$ cm hacia la derecha y su rapidez máxima es de 2 m/s.

A) $\cos\left(20t+\frac{\pi}{6}\right)$ m/s

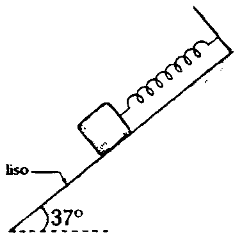
B) $2\cos\left(10t+\frac{\pi}{3}\right)$m/s

C) $2\cos\left(20t+\frac{\pi}{6}\right)$m/s

D) $2\cos\left(10t+\frac{\pi}{6}\right)$m/s

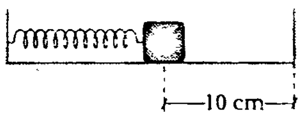
E) $2\text{sen}\left(10t+\frac{\pi}{6}\right)$m/s

8. Se muestra un sistema oscilador en reposo, donde el resorte está deformado 6 cm. Repentinamente, el bloque es impulsado hacia la base del plano notándose una aceleración máxima de 4 m/s^2. ¿Cuánto recorre dicho bloque durante los primeros $\frac{3\pi}{20}$ segundos? ($g=10$ m/s^2)



A) 11 cm
B) 12 cm
C) 13 cm
D) 14 cm
E) 15 cm

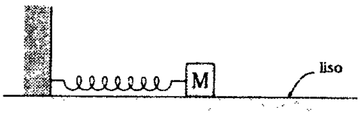
9. El bloque liso de 1 kg se encuentra en reposo en la posición mostrada. Si se le desplaza hacia la izquierda 20 cm y luego se suelta, este adquiere una energía cinética máxima de 2 J. Determine el tiempo que demora en regresar a la posición de donde fue soltado, considere que el choque es elástico.



A) $\frac{2\pi}{5}$s B) $\frac{2\pi}{15}$s C) $\frac{3\pi}{7}$s

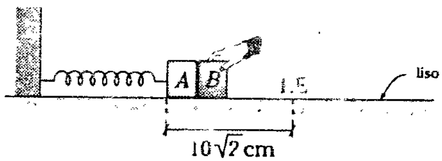
D) $\frac{4\pi}{15}$s E) $\frac{2\pi}{7}$s

10. El oscilador mostrado realiza un M.A.S. con una amplitud de 20 cm y frecuencia $f=0,5$ Hz. Determine la energía potencial que presenta el resorte en el instante en que es igual a la energía cinética del bloque (considere $\pi^2 \approx 10$ y M=20 g).



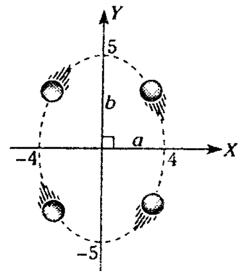
A) 2 mJ B) 3 mJ C) 4 mJ
D) 1 mJ E) 0,5 mJ

11. El bloque A de 400 g está soldado al resorte de rigidez 10 N/m y con el bloque B de 400 g se deforma al resorte $10\sqrt{2}$ cm . Tal como se indica. Después de abandonar el bloque B al bloque A, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque A.



A) 0,2 sen($10t$) m
B) 0,1 sen($10t$) m
C) 0,1 sen($5t$) m
D) 0,1 sen($4t$) m
E) 0,6 sen($2t$) m

12. Un cuerpo realiza una trayectoria elíptica tal como se muestra. Si la ecuación de su proyección en el eje Y es $\vec{y}=5\,\text{sen}(2\pi t)$, determine la ecuación del movimiento de la proyección en el eje $\vec{x}$ y además el ángulo de fase inicial.



A) $\vec{x}=4\cos(2\pi t)\,;\dfrac{\pi}{2}$ rad

B) $\vec{x}=2\cos(2\pi t)\,;\dfrac{\pi}{2}$ rad

C) $\vec{x}=4\text{sen}(2\pi t)\,;\pi$ rad

D) $\vec{x}=\cos(2\pi t)\,;\dfrac{\pi}{2}$ rad

E) $\vec{x}=8\text{sen}(2\pi t)\,;\dfrac{\pi}{4}$ rad

13. Sobre las siguientes proposiciones, indique si son verdaderas (V) o falsas (F)

- El periodo (T) de un M.A.S. se altera si el cuerpo que oscila recibe un impulso externo.
- Al duplicar la amplitud de las oscilaciones en un M.A.S. la energía mecánica del sistema oscilador se cuatriplica.
- En un M.A.S. al disminuir la amplitud, la frecuencia (f) de las oscilaciones aumenta.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FVF E) FFV

14. Determine el valor de verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

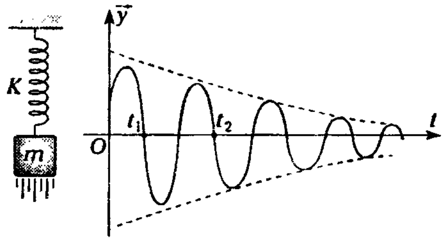
I. Los sistemas en los que surgen oscilaciones periódicas en ausencia de una acción externa periódica prefijada se denominan sistemas autooscilatorios.

II. Las oscilaciones forzadas siempre ocurren con la misma frecuencia con que varía la fuerza externa.

III. La medida de la resonancia es una aplicación de la construcción de una serie de aparatos para medir la frecuencia de las oscilaciones.

A) FVV B) FFV C) FVF
D) VVV E) FFF

15. La gráfica posición versus tiempo que se indica corresponde al movimiento oscilatorio del bloque



Entonces, podemos afirmar que

I. La ecuación de las oscilaciones es $\vec{y} = A\,\text{sen}(\omega t+\phi)$

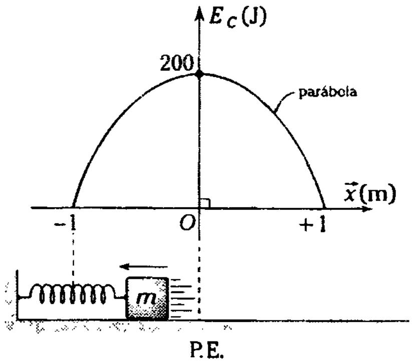
II. La energía mecánica del sistema se conserva.

III. El periodo de las oscilaciones es $(t_2 - t_1)$

IV. La ecuación del movimiento oscilatorio, es $\vec{y} = Ae^{-ct}$; $c \in \mathbb{Z}^+$ y las oscilaciones son amortiguadas.

A) I y II son verdaderas
B) I y IV son falsas
C) II y III son verdaderas
D) III es verdadera
E) II y IV son falsas

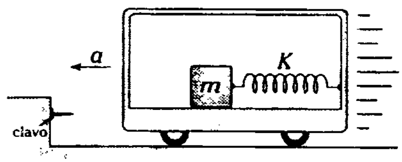
16. Si la masa del oscilador es $m=4$ kg y su energía cinética varía con la posición $\vec{x}$ según la gráfica, halle el periodo de oscilación.



A) $\frac{\pi}{4}$ s B) $\frac{\pi}{5}$ s C) $\frac{\pi}{6}$ s

D) $\frac{\pi}{2}$ s E) $\frac{\pi}{3}$ s

17. El carrito acelera con a m/s^2 y se incrusta en el clavo quedando adherido. Determine la máxima rapidez del bloque de masa m apoyado sobre la plataforma lisa interna del carrito, si en el instante que termina el choque tiene una rapidez v.



A) $\dfrac{ma}{k}\sqrt{\dfrac{K}{m}}$

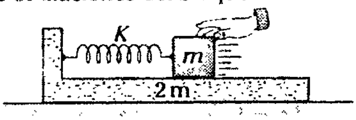
B) $\dfrac{2ma}{k}\sqrt{\dfrac{K}{2m}}+v$

C) $\dfrac{ma}{k}\sqrt{\dfrac{K}{2m}}$

D) $\sqrt{v^2+\dfrac{ma^2}{K}}$

E) $\sqrt{v^2+\dfrac{K}{m}a^2}$

18. Un bloque liso de masa m es soltado cuando el resorte está estirado y luego oscila con una amplitud máxima tal que el tablón no resbala. El coeficiente de rozamiento estático entre el tablón y el piso es μ_S. Halle la ecuación de las oscilaciones del bloque.



A) $\vec{x}=\frac{\mu_S}{2K}mg\cos\left(\frac{\sqrt{K}}{m}t+\frac{\pi}{2}\right)$

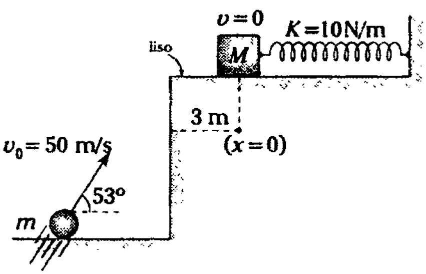
B) $\vec{x}=\frac{\mu_S}{2K}mg\cos\left(\frac{\sqrt{K}}{m}t+\frac{\pi}{4}\right)$

C) $\vec{x}=3\frac{\mu_S}{K}mg\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t+\frac{\pi}{2}\right)$

D) $\vec{x}=2\frac{\mu_S}{K}mg\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t+\frac{\pi}{3}\right)$

E) $\vec{x}=4\frac{\mu_S}{K}mg\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t+\frac{\pi}{4}\right)$

19. La esfera de plastilina se lanza e impacta en el bloque de masa M después de alcanzar su mínima rapidez. Halle la ecuación del sistema oscilante luego del impacto, si m=0,5 kg y M=2 kg.



A) $\vec{x}=2\sqrt{3}\,\text{sen}\left(4t+\frac{11\pi}{3}\right)$ m

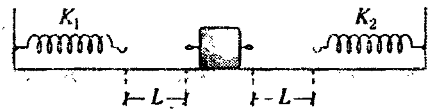
B) $\vec{x}=3\text{sen}(2t)$ m

C) $\vec{x}=2\text{sen}\left(\sqrt{3}\,t+\frac{3\pi}{5}\right)$ m

D) $\vec{x}=\sqrt{16}\,\text{sen}\left(4t+\frac{3\pi}{2}\right)$ m

E) $\vec{x}=0{,}4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$ m

20. Se unen los extremos libres del resorte al bloque lo mantenemos en la posición indicada, tal que al soltarlo, se mueve hacia la derecha. Determine la amplitud de oscilación del bloque y desprecie el rozamiento.



A) $\frac{(K_2-K_1)L}{K_1+K_2}$

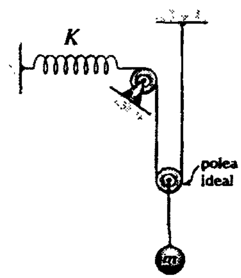
B) $\frac{(K_1+K_2)}{K_2-K_1}L$

C) $\frac{(K_2-K_1)L}{2(K_1+K_2)}$

D) $2\frac{(K_1+K_2)L}{K_1-K_2}$

E) $2\frac{(K_1-K_2)L}{K_1+K_2}$

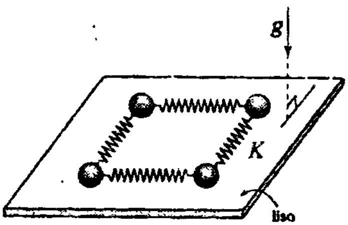
21. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Determine el periodo de las oscilaciones de la esfera cuando es sacada de la posición mostrada una pequeña distancia. (g = 10 m/s^2)



A) $2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ B) $4\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ C) $\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

D) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{K}}$ E) $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{K}}$

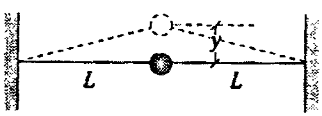
22. Cuatro esferas, cada una de masa m están unidas a resortes idénticos tal como se muestra; si a las esferas se les comunica velocidades de igual valor dirigidas al centro de masa del sistema, ¿después de qué tiempo los resortes presentarán su máximo estiramiento?



A) $3\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$ B) $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{2K}}$ C) $\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2K}}$

D) $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3m}{K}}$ E) $2\pi\sqrt{\frac{m}{3K}}$

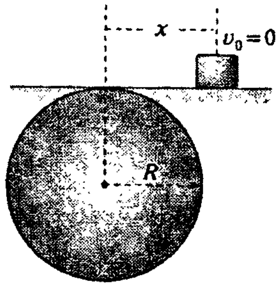
23. Una esfera de masa m se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa y está conectada a dos ligas de masa despreciable de longitud L (cada una presenta una tensión T). La esfera se desplaza lateralmente una pequeña distancia y determine la frecuencia angular ω de las pequeñas oscilaciones.



A) $\sqrt{2L/m}$ B) $\sqrt{2m/T}$ C) $\sqrt{2T/mL}$

D) $m\sqrt{\frac{T}{2L}}$ E) $2\sqrt{m/TL}$

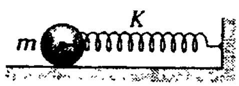
24. Sobre una superficie plana tangente a la superficie terrestre se suelta un bloque liso. Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del bloque, si R es el radio de la Tierra.



A) $2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$ B) $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ C) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

D) $\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$ E) $\pi\sqrt{\frac{3R}{g}}$

25. Un resorte ideal está unido a un cilindro homogéneo como se muestra. Si soltamos el cilindro en una posición en la que el resorte esté estirado, observamos que dicho cilindro rueda sin deslizar y el centro de masas de este realiza M.A.S. Determine el periodo de las oscilaciones.



A) $2\pi\sqrt{\frac{3M}{2K}}$ B) $\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$ C) $\pi\sqrt{\frac{3M}{K}}$

D) $\pi\sqrt{\frac{M}{3K}}$ E) $2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

26. Indique verdadero (V) o falso (F) con respecto a un péndulo simple.

- Al aumentar la longitud, el periodo aumenta.
- Si se disminuye la longitud, la frecuencia disminuye.
- Al aumentar la aceleración de gravedad del lugar, el periodo aumenta.
- Si disminuye la aceleración de gravedad del lugar, la frecuencia aumenta.

A) VVFV B) VFVF C) VFFF
D) FVVV E) VFVV

27. Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

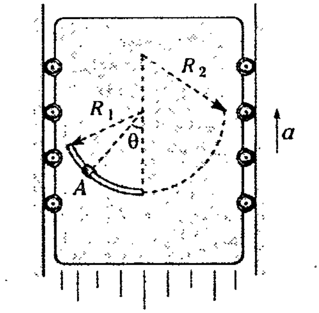
- Un péndulo que va dentro de un ascensor, que se eleva con velocidad constante, tiene igual periodo que si el ascensor estuviera en reposo.
- Cerca a una gran montaña el periodo de un péndulo varia.
- Si un péndulo es llevado de la Tierra a la Luna la longitud de la cuerda hay que reducirla a la sexta parte ($g_{Tierra} = 6\,g_{Luna}$)

A) VFV B) VVF C) FFV
D) VVV E) FVV

28. Un péndulo simple oscila en la superficie de la Tierra, con un periodo de $0{,}9\sqrt{11}$ s. Determine el periodo de oscilación de este péndulo, a cierta altura sobre la superficie de la Tierra, en donde la aceleración de la gravedad cambia en 1%.

A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 4 s E) 5 s

29. Un collarín liso se suelta en el punto A. Determine el tiempo mínimo que demora en pasar nuevamente por el punto A, si el ascensor se eleva con una aceleración constante cuyo módulo es $a = \frac{\pi^2}{4}$ m/s^2. (Considere que $R_2 = 2R_1 = 5$ m; $g = \pi^2$ m/s^2; θ es pequeño y $\sqrt{2} = 1{,}4$).



A) 2,4 s B) 2 s C) 3 s
D) 3,4 s E) 4,2 s

30. Un péndulo simple bate segundos cuando está colgado del techo de la cabina de un ascensor que se eleva con velocidad constante. Si repentinamente la cabina adquiere una aceleración dada por $\vec{a} = +g\hat{j}$, el periodo del péndulo será

A) $\sqrt{1{,}5}$ s B) $\sqrt{3}$ s C) $\sqrt{2}$ s
D) $\sqrt{6}$ s E) $\sqrt{0{,}6}$ s

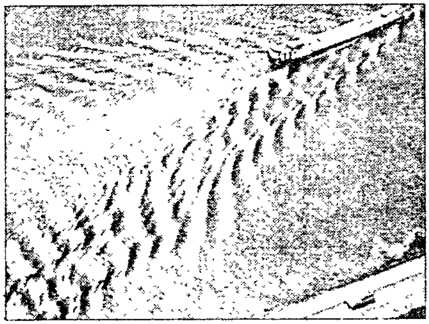
CLAVES

1	D	11	C	21	C
2	E	12	A	22	C
3	C	13	D	23	C
4	D	14	D	24	C
5	C	15	D	25	A
6	C	16	B	26	C
7	D	17	D	27	D
8	B	18	C	28	C
9	B	19	B	29	D
10	A	20	E	30	D

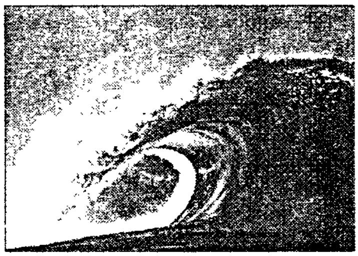
XIV

CAPÍTULO

Ondas mecánicas



(a)

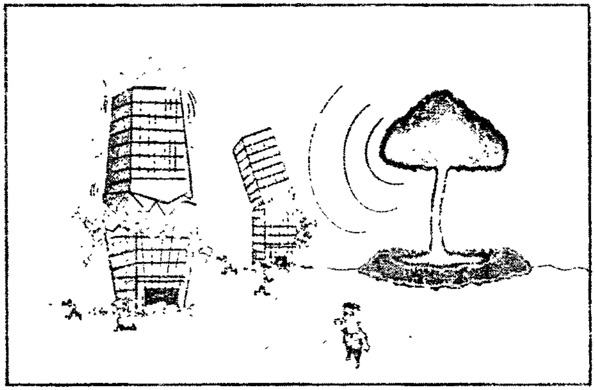


(b)

Cuando comentamos acerca de las ondas; inmediatamente muchos de nosotros nos referimos al sonido (onda acústica), a las ondas sísmicas y también a las olas en el mar (ondas marinas) que se aprecian en la foto; estos son ejemplos usuales de ondas mecánicas.

LECTURA

LA ONDA DE PRESIÓN Y LA ONDA DE CALOR EN UNA EXPLOSIÓN NUCLEAR



La gran onda de presión que produce una explosión nuclear, trae como consecuencia efectos devastadores en los seres vivos en las edificaciones y en la atmósfera local de manera temporal.

Los fenómenos inmediatos a la explosión de una bomba atómica, mecánicamente considerados, no difieren mucho de los de una bomba corriente de trilita (TNT), ambas producen una onda expansiva y un calor repentino

La diferencia está en la magnitud de los efectos de dichos fenómenos. Los de la bomba atómica son, desproporcionadamente mayores.

La onda expansiva de una bomba nuclear es descomunal: si pasa sobre un edificio este estalla, reventándose.

Evidentemente, siendo como es la atmósfera, un medio continuo y elástico, cualquier perturbación en cualquiera de sus puntos tiene que transmitirse a los demás. Por tanto, la onda expansiva influye en ella. Claro que, según este razonamiento, tambien debe influir la onda de presión creada por el sonar de tambores en la selva africana, pero en el caso de una detonacion nuclear la onda de choque (presión) es miles de veces mayor que la onda expansiva de los tambores.

La influencia de la onda expansiva de una explosión atómica, en el océano atmosférico, debe ser exclusivamente local.

En cuanto a la onda calorífica, el súbito y abrasador calentamiento del aire que obliga a este a elevarse violentamente para condensar todo su vapor de agua y producir el clásico hongo, no supone más efectos directos que los de un cumulonimbo a escala algo gigantesca. La acción inestabilizadora de la onda calorífica puede extenderse a algunos cientos de kilómetros, provocar chubascos, pero todo esto en forma pasajera y sin alcanzar distancias excesivas.

Lo mismo hay que decir de los vientos anormales que producen tanto la onda expansiva como la calorífica.

De todo esto, a pensar en una influencia general, directa sobre el tiempo o en el clima, hay un gran abismo. Lo que nos parece sorprendente es que la energía atómica es todavia insuficiente para provocar acciones de gran envergadura sobre la atmósfera. Una buena, pero simple, cadena de tormentas de verano supone mayor acopio previo y mayor dispendio posterior de energía que varias bombas atomicas juntas.

Lo que pasa es que hacen menos ruido y no tienen tan grandes consecuencias. La bola de fuego de la explosión nuclear alcanza una temperatura de miles de grados, pero la extensión del foco calorífico es reducidísima en comparación con las dimensiones de la atmósfera terrestre. En efecto es comparable al que produce el arrojar una caja de fósforos en la caldera de una locomotora: se produce una súbita inflamación en donde cae la caja y aumenta repentinamente, y por breve tiempo, la temperatura de la caldera, pero sería imposible notar que la locomotora tire con más fuerza o que marche más deprisa.

Ondas mecánicas

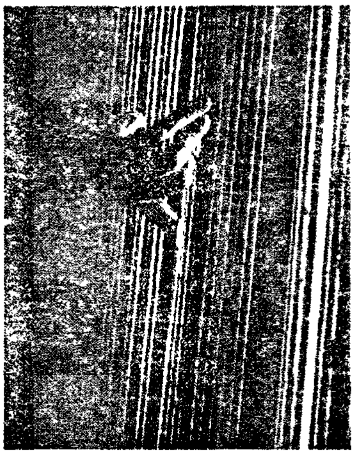
OBJETIVOS

- Conocer qué es una onda y cómo se propaga.
- Conocer los diferentes tipos de onda, sus características, sus propiedades y ecuaciones básicas.
- Analizar cualitativa y cuantitativamente los fenómenos ondulatorios y diferenciar un fenómeno ondulatorio respecto de otro.
- Conocer las particularidades de cada fenómeno ondulatorio con la finalidad de orientar su aplicación al campo de la tecnología.

INTRODUCCIÓN

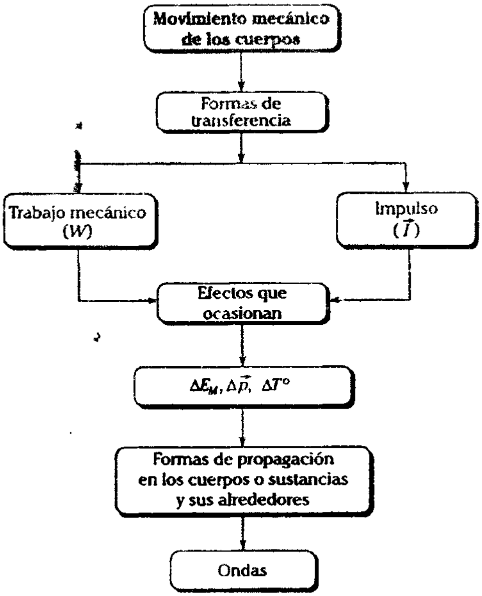
Al examinar la materia hemos apreciado que su forma principal de existencia es el movimiento: No hay materia sin movimiento ni movimiento sin materia. Es más se reconocen diversas formas de movimiento, cómo se transmite y cómo se propaga dicho movimiento.

En los capítulos anteriores hemos estudiado principalmente el movimiento mecánico de los cuerpos y como sabemos se puede transmitir al realizar un trabajo mecánico o transferir mediante un impulso, esto a su vez ocasiona en los cuerpos cambios en su energía y en su cantidad de movimiento hasta, posiblemente algunos cambios en su temperatura. Estos cambios a su vez en el interior de los cuerpos o sustancias y sus alrededores, determinan ciertas formas de propagación energética denominadas ondas.



Al hacer vibrar a las cuerdas del arpa, estas la transmiten al aire circundante y originan así el sonido.

Sinteticemos lo expuesto a través del siguiente esquema:



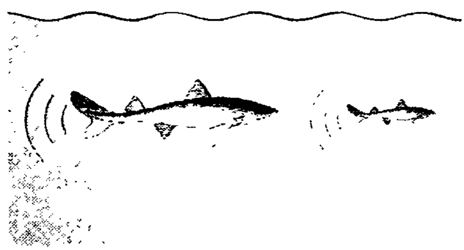
Ilustremos lo expuesto con un ejemplo: la comunicación entre dos personas.

En la figura, la joven al plantear la frase: ¡Hola! a través de sus cuerdas vocales transfiere energía al hacer vibrar a las partículas de aire más cercanas; estas partículas a su vez perturban a sus *vecinos* y entre ellas se transfiere en forma sucesiva la energía en múltiples direcciones, esta propagación energética vibrátil llega a impactar en el tímpano de su compañero provocando la vibración de su nervio auditivo y registrándose así la audición.

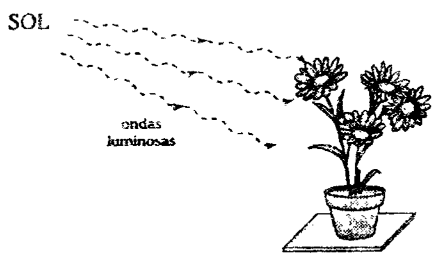
Esta forma especial de viaje, propagación o transporte de energía vibracional nos da una idea de lo que llamamos **onda sonora**, de gran importancia y trascendencia en nuestra diaria comunicación.

Pero en la naturaleza hay otros tipos de ondas, las cuales también estudiaremos en el presente capítulo. Las ondas nos rodean en diferentes formas, algunas veces registramos su imagen al ver la olas de agua en el mar, también cuando luego de impactar un pedazo de madera en el agua se generan olas que nos dan la noción de la imagen de una onda; pero hay otras ondas que no se observan pero que sí se perciben a través de nuestros oídos (ondas sonoras) y a través de nuestra piel (ondas térmicas); las ondas electromagnéticas que permiten la comunicación a través de teléfonos celulares, televisión, radio, etc.

Las ondas constituyen un tipo peculiar de propagación de la energía y de cómo se lleva a cabo las interacciones a distancia.

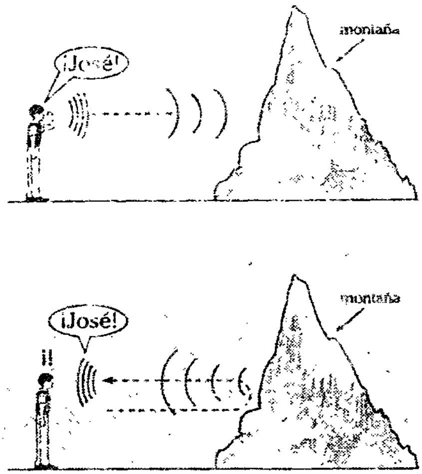


La comunicacion entre peces en el agua se lleva a cabo mediante ondas mecánicas al mover las aletas y cola Tambien mediante el ultrasonido.



Las plantas viven gracias al proceso de fotosíntesis mediante el cual se nutren y desarrollan; para ello es indispensable las ondas electromagnéticas que emite el Sol (luz); también la luz es necesaria para que se active nuestro sistema visual.

Por otro lado, en el estudio de la Física se ha podido notar que existen dos conceptos que han permitido establecer descripciones adecuadas de muchos de los fenómenos que se desarrollan en la naturaleza, nos estamos refiriendo a los conceptos de **partícula** y **onda**. Con respecto al primero, en los capítulos anteriores lo hemos venido utilizado continuamente y con respecto al segundo, es este el momento en que lo tendremos en detalle que estudiar, de tal modo que nos permita entender, comprender y explicar ciertos fenómenos como por ejemplo: los movimientos sísmicos (temblores o terremotos), las olas en el mar (ondas marinas), las ondas sonoras (el eco), el aumento en la agudeza con que se percibe el sonido cuando una ambulancia se nos aproxima con su sirena encendida; el hecho de que cuando se toca un violín se pueda romper una copa de cristal, y otros muchos casos interesantes como se comento lineas arriba.



El eco, fenómeno ondulatorio tan cotidiano, encuentra su explicación en la reflexión de las ondas.

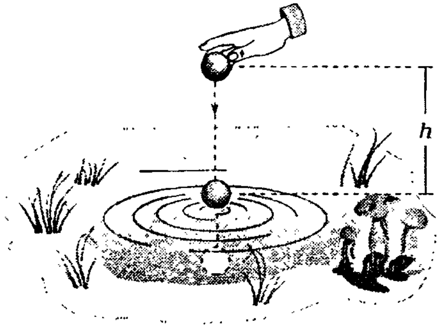
Estudiaremos las ondas para tener criterio de cómo se propaga y transmite la energía y la cantidad de movimiento para que de esta manera podamos asumir modelos que nos permitan describir ciertos fenómenos físicos interactivos, pero también explicar fenómenos en el mundo subatómico; donde las partículas elementales en muchas ocasiones registran un comportamiento dual (onda- partícula).

Sin embargo, no solamente estudiaremos las ondas para aprender a explicar fenómenos sino también para evaluar y proyectar su uso mediante dispositivos técnicos; precisamente de esto último se deduce la prolongación de la ciencia a la tecnología y a la sociedad donde las ondas sonoras y ondas electromagnéticas cumplen un papel importantísimo en las comunicaciones diversas.

Luego de destacar el aprovechamiento actual del conocimiento de las ondas, los fenómenos que experimentan y las leyes que la rigen, pasaremos a continuación a examinar.

ONDAS MECÁNICAS

Iniciaremos su estudio, al partir de algo cotidiano.

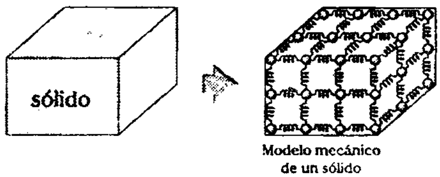


En la figura se deja caer una piedra sobre el estanque de aguas tranquilas. ¿Qué ocurre luego? Vemos que antes de impactar la piedra presenta energía cinética,y al impactar contra las partículas de agua, estas reciben energía y cantidad de movimiento ¿Qué ocurre físicamente con estas partículas? Como las partículas del agua tienen enlaces entre sí (no están aisladas) entonces comienzan a realizar movimientos verticales de vaivén (oscilan). Estas oscilaciones no quedan confinadas al lugar de impacto, la experiencia demuestra que las partículas vecinas también son afectadas por la perturbación y debido a ello comienzan a oscilar. Esto demuestra así la interacción de las particulas que hay en el agua donde se propaga la perturbación a este fenómeno que consiste en la propagación de una perturbación, que trae como consecuencia que las partículas del medio sustancial oscilen lo denominamos **onda mecánica**.

Resulta así, que en el agua se forman ondas mecánicas de imagen circunferencial en la superficie, éstas se propagan mediante un proceso transmisión de vibración de partícula a partícula vecina, así sucesivamente, debido a una transferencia energética o perturbación inicial en el medio.

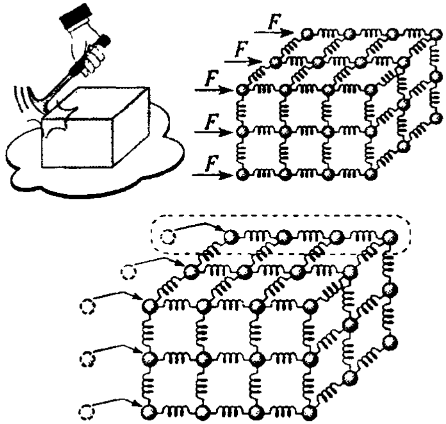
Descripción de un proceso ondulatorio

En algunas oportunidades nos preguntan ¿qué se entiende por onda mecánica? Para dar respuestas a esta interrogante consideremos el análisis de lo que ocurre a nivel molecular en un sólido cuando le damos un golpe con un martillo.

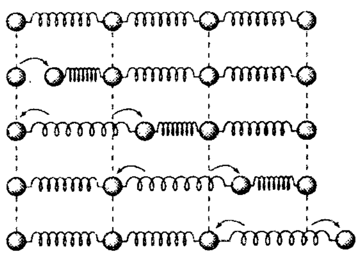


Aquí los pequeños resortes imaginarios representan la ligazón de las partículas en un sólido.

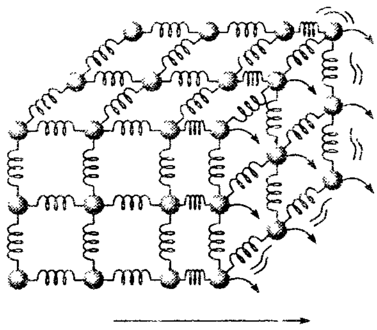
Ahora veamos qué ocurre cuando una de las caras del sólido es golpeada, tal como se muestra.



Al golpear con el martillo, las partículas adyacentes a la zona que han sido impactadas ven alterados sus estados mecánicos y son desplazadas ligeramente hacia la derecha. Por simplicidad analizaremos solo a las partículas de la parte perturbada como se muestra en el siguiente gráfico.



- En (A) se aprecia el estado inicial de equilibrio de las partículas.
- En (B) debido al impacto con el martillo, actúa una fuerza sobre la primera partícula y altera su estado mecánico, desplazándose hacia la derecha y comprimiendo al primer resorte de tal manera que la primera y segunda partícula experimentan la acción de una fuerza elástica.
- En (C) se observa que por acción de las fuerzas de elasticidad, la primera partícula recupera su posición inicial mientras que la segunda se desplaza hacia la derecha comprimiendo así al segundo resorte.
- En (D) el proceso anterior se ha repetido dado que se ha comprimido ahora el último resorte.
- En (E) se observa cómo finalmente la penúltima partícula retorna a su posición inicial mientras que la última se desplaza hacia la derecha; lo mismo le ocurrirá a las demás partículas del extremo derecho, lo cual podremos percibir si tocamos el extremo derecho del bloque

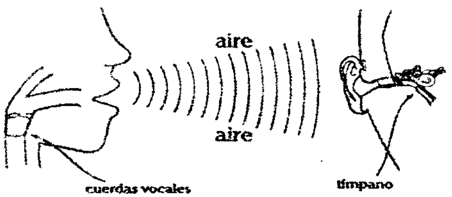


De lo anterior, podemos llegar a una conclusión: El haber perturbado una de las capas del bloque, es decir haber alterado el estado de las partículas hace posible que se altere también el estado de las otras; lo que significa que la perturbación es transmitida de partícula a partícula hasta alcanzar las partículas de la cara opuesta. Esto es consecuencia de las fuerzas de elasticidad que hay entre las partículas y al ocurrir esto decimos que se ha generado una onda mecánica.

CONCEPTO DE ONDA

De todo lo expuesto podemos plantear que se denomina onda al proceso de propagación de toda clase de perturbaciones en forma de oscilaciones en un medio elástico.

Dicha propagación consiste en la transmisión que se hace de partícula en partícula en forma oscilatoria a partir de la zona (foco) donde se originó la perturbación.



El sonido es una onda mecánica que nos permite comunicarnos y es consecuencia de la perturbación de las partículas del aire por medio de las vibraciones (oscilaciones) de las cuerdas vocales.

Nota

La generación de una onda mecánica (llamada también elástica) en un determinado medio es consecuencia de la perturbación en el lugar de origen (foco), lo cual trae a su vez como consecuencia que se modifique la presión, la densidad, etc. del medio. Esto da lugar a la propagación de la perturbación a través de las partículas del medio en forma de oscilaciones

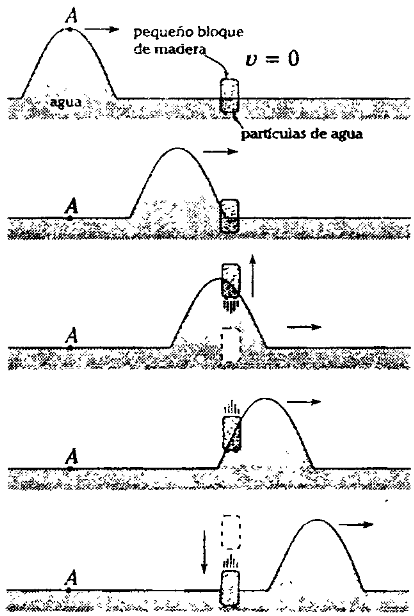
Es importante resaltar que las ondas al propagarse provoquen vibraciones y, como ya lo hemos planteado, transferencia de energía sucesiva en múltiples direcciones y experimenten por ende fenómenos ondulatorios y ciertas propiedades que examinaremos.

PROPIEDADES DE LAS ONDAS MECÁNICAS

Las diversas propiedades las podemos deducir por ejemplo al analizar el resonar de un tambor: cuando se golpea la membrana de este instrumento se observa que las partículas que forman dicha membrana oscilan (vibran) pero sin desplazarse con la perturbación. Por otro lado la transición de la perturbación, tiene como esencia la transmisión de movimiento (oscilatorio o vibratorio) de partícula a partícula del medio. Con este análisis concluimos que:

- Las ondas mecánicas no arrastran masa (no arrastran a las partículas del medio, solo ocurren oscilaciones moleculares).
- Las ondas mecánicas transportan energía y también cantidad de movimiento.

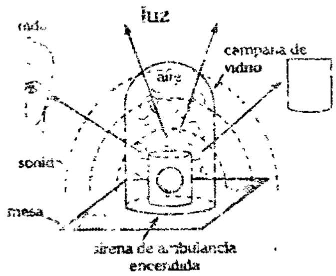
Estas propiedades las podemos apreciar de manera más clara en el siguiente ejemplo:



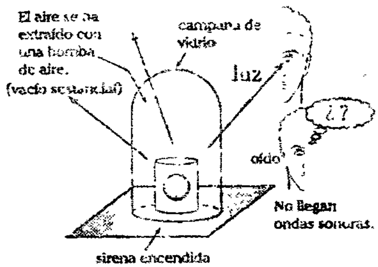
La ilustración nos indica que al propagarse la perturbación superficial en el agua esta (onda mecanica) alcanza al pedazo de madera y lo eleva, es decir, desarrolla trabajo sobre él. De ahí decimos que la onda lleva consigo energía. El pedazo de madera retorna a su posicion inicial, una vez que la onda pasó. Esto muestra que las ondas mecanicas no arrastran masa La osciiacion del bloque, permite establecer que las partículas del agua que tienen adheridas también oscilan, por lo tanto al generarse una onda mecánica en un medio, las particulas que conforman el medio, estas oscilan pero no son arrastradas.

- Otra propiedad importante de las ondas mecánicas es que requieren de un medio material sustancial (sólido. líquido o gas) para su propagación, esto a diferencia de otro tipo de ondas. Por ejemplo, las ondas electromagnéticas, las cuales comprenden a la luz. los rayos X; las microondas, la radiación ultravioleta. etc. Estas no requieren para su propagación necesariamente de un medio material sustancial, pueden propagarse en ausencia de un medio sólido, líquido o gaseoso; por lo tanto, afirmamos que pueden propagarse incluso en el vacío sustancial.

El esquema muestra un experimento muy sencillo que nos permite concluir que una onda mecánica (sonido) requiere de un medio elástico (el aire) para su propagación.



Al haber aire al interior de la campana se puede percibir el sonido de la ambulancia y ver la luz roja de la sirena



Al extraer el aire el sonido se deja de percibir fuera de la campana de vidrio, pero se sigue observando la luz roja de la sirena (O.E.M.).

Las ondas electromagnéticas (O.E.M.), las de radio, T.V., luz, etc. no requieren de un medio sustancial para su propagación; pero en presencia de dicho medio se retarda su propagación. es decir la onda viaja con menos rapidez.

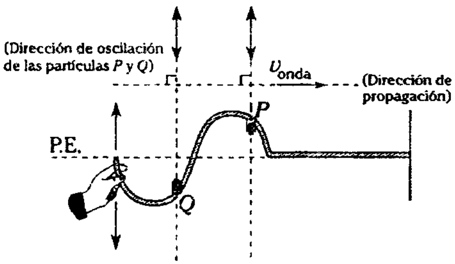
CLASIFICACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS

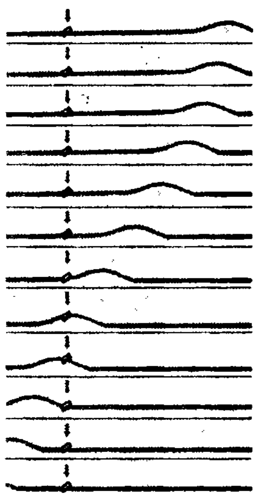
Cuando en un medio elástico se genera una onda mecánica, esta viaja en determinada dirección y las partículas de dicho medio oscilan también en una determinada dirección.

Por ello tomando como referencia la dirección en que viaja la onda y como oscilan las partículas del medio, las ondas mecánicas se clasifican en dos tipos.

ONDAS MECÁNICAS TRANSVERSALES

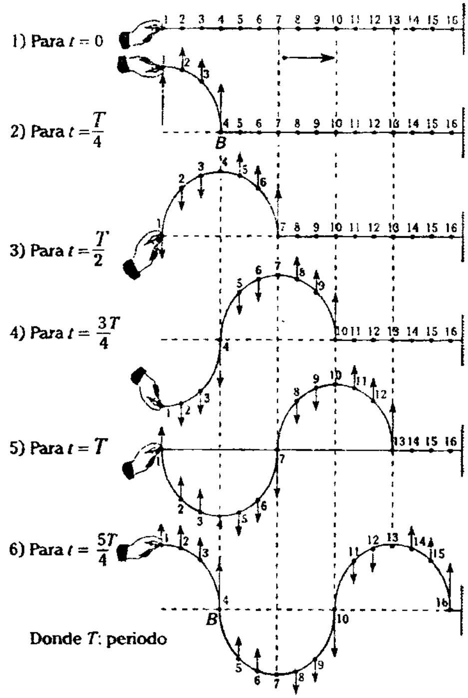
Estas ondas se caracterizan porque las partículas del medio oscilan en dirección perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Es decir, las partículas del medio oscilan perpendicular a la dirección de la velocidad de la onda. Este tipo de onda se puede generar en los sólidos, ya que en ellos se da deformación por cizallamiento y como por ejemplo encontramos a una cuerda de goma tensa, en la membrana de un tambor, pero también se puede generar en la superficie libre de los líquidos.





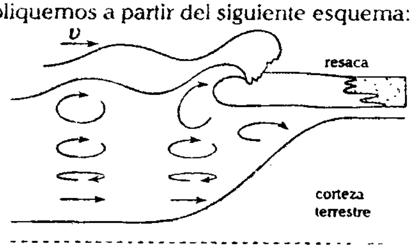
Onda transversal en cordón de goma, el cuadro muestra que mientras avanza la perturbación una partícula de la cuerda oscila perpendicular al avance.

Para entender el proceso de avance de la onda y las vibraciones de las partículas, a continuación hemos enumerado a las partículas de la cuerda, como indica la figura siguiente, en donde únicamente con nuestra mano hacemos vibrar a la partícula 1, así



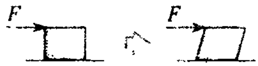
Observe como horizontalmente se va propagando la onda transportando energía, y verticalmente las partículas enumeradas vibran y se transfieren energía en diferentes instantes de tiempo.

¿Las olas en el mar son ondas transversales? Expliquemos a partir del siguiente esquema:



La figura muestra las ondas que se producen en el agua de mar. Casi en la superficie el agua se mueve en circunferencias; pero a medida que aumenta la profundidad, los movimientos tienden a ser longitudinales. Si observamos el perfil de las olas en la superficie nos parecería que se trata de ondas transversales.

Las ondas mecánicas transversales no se pueden formar en todo el volumen de un gas o líquido, por que en ellos entre las partículas del medio no se manifiestan fuerzas elásticas que tienden a restablecer la estructura del medio, es decir en los gases o líquidos no es posible la deformación por cizallamiento o de esfuerzo cortante.

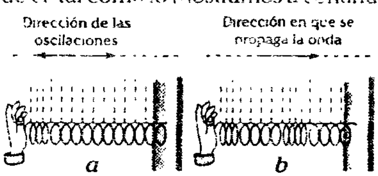


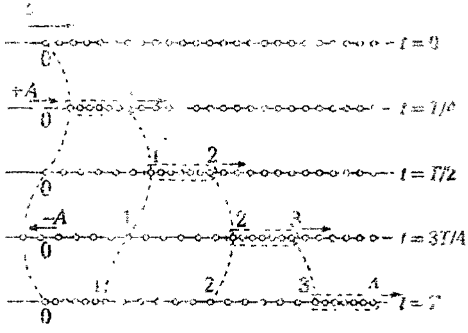
En un sólido, la deformación por cizallamiento se explica por el desplazamiento relativo entre ciertas capas que forman al sólido.

ONDAS MECÁNICAS LONGITUDINALES

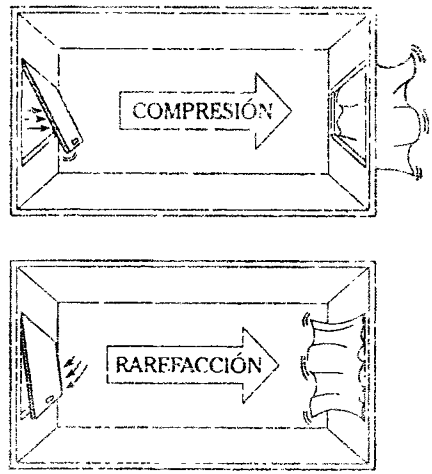
Estas ondas se caracterizan por que las partículas del medio oscilan en una dirección paralela a la dirección de propagación de la perturbación, es decir, las partículas oscilan paralelamente a la velocidad de la onda. Estas ondas se pueden generar en todo medio elastico, ya sea sólido, líquido o gas ya que en estos surgen fuerzas elásticas debido a deformaciones por compresión o tensión. Como ejemplo de onda mecanica longitudinal tenemos el sonido, el cual se puede generar en cualquier medio sustancial

También se genera una onda longitudinal al sacudir violenta y rápidamente un resorte a lo largo de él tal como lo mostramos a continuación

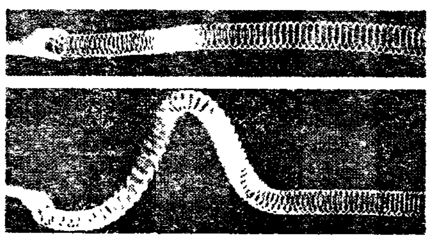




Esquema de propagacion de una onda longitudinal



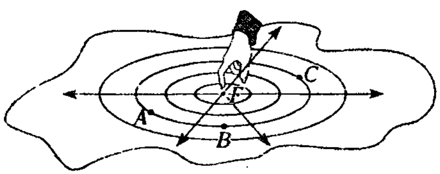
En ambas ilustraciones se trata de ondas longitudinales de compresión y rarefacción del aire.



Las fotografías muestran cómo se propaga un pulso en un resorte. En el primer caso, el pulso es longitudinal; y en el segundo caso es transversal.

FRENTE DE ONDA Y RAYO

Cuando se perturba cierto grupo de moléculas de la superficie libre del agua que hay en un estanque, notamos que el efecto de la perturbación se propaga sobre la superficie (ondas) en todas las direcciones con igual rapidez, algo así como se muestra en la siguiente figura.



Con el dedo se perturba el equilibrio de la partícula F del agua, pues se le da energía y se forman ondas superficiales circunferenciales concéntricas con centro en F (foco de onda).

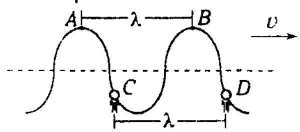
Según la figura, podemos plantear que las partículas A, B y C de la superficie del agua son alcanzadas simultáneamente por la perturbación, esto nos da a entender que dichas partículas oscilan al mismo tiempo y mientras se siga perturbando con el dedo la superficie del agua, dichas partículas siempre oscilarán con las mismas características, es decir, oscilan en **fase**. Cuando se une imaginariamente todos los puntos de un medio elástico, que son alcanzados al mismo tiempo por la perturbación, se forma lo que llamaremos un **frente de onda**.

Por lo tanto un frente de onda es el lugar geométrico de todos los puntos o partículas de un medio que son afectados por esta simultáneamente y que oscilan en fase.

Generalmente, si apreciamos la onda en el plano (superficie del agua) le denominamos frente de onda; pero si lo enfocamos espacialmente las ondas ya no serán circunferenciales sino cilíndricas y se les denominará **superficie de onda**.

Nota

Un aspecto importante relacionado con las partículas que oscilan en fase es lo referente a la longitud de onda. Una longitud de onda (λ) se puede definir como la distancia mínima entre dos partículas que oscilan en fase.



Las partículas A y B oscilan en fase común y las partículas C y D oscilan en otra fase común.

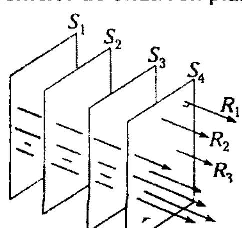
CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN A SU FRENTE DE ONDA

Dependiendo de la forma geométrica del frente de onda o **superficie de onda**, se suele hacer otra clasificación de las ondas: ondas esféricas, ondas cilíndricas, ondas planas, etc. La dirección en la cual avanza la perturbación en todo instante lo determina una línea imaginaria denominada **rayo**, cuando los medios sean isotrópicos, los rayos en todo instante serán perpendiculares a los frentes de ondas u ortogonales a la superficie de onda. Por ejemplo, si tenemos una onda esférica. es por que el frente de onda es esférico y los rayos son colineales a los radios.

Veámoslo graficamente

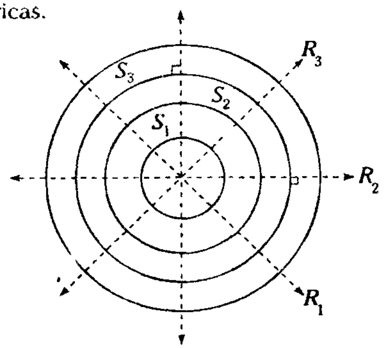
Ondas planas

Las superficies de onda son planas.



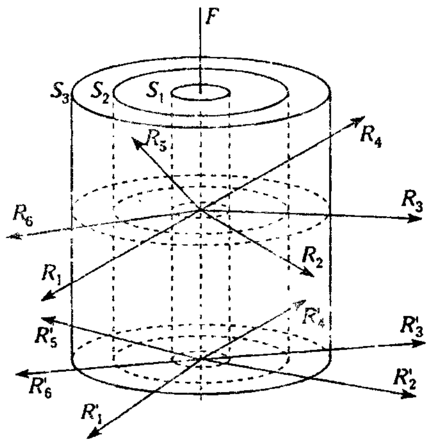
Ondas esféricas

Las superficies de onda son superficies esféricas.



Ondas cilíndricas

Las superficies de onda son superficies cilíndricas.

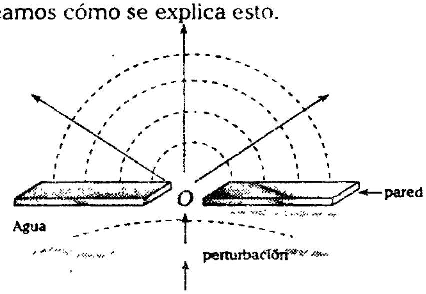


En los gráficos: S_1, S_2 y S_3 representan las superficies de onda mientras que R_1, R_2 y R_3 son los rayos, que indican la dirección de propagación de las ondas.

¿Cómo construimos un frente de onda?
Un frente de onda está constituido por el conjunto de puntos que oscilan en fase; es decir son afectados en simultáneo por la onda. Esta construcción geométrica fue propuesta por Christian Huygens en una de sus obras científicas.

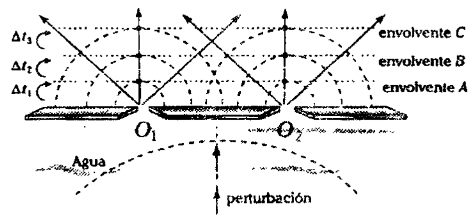
PRINCIPIO DE HUYGENS

Fue planteado en 1678 por el científico y matemático holandés Christian Huygens; en su obra *Tratado de la luz*. Aquí plantea: *Todo punto de un medio hasta el cual llega una perturbación se comporta como un foco de ondas secundarias.* Veamos cómo se explica esto.



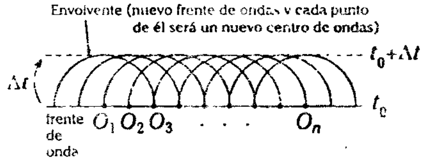
En la figura se tiene una pared con un agujero *O* al cual llega la perturbación, y por el punto *O* comienzan a emigrar nuevas ondas. ¿Qué ocurrió? *O* se convirtió en el nuevo foco de ondas secundarias.

¿Qué sucede si le hacemos dos agujeros a la pared? Al llegar la perturbación en forma simultánea a O_1 y O_2, estas se comportan como nuevos focos y la construcción del frente de onda es mediante el criterio anterior.



Generalizando podemos plantear el principio de Huygens, así:
Cada punto al cual llega simultáneamente la perturbación (frente de onda), es a su vez el centro de una onda esférica secundaria, la superficie que contornea (una envolvente) en cierto instante de tiempo las ondas secundarias viene a ser el nuevo frente de onda.

Construcción de un frente de onda plana

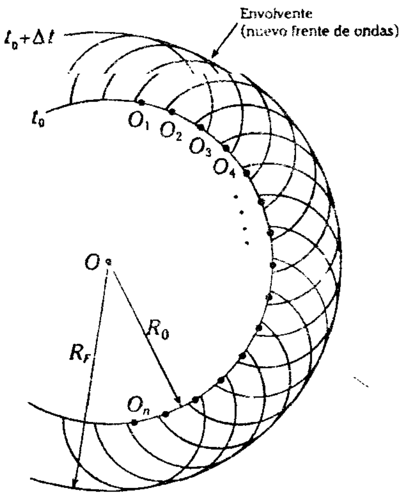


$O_1, O_2, \ldots, O_n$: centros de las ondas secundarias.

En una onda plana el frente de onda en todo instante presenta la misma área para su superficie, lo que significa de que la onda en todo instante afecta a un mismo número de partículas. La energía de la onda se reparte entre todas las partículas del frente de onda y como el número de partículas de este frente a cualquier distancia del foco siempre es el mismo, las partículas oscilarán en todo instante y a cualquier distancia del foco; con la misma energía, por lo tanto, todas oscilarán con la misma amplitud.

Para una onda plana la amplitud con que oscilan todas las partículas es constante.

Construcción de un frente de onda esférica



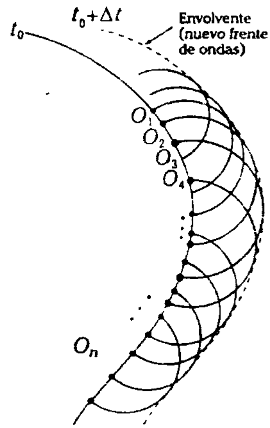
En una onda esférica, el área del frente de onda se incrementa conforme la onda se aleja del foco, es decir, aumenta con la distancia. Esto significa que la onda cada vez afecta a un mayor número de partículas y que su energía se debe repartir cada vez entre más partículas, por lo que las más alejadas del foco oscilarán con menor energía y amplitud. La amplitud de oscilación de una partícula dependerá de su ubicación respecto al foco, dependerá de que tan alejada esté de él.

Por lo tanto la amplitud de oscilación de una partícula para una onda esférica será en todo instante la misma, pero dicha amplitud dependerá de su distancia al foco. ¡Las partículas no oscilan con la misma amplitud!

Lo que se llega a demostrar es que en una onda esférica la amplitud (A) es inversamente proporcional (I.P.) a la distancia (r) de la partícula hacia el foco.

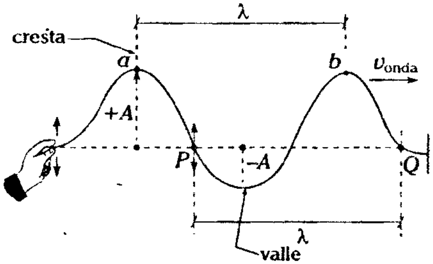
Un ejemplo de esto es el sonido que se propaga con un frente de onda esférica y que disminuye su amplitud que a su vez se relaciona con su intensidad (volumen) conforme se aleja de la fuente que la originó, por ello a mayor distancia casi ya no podemos percibirlo con claridad.

Construcción de un frente de onda cualquiera



ELEMENTOS DE UNA ONDA MECÁNICA

Por su naturaleza una onda puede ser mecánica o electromagnética y por su frente de onda plana, esférica, etc. Una onda tiene algunos otros elementos importantes que a continuación pasamos a exponer. Con fines didácticos congelemos en cierto instante la imagen de una onda mecánica tensa que se propaga luego de hacer vibrar una cuerda, (a este se le conoce como perfil de la onda) como se indica en la figura



Aquí lo que debemos destacar es la generación de la onda mediante los vaivenes que por unidad de tiempo se le da al extremo de la cuerda; esto se caracteriza por

FRECUENCIA

Es el número de oscilaciones o vaivenes que por unidad de tiempo realizan las partículas del medio donde se propaga la onda.

$$\boxed{\text{frecuencia} = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{tiempo}}}$$

Unidad: Hertz (Hz)

A mayor frecuencia de la onda, las partículas del medio oscilan más aprisa.

PUNTOS EN FASE

Son aquellas partículas del medio que en forma simultánea tienen igual velocidad y posición relativa común.

En la figura

- Las partículas a y b están en fase porque en todo instante

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b \quad \wedge \quad \vec{y}_a = \vec{y}_b$$

y para el instante mostrado

$$\vec{v} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{y} = +A$$

- Las partículas P y Q están en fase porque en todo instante

$$v_P = v_Q \quad \wedge \quad y_P = y_Q = 0$$

y para el instante mostrado

$$\vec{v} = +v_{máx} \quad ; \quad \vec{y} = \vec{0}$$

LONGITUD DE ONDA (λ)

Es la mínima distancia entre dos partículas o puntos que están en fase común.

PERIODO (T)

Es el tiempo que emplea una partícula del medio en realizar una oscilación, para luego ocasionar en el medio un avance de la perturbación (una distancia) igual a una longitud de onda (λ). Matemáticamente lo definimos por

$$\boxed{T = \frac{\text{tiempo}}{\text{N° de vaivenes}} = \frac{1}{f}}$$

Nota

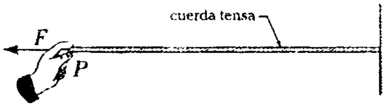
Con respecto a una onda mecánica viajera en una cuerda, si nos indican su amplitud (A), frecuencia (f) y periodo (T), se están refiriendo a la amplitud; frecuencia y periodo de oscilación de las partículas que forman a la cuerda es decir

$$A_{onda} = A_{\substack{\text{partículas}\\ \text{del medio}}} \; ; \; f_{onda} = f_{\substack{\text{partículas}\\ \text{del medio}}}$$

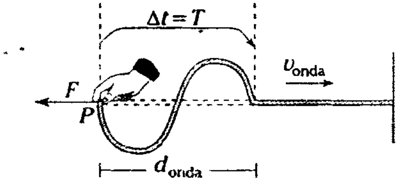
Análogamente, para el periodo

$$T_{onda} = T_{\substack{\text{partículas}\\ \text{del medio}}}$$

¿Cómo hallamos la rapidez de la onda? Tomemos como ejemplo una cuerda tensa dispuesta en forma horizontal, aunque debemos anticipar que el resultado que se obtendrá se puede generalizar para todos los tipos de onda.



Cuando el extremo P se le hace oscilar y completa una oscilación, el tiempo transcurrido (Δt) viene a ser el periodo (T) de oscilación de dicho extremo y se tiene



Como la onda en un medio homogéneo se propaga con rapidez constante, podemos plantear

$$d_{onda} = v_{onda}\Delta t$$

$$\lambda = v_{onda}T = v_{onda}\left(\frac{1}{f}\right)$$

$$\therefore \boxed{v_{onda} = \lambda f}$$

Unidades

λ : en metros (m)

f : en Hertz (Hz) o (s^{-1})

v_{onda} o v_{prop} : en m/s

Ejemplo 1

El oído de un ser humano puede percibir ondas sonoras, con frecuencia entre 20 Hz y 20 kHz. Sabiendo que el sonido en el aire se propaga con una rapidez de 340 m/s, determine la máxima y mínima longitud de onda para el sonido que puede percibir el oído humano.

Resolución

Según el enunciado la onda vibra e impacta en la campanilla de nuestro oído con una frecuencia comprendida en el intervalo

$20\text{ Hz} \leq f \leq 20\,000\text{ Hz}$ (ocasiona la audición)

A $f < 20$ Hz se le denomina infrasonido. Un ejemplo de esto son las ondas sísmicas.

A $f > 20\,000$ Hz se le denomina ultrasonido. Un ejemplo de esto son las señales emitidas por algunos animales como los murciélagos y delfines que emiten ondas sonoras con frecuencias de hasta 100 kHz. Además hoy en día el ultrasonido se usa como método de diagnostico médico en los sistemas de ecografía.

Con relación a la pregunta establecida, vamos a partir de

$$v = \lambda . f$$

Nos piden

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

y siendo v constante se deduce que

- λ_{max} se obtiene cuando f_{min}

$$\Rightarrow \lambda_{máx} = \frac{v}{f_{min}} = \frac{340}{20} = 17\text{ m}$$

- λ_{min} se obtiene cuando f_{max}

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}} = \frac{340}{20\,000}$$

$$\lambda_{min} = 0{,}017\text{ m}$$

Finalmente podemos plantear que las ondas sonoras percibidas por el oído humano tienen una longitud λ comprendida en el intervalo

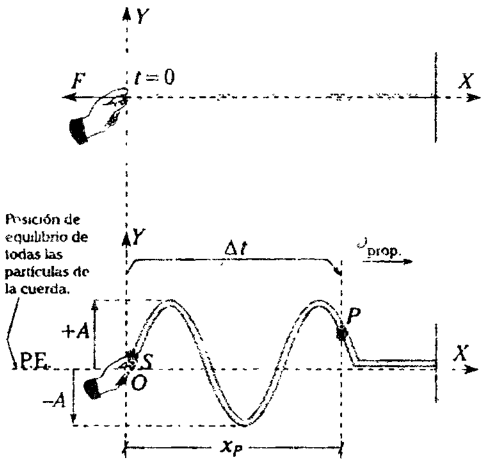
$$0{,}017\text{ m} \leq \lambda \leq 17\text{ m}$$

El ultrasonido son ondas mecánicas con frecuencias por encima de los 20 000 Hz. El murciélado lo utiliza para orientarse así como también para cazar sus presas

FUNCIÓN DE ONDA

Cuando en una cuerda de goma se genera una onda mecanica transversal plana, las partículas (porciones) de la cuerda experimentan un movimiento oscilatorio que se puede considerar con mucha aproximación a un M.A.S., mientras se desprecie el amortiguamiento. En virtud a dicho movimiento podemos determinar una expresión matemática que represente la ley de movimiento de todas las partículas del medio, a esto precisamente le llamamos la **Función de onda**.

A continuación obtendremos la función de onda para la onda mecánica transversal armónica y plana que se genera en una cuerda tensa. (Se entiende que el término armónico está asociado a lo del M.A.S.)



El extremo de la cuerda, que coincide con el origen de coordenadas, es agitado de arriba hacia abajo y luego de un intervalo de tiempo (Δt) se tiene su perfil.

Como cualquier partícula que es alcanzada por la perturbación, empieza a describir un M.A.S., la ecuación de movimiento de la partícula S es de la forma

$$\vec{y}_S(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

donde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Como dicha partícula (S), al igual que las demás partículas de la cuerda empezó a oscilar de la P.E. hacia arriba, la fase inicial de esta partícula es nula $(\theta_0 = 0)$ por lo que la ecuación queda así

$$\vec{y}_S(t) = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad \text{(I)}$$

Ahora la ecuación de movimiento de la partícula P que empezó a oscilar también hacia arriba, pero con un retraso (Δt), será

$$\vec{y}_P(t) = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right) \qquad \text{(II)}$$

Note que estamos considerando que las partículas de la cuerda oscilan con igual amplitud, por tratarse de una onda plana, lo cual se verifica experimentalmente.

En las expresiones (I) y (II) los instantes t y t_1 son diferentes ya que primero empieza a oscilar la partícula S y luego de Δt segundos lo hace la partícula P. Esto significa que la partícula S ha estado en movimiento Δt segundos más que P, por lo tanto, podemos plantear

$$t_1 < t$$

$$\Rightarrow \quad t = t_1 + \Delta t$$

pero

$$\Delta t = \frac{x_P}{v_{\text{prop}}}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = t - \frac{x_P}{v_{\text{prop}}} = t - \frac{x_P}{\lambda f} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (III) en (II), tenemos

$$\vec{y}_P = A\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_P}{\lambda f}\right)\right)$$

$$\vec{y}_P = A\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda(fT)}\right)$$

Como $f.T=1$, la expresión anterior qued así

$$\vec{y}_P = A\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_P}{\lambda}\right)$$

La ecuación obtenida viene a ser la ecuación del movimiento oscilatorio de la partícula P que representa a cualquier partícula que oscila a una distancia x_P del origen de coordenadas. Es importante señalar que en general x_P representa la posición de la partícula P sobre el eje X y por lo tanto al reemplazar su valor se debe asociar el signo correspondiente si está a la derecha o izquierda del origen de coordenadas. La ecuación de movimiento de una partícula de la cuerda que está a x metros del origen es en general de la forma:

$$\boxed{\vec{y}_S(x;t)=A\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta_0}{2\pi}\right)}$$

(Función de onda)

donde, respecto al signo

(–) : cuando la onda viaja hacia la derecha ($\rightarrow$).

(+) : cuando la onda viaja hacia la izquierda ($\leftarrow$).

Esta ecuación permite determinar el desplazamiento $(\vec{y})$ en un instante t de una partícula que esté oscilando a una distancia (x) del origen de coordenadas.

La notación $\vec{y}_{(x;t)}$ indica que el desplazamiento $\vec{y}$ depende de las variables x y t, por lo tanto para conocer $\vec{y}$, antes se debe conocer a x y también a t.

Por otro lado debemos tener presente que la fase inicial (θ_0) en la función de onda queda definida por las condiciones iniciales (en $t_0=0$) para la partícula que está oscilando en el origen de coordenadas ($x=0$). Es decir θ es la fase inicial de la partícula que oscila en torno a $x=0$.

Nota

La función de onda se diferencia de lo que llamamos ecuación de onda. La función de onda es una solución de la ecuación de onda y para un proceso ondulatorio unidimensional cualquiera es de la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\quad \text{(Ecuación de onda)}$$

Esto en matemática es conocido como una ecuación diferencial con derivadas parciales, donde b representa la rapidez de la onda.

En la práctica es conveniente poder indicar cuántas longitudes de onda (λ) entran exactamente en una longitud de 2π metros, ello se puede hacer con la magnitud denominada **número de onda** (k) que matemáticamente se expresa así:

$$\boxed{k=\frac{2\pi}{\lambda}}$$

Unidad: (m^{-1})

El número de onda (k), tiene un papel análogo a la frecuencia cíclica (ω) el cual nos indica el número de periodos que entran exactamente en un intervalo de tiempo igual a 2π segundos, es decir

$$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}}$$

Unidad: rad/s

Si en la función de onda, deducida anteriormente, introducimos lo planteado tenemos

$$\vec{y}(x;t)=A\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta_0}{2\pi}\right)$$

$$\vec{y}(x;t)=A\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\mp\frac{2\pi}{\lambda}x+\theta_0\right)$$

$$\boxed{\vec{y}(x;t)=A\text{sen}(\omega t\mp kx+\theta_0)}$$

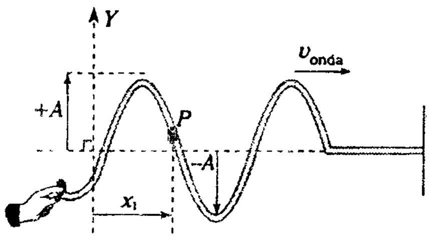
(Función de onda en términos del número de onda y frecuencia cíclica)

Esta es otra manera de expresar la función de onda para que sea mecánica transversal plana y armónica. Para una partícula en la cuerda tensa ubicada en $x = x_1$, la ecuación de su movimiento oscilatorio se obtendría si en la ecuación anterior se reemplaza $x = x_1$.

$$\Rightarrow \ \vec{y}(x;t) = A\text{sen}(\omega t + kx_1 + \theta_0)$$

Haciendo $\theta_1 = \theta_0 + kx_1$ nos quedará

$$\boxed{\vec{y}(t) = A\text{sen}(\omega t + \theta_1)}$$



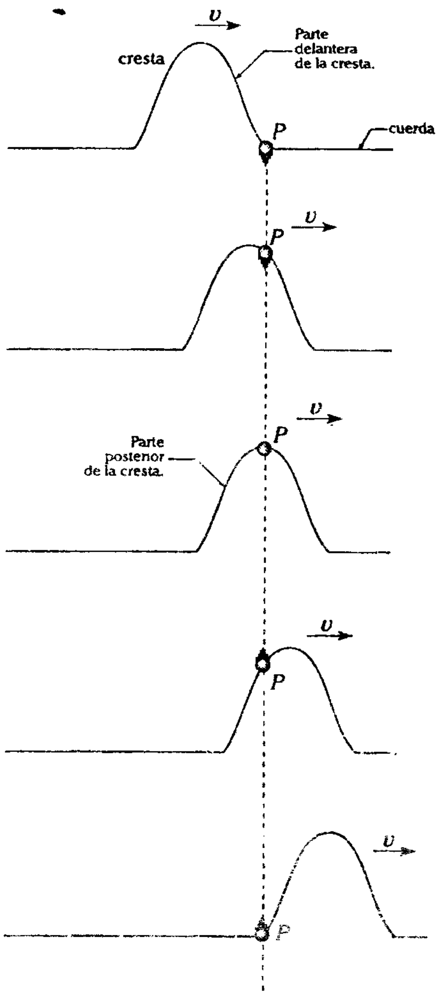
Siendo x_1 = cte., la partícula P de la cuerda experimenta un M.A.S. descrito por

$$\vec{y}(t) = A\text{sen}(\omega t + \theta_1)$$

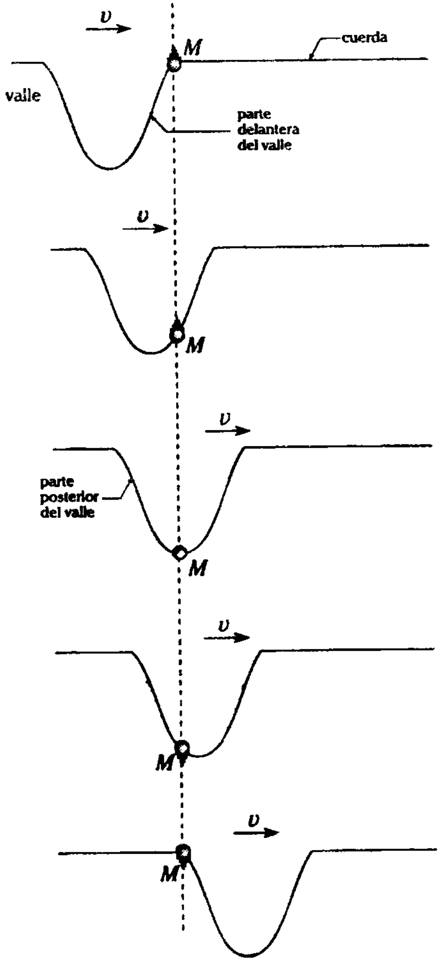
Esta es la ecuación del movimiento oscilatorio de la partícula P.

Nota:

Si desea calcular la fase inicial, (θ_0) primero se debe definir hacia dónde se está dirigiendo la partícula que está oscilando, en torno del origen $(x = 0)$ en el instante inicial $(t = 0)$. Esto se puede definir si vemos cómo se mueven las partículas de una cuerda si son alcanzadas por una cresta o un valle de una onda mecánica transversal.

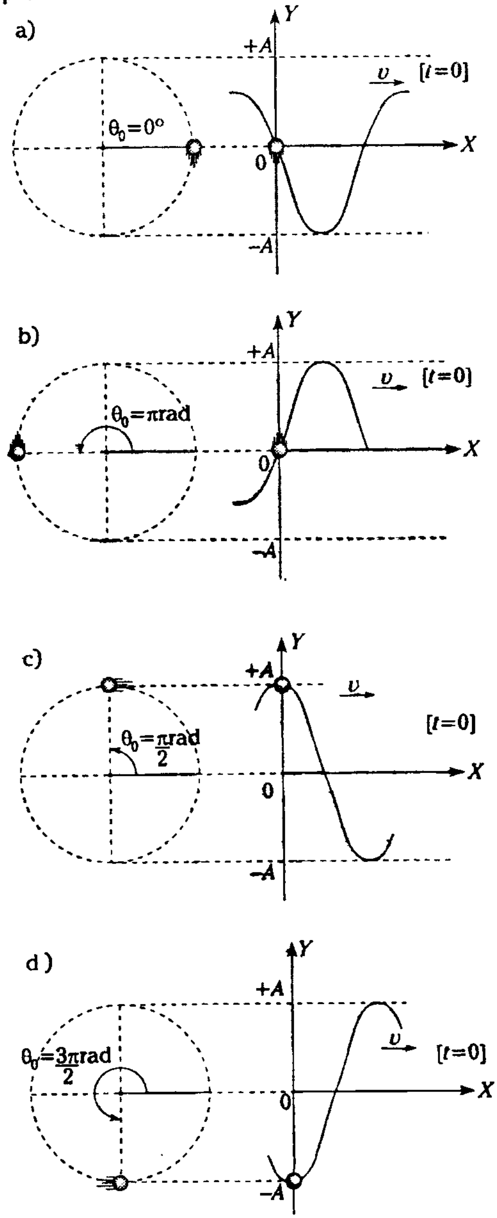


A partir de este cuadro se establece que mientras la partícula P, que es alcanzada por la cresta (pulso), esté sobre su parte delantera se estará moviendo hacia arriba y mientras esté sobre la parte posterior de la cresta estará moviéndose hacia abajo.



De este cuadro se deduce que la partícula *M* cuando es alcanzada por la parte delantera del valle se mueve hacia abajo y mientras esté sobre la parte posterior del valle se mueve hacia arriba.

Veamos algunos casos específicos, que se presentan más a menudo



A manera de tarea se pide demostrar en los cuatro casos planteados, que si la onda viaja hacia la izquierda, los valores de la fase inicial (θ_0) serían

Caso a: $\theta_0 = \pi \, \text{rad}$

Caso b: $\theta_0 = 0 \, \text{rad}$

Caso c: $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$

Caso d: $\theta_0 = \frac{3\pi}{2} \text{rad}$

Ejemplo 2

La ecuación de cierta onda transversal es

$$\vec{y}(x;t) = 0{,}04 \operatorname{sen} \pi \left(\frac{2t}{0{,}03} - \frac{x}{0{,}3} \right) \text{m}$$

donde x se expresa en metros y t en segundos. Determine la velocidad de propagación de la onda.

Resolución

Para toda onda en un medio homogéneo, la rapidez de propagación es constante y se determina con la expresión

$$v = \lambda . f \qquad \text{(I)}$$

La longitud de onda (λ) y la frecuencia (f) las obtenemos de la ecuación general

$$\vec{y} = (x;t) = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\theta_0}{2\pi} \right) \qquad \text{(II)}$$

Pero la ecuación de la onda dada es

$$\vec{y}(x;t) = 0{,}04 \operatorname{sen} \pi \left(\frac{2t}{0{,}03} - \frac{x}{0{,}3} \right)$$

Recuerde que esta ecuación debe presentar la forma general (II); al completarla, se obtiene

$$\vec{y}(x;t) = 0{,}04 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{0{,}03} - \frac{x}{0{,}6} + \frac{0}{2\pi} \right) \qquad \text{(III)}$$

Comparando (II) y (III), obtenemos

$$T = 0{,}03 \text{ s}$$

luego

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}03} = \left(\frac{100}{3} \right) \text{Hz}$$

Asimismo de la comparación obtenemos

$$\lambda = 0{,}6 \text{ m}$$

Reemplazando en (I)

$$v = (0{,}6) \left(\frac{100}{3} \right)$$

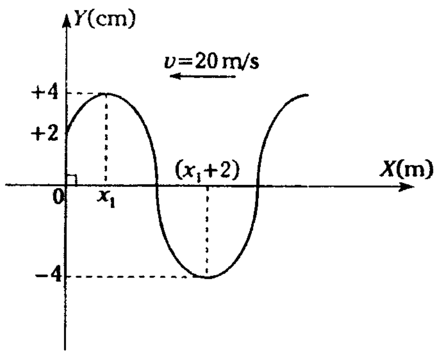
$$\therefore \; v = 20 \text{ m/s}$$

El signo negativo del segundo término de la ecuación de la onda (III) nos permite señalar que la propagación es hacia la derecha, por lo tanto

$$\vec{v} = (20\hat{i}) \text{ m/s}$$

Ejemplo 3

Se muestra el perfil de una onda mecánica transversal plana y armónica para el instante $t = 0$. Determine la función de onda.

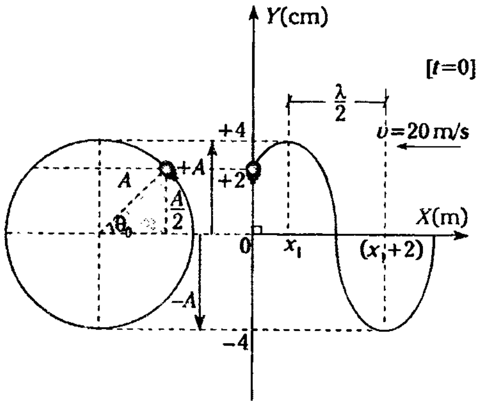


Resolución

Como sabemos para la O.M. transversal, armónica y plana, la función de onda tiene la forma

$$\vec{y}=(x;t)=A\,\text{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta_0}{2\pi}\right)\right)$$

Como en el perfil se muestra a la onda viajando hacia la izquierda se elige el signo (+). Además, del mismo perfil se logra deducir que



$$A=4\text{ cm}=0{,}04\text{ m}$$

Asimismo notamos que

$$\frac{\lambda}{2}=(x_1+2)-x_1$$

$$\Rightarrow\ \lambda=4\text{ m}$$

Para determinar el periodo (T) planteamos

$$v=\lambda.f=\frac{\lambda}{T}$$

$$20=\frac{4}{T}\ \Rightarrow\ T=0{,}2\text{ s}$$

Finalmente debemos determinar la fase inicial (θ_0), para ello debemos conocer las condiciones iniciales de la partícula que oscila en torno de la posición $x=0$

Para el instante $t=0$ observar que dicha partícula se encuentra en la posición $\vec{x}=+2$ cm y al saber de su ubicación en la circunferencia, se concluye que

$$\theta_0=30^\circ=\frac{\pi}{6}\text{rad}$$

Reemplazando todos los elementos en la función de onda tendremos

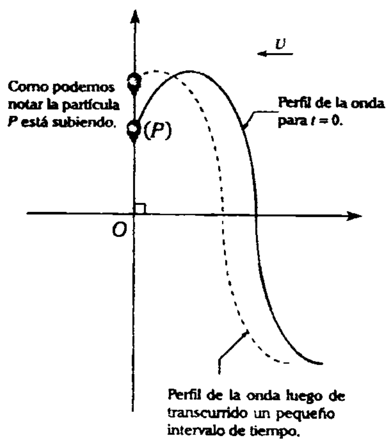
$$\vec{y}(x;t)=0{,}04\,\text{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{0{,}2}+\frac{x}{4}+\frac{\pi/6}{2\pi}\right)\right)\text{m}$$

$$\vec{y}(x;t)=0{,}04\,\text{sen}\left(2\pi\left(5t+\frac{x}{4}+\frac{1}{12}\right)\right)\text{m}$$

Observación

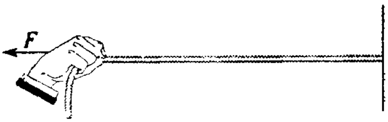
Para determinar θ_0 no es suficiente con conocer donde está ubicada la partícula que oscila en torno de $\vec{x}=\vec{0}$; para $t=0$ sino también debemos saber hacia dónde se mueve. Una forma práctica de conocer esto es graficar el perfil de la onda transcurrido un intervalo de tiempo (pequeño).

Veamos cómo sería en nuestro ejemplo

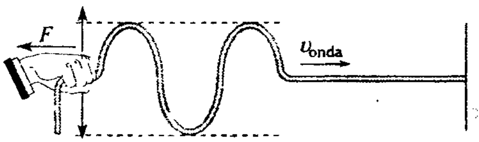


RAPIDEZ DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA EN UNA CUERDA TENSA

Una cuerda homogénea es fijada por uno de sus extremos a una pared, mientras que al otro extremo se le jala horizontalmente y de esta forma la cuerda queda tensa, tal como se muestra



Entendamos que la situación dada no es del todo correcta ya que la cuerda, por tener cierta masa, es atraída por la tierra y por lo tanto se curva hacia abajo. No obstante esto se puede despreciar si la fuerza $(\vec{F})$ con que se tensa la cuerda resulta mucho mayor que su $\vec{F}_g$. Al agitar rítmicamente de arriba a abajo el extremo de la cuerda, podemos originar en ella ondas transversales cuya rapidez viene definida por



$$\boxed{v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

(Rapidez de una onda transversal tensa)

donde

F : módulo de la fuerza con la cual se tensa a la cuerda (en N)

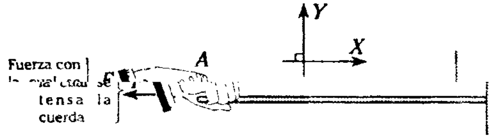
μ : densidad lineal de la cuerda (en kg/m)

La densidad lineal de una cuerda queda definida por

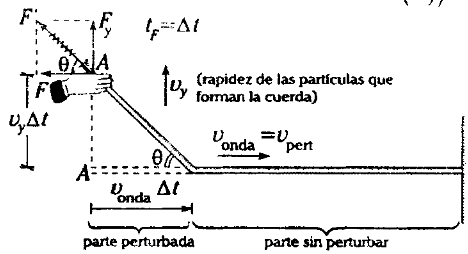
$$\boxed{\mu = \frac{\text{masa de la cuerda}}{\text{longitud de la cuerda}} = \frac{M}{L}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)}$$

v_{onda} : rapidez de la onda en m/s.

La ecuación de la rapidez de onda se puede demostrar al utilizar varios métodos. El primero que aplicaremos se basa en el Teorema del impulso y la cantidad de movimiento para una parte de la cuerda en un intervalo de tiempo Δt, desde que se inicia la perturbación.



Para que el extremo A empiece a elevarse, sobre él debe haber una fuerza vertical $(\vec{F}_y)$



En A la fuerza resultante sería $\vec{F}'$, y su componente horizontal que tensa la cuerda es en todo momento aproximadamente constante.

Si consideramos que Δt es pequeño, las partículas que conforman a la cuerda, en la parte perturbada tienen aproximadamente una rapidez común (v_y); que al inicio $v_y = 0$ y luego de Δt segundos $v_y \neq 0$, para la parte perturbada consideremos la relación impulso y cantidad de movimiento

$$\vec{I}_y = \Delta\vec{p}_y = \left(\vec{p}_{Fy} - \cancel{\vec{p}_{Oy}}^{\,0}\right)$$

Como para fines prácticos estamos considerando despreciable a la $\vec{F}_g$, su impulso ya no se tomaría en cuenta, quedando sobre la parte perturbada el impulso debido solo a $\vec{F}_y$.

$$\Rightarrow \quad I_y = F_y\,\Delta t = m v_y \qquad \text{(I)}$$

donde m masa de la parte perturbada de la cuerda.

Observando la figura planteamos

$$\tan\theta = \frac{v_y\Delta t}{v_{\text{onda}}\Delta t} = \frac{F_y}{F}$$

$$\Rightarrow\quad F_y = F\frac{v_y}{v_{\text{onda}}} \qquad \text{(II)}$$

como

$$\mu = \frac{m}{L_{AP}} = \frac{m}{v_{\text{onda}}\Delta t}$$

$$\Rightarrow\quad m = \mu v_{\text{onda}}\Delta t \qquad \text{(III)}$$

Reemplazando (II) y (III) en (I)

$$F\left(\frac{\cancel{v_y}}{v_{\text{onda}}}\right)\cancel{\Delta t} = \left(\mu v_{\text{onda}}\cancel{\Delta t}\right)\cancel{v_y}$$

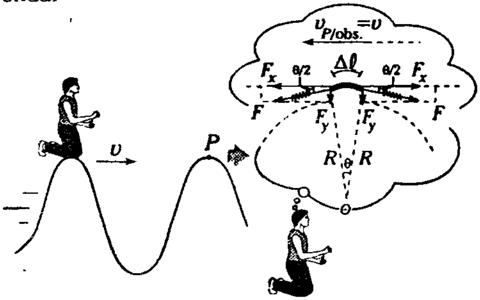
Simplificando

$$F = \mu v_{\text{onda}}^2$$

$$\boxed{v_{\text{onda}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Otra forma para demostrar

Otra forma de hacer esta demostración es ubicar a un observador sobre la onda (que viaje junto con la onda) y analizar la pequeña porción (P) de la cuerda que esté justo en la cresta de la onda.



Separación y ampliación imaginaria de la porción P de la cuerda que en el instante mostrado se encuentra en la cresta de la onda y es analizada por el observador.

Como el observador viaja junto con la onda presenta su misma velocidad.

$$\therefore\quad \vec{v}_{\text{obs}} = \vec{v}_{\text{onda}}$$

Las distintas porciones de la cuerda oscilan verticalmente y como P, para el instante mostrado se encuentra en la cresta de la onda (que es su extremo de oscilación)

$$\vec{v}_P = \vec{0}$$

Por lo tanto para el instante mostrado

$$\vec{v}_{P/\text{obs.}} = \vec{v}_P - \vec{v}_{\text{obs}}$$

$$\vec{v}_{P/\text{obs.}} = \vec{0} - \left(\vec{v}_{\text{onda}}\right) = -\vec{v}_{\text{onda}}$$

$$\therefore\quad \vec{v}_{P/\text{obs}} = -\vec{v}$$

Para el instante mostrado el observador nota que la porción P de la cuerda se le acerca con una velocidad de módulo v y dirigida hacia la izquierda.

Además podemos considerar que en ese instante el movimiento de P respecto del observador es parte de un movimiento circunferencial de radio R (Como ya se planteó en el capítulo de movimientos curvilíneos) en forma aproximada.

Por lo tanto planteamos para P respecto del observador

$$F_{cp} = (\Delta m)a_{cp}$$

donde Δm es la masa de la pequeña porción de cuerda que se está analizando.

Del gráfico notamos que si descomponemos la fuerza de tensión $(\vec{F})$ de la cuerda

$$F_{cp} = 2F_y = 2F\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

además

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R}$$

Reemplazando en la ecuación anterior tenemos

$$2F\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \Delta m\left(\frac{v^2}{R}\right) \qquad \text{(I)}$$

luego como la porción P es de pequeña longitud, la medida del ángulo θ también es pequeña. Por lo tanto podemos usar la siguiente aproximación

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}\text{(rad)}$$

además $\mu = \dfrac{\Delta m}{\Delta \ell} \Rightarrow \Delta m = \mu \Delta \ell$

y como $\Delta \ell$ se puede considerar un pequeño arco de circunferencia $\Delta \ell = \theta . R$

$\Rightarrow \Delta m = \mu(\theta . R)$

Reemplazando en (I)

$$2F\left(\frac{\theta}{2}\right) = (\mu . \theta R)\left(\frac{v^2}{R}\right)$$

Simplificando nos queda

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Observación

Como el observador se traslada con velocidad constante, es un observador inercial. Por ello respecto de él la Segunda ley de Newton es válida y no se requiere introducir en el D.C.L. alguna fuerza inercial. En el D.C.L. no se ha considerado la $\vec{F}_g$ de la porción analizada por ser una porción pequeña.

Ejemplo 4

En un hilo elástico de 200 g y 1 m se quieren formar ondas transversales con una rapidez de propagación de 10 m/s. ¿Con cuánto se debe tensar al hilo?

Resolución

Al conocer la ecuación para determinar la rapidez de la onda en una cuerda tensa, planteamos

$$v_{\text{onda}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(I)}$$

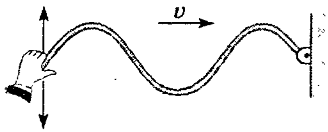
donde $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{(0{,}20)}{1} = 0{,}2 \text{ kg/m}$

En (I) reemplazamos datos

$$10 = \sqrt{\frac{F}{0{,}2}} \Rightarrow F = 20 \text{ N}$$

Ejemplo 5

Una cuerda de 6 m de longitud y de 0,3 kg se mantiene tensa, con un extremo fijo a una pared y el otro extremo libre. Si agitamos el extremo libre generamos una onda transversal de 2 Hz de frecuencia, tal como se muestra ¿Qué valor tiene la tensión en la cuerda?



Resolución

Sabemos que la rapidez de propagación de una onda en una cuerda tensa, depende del módulo de la tensión a la que ésta esté sometida, así

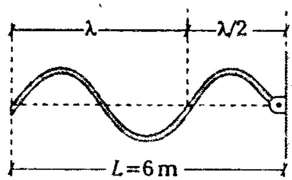
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = \mu v^2 \qquad \text{(I)}$$

Como $\mu = \dfrac{M}{L}$ y $v = \lambda f$, reemplazamos en (I)

$$F = \left(\frac{M}{L}\right)(\lambda . f)^2 = \left(\frac{0{,}3}{6}\right)[\lambda(2)]^2$$

de donde $F = \dfrac{\lambda^2}{5}$ (II)

Se requiere λ, esto lo determinamos a partir del perfil de la onda y dado que $L_{\text{cuerda}} = 6$ m.



de donde $\dfrac{3}{2}\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$

Reemplazando en (II) tenemos

$$F = \frac{4^2}{5}$$

$$\therefore\ F = 3{,}2 \text{ N}$$

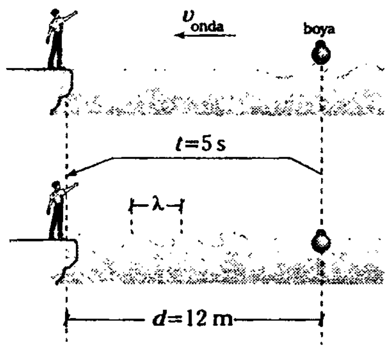
Problemas Resueltos

Problema 1

Una persona situada a la orilla del mar observa una boya anclada a 12 m de distancia, que oscila 5 veces en 10 s, y ve que una ola tarda 5 s en llegar desde la boya hasta la orilla. Determine la rapidez de propagación de la onda y su longitud de onda.

Resolución

En la superficie del mar se establecen ondas transversales. Ahora si consideramos el medio (mar) homogéneo, la rapidez con la que se propaga la onda será constante. Del enunciado sabemos que la perturbación registrada en la posición de la boya llega a la orilla luego de haber recorrido 12 m y tarda 5 s, así como lo muestra el gráfico



Con esta información podemos plantear

$$v_{onda}=\frac{d}{t}=\frac{12}{5}$$

$$\therefore\ v_{onda}=2{,}4\ \text{m/s}$$

Para determinar la longitud de onda planteamos

$$v_{onda}=\lambda f$$

$$\Rightarrow\ \lambda=\frac{v_{onda}}{f}=\frac{2{,}4}{f} \qquad \text{(I)}$$

donde f es la frecuencia de la onda.

La frecuencia de la onda es la frecuencia de las oscilaciones que experimentan las partículas de la superficie marina. La boya en contacto con las moléculas de la superficie oscila con la misma frecuencia con la que oscilan estas últimas. Por lo tanto

$$f_{onda}=f_{boya}$$

donde

$$f_{boya}=\frac{\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{oscilaciones}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\text{tiempo}\\ \text{empleado}\end{pmatrix}}=\frac{5}{10}$$

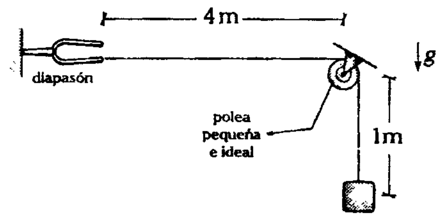
$$\Rightarrow\ f_{onda}=0{,}5\ \text{Hz}$$

Reemplazando en (I)

$$\lambda=\frac{2{,}4}{0{,}5}=4{,}8\ \text{m}$$

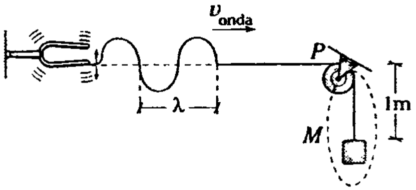
Problema 2

En la figura se muestra a un cordón de goma homogéneo de 1 kg sujetando a un bloque de 19,8 kg . Al golpear las ramas del diapasón, estas vibran con una frecuencia de 40 Hz . ¿Qué longitud de onda (λ) tiene la onda mecánica transversal que se origina? (g = 10 m/s^2).



Resolución

Después de golpear las ramas del diapasón, éste comienza a vibrar y como está unido al cordón, las vibraciones se empiezan a transmitir a través de este último.



La atracción gravitatoria sobre el sistema señalado permite que la parte horizontal del cordón de goma esté tenso.

Ahora para calcular λ de la O.M. transversal originados podemos plantear

$$v_{onda} = \lambda f_{onda} \qquad (I)$$

De la teoría establecida se tiene que

$$f_{onda} = \underset{\substack{\text{generadora}\\ \text{de las ondas}}}{f_{fuente}} = f_{diapason} = 40\ \text{Hz} = 40\ \text{s}^{-1}$$

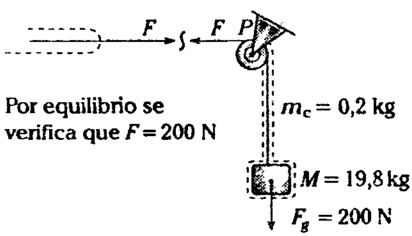
Ahora se requiere v_{onda}, y la podemos calcular a partir de

$$v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad (II)$$

Note del gráfico que la cuerda es de 5 m de longitud y, por dato de enunciado, de 1 kg de masa, entonces

$$\mu = \frac{m_{cuerda}}{L_{cuerda}} = \frac{1}{5} = 0{,}2\ \text{kg/m}$$

Haciendo un corte imaginario en P se tiene



La parte del cordón que está unida al bloque por ser de 1 m de longitud le corresponde 0,2 kg y como el bloque es de 19,8 kg para el sistema bloque-cuerda, la masa es 20 kg.

Reemplazando en (II) tenemos

$$v_{onda} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{200}{0{,}2}} = 10\sqrt{10}\ \text{m/s}$$

Finalmente los valores obtenidos los reemplazamos en (I)

$$10\sqrt{10} = \lambda(40)$$

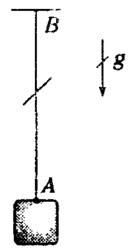
$$\therefore\ \lambda = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}8\ \text{m}$$

Observación

En la resolución del ejemplo anterior se ha despreciado las dimensiones de la polea, lo cual trae como consecuencia que la masa del cordón, que está enrollado en ella, se desprecie y no se añada al sistema.

Problema 3

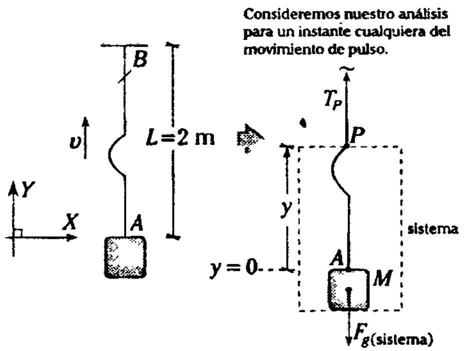
Se muestra una cuerda homogénea de 100 g y 2 m de longitud. Si en su extremo se suspende un bloque de 10 kg, determine el tiempo que tarda un pulso dado en A para llegar a B, ($g = 10$ m/s²).



Resolución

El tiempo que tarde un pulso en recorrer toda la cuerda, dependerá de su rapidez de propagación. Sin embargo la rapidez del pulso en la cuerda depende a su vez del módulo de la tensión y como la cuerda está instalada verticalmente, se demuestra que el módulo de la tensión no es igual en todos los puntos de la cuerda.

Si el módulo de la tensión es variable, también lo será la rapidez del pulso y no podremos considerar M.R.U. para éste, entonces lo que debemos hacer es determinar de qué manera varía la rapidez para establecer las características del movimiento del pulso



Para el instante en que el pulso pasa por P, su rapidez la podemos determinar en función de la tensión en el punto P, así

$$v_P = \sqrt{\frac{T_P}{\mu}} \qquad \text{(I)}$$

Como la cuerda es homogénea, la densidad lineal (μ) es constante y se determina como

$$\mu = \frac{M_{\text{cuerda}}}{L_{\text{cuerda}}} = \frac{0{,}1}{2}$$

$$\therefore \ \mu = 0{,}05 \text{ kg/m}$$

Ahora del equilibrio del sistema en la vertical se deduce que

$$T_P = F_{g(\text{sistema})} = M_{\text{sistema}} \cdot g = \left[\begin{pmatrix}\text{masa}\\ \text{bloque}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{masa de}\\ \text{la cuerda } y\end{pmatrix}\right] g$$

El sistema lo constituye el bloque de masa M y la porción de cuerda que tiene una masa que es proporcional a su longitud y. Según esto tenemos

$$M_{\text{sistema}} = M + \mu y$$

Reemplazando en (I) tenemos

$$v_P = \sqrt{\frac{(M+\mu y)}{\mu} g}$$

$$\Rightarrow \ v_P^2 = \frac{Mg}{\mu} + gy \qquad \text{(II)}$$

Si en esta expresión consideramos $y=0$, tendremos la rapidez inicial del pulso en el instante en que se genera, es decir, cuando se inicie en A.

$$\therefore \ v_A^2 = \frac{Mg}{\mu}$$

Reemplazando en (II) se tendrá

$$v_P^2 = v_A^2 + gy$$

(y es el recorrido del pulso hasta ese instante)

Esta ecuación tiene la misma forma de una de las ecuaciones del M.R.U.V.

$$v_F^2 = v_0^2 + 2ad$$

Por lo tanto se concluye que bajo las condiciones dadas, el pulso desarrolla un M.R.U.V. y por comparación se tiene que

$$g = 2a = 2a_{\text{pulso}}$$

$$\Rightarrow \ a_{\text{pulso}} = \frac{g}{2} = 5 \text{ m/s}^2$$

Una vez demostrado que el pulso se propaga con M.R.U.V.; ¿cómo determinamos el tiempo que tarda en llegar hasta B?

De la figura el recorrido del pulso es

$$d_{AB} = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right) t \qquad (1)$$

donde $d_{AB} = L_{\text{cuerda}} = L$; la rapidez final v_B se determina cuando $y = L$.

Reemplazando

$$v_B = \sqrt{\frac{(M+\mu L)}{\mu} g}$$

Con esto la ecuación (1) será

$$L=\left(\frac{\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}+\sqrt{\frac{Mg}{\mu}+gL}}{2}\right).t \qquad (2)$$

En esta ecuación con el fin de reducirla factorizamos

$$\sqrt{\frac{Mg}{\mu}+gL}=\sqrt{\frac{Mg}{\mu}\left(1+\frac{\mu L}{M}\right)}$$

y a continuación le damos la siguiente forma

$$\sqrt{\left(\frac{Mg}{\mu}\right)}\sqrt{\left(1+\frac{\mu L}{M}\right)}=\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}\left(1+\frac{\mu L}{M}\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}\,(1+b)^{1/2}$$

donde $b=\dfrac{\mu L}{M}$; pero $\mu L=m_{\text{cuerda}}$

$$\Rightarrow \quad b=\frac{m_{\text{cuerda}}}{M}=\frac{0,1}{10}=0,01$$

$b=0,01<<1$

Recordemos de álgebra que si $b<<1$, entonces podemos plantear la aproximación

$$(1+b)^{1/2}\approx 1+\frac{b}{2}$$

Reemplazando en (2)

$$L=\left(\frac{\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}+\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}\left(1+\frac{b}{2}\right)}{2}\right).t$$

$$L=\left(\frac{\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}+\left(2+\frac{b}{2}\right)}{2}\right).t$$

Reemplazando valores

$$2=\left(\frac{\sqrt{\frac{(10)(10)}{(0,05)}}\left(2+\frac{0,01}{2}\right)}{2}\right).t$$

de donde obtenemos

$t\approx 0,0446\,\text{s}$

Nota

Como $m_{\text{cuerda}}<<M$ la variación de la tensión en la cuerda entre los puntos A y B es muy pequeña, razón por la cual en forma práctica se puede considerar que el pulso viaja con rapidez constante

$$v_0=\sqrt{\frac{Mg}{\mu}}\approx 44,72\ \text{m/s}$$

Por lo tanto el tiempo t se determinará como

$$t=\frac{L}{v_0}=\frac{2}{44,72}$$

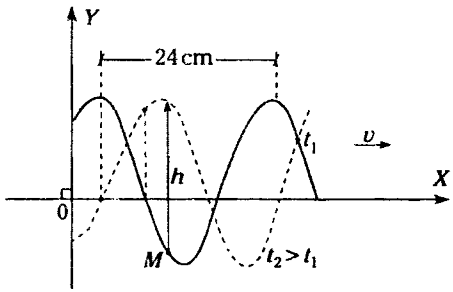
$t=0,0447\,\text{s}$

Note que la diferencia de los resultados es de $10^{-4}\,s$ y se pueden considerar prácticamente iguales; esto ocurre porque la variación en el módulo de la tensión es pequeña.

Como lo estricto es que la tensión aumenta conforme el pulso asciende, entonces también el pulso aumenta su rapidez. Por ello el primer resultado es ligeramente menor que el segundo, ya que el pulso es cada vez más rápido.

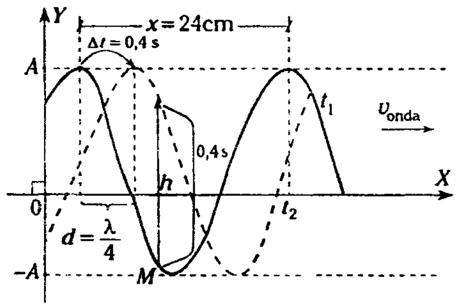
Problema 4

La siguiente gráfica nos muestra los perfiles de una onda transversal armónica en los instantes t_1 y t_2. Si el punto M emplea 0,4 s para recorrer h, ¿con qué rapidez se propaga la onda?



Resolución

En el problema planteado, tenemos las imágenes instantáneas de una onda armónica transversal, en la cual mientras la onda se propaga con M.R.U. en el eje $+X$, las partículas del medio (tal como M) experimentan M.A.S. en el eje Y.



Mientras la partícula M se desplaza verticalmente durante 0,4 s, la cresta de la onda se desplaza horizontalmente una distancia

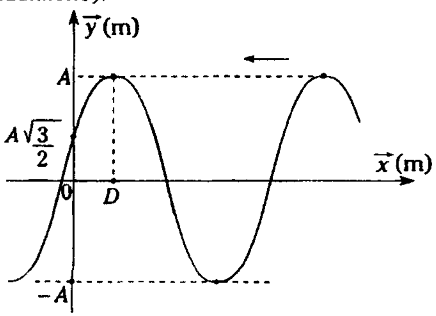
$$d=\frac{\lambda}{4}=6\text{cm}$$

y como la rapidez de la onda es constante.

$$v_{\text{onda}}\frac{d}{\Delta t}=\frac{6\text{ cm}}{0{,}4\text{s}}=15\text{ cm/s}$$

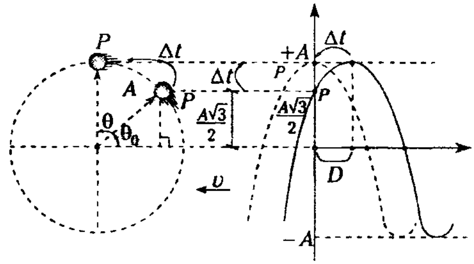
Problema 5

Se muestra el perfil de una onda transversal armónica que se propaga en la dirección ($-x$), fotografiado en el instante $t=0$. ¿En cuánto tiempo la onda logrará recorrer la distancia D? (Considere T el periodo del movimiento ondulatorio).



Resolución

Al graficar el perfil de la onda cuando se ha desplazado una distancia D en un intervalo Δt, el punto P alcanza la posición extrema $(+A)$ en el mismo Δt.



Sabiendo que las partículas describen un M.A.S.; para calcular el Δt que nos piden haremos uso de la reacción entre el M.A.S. y el M.C.U. Así en el M.C.U. podemos plantear

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\theta_0}{\Delta t}$$

Del gráfico (Mov. circunferencial) se deduce que

$$\theta_0=\frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

con la cual se tiene que

$$\theta=\frac{\pi}{6}\text{ rad}$$

$$\Rightarrow\ \frac{2\pi}{T}=\frac{(\pi/6)}{\Delta t}$$

$$\therefore\ \Delta t=\frac{T}{12}$$

Problema 6

Para una onda mecánica transversal en una cuerda, las partículas ubicadas en las posiciones $\vec{x}_1=+1\text{m}$ y $\vec{x}_2=+2\text{m}$ oscilan verticalmente tal que sus ecuaciones de movimiento para $t=0$ son $\vec{y}_1=0{,}4\text{ sen}(8\pi t+\pi)\text{m}$; $\vec{y}_2=0{,}4\text{sen}(8\pi t)\text{m}$ *respectivamente. Determine la longitud de onda* (λ).

Resolución

A partir de las ecuaciones de movimiento para ambas partículas, se puede deducir que ambos realizan M.A.S. con amplitud y fase inicial dada por

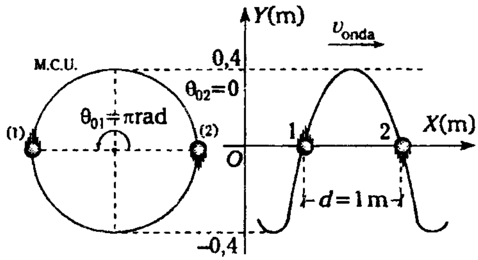
$$A_1 = A_2 = 0{,}4\,\text{m}$$

$$\underset{\text{(punto 1)}}{\theta_{01}\pi\,\text{rad}} \;\; \text{y} \;\; \underset{\text{(punto 2)}}{\theta_{02} = 0}$$

Su frecuencia cíclica es la misma e igual a

$$\omega = 8\pi\ \text{rad/s}$$

Luego de conocer estos elementos, podemos representar parte del perfil de la onda para el instante $t = 0$.



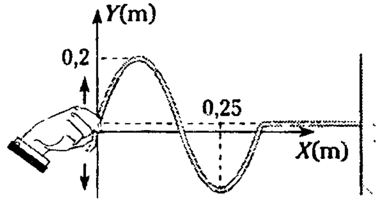
Del M.C.U. notamos que las posiciones de las partículas 1 y 2 están desfasadas π rad, lo que significa que la partícula 1 empezó a oscilar en un tiempo $\frac{T}{2}$ antes que la partícula 2 y durante ese tiempo la onda avanzó 1 m, lo cual corresponde a $\frac{\lambda}{2}$.

Por lo tanto

$$\lambda = 2\,\text{m}$$

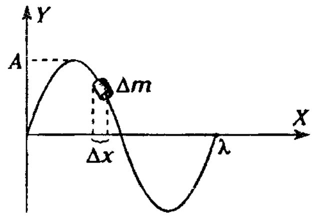
Problema 7

Una cuerda tensada tiene una longitud de onda de 2,4 m y una densidad lineal de masa de 0,05 kg/m. Determine la energía transmitida a la cuerda, así como la potencia, para generar ondas senoidales, tal como se muestra, con una frecuencia de 30 Hz.



Resolución

A medida que las ondas se propagan a través de un medio, transportan energía. Para una onda senoidal que viaja en una cuerda, consideremos un elemento de la cuerda de longitud Δx y masa Δm.



En este caso, cada elemento de la cuerda se mueve verticalmente con M.A.S., con igual frecuencia (f) y la misma amplitud (A).

Sabemos que la energía asociada a una partícula que oscila con M.A.S. es

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$E = \frac{1}{2}m(2\pi f)^2A^2 = 2\pi^2.mf^2.A^2 \qquad \text{(I)}$$

Aplicando la ecuación (I) para la porción pequeñísima de la cuerda señalada, su energía mecánica total es

$$\Delta E = 2\pi^2(\Delta m)f^2.A^2 \qquad \text{(II)}$$

Pero, la densidad lineal de masa de la cuerda es

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\Delta m}{\Delta x};$$

luego $\Delta m = \mu.\Delta x$

Reemplazando en (II)

$$\Delta E = 2\pi^2(\mu\Delta x)f^2.A^2 \qquad \text{(III)}$$

Considerando que toda la cuerda está perturbada ($\Delta x = L$) la energía total transmitida es

$$E = 2\pi^2\mu.L.f^2.A^2$$

Reemplazando valores

$$E = 2\pi^2\times 0,05\times 2,4(30)^2(0,2)^2 = 85,3 \text{ J}$$

Es a una porción pequeñísima de cuerda a la que se le da energía (ΔE) durante (Δt); es decir se le transfiere potencia y luego esta se propaga. La potencia transmitida a la cuerda es

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{2\pi^2.\mu.\overbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}^{v}.f^2.A^2}{}$$

$$P = 2\pi^2.\mu v f^2.A^2$$

$$v = \lambda f = 1\times 30 = 30 \text{ m/s}$$

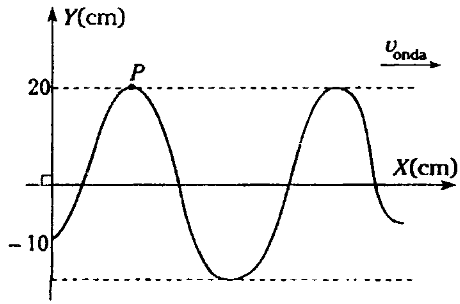
Reemplazando valores

$$P = 2\pi^2\times 0,05\times 30(30)^2(0,2)^2$$

$$P = 1065,9 \text{ W}$$

Problema 8

En la gráfica se muestra el perfil de una O.M. transversal sinusoidal para el instante t=0. Si a partir del instante mostrado la partícula P recorre 60 cm en 3 s, determine la función de onda para el proceso descrito.



Resolución

Como en el enunciado señalan que la O.M. es sinusoidal, la función de onda que la describe es en general de la forma.

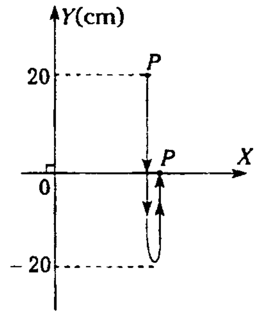
$$\vec{y}(x;t) = A\text{sen}2\pi\left(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta_0}{2\pi}\right)$$

en donde se elige el signo (–) porque la onda viaja hacia la derecha.

Se requiere la amplitud (A); el periodo (T); la longitud de onda (λ) y la fase inicial (θ_0) para poder expresar el proceso ondulatorio.

La gráfica muestra, el perfil de la onda y se puede deducir que la amplitud de oscilación de la partícula P es 20 cm y viene a ser la amplitud de todas las partículas asumiendo que la onda es plana y también amplitud de la onda.

Por dato la partícula P recorre 60 cm en 3 s, entonces necesariamente en dicho instante está pasando por su posición de equilibrio ($\vec{y} = \vec{0}$) dirigiéndose hacia arriba, como lo muestra el gráfico.



Esto muestra que la partícula realiza 3/4 de una oscilación en 3 s y para ello debe emplear 3/4 de su periodo

$$\Rightarrow \frac{3}{4}T_p = 3\text{s} \quad \therefore \quad T_p = 4\text{s}$$

El periodo de oscilación de una partícula viene a ser el periodo de la onda

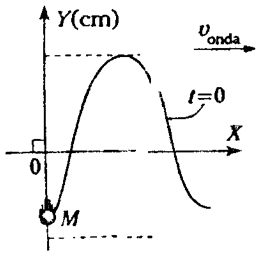
$$\therefore \quad T_{\text{onda}} = T_p = 4\text{s}$$

La longitud de onda (λ) se determina a partir de su rapidez

$$v_{\text{onda}} = \lambda . f = \frac{\lambda}{T}$$

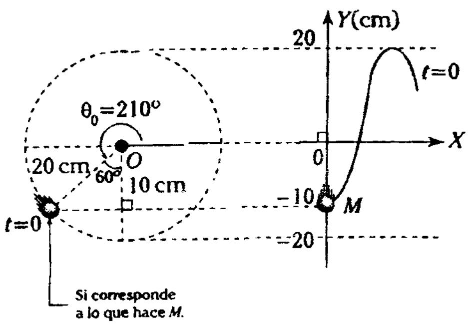
$$5 = \frac{\lambda}{(4)} \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}$$

Por último la fase inicial (θ_0) se determina con la partícula que oscila en torno al origen para el instante inicial ($t = 0$). Para esto se recomienda determinar la fase inicial en forma análoga a como una partícula oscila, unida a un resorte, en un plano vertical.



Como la partícula M es la que oscila en torno del origen (en la vertical) y al mostrar su posición así como y la dirección de su movimiento para el instante inicial ($t=0$) se puede obtener su fase inicial.

A la izquierda del origen, graficamos una circunferencia de radio 20 cm (igual a la amplitud) sobre la cual se debe mover una partícula al seguir un M.C.U. en sentido antihorario.



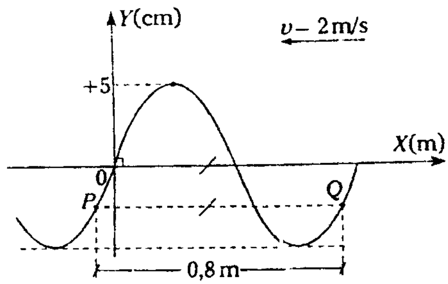
Finalmente todos los datos obtenidos los reemplazamos en la función de onda, así

$$\vec{y}(x;t) = 0{,}2\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{0{,}2} + \frac{7\pi/6}{2\pi}\right) \text{m}$$

$$\therefore \ \vec{y}(x;t) = 0{,}2\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{4} - 5x + \frac{7}{12}\right) \text{m}$$

Problema 9

Se muestra el perfil de una onda transversal armónica para el instante $t = 0{,}1$ s. Determine la función de onda correspondiente.



Resolución

En este caso tenemos el perfil de la onda transversal para $t = 0{,}1$ s. Si queremos determinar la función de onda debemos primero conocer el perfil para $t=0$ y para ello es necesario antes conocer el periodo (T).

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \qquad \text{(I)}$$

Según el perfil mostrado, podemos notar que $v = 2$ m/s y que P así como Q son dos partículas que oscilan en fase. Por lo tanto la separación entre ellos es la longitud de onda (λ).

$$\Rightarrow \lambda = 0{,}8 \text{ m}$$

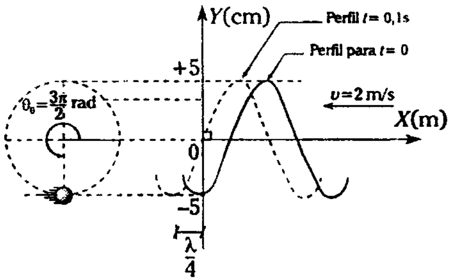
Reemplazando en (I)

$$T = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4 \text{ s}$$

A partir de este resultado podemos concluir que entre $t=0$ y $t=0{,}1$ s ha transcurrido un intervalo de tiempo

$$\Delta t = 0{,}1\,\text{s} = \frac{T}{4}$$

entonces en este intervalo de tiempo la onda se desplazó $\frac{\lambda}{4}$. Si queremos ubicar al perfil en $t=0$, debemos retroceder el perfil dado $\lambda/4$, tal como lo muestra el gráfico.



Como sabemos la función de onda tiene la forma

$$\vec{y}\,(x;t) = A\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} + \frac{\theta_0}{2\pi}\right)$$

Del perfil notamos que A = 5 cm = 0,05 m y también del M.C.U. se deduce que

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$$

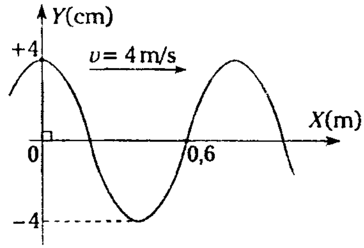
como la onda viaja hacia la izquierda tomamos el signo (+) y como ya se conocen λ y T, reemplazamos

$$\vec{y}\,(x;t) = 0{,}05\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{0{,}4} + \frac{x}{0{,}8} + \frac{3\pi/2}{2\pi}\right)\text{m}$$

$$\vec{y}\,(x;t) = 0{,}05\,\text{sen}\,\pi\left(5t + \frac{5x}{2} + \frac{3}{2}\right)\text{m}$$

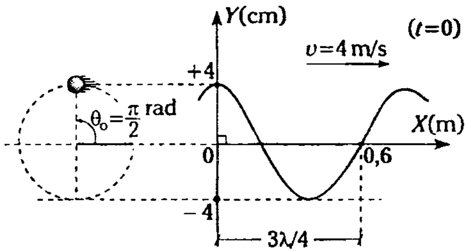
Problema 10

La gráfica muestra el perfil de una onda transversal armónica para el instante t = 0. Determine el desplazamiento de la partícula que oscila en torno a $\vec{x}$ = +0,2m para el instante $t = \frac{1}{30}$ s.



Resolución

Para conocer el desplazamiento de cualquier partícula del medio en un instante determinado, antes debemos conocer la ecuación de su movimiento y evaluar esta ecuación en el instante en que se pide. Ahora para lograr esto primero que nada debemos hallar la función de onda.



La función de onda es de la forma

$$\vec{y}\,(x;t) = A\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} + \frac{\theta_0}{2\pi}\right) \qquad \text{(I)}$$

Del perfil notamos que $A = 4\text{cm} = 0{,}04\text{m}$, además

$$\frac{3\lambda}{4} = 0{,}6\text{ m} \;\Rightarrow\; \lambda = 0{,}8\text{ m}$$

Ahora como conocemos que $v = 4$m/s, podemos hallar el periodo (T) planteando

$$v = \frac{\lambda}{T} \;\Rightarrow\; 4 = \frac{0{,}8}{T}$$

$$\Rightarrow\; T = 0{,}2\text{ s}$$

Y como la onda viaja hacia la derecha, tomamos el signo (–). Asimismo del M.C.U. Se deduce que

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Reemplazando A, T, λ y θ_0 en (I) tenemos

$$\vec{y}(x;t)=0{,}04\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{0{,}2}-\frac{x}{0{,}8}+\frac{\pi/2}{2\pi}\right)\text{m}$$

$$\vec{y}(x;t)=0{,}04\,\text{sen}\,2\pi\left(5t-\frac{5x}{4}+\frac{1}{4}\right)\text{m}$$

Para $x=0{,}2$ m tenemos

$$\vec{y}(0{,}2;t)=0{,}04\,\text{sen}(10\pi t)\,\text{m}$$

Si queremos conocer el desplazamiento (posición) de esta partícula en el instante $t=\frac{1}{30}$s evaluamos y obtenemos

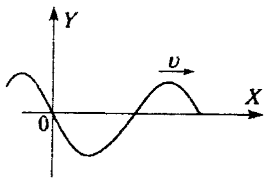
$$\vec{y}\left(t=\frac{1}{30}\,\text{s}\right)=0{,}04\,\text{sen}\left(10\pi\left(\frac{1}{30}\right)\right)\text{m}$$

$$\vec{y}=0{,}04\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{m}=+0{,}02\sqrt{3}\text{ m}$$

Este resultado significa que para el instante $t=\frac{1}{30}$s la partícula ubicada en $\vec{x}=0{,}2$ m está $0{,}02\sqrt{3}$ m por encima del eje X

Problema 11

Una onda mecánica armónica transversal y plana tiene una rapidez de propagación de 50 m/s; la menor distancia entre dos puntos que oscilan en fase es 5 m y el máximo desplazamiento de cualquier punto respecto de la posición de equilibrio es 0,5 m. Determine la rapidez de una partícula del medio ubicada en $x=+\frac{5}{3}$ m en el instante $t=0{,}5$ s.

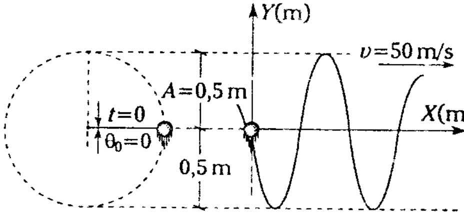


Perfil de la onda para el instante $t=0$

Resolución

Del perfil notamos que la onda se propaga en el eje X y como es transversal, las partículas oscilan en el eje Y, dado que la onda es armónica, las partículas que la conforman desarrollan M.A.S. con amplitud $A=0{,}5$ m.

Para el instante inicial ($t_0=0$) planteamos



La expresión matemática que describe la onda mecánica armónica es

$$\vec{y}=A\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}+\frac{\theta_0}{2\pi}\right)\qquad\text{(I)}$$

Del enunciado tenemos que $A=0{,}5$ m

Además una forma de definir λ es

$$\lambda=\left[\begin{array}{c}\text{menor distancia entre dos}\\ \text{puntos que oscilan en fase}\end{array}\right]=5\text{ m}$$

Y también por dato se tiene que $\upsilon=50$ m/s

Ahora para determinar el periodo (T) planteamos que

$$\upsilon=\frac{\lambda}{T}\ \Rightarrow\ T=\frac{\lambda}{\upsilon}=\frac{5}{50}$$

$$\therefore\ T=0{,}1\,\text{s}$$

Reemplazando en (I)

Asimismo del M.C.U (ver circunferencia) se deduce que $\theta_0=0°$. Ahora reemplazamos A, T, λ y θ_0 en (I)

$$\vec{y}=0{,}5\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{0{,}1}-\frac{x}{5}+\frac{0}{2\pi}\right)\text{m}$$

Operando

$$\vec{y}=0{,}5\,\text{sen}\,2\pi\left(20\pi t-\frac{2\pi}{5}x\right)\text{m}\qquad\text{(II)}$$

Esta es la función de onda y si queremos conocer la ecuación de movimiento para la partícula que oscila en $\vec{x}=\frac{5}{3}$m, debemos evaluar la función de onda para este valor de $\vec{x}$.

$$\vec{y}=\underbrace{0,5}_{A}\,\text{sen}\left(\underbrace{20\pi}_{\omega}-\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{\theta_0}\right)\text{m}\quad\begin{cases}\text{Ecuación del M.A.S.}\\ \text{de la partícula}\\ \text{ubicada en } \vec{x}=\frac{5}{3}\text{ m}\end{cases}$$

Conocida la ecuación de movimiento podemos determinar la ecuación para la velocidad, recordando que el M.A.S. tiene la forma

$$\vec{v}=A\omega\cos(\omega t+\theta_0) \qquad \text{(III)}$$

Al inspeccionar la ecuación del M.A.S. se obtiene

$$\omega=20\pi\text{ rad/s};\ A=0,5\text{ m y }\theta_0=\frac{2\pi}{3}\text{rad}$$

Por lo tanto, reemplazando en (III)

$$\vec{v}=10\pi\cos\left(20\pi t-\frac{2\pi}{3}\right)\hat{j}\text{ m/s}$$

Evaluando en t=0,5 s

$$\vec{v}=10\pi\cos\left(10\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=10\pi\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\vec{v}=-5\pi\,\hat{j}\text{ m/s}$$

Significa que la partícula ubicada en $\vec{x}=+\frac{5}{3}$m para t=0,5 s se mueve hacia abajo.

Problema 12

Una cuerda homogénea de densidad lineal $\mu=1$ g/cm, tiene uno de sus extremos fijo a una pared y el otro se sujeta ejerciendo una fuerza de módulo 40 N, de tal forma que la cuerda está en posición horizontal. Al perturbar el extremo libre al inicio (t = 0) se genera un pulso cuya función es

$$\vec{y}(x)=\begin{cases}1{,}2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)\text{cm};\ 0\le x\le 3\text{cm}\\ 0 \qquad ;\text{en los demás puntos}\end{cases}$$

Para t=40 ms, determine el desplazamiento vertical del punto situado en $\vec{x}=0{,}82$ m .

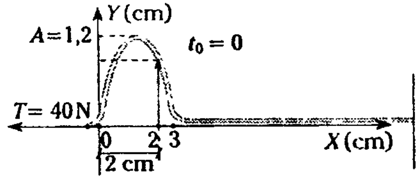
Resolución

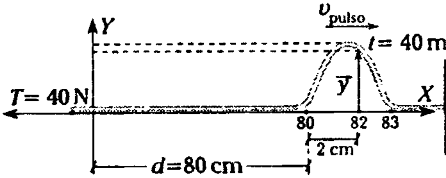
Una vez que el extremo sostenido se perturba, esta perturbación se propaga hacia la pared. Si consideramos que la cuerda es un medio elástico, entonces la forma del pulso no cambiará mientras se propaga ya que nada de la energía que porta el pulso se disipará en la cuerda.

Utilizando la regla de correspondencia

$$\vec{y}=\begin{cases}1{,}2\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)\text{cm};\ 0\le x\le 3\text{cm}\\ 0 \qquad ;\text{en los demás puntos}\end{cases}$$

podemos representar la forma del pulso en el instante inicial (t = 0) y en t = 40 ms





Luego de t = 40 ms el pulso se habrá desplazado una distancia d en la dirección $+\vec{x}$. Dicha distancia puede determinarse así

$$d=v_{\text{pulso}}\cdot t$$

$$d=v_{\text{pulso}}(40\cdot 10^{-3}) \qquad \text{(I)}$$

Pero, la rapidez del pulso es

$$v_{\text{pulso}}=\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \text{(II)}$$

donde T = 40 N

$$\mu=1\frac{\text{g}}{\text{cm}}=0{,}1\frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Reemplazando en (II)

$$v_{\text{pulso}}=\sqrt{\frac{40}{0{,}1}}=20\text{ m/s}$$

En (I)

$$d=0{,}8\text{ m}=80\text{ cm}$$

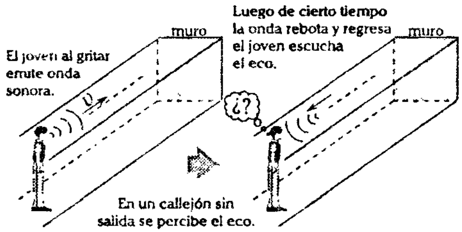
Note que el desplazamiento vertical del punto $\vec{x}$=+2 cm en t=0 es igual al desplazamiento vertical del punto $\vec{x}$ = +82 cm evaluado en t=40 ms, por lo tanto se obtiene

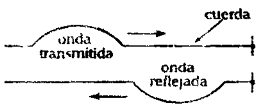
$$\vec{y}=\vec{y}_0=1{,}2\,\text{sen}\left(\frac{\pi\cdot 2}{3}\right)$$

de donde $\vec{y}_{(t=40\text{ ms})}=1{,}04$ cm

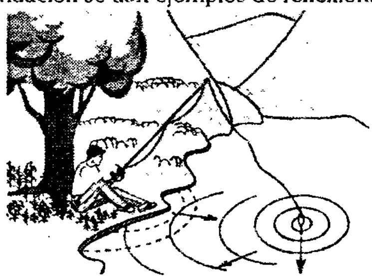
REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS

En nuestra actividad cotidiana experimentamos fenómenos acústicos como el eco que puede ocurrir cuando gritamos en una zona montañosa, el escuchar un llamado, al estar sumergidos en agua, de una piscina, la forma en que se orientan los murciélagos en la oscuridad, el funcionamiento de un sonar, la ecografía, y otros fenómenos tienen que ver con la reflexión y refracción de las ondas mecánicas.

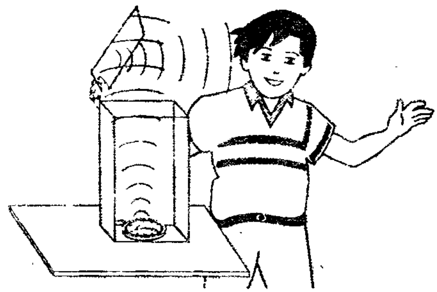




En el caso de una cuerda fija en uno de sus extremos, el pulso mostrado al incidir sobre la pared (rígida) regresa en forma invertida, esto implica que se produce una reflexión. A continuación se dan ejemplos de reflexión.



Reflexión de ondas en el agua. Note que al ingresar el anzuelo se generan ondas mecánicas superficiales que luego de propagarse hacia la orilla chocan con esta y se reflejan.



Reflexión de ondas sonoras. Note que el sonido que se propaga en el recipiente (cuando timbra el reloj) al chocar con la tapa, se refleja (cambia de dirección) y llega al oido de la persona.

Reflexión

La **reflexión** es un fenómeno ondulatorio que se manifiesta cuando una onda mecánica que se está propagando en un medio llega a una superficie que lo separa de otro medio y es devuelta al medio donde se estaba propagando, es decir cambia la dirección de su propagación para seguir propagándose en el mismo medio, tal como los mostramos a continuación

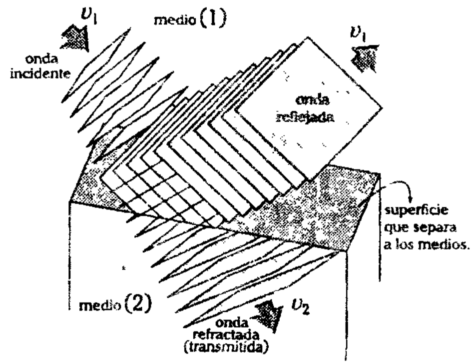


Fig. (a) reflexión y transmisión de ondas planas.

En la figura (a) se aprecia que la onda incidente se divide en una onda reflejada, la que es devuelta al medio (1), y una onda refractada, la que se transmite al medio (2). Con esto podemos concluir que a la vez que se da el fenómeno de reflexión, también ocurre el fenómeno de refracción.

Refracción

La **refracción** es un fenómeno ondulatorio, que consiste en la transmisión de una onda de un medio a otro experimentando, por lo general, cambio en su dirección de propagación.

Ahora para poder describir de una manera más simple la reflexión y refracción de las ondas, tanto en el aspecto gráfico como el matemático, usamos las representaciones mediante rayos o frentes de ondas tal como lo mostramos a continuación.

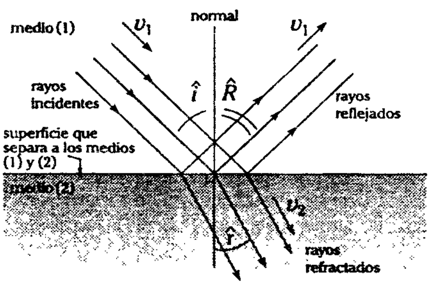


Fig. (b)

De la representación por rayos, figura (b), tenemos que

- El ángulo formado por los rayos incidentes y la normal a la superficie incidente se denomina ángulo de incidencia $\hat{i}$.
- El ángulo formado por los rayos reflejados y la normal a la superficie de incidencia se denomina ángulo de reflexión $\hat{R}$.
- El ángulo formado por los rayos refractados (transmitidos) y la normal al lugar de incidencia se denomina ángulo de refracción $\hat{r}$.

Pero, considerando los frentes de onda plana

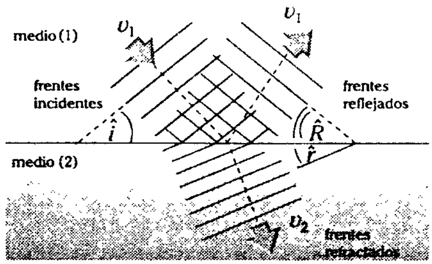


Fig. (c)

En la figura (c) los ángulos $\hat{i}, \hat{R}$ y $\hat{r}$ son formados por los frentes y la superficie que separa a los dos medios.

LEYES DE LA REFLEXIÓN

1. El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal son coplanares. Los tres están contenidos en un mismo plano
2. La medida del ángulo de incidencia y de reflexión son iguales

$$\boxed{\hat{i} = \hat{R}}$$

LEYES DE LA REFRACCIÓN

1. El rayo incidente, el rayo refractado y la normal son coplanares.
2. El seno del ángulo de incidencia es al seno del ángulo de refracción como la rapidez de la onda incidente es a la rapidez de la onda refractora.

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}}$$

donde

v_1 : rapidez de la onda incidente.

v_2 : rapidez de la onda refractada.

Nota

La segunda ley de la refracción es llamada ley de Snell para las ondas mecánicas.

¿Cómo se demuestran dichas leyes? Estas leyes se pueden demostrar en forma experimental y en forma matemática. Para ello nos apoyamos en los frentes de onda de las ondas incidente, reflejada y refractada que a continuación esbozamos:

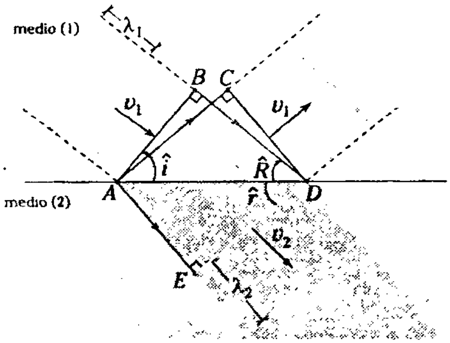


Fig. (d)

En la figura (d), AB representa el frente de onda incidente, en el preciso instante en que su extremo A llega a la frontera que separa los medios 1 y 2. Luego de un intervalo de tiempo Δt, el extremo B del frente de onda se trasladó hasta D, mientras que A se refleja hasta C y se transmite hasta E. De esta manera se forman los frentes de onda reflejada CD y el frente de onda refractada DE. Según lo establecido podemos señalar que

$$BD = v_1\Delta t\ ;\ AC = v_1\Delta t \ \text{ y } \ AE = v_2\Delta t$$

Al tomar las razones trigonométricas seno de los ángulos de incidencia $(\hat{i})$ y reflexión $(\hat{R})$ se obtiene

$$\operatorname{sen}\hat{i} = \frac{BD}{AD} = \frac{v_1\Delta t}{AD} \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\hat{R} = \frac{AC}{AD} = \frac{v_1\Delta t}{AD}$$

Comparando se tiene que $\operatorname{sen}\hat{i} = \operatorname{sen}\hat{R}$ además como $\hat{i}$ y $\hat{R}$ son ángulos agudos se establece

$$\boxed{\hat{i} = \hat{R}} \text{ lqqd}$$

Ahora tomamos senos a los ángulos de incidencia $\hat{i}$ y refracción $\hat{r}$, así

$$\operatorname{sen}\hat{i} = \frac{BD}{AD} = \frac{v_1\Delta t}{AD} \quad \text{y}$$

$$\operatorname{sen}\hat{r} = \frac{AE}{AD} = \frac{v_2\Delta t}{AD}$$

Al dividir dichas relaciones miembro a miembro tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}} = \frac{\dfrac{v_1\cancel{\Delta t}}{\cancel{AD}}}{\dfrac{v_2\cancel{\Delta t}}{\cancel{AD}}} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2}} \text{ lqqd}$$

(Ley de Snell)

Esta ley es muy usual al examinar fenómenos donde la onda experimenta refracción (toda onda refractada debe cumplir con esta ley).

ASPECTOS A TENER EN CUENTA EN LA REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS

1. La rapidez de la onda incidente y de la onda reflejada son iguales, ya que las ondas se propagan en el mismo medio.
2. La rapidez de la onda incidente y de la onda refractada son diferentes, por que las ondas se propagan en medios diferentes.
3. La frecuencia de la onda incidente, la reflejada y la refractada son iguales ya que las partículas del medio (1) al vibrar en el límite de separación de los dos medios transfieren la vibración a las partículas del medio (2) y le ocasionan la misma frecuencia de oscilación. Por tanto planteamos que

$$\boxed{f_{\substack{\text{onda}\\ \text{incidente}}} = f_{\substack{\text{onda}\\ \text{reflejada}}} = f_{\substack{\text{onda}\\ \text{refractada}}}}$$

4. Sabemos que $f_{onda}=\frac{v_{onda}}{\lambda}$ y según lo planteado en el punto anterior tenemos

$$f_{\substack{onda\\incidente}}=f_{\substack{onda\\reflejada}}=f_{\substack{onda\\refractada}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{v_{\substack{onda\\incidente}}}{\lambda_{\substack{onda\\incidente}}}=\frac{v_{\substack{onda\\reflejada}}}{\lambda_{\substack{onda\\reflejada}}}=\frac{v_{\substack{onda\\refractada}}}{\lambda_{\substack{onda\\reflactada}}}$$

Como

$$v_{\substack{onda\\incidente}}=v_{\substack{onda\\reflejada}}$$

$$\therefore\ \boxed{\lambda_{\substack{onda\\incidente}}=\lambda_{\substack{onda\\reflejada}}}$$

Pero

$$v_{\substack{onda\\incidente}}\neq v_{\substack{onda\\refractada}}$$

$$\therefore\ \boxed{\lambda_{\substack{onda\\incidente}}\neq\lambda_{\substack{onda\\refractada}}}$$

5. Como la frecuencia se mantiene constante en la refracción, podemos plantear que si la onda transmitida es más rápida que la onda incidente, entonces la longitud de onda aumenta y si la onda transmitida es de menor rapidez que la onda incidente la longitud de onda disminuye, esto lo podemos deducir a partir de

$$v_{\substack{onda\\incidente}}<v_{\substack{onda\\refractada}}$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{incidente}\cancel{f_{incidente}}<\lambda_{refractada}\cancel{f_{refractada}}$$

$$\therefore\ \lambda_{incidente}<\lambda_{refractada}$$

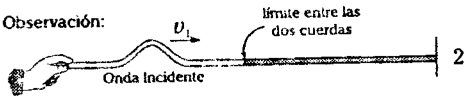
Pero si

$$v_{\substack{onda\\incidente}}>v_{\substack{onda\\refractada}}$$

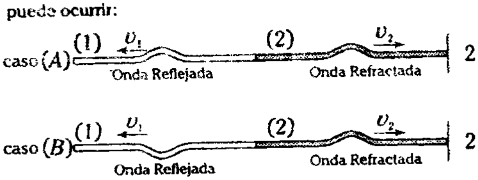
$$\Rightarrow\ \lambda_{incidente}\cancel{f_{incidente}}>\lambda_{refractada}\cancel{f_{refractada}}$$

$$\therefore\ \lambda_{incidente}>\lambda_{refractada}$$

Observación:

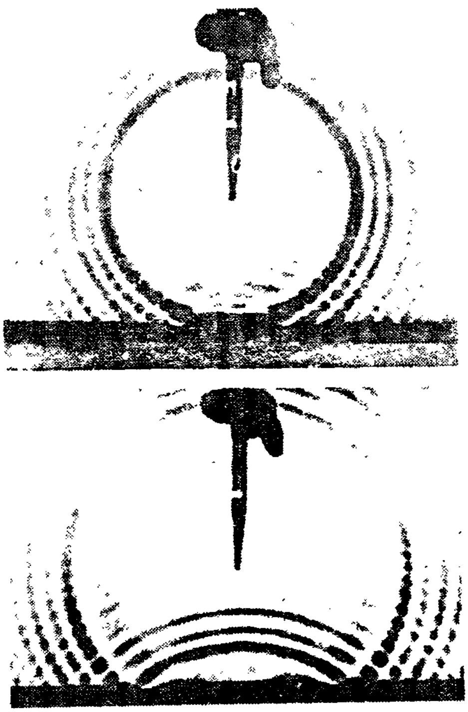


puede ocurrir:



La figura adjunta muestra la reflexión y refracción de una O.M. transversal en el límite de separación de dos cuerdas de diferente densidad. En (A), la cuerda (1) es más densa que la cuerda (2), mientras que en (B) la cuerda (1) es menos densa que la cuerda (2). Note que en el caso (A) el pulso reflejado no se invierte y en el caso (B) se refleja invertido.

Esto lo podemos comprender en analogía a lo que ocurre en un choque cuando un cuerpo choca contra otro en reposo. La dirección en que se mueve el primero luego del choque depende de la relación de masa entre los cuerpos que interactúan.



La fotografía muestra la reflexión de ondas circulares

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS ONDAS

INDEPENDENCIA DE LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS Y LA SUPERPOSICIÓN DE ELLAS

Observaciones experimentales hechas cautelosamente con fotografías ultrarrápidas, muestran que *si un pulso se propaga de izquierda a derecha al mismo tiempo que otro se propaga de derecha a izquierda, entonces cuando dichos pulsos se cruzan, llega un instante en que se ve un único pulso cuya amplitud se obtiene sumando algebraicamente aquella relativa a los pulsos antes de cruzarse.*

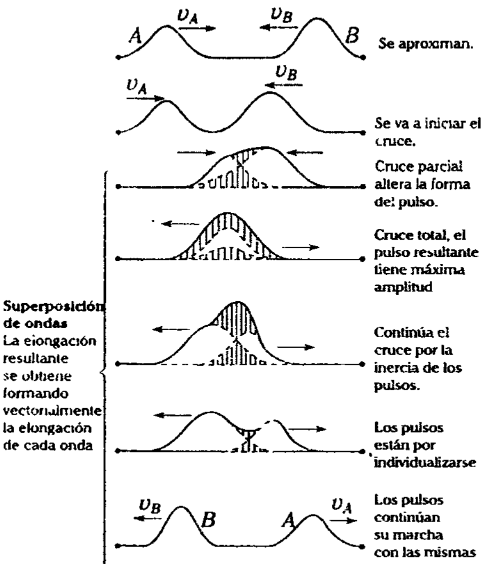
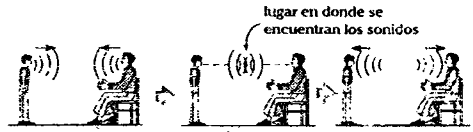


Fig. (1)

Otro ejemplo donde se aprecia la independencia de propagación de las ondas, se comprueba al perturbar dos puntos de la superficie libre del agua. Esto origina dos ondas que a medida que se propagan logran encontrarse para luego continuar su avance como si en ningún momento se hubiesen encontrado.

Algo similar ocurre con el sonido que emiten dos personas al estar hablando. Los sonidos emitidos al encontrarse en cierta región del espacio no interactúan como si fueran dos objetos.

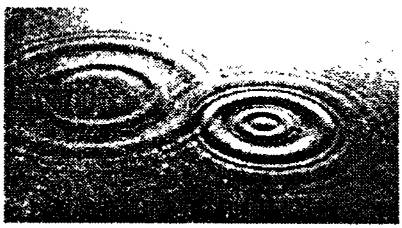
Esto se comprueba cuando los sonidos se siguen propagando después y logran ser percibidos por las personas que conversan.



En la figura anterior Fig (1), se muestra que dos ondas pueden **compartir** simultáneamente una misma región del espacio. Esto significaría que las ondas se superponen. Esto, por ejemplo, no lo pueden hacer por dos esferas que se encuentran en cierta región.

Esta propiedad de las ondas que podemos apreciar y comprobar nos permite diferenciar un fenómeno ondulatorio de otro corpuscular. En efecto, si lanzamos dos bolas, una contra la otra y chocan, la dirección de sus movimientos sí cambia, pues se trata de cuerpos o partículas.

Toda onda se caracteriza por conservar sus características. No obstante al haberse superpuesto continúa propagándose y esto se justifica con el principio de conservación de energía que transporta y conserva cada onda luego de la superposición.



La fotografía muestra la superposición de dos ondas circulares en la superficie libre del agua, las ondas no interactúan y después de superponerse se alejan sin modificar su forma

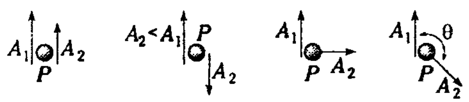
Principio de superposición

Es la regla que nos permite hallar la elongación resultante de las partículas oscilantes en la región donde se superponen las ondas. El principio de superposición de ondas hace mención que cada onda que se propague en un medio lo hace muy independientemente de la existencia de las demás ondas, excepto las ondas de choque.

Cuando en un medio elástico (sólido, líquido o gas) se propagan simultáneamente dos o más ondas, la experiencia demuestra que una partícula del medio puede participar a la vez de varios movimientos oscilatorios. ¿Cómo determinar la elongación de una partícula de un medio en cierto instante cuando es alcanzada por dos o más ondas en forma simultánea? Se usa el principio de superposición, es decir se superponen (sumamos) los desplazamientos, amplitudes o elongaciones que experimenta la partícula cuando es alcanzada por cada onda en forma individual y la operación de superposición se hace en forma vectorial.

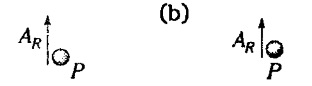
Ahora en forma práctica pasemos a ver algunos casos comunes de superposición de amplitudes. La partícula del medio elástico que es alcanzada simultáneamente por dos ondas que tienen amplitudes que son indicadas en cada uno de los siguientes casos:

(a) (b) (c) (d)



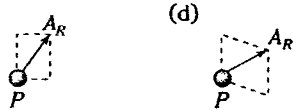
En los casos indicados arriba, la partícula P del medio presentará una amplitud de oscilación resultante que se obtiene al sumar vectorialmente las amplitudes. En función a ello la amplitud resultante de P para el instante mostrado quedaría definida en cada caso de la siguiente manera.

(a) (b)



$A_R = A_1 + A_2$ $\quad$ $A_R = A_1 - A_2$

(c) (d)



$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ $\quad$ $A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$

En cada caso A_R viene a ser el desplazamiento resultante o amplitud resultante del pulso obtenido durante la superposición.

Ahora según el criterio expuesto, esbocemos la superposición de dos ondas transversales que se pueden generar en la superficie libre del agua.

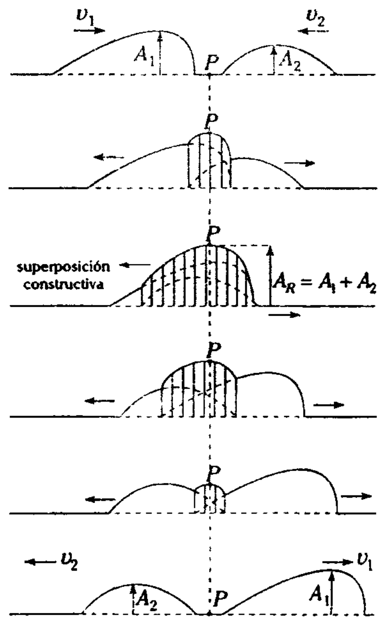


Fig. (1)

En la figura (1) se muestra como dos pulsos que viajan en direcciones contrarias alcanzan simultáneamente el punto P de la superficie libre del agua. En este caso los dos pulsos generan desplazamientos en la misma dirección, con ello el desplazamiento de P será mayor que A_1 y A_2.

Como se está dando un reforzamiento de las amplitudes, decimos que la superposición es constructiva. Un hecho muy interesante es que después los pulsos continúan propagándose y conservando su forma.

Ahora, esbocemos los siguientes pulsos

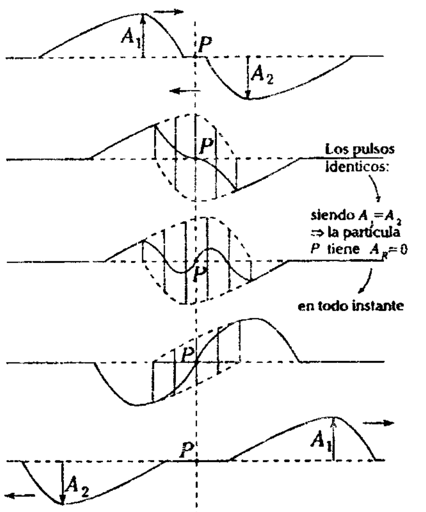
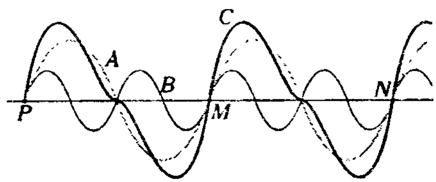


Fig. (2)

En la figura (2) se muestra a los pulsos invertidos que viajan en direcciones contrarias sobre la superficie libre del agua; en este caso a la partícula P, al ser alcanzada simultáneamente por los pulsos, éstos le generan desplazamientos opuestos y al superponer dichos desplazamientos, el desplazamiento de P para este caso puede ser menor que A_1 y A_2. En el gráfico dado se está considerando que los pulsos tienen el mismo aspecto, pero invertidos y con igual amplitud. Esto trae como consecuencia que el desplazamiento de P será nulo en todo instante, es decir mientras estén sobre dicha partícula los dos pulsos, ella no oscila en ningún instante. Para el caso en que la partícula P tenga una amplitud nula o menor que la amplitud del pulso mayor se dice que la superposición es destructiva.

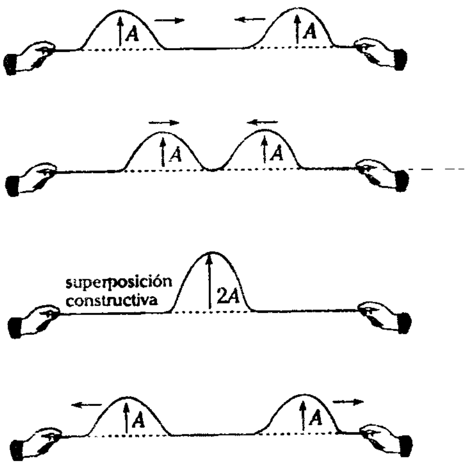
¡Lo anterior puede verificarse con el caso siguiente!

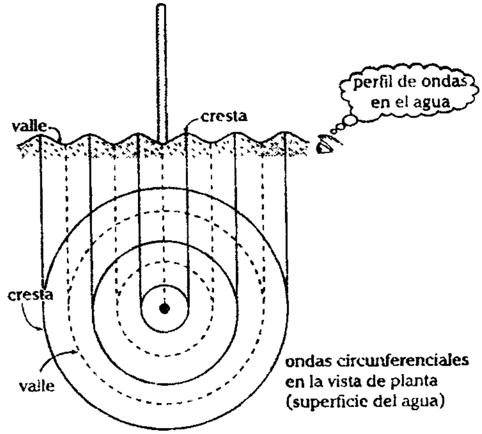
Ahora para reforzar lo planteado respecto de superponer desplazamientos, el lector tiene como tarea verificar que al superponer las dos ondas A y B se obtiene como resultado la onda C.



INTERFERENCIA DE ONDAS

Ya se ha indicado, líneas arriba, que a menudo en una región se propagan simultáneamente varias ondas; por ejemplo, al escuchar la música de una orquesta, nuestro oído percibe al mismo tiempo el sonido de la guitarra, del piano, del tambor, del cantante, del violín y somos capaces de diferenciarlos, porque las ondas sonoras pueden propagarse simultáneamente en el aire sin estorbarse en lo más mínimo una respecto de las otras, esa es su propiedad fundamental que caracteriza a cada onda. Ahora veamos qué sucede cuando hacemos vibrar los extremos de una cuerda y se generan pulsos de igual amplitud.





En la región de superposición, las partículas del medio incrementan la amplitud de sus oscilaciones hasta $2A$, estableciéndose así una composición de dos pulsos de igual amplitud y determinándose el que tiene poca duración, es decir no es estable **la superposición constructiva**, este hecho no puede ser llamado interferencia de ondas. Para que podamos decir que dos ondas interfieren o presentan el fenómeno de interferencia, la superposición debe ser estable en el tiempo, ahora ya podemos definir el fenómeno de **interferencia.**

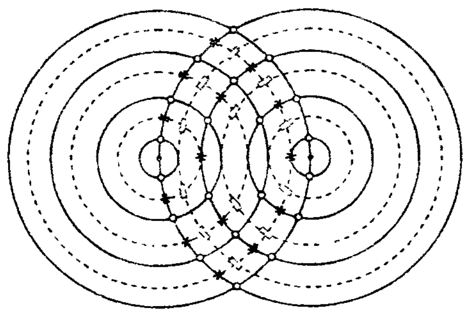
La interferencia es la superposición de dos o más ondas, de modo que la amplitud de las oscilaciones resultantes de las distintas partículas del medio experimentan una distribución constante con el tiempo.

¿Cómo podemos originar la interferencia de dos ondas? Existe diversos procedimientos, a continuación revisemos uno de ellos.

Perturbemos la superficie del agua con una varilla de madera.

Las líneas continuas corresponden a las crestas de las ondas, mientras que las líneas punteadas corresponden a los valles.

Teniendo en cuenta este detalle, si en dos puntos diferentes del agua con unas varillas generamos simultáneamente ondas, estas se propagan por toda la superficie líquida y al poco tiempo de iniciada las perturbaciones veremos en la superficie del liquido que las ondas se superponen como se muestra en la figura



Siendo permanente y con la misma frecuencia la perturbación con las dos varillas. las observaciones experimentales de situaciones como estas hacen notable lo siguiente:

1. Donde se intersectan dos crestas, el resultado es una cresta con mayor amplitud y lo hemos simbolizado con o.
2. Donde se intersectan una cresta y un valle el resultado es una amplitud nula (ambos se eliminan) y lo hemos simbolizado por * (se le llama nodo).
3. Donde se intersectan dos valles el resultado es un valle más profundo y lo hemos simbolizando por ▭.

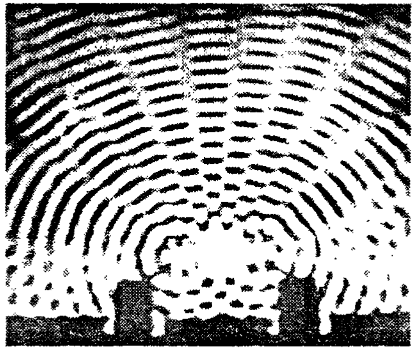
Al fenómeno donde las ondas se superponen permanentemente dando como resultado perturbaciones más intensas o más débiles se le denomina interferencia.

Según nuestro esquema anterior, lo planteado en (1) y (3) son casos **de interferencia constructiva** y el caso (2) es **interferencia destructiva**.

Los nodos representan posiciones fijas para las partículas del medio, razón por la cual da la impresión de que las perturbaciones no se propagan (desplazan) y por ello la denominación de **onda estacionaria**.

En la superficie libre del agua se pueden generar ondas estacionarias, para ello se debe contar con dos láminas que vibren con igual frecuencia y que deben estar en contacto con el agua, sobre la superficie del agua se notan ciertas líneas donde no se aprecia perturbación alguna, son las llamadas líneas nodales, pero en dos líneas nodales contiguas se tiene una región central, que corresponde a una interferencia que no es de atenuación total. Esto se aprecia con claridad en la fotografía adjunta, Fig. 3. Dicha foto se ha tomado cuando la superficie del agua estaba siendo iluminada con un foco.

Fig. (3)



Patrón de interferencia de ondas circulares en la superficie del agua.

Para poder justificar gráficamente la formación de las líneas nodales y las líneas ventrales podemos proceder como se muestra en la figura 4. En donde alrededor de cada foco (lámina vibrante) se traza un sistema de circunferencias concéntricas, las circunferencias de líneas continuas son de radios igual a

$$\frac{\lambda}{2}; \frac{3\lambda}{2}; \frac{5\lambda}{2}; \ldots$$

y las líneas discontinuas son de radios igual a

$$\lambda; 2\lambda; 3\lambda; \ldots$$

Las circunferencias discontinuas contienen partículas de la superficie del agua que oscilan en fase con las láminas vibrantes, mientras que las circunferencias continuas contienen partículas que lo hacen en oposición (desfasados 180°) a las láminas vibrantes. Con esto podemos concluir que ahí donde se intersecan 2 circunferencias continuas o 2 discontinuas hay reforzamiento y se forman vientres, mientras que donde se intersequen circunferencias diferentes, una continua y otra discontinua, hay atenuación y se forman nodos, porque a ellos llegan ondulaciones en oposición de fase.

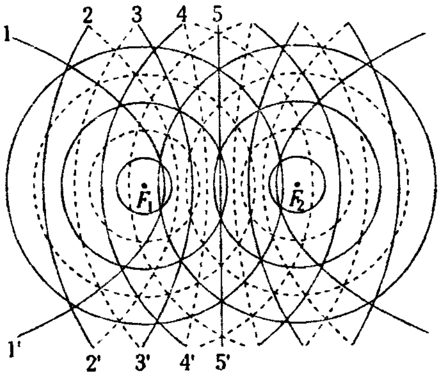
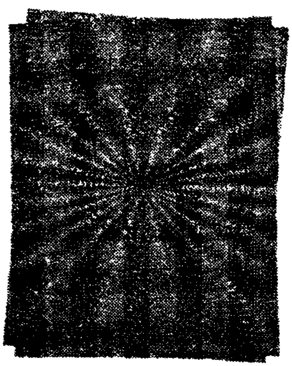


Fig.(4)

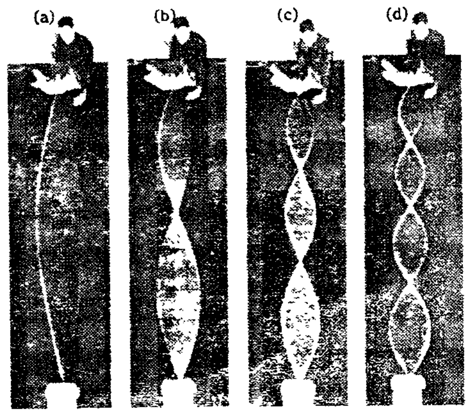
En esta figura las líneas continuas 11'; 33'; 55', etc. representan los vientres. Las líneas discontinuas representan los nodos.

Una simulación del experimento de las láminas vibrantes sobre el agua. Es el patrón de interferencia de Moire (ver foto) aquí se toman dos hojas transparentes sobre las cuales se grafican círculos concéntricos y luego las hojas se colocan una sobre otra, pero con los centros de los círculos separados. Inténtelo y observará algo similar a la fotografía.



Patrón de Moire.

Otra forma de obtener unas estacionarias, es fijando el extremo de un cordón de goma a un muro, una vez tenso el cordón, por su extremo libre lo empezamos a agitar rítmicamente de manera que se origina una onda progresiva hacia el muro, luego esta se refleja invertida y mientras se esté agitando el extremo del cordón en él se tendrá una onda que se dirigiría al muro y otra invertida que vendría de él. La superposición estable de estas dos ondas representa una interferencia de dos ondas de igual amplitud y de igual frecuencia que da como resultado una onda estacionaria.

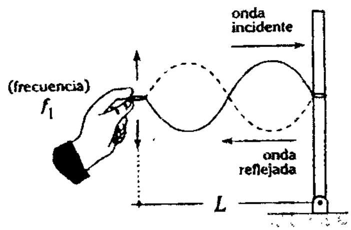


En estas fotografías se observa cómo un estudiante de física nos da una demostración de como obtener ondas estacionarias con un cordón de goma. En la foto (a) agita el extremo con cierta frecuencia, pero al duplicar, triplicar y cuatriplicar la frecuencia de agitacion se forma lo que se ve en las fotos (b) (c) y (d) respectivamente. Aqui debemos tener en cuenta que dicho patron de interferencia se obtiene para ciertas frecuencias, características, es decir con cualquier frecuencia no se forma el patrón que hay en cada foto

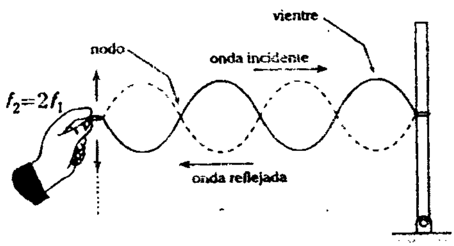
Ahora le dejamos al lector la oportunidad de formar dichos patrones por ejemplo con una manguera o una soga sobre el piso.

DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA CUERDA

Atamos un cordón de goma a un poste y lo agitamos rítmicamente por su extremo libre. Para una frecuencia de oscilación el cordón adquiere la forma que se indica.



Mas si hacemos oscilar el extremo libre del cordón con una frecuencia doble a la anterior, se obtiene el siguiente perfil:



A estas ondas representadas en las figuras se les denomina **ondas estacionarias**.

A diferencia de la onda viajera o móvil, cuyos puntos realizan oscilaciones de igual amplitud pero con retardo de fase todos los puntos de la onda estacionaria oscilan al mismo tiempo pero con amplitudes diferentes.

Según la primera figura, observando los perfiles de la onda incidente y de la onda reflejada, sus ángulos de fase inicial son

$$\theta_{0(\text{onda incidente})} = 0 \quad \text{y}$$

$$\theta_{0(\text{onda reflejada})} = 2\pi \text{ rad}$$

Entonces, la ecuación de la onda incidente será

$$\vec{y}_1 = A\text{sen}(kx - \omega t)$$

y para la onda reflejada hacia la izquierda es

$$\vec{y}_2 = A\text{sen}(kx + \omega t + 2\pi) = +A\text{sen}(\omega t + kx)$$

Cuando una partícula P del cordón es alcanzada simultáneamente por la onda incidente y la onda reflejada, su desplazamiento según el principio de superposición es

$$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$$

$$\Rightarrow \vec{y} = A\text{sen}(kx - \omega t) + A\text{sen}(\omega t + kx) \quad \text{(I)}$$

De la Trigonometría se sabe que

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\beta$$

al aplicarlo en (I)

$$\vec{y} = A\{(\text{sen}(kx).\cos(\omega t) - \cos(kx)\text{sen}(\omega t)) +$$
$$+[(\text{sen}(kx)\cos(\omega t) + \cos(kx)\text{sen}(\omega t))]\}$$

Simplificando

$$\vec{y} = A[2\text{sen}(kx)\cos(\omega t)]$$

$$\Rightarrow \vec{y} = 2A\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$$

Siendo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ y } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Reemplazando

$$\boxed{\vec{y} = 2A\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

Función de onda de una onda estacionaria en una cuerda

Interpretación física de la ecuación obtenida

Fíjese que el resultado obtenido es muy interesante, porque la superposición de las dos ondas viajeras o móviles da como resultado un movimiento ondulatorio; el resultado nos expresa la existencia de oscilaciones de las partículas del medio con amplitud

$$A_R = 2A\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Esta amplitud a su vez como depende de x es distinta para las diferentes partículas del cordón de goma.

Este estado oscilatorio singular del cordón de goma producido por dos ondas viajeras de igual amplitud y frecuencia, que se propagan en sentidos opuestos, se denomina **ondas estacionarias**.

Es importante resaltar que la onda estacionaria no es una onda, pues una onda viajera transporta energía en la onda estacionaria, no se transmite energía de un punto a otro. Una onda viajera puede propagarse hacia la derecha o hacia la izquierda, a diferencia de la onda estacionaria que carece de sentido de propagación. La denominación de onda estacionaria nos servirá para caracterizar el estado de vibración u oscilación del medio.

¿En qué consiste la peculiaridad de este estado oscilatorio del medio? En primer lugar observando la figura y la misma ecuación obtenida, vemos que no todos los puntos del medio oscilan, es decir están en reposo

Efectivamente si

$$A_R = 2A\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Considerando $A_R = 0$

$$\Rightarrow \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$$

Esto se cumple si

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x = 0\,;\pi\,;2\pi\,;...$$

de donde se deduce que

$$x = 0\,;\frac{\lambda}{2}\,;\lambda\,;\frac{3\lambda}{2}\,;n\frac{\lambda}{2}$$

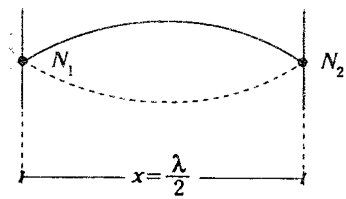
Generalizando

$$\boxed{x = 2n\frac{\lambda}{4}}$$

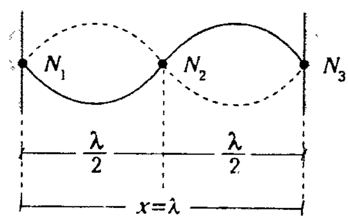
siendo $n = 1; 2; 3; 4; ...$

x : es la posición de la partícula con amplitud nula; es decir, de la partícula que no oscila. A estas partículas que carecen de oscilación se les denomina nodo.

Interpretando esta última ecuación, la distancia entre dos nodos consecutivos es $x = \frac{\lambda}{2}$



Si tenemos 3 nodos $x = \lambda$.



Ahora, si quisiéramos ubicar los vientres efectuamos

$$A_R = 2A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Considerando $A_R = \pm 2A$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \pm 1$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}$$

de donde deducimos

$$x = \frac{\lambda}{4};\frac{3}{4}\lambda;\frac{5}{4}\lambda;\ldots;(2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

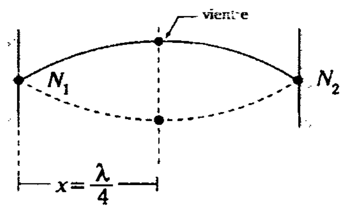
En general

$$x = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

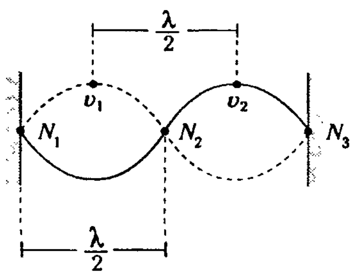
donde $n = 1; 2; 3; 4; \ldots$

Por lo tanto, podemos concluir que la distancia x entre un nodo y un vientre vecino es igual a un cuarto de longitud de onda $(\lambda/4)$.

En la práctica consideramos



También, ya en forma general



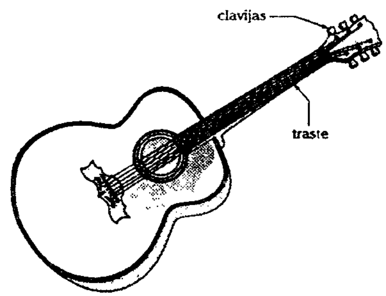
- La distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, así también entre dos vientres consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$.

Anteriormente hemos planteado que en la onda estacionaria no existe transmisión de energía.

¿Cómo interpretamos entonces en términos de energía los procesos que ocurren en este singular movimiento ondulatorio? La energía de una onda estacionaria, es decir de cualquier región donde existe esta onda, es una magnitud constante.

En el instante en que todos los puntos pasan por la posición de equilibrio, toda la energía de los puntos que toman parte en la oscilación es cinética y viceversa en la posición de elongación máxima. la energía de todos los puntos es potencial.

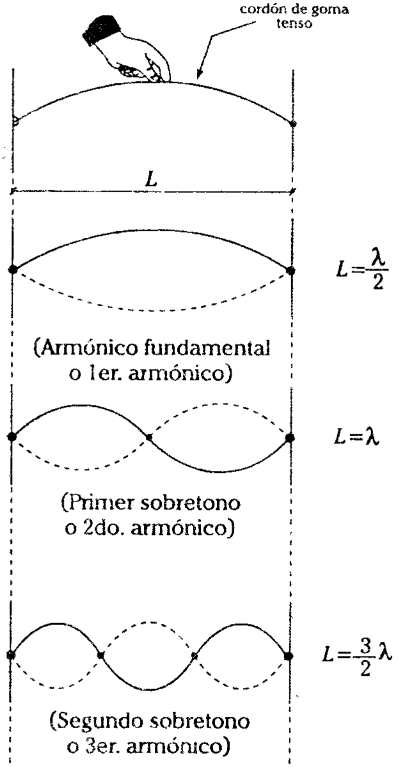
La onda estacionaria es un pro ondulatorio de gran importancia: diversas fo de ondas estacionarias se producen e cuerpos de dimensiones limitadas por los c se propagan ondas elásticas, un caso típic aplicación son las ondas estacionarias er cuerda fija por sus extremos en una guitarr



En la figura, cada cuerda de nylon de la gu es fijada a la base y en la parte superior se le a con las clavijas a las cuales se le suele hacer ¿con qué finalidad se tensa a las cuerdas?

Anteriormente manifestamos que la onda estacionaria no se produce a cualquier frecuencia de oscilación; sino únicamente a ciertas frecuencias notables denominadas **frecuencias de resonancia (armónicos)**.

A continuación determinemos estas frecuencias, para lo cual escogemos una cuerda tensa.



Es fácil inducir que, para el enésimo armónico

$$L=\frac{n}{2}\lambda \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{2L}{n}$$

Por otro lado la rapidez de onda en una cuerda tensada es

$$v_{\text{onda}}=\lambda f=\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

Reemplazando la longitud de onda del enésimo armónico

$$v_{\text{onda}}=\frac{2L}{n}f=\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}$$

de donde

$$\boxed{f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}}$$

(Frecuencia de resonancia)

siendo

$n=1; 2; 3; ...$ es el número de orden del armónico.

L : longitud de la cuerda en metros.

F_t : es la fuerza con la cual se tensó la cuerda, en Newton (N).

μ : es la densidad lineal de masa de la cuerda, en kg/m.

La frecuencia más pequeña (frecuencia de resonancia) que permite la formación de ondas estacionarias se obtiene con $n=1$.

Reemplazando

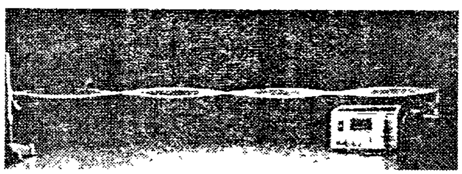
$$\boxed{f_0=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F_t}{\mu}}}$$

A esta frecuencia se le denomina frecuencia fundamental y es notable porque las demás frecuencias pueden ser obtenidas en función o múltiplos de ella.

$$\boxed{f=nf_0}$$

donde

f : es la frecuencia del enésimo armónico.



Onda estacionaria originada en el laboratorio, sus extremos están fijos y resultan ser nodos.

Energía e intensidad de una onda estacionaria

Se sabe que la energía de una partícula que oscila con M.A.S. es

$$E=\frac{1}{2}mv_{máx}^{2}$$

$$E=\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}$$

Ahora, si imaginariamente aislamos cierta región de un medio elástico, de volumen V en la cual se propaga una onda de amplitud A y frecuencia propia ω. Si la energía en este volumen es $\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}$, entonces la densidad media de esta energía de la onda es

$$\varepsilon=\frac{E}{V}=\frac{\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}}{V}$$

$$\therefore\quad \varepsilon=\frac{1}{2}\rho\omega^{2}A^{2} \qquad (1)$$

siendo

ρ : la densidad del medio.

Pero, nos interesa en realidad conocer la energía media que transporta la onda a través de la unidad de superficie (S) en la unidad de tiempo, es decir, debemos definir la **intensidad de onda**.

$$I=\frac{\Delta E}{S\Delta t}=\frac{\varepsilon\Delta V}{S\Delta t} \qquad (2)$$

donde

ΔV : es el volumen que contiene energía que durante el intervalo de tiempo que emplea la onda en pasar a través de su superficie con una rapidez v_{onda}.

$$\Rightarrow\quad \Delta V=Sv_{onda}\Delta t$$

En (2) se obtiene

$$I=\varepsilon v_{onda}$$

Reemplazando este último en (1)

$$I=\frac{1}{2}\rho v_{onda}\omega^{2}A^{2}$$

donde

A : es la amplitud de la onda estacionaria. Anteriormente la obtuvimos como

$$A_R=2A\,\text{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]$$

$$\Rightarrow\quad I_R=\frac{1}{2}\rho v_{onda}\omega^{2}A_R^{2}$$

Reemplazando

$$I_R=\frac{1}{2}\rho v_{onda}\omega^{2}\left[2A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]^{2}$$

$$I_R=2\rho v_{onda}\omega^{2}A^{2}\,\text{sen}^{2}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]$$

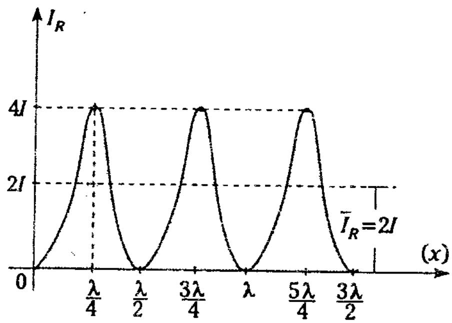
$$I_R=4\underbrace{\left\{\frac{1}{2}\rho v_{onda}\omega^{2}A^{2}\right\}}_{\text{intensidad de onda}}\text{sen}^{2}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]$$

$$\boxed{I_R=4I\,\text{sen}^{2}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]}$$

donde

I_R : es la intensidad de la onda estacionaria.

Graficando I_R vs. x



¿Para qué nos sirve la gráfica I_R vs. x? Sirve para darnos cuenta que en los nudos de la onda estacionaria $x = 2n\frac{\lambda}{4}$, la intensidad de la onda es cero durante todo el tiempo de observación; pero en los vientres

$$x = (2n-1)\frac{\lambda}{4}$$

la intensidad de la onda es $I_R = 4I$

Si la onda estacionaria es resultado de la interferencia de la onda incidente y la onda reflejada, que tiene la misma intensidad, entonces

$$I_{\text{incidente}} = I_{\text{reflejada}} = I$$

Por consiguiente, su intensidad total es $2I$. Entonces, el surgimiento de la onda estacionaria va acompañada de una redistribución de la energía en el espacio, esto quiere decir que aparentemente la energía se traslada de los nudos a los vientres. La energía de oscilación de cada punto o partícula no es igual a la suma de las energías de las dos ondas, en los nudos la energía es nula y en los vientres es dos veces mayor que la suma de dichas energías. Únicamente la energía media de la onda estacionaria es igual a la suma de las energías de las ondas que se superpone, entonces

$$\bar{I}_R = I_{\text{incidente}} + I_{\text{reflejada}} = 2I$$

¿Cuándo existirá entonces interferencia? Si en una región espacial se superponen dos o más ondas, de modo que la intensidad de la oscilación resultante en cualquier punto es igual a la suma de las intensidades de las ondas se dice que aquí no ocurre interferencia y que solo es una superposición cualquiera. Mas si al superponerse las ondas ocurre la redistribución de energía de modo que la intensidad en unas partículas es mayor y en otras menor que la suma de sus intensidades, se dice que aquí se aprecia la interferencia.

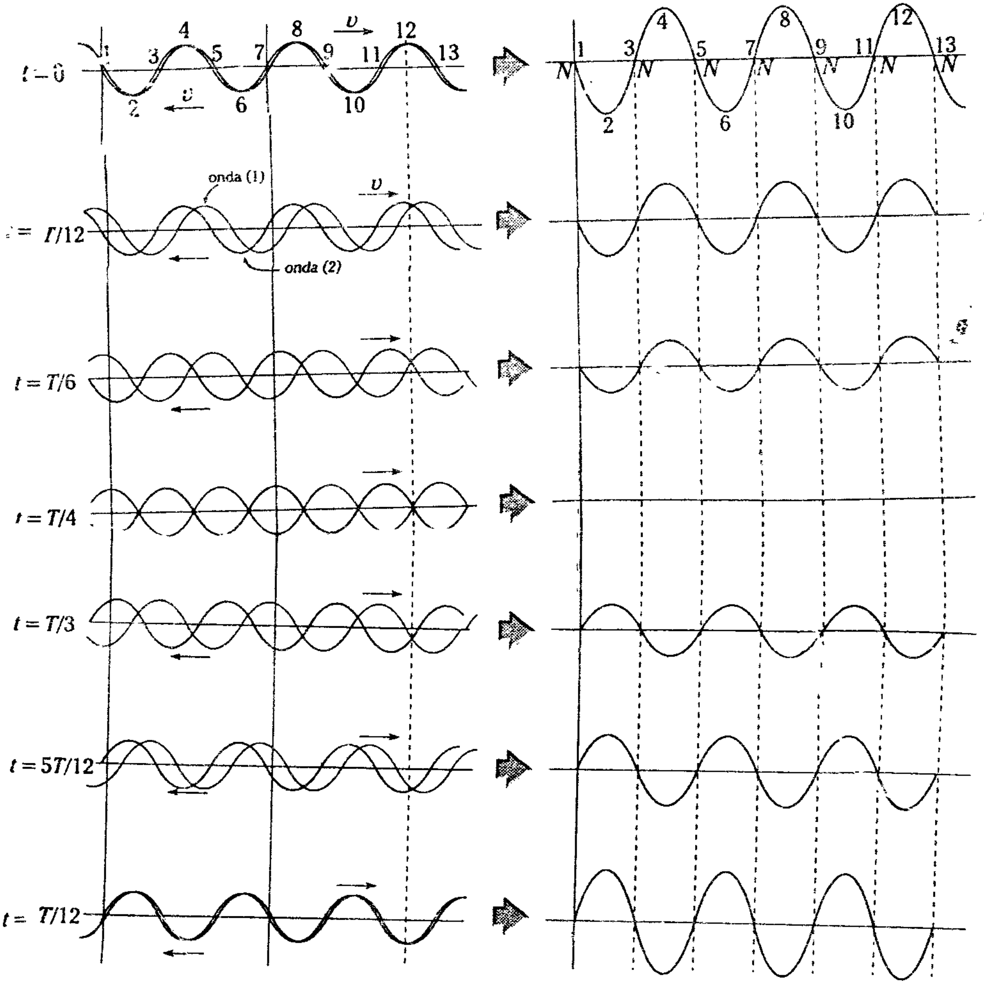
Ahora respecto a la *interferencia* podemos decir que *es el fenómeno de la redistribución de la energía que se genera en cierta región bajo condiciones determinadas como resultado de la composición de las amplitudes de dos ondas.*

En consecuencia, la formación de una onda estacionaria es un ejemplo del fenómeno de interferencia, un sistema estable de vientres y nodos es un típico caso de figura o patrón de interferencia.

Finalmente, para ilustrar la composición de ondas en la figura se nos muestra para diferentes instantes los respectivos perfiles de las ondas viajeras que interfieren y a su derecha el perfil de la onda estacionaria que resulta. La onda (1) viaja hacia la derecha y la onda (2) lo hace hacia la izquierda.

Note que para los instantes $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$ las ondas viajeras presentan perfiles solapados (se ve con un solo perfil) y en el instante que los puntos que oscilan, todos logran su máximo desplazamiento (alcanzan su extremo de oscilación).

En el perfil obtenido para la onda estacionaria en los distintos instantes, (ver siguiente cuadro) podemos notar que hay puntos que no oscilan y son precisamente los nodos fijos; además note que hay un instante $t = \frac{T}{4}$ para el cual todos los puntos presentan desplazamiento nulo y la cuerda se ve horizontal.

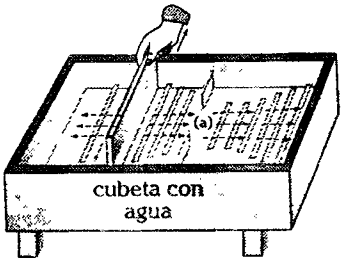


Observación

Cuando se desee representar el perfil de una onda estacionaria para diferentes instantes se procederá a juntar todos los perfiles obtenidos en un solo gráfico, tal como se realizó en gráficos anteriores.

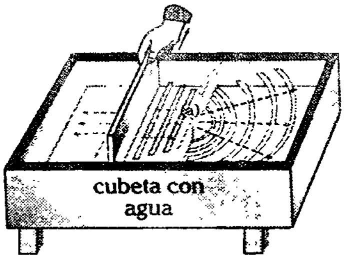
DIFRACCIÓN DE ONDAS

Cuando un frente de ondas planas choca con una abertura grande con respecto a su longitud de onda podemos apreciar lo siguiente:



Las ondas planas generadas por la oscilación de la tabla al pasar por el ancho del agujero (a) prácticamente no varía, su aspecto ni su dirección propagación pues $\lambda_{onda} < a$. Su doblez es mínima al pasar por dicho agujero o rendija.

No obstante, las ondas planas cruzan por el agujero de modo que ahora $\lambda_{onda} \leq a$.



En este caso se observa que los frentes de onda al cruzar el agujero se doblan alrededor del agujero (se flexionan) y al chocar con sus bordes se notan ondas circunferenciales como si en la rendija o agujero hubiese un cuerpo oscilante es decir un foco de ondas. Según el principio de Huygens, justamente esto es lo que sucede.

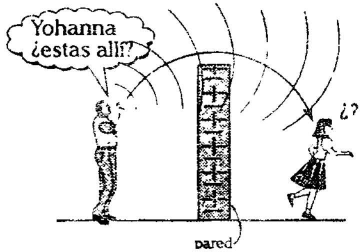
¿Qué fenómeno ha experimentado la onda? La onda ha experimentado la difracción.

La difracción es aquel fenómeno ondulatorio que lo experimenta tanto una onda transversal o longitudinal y que consiste en que una onda bordee un obstáculo u orificio, para así desviar su propagación rectilínea.

La difracción es propiedad de todo fenómeno ondulatorio y su manifestación depende de la longitud de onda y del tamaño del orificio o del obstáculo. Si la longitud de onda es muy pequeña comparada con las dimensiones del orificio o del obstáculo puede ser difícil descubrir la difracción.

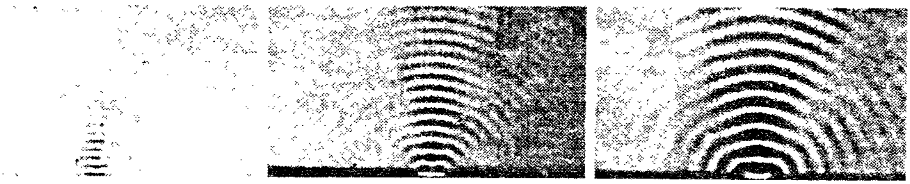
La difracción sucede tanto con ondas longitudinales y también con ondas transversales.

La difraccion es muy frecuente en las ondas sonoras cuya longitud de onda (del orden de 1 m) es comparable con la mayoría de los obstáculos que encuentra.



En la figura se muestra la difracción (contorneo y flexión) de ondas sonoras cuando encuentra un obstáculo como la pared de 1 m de altura. En consecuencia, la difracción para que se pueda apreciar requiere que la longitud de onda (λ) de la onda incidente sea comparable al tamaño del obstáculo o de la abertura según sea el caso, por que si la longitud de onda es mucho menor que el tamaño del obstáculo la onda pasa sin experimentar desviación o contorneo y se propaga prácticamente en línea recta.

Las siguientes fotografías muestran que al aumentar el tamaño de la abertura para las ondas superficiales en el agua, el fenómeno de difracción se manifiesta en menor grado.

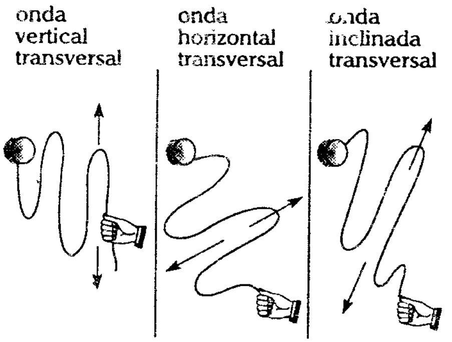


Estas fotografías corresponden al patrón de difracción que se observan de las ondas superficiales al ir aumentando el tamaño de la rendija por donde pasa las ondas.

Una descripción matemática de este fenómeno ondulatorio no es conveniente desarrollarlo ya que está fuera del objetivo de este texto; pero sí podemos señalar que una demostración gráfica de la difracción se puede hacer con ayuda del principio de C. Huygens. Se recomienda, que el lector ponga en práctica dicho principio para justificar la difraccion.

POLARIZACIÓN

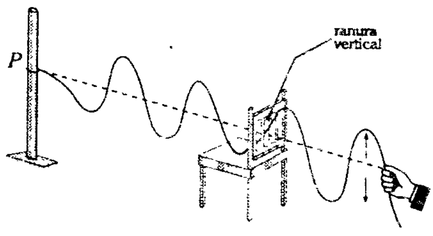
Este fenómeno se manifiesta solo con ondas transversales; cuando todas las partículas, por ejemplo en una cuerda, oscilan contenidas en un mismo plano.



Según sea la orientación de las oscilaciones de la mano podemos tener ondas transversales en diversos planos.

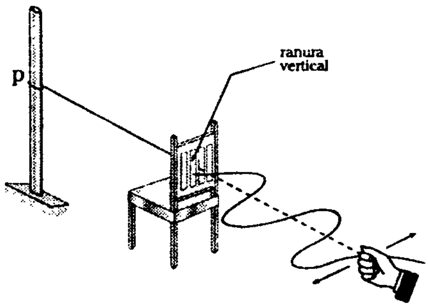
¿Cómo puede polarizarse una onda transversal?

Atemos una cuerda a un poste de modo que la cuerda pase por una ranura vertical practicada al espaldar de una silla; luego movamos la muñeca hacia arriba y hacia abajo, así



La onda transversal producida pasará sin dificultad a través de la rendija vertical de la silla y llegará al poste P. Sin embargo, ¿qué sucedería si movemos la muñeca horizontalmente de un lado a otro oscilando?

Examinemos lo que acontece



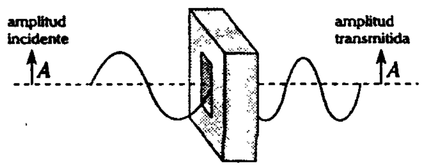
En este caso estamos generando una onda transversal horizontal, la cual se detiene al llegar a la ranura vertical. ¿Qué ocasionó la ranura vertical? Evitó la propagación de dicha onda que está polarizada linealmente en el plano horizontal.

En forma similar podemos hacer lo mismo con las ondas luminosas (O.E.M.), que son transversales, si utilizamos cristales de turmalina o láminas especiales, estas sustancias están constituidas por millones de pequeños cristales, cuya forma se parece a las agujas y permiten que solo aquellas ondas que vibran en su dirección puedan pasar a través del material.

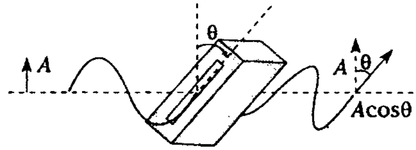
Este se denomina lámina polarizadora.

Si generalizamos el experimento anterior, denominándole a la silla polarizador y representándola así en distintas posiciones, tendremos

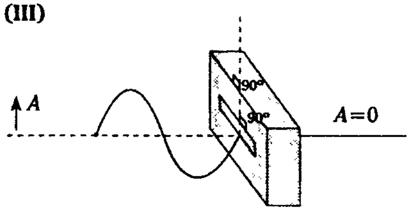
Caso (I)



Caso (II)



Caso (III)



Todo dispositivo que transforma una onda transversal cualquiera en una onda polarizada linealmente en un plano se le denomina polarizador. En el caso (I) el polarizador es paralelo al plano de las ondas polarizadas incidentes y la amplitud de las ondas transmitidas es igual a la de las ondas incidentes.

En el caso (II), cuando rotamos el polarizador un ángulo θ el plano de polarización de las ondas transmitidas rota también el ángulo θ, y la amplitud de las ondas es menor que la de las ondas incidentes.

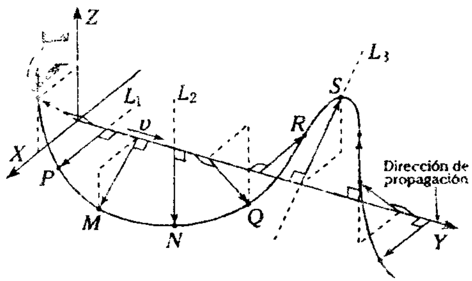
En el caso (III) el ángulo que rota el polarizador es 90° y se aprecia que las ondas transmitidas tienen amplitud nula, es decir no hay onda transmitida.

Podemos inducir el hecho de que una onda longitudinal no puede ser polarizada, pues si esta pasa por un polarizador en cualquier posición la amplitud de la onda no queda afectada.

Otro criterio que explica la polarización

Consideremos el caso en cual formamos una O.M. transversal en un cordón de goma tenso.

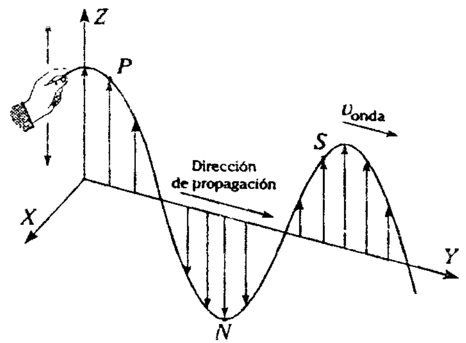
Cuando movemos rápidamente el extremo libre del cordón en diferentes direcciones, aunque siempre perpendicular al cordón, se apreciará que la perturbación al alcanzar a las partículas que forman al cordón oscilan en direcciones diferentes, pero en todo instante perpendicular a la dirección de propagación.



Esta figura nos muestra una onda transversal no polarizada

En la figura se nota que al agitar el extremo del cordón en diferentes direcciones y a la vez se le mantiene siempre en el plano XZ, las partículas P, N y S del cordón oscilan sobre direcciones diferentes, lo cual permite establecer que dichas partículas no están contenidas en un mismo plano. Cuando las partículas del medio donde se propaga una O.M. transversal presentan dicha característica, se dice que la onda no está polarizada.

¿Cuándo tendremos una O.M. transversal polarizada? Se puede obtener si por ejemplo las partículas del cordón de goma anterior oscilan contenidas siempre en un mismo plano. En este caso la onda originada es una O.M. transversal polarizada en un plano o también llamada O.M. transversal polarizada linealmente.

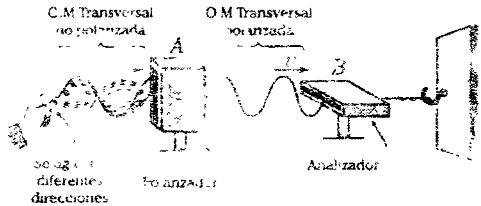


En esta figura se tiene una onda transversal polarizada en un plano o linealmente polarizada.

Como podemos ver en la figura, mientras se agita el extremo del cordón solo en la dirección del eje Z, las partículas P, N y S oscilan en un mismo plano (YZ). Cuando en una cuerda las partículas que la conforman oscilan como se indica en la figura, diremos que la onda es linealmente polarizada o simplemente polarizada.

Debemos tener presente que existen otras formas de polarizar a una O.M. transversal. Se tiene la polarización circular y polarización elíptica, que dentro de los márgenes de este texto no discutiremos.

Ahora si se tiene una O.M. transversal no polarizada. ¿La podemos polarizar? Sí se puede y el sistema mecánico que podemos utilizar lo muestra la siguiente figura



En esta figura el extremo del cordón se agita al azar, originando oscilaciones en múltiples direcciones de las partículas que conforman el cordón. La caja muy angosta (A) escoge o deja pasar una dirección de oscilación, es decir en un plano determinado, obteniéndose así una O.M. polarizada linealmente. Como se puede ver, si además añadimos una caja estrecha (B) absolutamente no pasan oscilaciones hacia la pared, esto es porque las cajas están dispuestas perpendicularmente. Al disponer en el modo indicado a las cajas estrechas ellas reciben el nombre de

A : polarizador

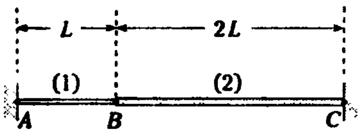
B : analizador (que también es un polarizador)

Al lector se le deja como tarea realizar dicha experiencia.

Problemas Resueltos

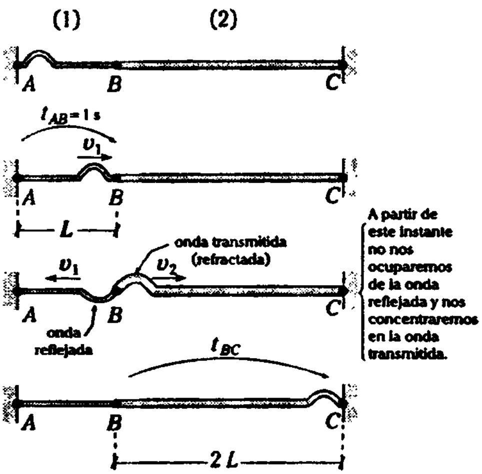
Problema 1

Se tiene dos cables 1 y 2 (unidos en el punto B y fijos a los puntos A y C) de densidad lineal μ y 4μ respectivamente. Cuando en el punto A se origina un pulso, este llega al punto B en 1s ¿Qué tiempo demorará el pulso en ir de A hasta C?



Resolución

La perturbación en A se propagará hasta B con rapidez constante, debido a que el medio 1 es homogéneo. En el punto B una parte de la onda incidente se transmitirá hacia el segundo cable y la otra se reflejará hacia el primer cable. La onda transmitida (onda refractada) se propagará en el cable (2) también con rapidez constante, pero diferente a aquella con la cual la onda incidente se propagó en el cable (1), ya que la densidad lineal de ambos cables son diferentes.



El tiempo que tarda la señal o perturbación en ir desde A hasta C es

$$t = t_{AB} + t_{BC} \qquad \text{(I)}$$

En el cable (1) la perturbación se propaga con rapidez constante

$$t_{AB} = \frac{d_{AB}}{v_1} = \frac{L}{v_1} \qquad \text{(II)}$$

Además $v_1 = \sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$

donde estamos considerando que F representa el módulo de la tensión en el cable (1) y μ su densidad lineal.

Reemplazando en (II) tenemos

$$t_{AB} = \frac{L}{\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}} \qquad \text{(III)}$$

En el cable (2) la onda transmitida también se propaga con rapidez constante

$$t_{BC} = \frac{d_{BC}}{v_2} = \frac{2L}{v_2} \qquad \text{(IV)}$$

Además

$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{4\mu}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

donde hemos considerado que el módulo de la tensión en los cables (1) y (2) es igual debido a que los cables se disponen horizontal y uno a continuación del otro. Note que la rapidez con la que se propaga la onda en el cable (2) es la mitad de la rapidez de propagación de la onda en el cable (1).

Reemplazando en (IV) tenemos

$$t_{BC} = \frac{2L}{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}} = \frac{4L}{\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}} \qquad \text{(V)}$$

Comparando (III) y (V) concluimos

$t_{BC} = 4t_{AB}$

Recuerde que $t_{BC} = 1$ s

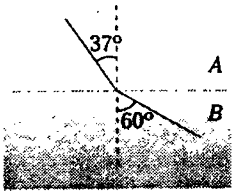
luego $t_{BC} = 4$ s

Reemplazando en (I)

$t = 5$ s

Problema 2

En el presente gráfico, se muestra la dirección de propagación de un frente de onda en dos sustancias A y B. Determine la longitud de onda en el medio B, sabiendo que en el medio A, la longitud de onda es igual a 1,5 m.



Resolución

Observamos que el frente de onda se propaga del medio A hacia B y se desvía, respecto de su dirección inicial. Esto significa que la onda experimenta refracción.

Nos piden la longitud de onda en el medio B (λ_B). Recordemos que, la rapidez de propagación (v), la longitud de onda (λ) y la frecuencia (f), se relacionan así:

$v = \lambda . f$

Para el medio A sería

$v_A = \lambda_A . f_A$

Para el medio B

$v_B = \lambda_B . f_B$

de donde se obtiene

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A . f_A}{\lambda_B . f_B} \qquad \text{(I)}$$

En la refracción y en la reflexión, la frecuencia de la onda incidente (f_A) es igual a la frecuencia de la onda refractada (f_B)

$f_A = f_B$

Considerando lo anterior en la expresión (I) se obtiene

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \qquad \text{(II)}$$

Además, el cociente v_A/v_B viene expresado en la ley de Snell.

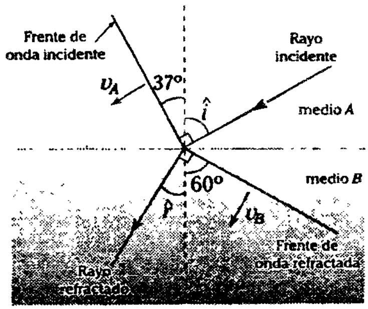
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} \text{ (ley de Snell)} \qquad \text{(III)}$$

en donde

$\hat{i}$: ángulo de incidencia

$\hat{r}$: ángulo de refracción

Se requiere $\hat{i}$ y $\hat{r}$. Estos los podemos determinar con ayuda del gráfico dado. Si se plantea que los trazos son los frentes de ondas, entonces los rayos deben ser perpendiculares a ellos



A partir de aquí se deduce que

$\hat{i} = 53°$ y $\hat{r} = 30°$

Reemplazando en (II)

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\text{sen}\,53°}{\text{sen}\,30°} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{5}$$

Finalmente este resultado $\lambda_A = 1{,}5$ m lo reemplazamos en (II).

$$\frac{8}{5} = \frac{1{,}5\text{ m}}{\lambda_B}$$

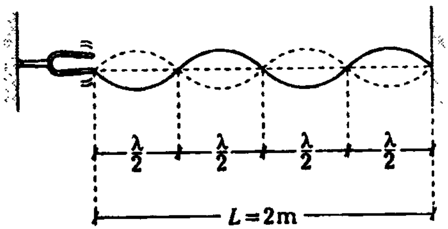
$\therefore\ \lambda_B = 0{,}9375$ m

Problema 3

Una cuerda de 2 m de largo está accionada por un vibrador de 240 Hz colocado en uno de sus extremos. Si la cuerda resuena en cuatro segmentos ¿cuál es la rapidez de las ondas transversales?

Resolución

Representando esquemáticamente lo que sucede podemos notar que las ondas que se establecen en la cuerda son transversales y cuando estas se reflejan e interfieren con las que inciden se generan ondas estacionarias. Del enunciado deducimos que la cuerda vibra en su cuarto modo (cuarto armónico), ya que nos indica que resuena en cuatro segmentos.



La rapidez de la onda se puede determinar así

$$v=\lambda . f \qquad (I)$$

De la teoría sabemos que la frecuencia del generador de ondas es igual a la frecuencia de la onda sabemos que

$$\Rightarrow f=f_{\text{vibrador}}=240\text{Hz}$$

Además podemos notar que del gráfico

$$4\left(\frac{\lambda}{2}\right)=L=2 \Rightarrow 4\left(\frac{\lambda}{2}\right)=2$$

$$\Rightarrow \lambda=1\text{ m}$$

Reemplazando en (I)

$$v=(1)(240)$$

$$\therefore v=240\text{ m/s}$$

Problema 4

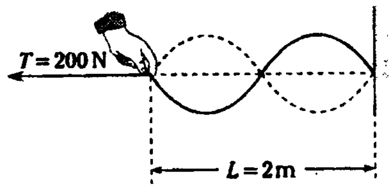
Una cuerda de 2 m de longitud, homogénea y de 40 g, es sometida a una tensión de módulo 200 N. Determine la frecuencia de vibración del segundo armónico de una onda estacionaria que en ella se genera.

Resolución

Sabemos que la frecuencia de vibración en una onda estacionaria dependerá del orden del armónico. Tal como se demostró durante el desarrollo teórico, la expresión matemática que los relaciona es

$$f=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (I)$$

donde n representa el orden del armónico, que en nuestro caso sería $n=2$; y el perfil de la onda es



Solo falta conocer la densidad lineal de masa de la cuerda (μ), la cual por ser la cuerda homogénea se determina así

$$\mu=\frac{m}{L}=\frac{0,04}{2}$$

$$\therefore \mu=0,02\text{ kg/m}$$

Finalmente reemplazando en (I) obtenemos

$$f=\frac{2}{2(2)}\sqrt{\frac{200}{0,02}}$$

$$\therefore f=50\text{ Hz}$$

Problema 5

Cierta cuerda de un violín tiene 50 cm de largo entre sus extremos fijos y su masa es de 1 g. Si la cuerda genera la nota pura **La** (440 Hz) cuando se la toca, ¿en dónde debe ponerse el dedo para que la cuerda al vibrar genere la nota pura **Do** (528 Hz)?

Resolución

Cuando se toca una de las cuerdas de un violín, esta es forzada a vibrar, y se establecen así ondas estacionarias. Estas vibraciones dan lugar a ondas longitudinales en el aire que las rodea, las cuales se transmiten a nuestros oídos como un sonido musical.

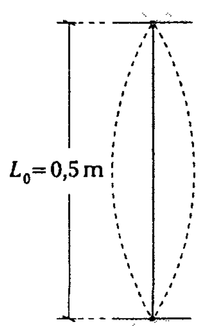
Debido a que se generan notas puras, consideramos que la vibración de la cuerda se da en su modo fundamental (lo que llamamos el primer armónico).

Inicialmente se genera la nota pura **La** (440 Hz) y como ya se demostró durante el desarrollo de la teoría, la frecuencia fundamental se determina así.

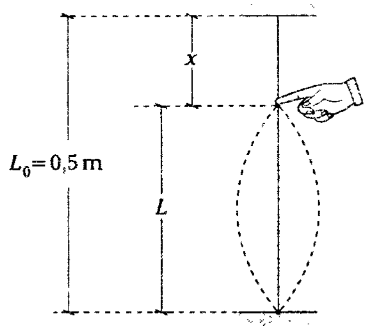
Reemplazando los datos en la ecuación anterior, se tiene

$$440 = \frac{1}{2(0,5)}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 440 \qquad \text{(I)}$$



Al presionar la cuerda con el dedo lo que hacemos es variar el tramo de la cuerda que vibra. Note que la densidad lineal de masa de la cuerda (μ) y el valor de la tensión (T) en ésta, no cambian.



donde x es la distancia, respecto de un extremo, a la cual debemos colocar el dedo

$$x = 0,5 - L \qquad \text{(II)}$$

En este caso se genera la nota pura **Do** (528 Hz).

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$528 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \text{(III)}$$

De (I) y (III) se obtiene que

$$L = 0,41\overline{6}\ \text{m}$$

Reemplazando en (II)

$$x = 0,08\overline{3}\ \text{m} \quad \text{o} \quad x = 8,\overline{3}\ \text{cm}$$

Problema 6

Una cuerda homogénea de densidad 0,1 kg/m vibra de acuerdo a la siguiente función:

$$\vec{y} = 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(10\pi t)\ \text{cm}$$

Determine el módulo de la tensión en la cuerda si la posición $\vec{y}$ y el tiempo t se expresan en metros y segundos respectivamente.

Resolución

Reconocemos que la ecuación describe a una onda estacionaria. Recuerde que el módulo de la tensión en la cuerda está relacionado con la densidad lineal de la cuerda (μ) y con la rapidez de propagación (υ) de las ondas en dicha cuerda.

$$\upsilon=\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(I)}$$

Hemos representado el módulo de la tensión en la cuerda mediante F y no por T como se hace visualmente, esto es porque reservamos la letra T para designar el periodo.

De la relación (I), despejamos F

$$F=\upsilon^2\mu \qquad \text{(II)}$$

Por dato del problema

$$\mu=0{,}1\,\text{kg/m}$$

La rapidez de propagación de la onda se puede determinar así

$$\upsilon=\frac{\lambda}{T} \qquad \text{(III)}$$

El valor de la longitud de onda (λ) y del periodo (T) se obtienen luego de analizar la ecuación de la onda estacionaria.

Según dato tenemos

$$\vec{y}=5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos(10\pi t)\,\text{cm}$$

Pero la forma general es así

$$\vec{y}=2A\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)$$

Comparando esta relación con la proporcionada en el problema reconocemos que

$$2\frac{\pi x}{\lambda}=\frac{\pi x}{2}$$

$$\therefore\ \lambda=4\,\text{m}$$

además

$$2\pi\frac{t}{T}=10\pi t$$

$$\therefore\ T=0{,}2\,\text{s}$$

Luego reemplazamos el valor de λ y T en (III)

$$\upsilon=\frac{\lambda}{T}=\frac{4}{(0{,}2)}$$

$$\therefore\ \upsilon=20\,\text{m/s}$$

ahora reemplazamos υ y μ en (II)

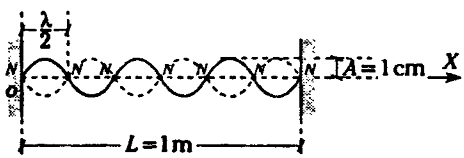
$$F=(20)^2.(0{,}1)$$

$$F=40\,\text{N}$$

Problema 7

Se hace vibrar una cuerda de guitarra de 1 m de longitud, sujeta por sus extremos y se observa que presenta 7 nodos. Si la amplitud máxima es de 1 cm y la rapidez de propagación de la onda por la cuerda es de 6 m/s, determine la ecuación de la onda.

Resolución



Sabemos que al hacer vibrar una cuerda de guitarra se establecen ondas estacionarias. La función de una onda estacionaria con las características que muestra la gráfica, se puede escribir así

$$\vec{y}=2A\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \qquad \text{(I)}$$

Esta ecuación nos caracteriza el desplazamiento $\vec{y}$ de un punto de la cuerda ubicado en x en el instante t.

A es la amplitud de las oscilaciones, por dato, $A = 1$ cm; y λ es la longitud de onda. Note que en la cuerda se establecen 7 nodos y la distancia entre dos nodos consecutivos es $\frac{\lambda}{2}$, luego de la gráfica podemos establecer que

$$6\left(\frac{\lambda}{2}\right)=1\,\text{m}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{1}{3}\,\text{m}$$

El periodo T está vinculado con λ y la rapidez de propagación de la onda v

$$\lambda = v.T$$

$$\frac{1}{3}=6.T$$

$$\therefore\ T=\frac{1}{18}\,\text{s}$$

Reemplazando en (I) los valores obtenidos para λ, T y A obtenemos

$$\vec{y}=2(1)\text{sen}\left(2\pi\frac{x}{\frac{1}{3}}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{\frac{1}{18}}\right)$$

$$\vec{y}=2\,\text{sen}(6\pi x).\cos(36\pi t)\,\text{cm}$$

Note que λ se expresó en metros, y para que la ecuación sea dimensionalmente correcta x debe expresarse también en metros. Análogamente note que T se expresó en segundos por lo que t debe expresarse también en segundos. El desplazamiento $\vec{y}$ se expresa en metros si la amplitud se expresa en metros, en nuestro caso hemos expresado A en centímetros por lo que $\vec{y}$ se expresa en centímetros.

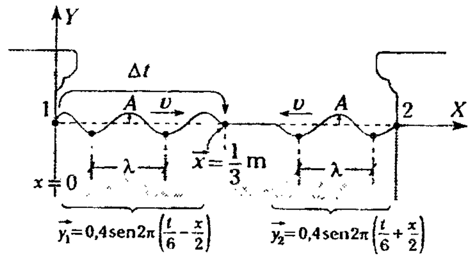
Problema 8

Dos ondas viajeras interfieren de tal manera que se establece una onda estacionaria. Determine la amplitud resultante de dicha onda en la posición $\vec{x}=1/3$ m a partir del foco en que se genera la onda componente descrita por

$$\vec{y}_1=0{,}4\,\text{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{6}-\frac{x}{2}\right)\text{m}$$

Resolución

Consideremos por ejemplo que se trata de 2 ondas en la superficie del agua de un estanque. Recordemos que, para la formación de ondas estacionarias, los focos 1 y 2 deben vibrar sincrónicamente (igual frecuencia), es decir: cada onda componente o viajera debe tener igual f, λ y A. Por otro lado nos dan de dato la función de onda de una de las ondas, a partir de ella $(\vec{y}_1)$ podemos establecer la otra función de onda $(\vec{y}_2)$.



Cuando las ondas se cruzan o interfieren, la onda resultante quedará descrita por

$$\vec{y}=2A\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad \text{(I)}$$

(Ecuación de una onda estacionaria)

En nuestro problema nos piden calcular la posición $\vec{y}$ de la partícula P al formarse la onda estacionaria, anteriormente descrita.

Ahora de datos disponemos

$$A=0{,}4\text{ m}\ ;\ x=\frac{1}{3}\text{m}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=2\text{ m}\\ T&=6\text{ s}\end{aligned}\right\}v=\frac{\lambda}{T}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\text{m}$$

luego

$$\Delta t=\frac{x}{v}=\frac{1/3}{1/3}=1\text{ s}$$

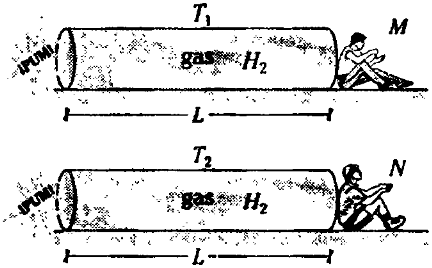
Finalmente, reemplazamos estos valores en (I)

$$\vec{y}_P=(2\times0{,}8)\left[\text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}.1\right)\right]\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}.\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$\therefore\ \vec{y}_P=0{,}2\sqrt{3}\text{ m}$$

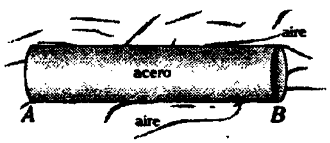
Problemas Propuestos

1. Si la explosión es simultánea. Indique cuál de las personas escuchará primero dado que $T_1 > T_2$. Considere la misma intensidad de la explosión. (T: temperatura)



A) Iguales
B) N
C) M
D) Falta conocer las temperaturas $T_1 > T_2$
E) Falta conocer L

2. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones, si una onda sonora se propaga por una barra maciza de acero



I. Al llegar al extremo de la barra parte de la onda se transmite.
II. Si la densidad del aire fuera mucho menor que la del acero, entonces, prácticamente la onda sonora no se transmitiría del acero hacia el aire.
III. La energía que transmite la onda, no puede ser transmitida más adelante, por lo tanto, la onda se refleja totalmente.

A) VVF B) VFF C) FVV
D) FVV E) FVF

3. Un joven pesca en un muelle y se percata que sobre un poste del muelle golpean 81 crestas en 1 minuto, si además nota que una cresta cubre 10 m en 8 s, ¿cuántas longitudes de onda están contenidas en un kilómetro?

A) 1 166 B) 966 C) 866
D) 1 066,7 E) 1 016

4. Una cuerda de 1,2 m y 600 g de masa está tensa y fija por sus extremos. Si al producir un pulso en uno de los extremos, este demora 0,4 s en llegar al otro extremo. ¿Qué módulo tiene la tensión en la cuerda?

A) 3,5 N B) 4 N C) 4,2 N
D) 4,5 N E) 5,2 N

5. Para producir cierta nota musical, una cuerda de guitarra debe oscilar con una frecuencia de 200 Hz. Se observa que cuando la tensión en la cuerda es de 648 N esta oscila con una frecuencia de 180 Hz. ¿Cuál debe ser la tensión en Newton, en la cuerda para que se obtenga el sonido correcto?

A) 750 B) 800 C) 850
D) 900 E) 950

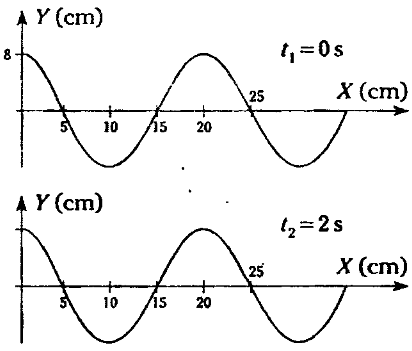
6. En una cuerda muy larga se establece una onda mecánica sinusoidal. El intervalo de tiempo desde que un punto de la cuerda presenta máximo desplazamiento hasta que presenta un desplazamiento nulo es de 0,1 s. Determine el periodo, la frecuencia y la rapidez de la onda. (la longitud de onda es de 2 m).

A) 0,4 s; 2,5 Hz; 5 m/s
B) 0,2 s; 2,5 Hz; 2 m/s
C) 0,4 s; 5 Hz; 3 m/s
D) 0,8 s; 4 Hz; 4 m/s
E) 0,5 s; 8 Hz; 6 m/s

7. Una cuerda de 2 m de longitud y densidad lineal de masa 2,5 g/cm está unida a un bloque de 900 g tal como se muestra. Si el diapasón empieza a vibrar con una frecuencia de 10 Hz, determine el intervalo de tiempo que emplea el primer pulso en regresar a su lugar de origen, también calcúlese la longitud de onda ($g=10$ m/s^2).

A) $0{,}8\sqrt{5}$ s ; $2\sqrt{5}$ m
B) $0{,}16\sqrt{10}$ s ; $0{,}2\sqrt{10}$ m
C) $0{,}08\sqrt{10}$ s ; $0{,}4\sqrt{10}$ m
D) $0{,}16\sqrt{5}$ s ; $0{,}4\sqrt{10}$ m
E) 0,53 s ; 0,6 m

8. Por una cuerda tensa se propaga una onda transversal armónica. Las figuras muestran el perfil de la cuerda en el instante $t_1=0$ y $t_2=2$ s. Determine la mínima frecuencia de la onda.



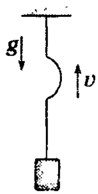
A) 1 Hz B) 0,5 Hz C) 0,75 Hz
D) 0,125 Hz E) 0,25 Hz

9. Una cuerda elástica homogénea de densidad lineal 0,1 kg/m está dispuesta en forma horizontal y soporta una tensión de módulo 40 N. ¿Qué cantidad de energía por unidad de tiempo se le transmite a la cuerda al generar ondas de $f=100$ Hz y $A=5$ cm? (Considere $\pi=3$)

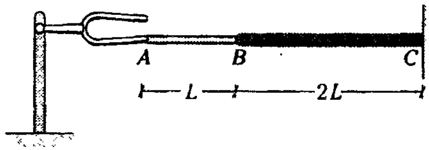
A) 220 W B) 200 W C) 225 W
D) 180 W E) 900 W

10. Se muestra un pulso de pequeña amplitud que se propaga en una cuerda homogénea vertical. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.
- Conforme el pulso asciende, su rapidez de propagación aumenta.
- El pulso desarrolla un M.R.U.V. y su aceleración tiene un módulo de $a=\frac{g}{2}$.
- La rapidez con que el pulso llega al techo será mayor si la cuerda es más delgada.

A) VVF
B) VVV
C) VFF
D) FVF
E) FFF

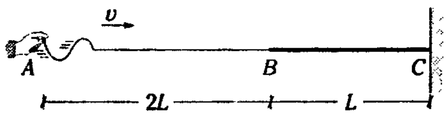


11. Según el gráfico mostrado, determine la relación entre las longitudes de onda en la parte $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de la cuerda. si el diapasón oscila con una frecuencia constante, además la relación de sus masas es $\frac{M_{AB}}{M_{BC}}=\frac{1}{8}$



A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) 4 E) 6

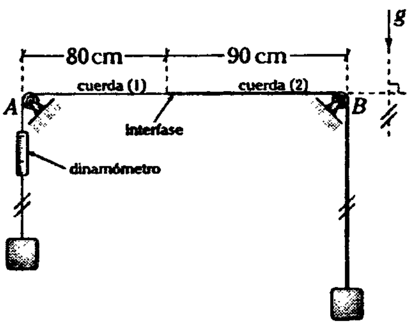
12. Las cuerdas AB y BC están tensadas y unidas como se muestra ($M_{BC}=2\,M_{AB}$).
Si la onda en la cuerda AB se propaga con una rapidez de υ; indique verdadero (V) o falso (F) para las siguientes proposiciones



I. La onda se propaga con mayor rapidez en la cuerda AB.
II. La onda emplea igual tiempo para propagarse en ambas cuerdas.
III. La longitud de onda en la cuerda AB es el doble de longitud de onda en la cuerda BC.

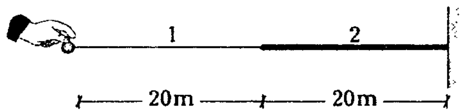
A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFF

13. La gráfica muestra a un sistema en equilibrio, donde el dinamómetro indica 4 N muy cerca de la polea A. Si en A se origina un pulso, determine el tiempo que emplea el pulso en llegar de la interfase a la polea B.
Considere despreciable las dimensiones de las poleas; $\mu_2=0{,}01$ kg/m ; $\mu_1=0{,}09$ kg/m.



A) 25×10^{-2} s B) $4{,}5\times10^{-2}$ s C) $5{,}5\times10^{-2}$ s
D) $3{,}5\times10^{-2}$ s E) $1{,}5\times10^{-7}$ s

14. En la figura se muestran dos cuerdas de diferente densidad lineal unidas por uno de sus extremos. Si un joven hace oscilar uno de los extremos con una frecuencia de 4 Hz, determine luego de cuántos segundos la onda generada llega a la pared y la longitud de onda en cada cuerda. Considere que el joven tensa la cuerda con 16 N.
$(\mu_1=0{,}01\,\text{kg/m}\,;\,\mu_2=0{,}04\,\text{kg/m})$.



A) 1,5 s ; 10 m ; 5 m
B) 1 s ; 10 m ; 8 m
C) 2 s ; 10 m ; 10 m
D) 1 s ; 5 m ; 5 m
E) 1,2 s ; 6 m ; 7 m

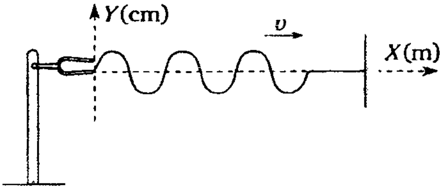
15. Una onda transversal armónica y plana presenta una frecuencia de 500 Hz y una rapidez de propagación de 360 m/s. ¿Qué distancia hay entre las posiciones en torno de la cual oscilan 2 puntos que están desfasadas 60º? ¿Cuál es la diferencia de fase entre 2 posiciones de un punto para un intervalo de 10^{-3} s?

A) 6 cm ; $\frac{\pi}{3}$ rad
B) 12 cm ; $\frac{\pi}{2}$ rad
C) 24 cm ; $\frac{\pi}{2}$ rad
D) 12 cm ; π rad
E) 6 cm ; π rad

16. Con un vibrador se genera una onda mecánica en una cuerda, tal que el extremo de la cuerda unido al vibrador oscila según la función

$\vec{y} = 3\ \text{sen}(20\pi t + \pi/4)$ cm

Determine la función de onda, si se propaga hacia la derecha con una rapidez de 200 m/s.



A) $\vec{y} = \text{sen}2\pi(10t - 0{,}05x + 0{,}125)$ cm

B) $\vec{y} = 3\text{sen}2\pi(10t - 0{,}05x + 0{,}125)$ cm

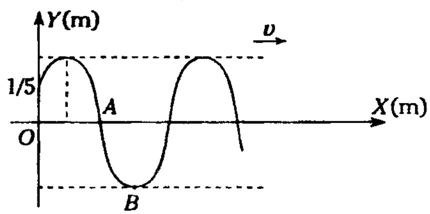
C) $\vec{y} = 3\text{sen}2\pi(10t + 0{,}05x + 0{,}125)$ cm

D) $\vec{y} = \text{sen}2\pi(10t + 0{,}05x + 0{,}125)$ cm

E) $\vec{y} = 4\text{sen}2\pi(10t + 0{,}0005x + 0{,}125)$ cm

17. Una onda transversal armónica ha sido generada en una cuerda elástica y su perfil se muestra para el instante $t=0$. Si en dicho instante los puntos A y B están separados $3\sqrt{2}$ m, determine la separación entre O y A luego de 0,5 s. La función de onda de la onda transversal es

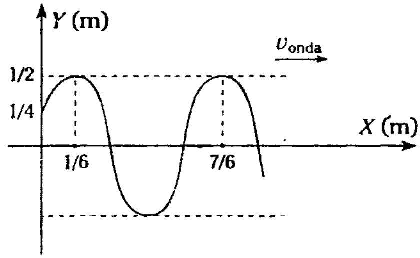
$\vec{y} = 3\text{sen}\left(\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \phi\right)$ (considere $\vec{y}$ y λ en metros $\sqrt{34} \approx 6$)



A) 4 m B) 6 m C) 5 m

D) 8 m E) $9\sqrt{2}$ m

18. En la gráfica se muestra el perfil de una onda transversal armónica que tiene una rapidez de 5 m/s. La función de onda $\vec{y}(x, t)$ que la describe es



A) $0{,}5\text{sen}\left[\pi\left(\frac{t}{5} + x\right) + \frac{\pi}{6}\right]$ m

B) $0{,}5\text{sen}\left[2\pi(5t - x) + \frac{5\pi}{6}\right]$ m

C) $0{,}25\text{sen}\left[2\pi(5t - x) - \frac{5\pi}{6}\right]$

D) $0{,}5\text{sen}\left[\pi\left(\frac{t}{5} + x\right) + \frac{5\pi}{6}\right]$

E) $0{,}25\text{sen}\left[2\pi\left(t - \frac{x}{5}\right) + \frac{5\pi}{6}\right]$ m

19. Una onda se propaga por una cuerda según la función

$\vec{y} = 5\text{sen}(10\pi t - 4\pi x)$

Determine la rapidez de un punto de la cuerda ubicada en $\vec{x} = 0{,}5$ m

A) $50\pi\cos(10\pi t - 2\pi)$

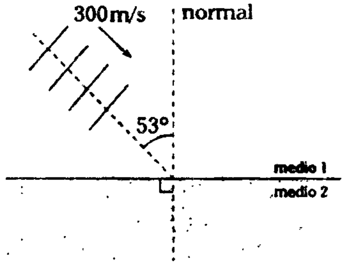
B) $50\pi\text{sen}(10\pi t + 2\pi)$

C) $40\pi\text{sen}(5\pi t + 4\pi)$

D) $30\pi\cos(4\pi t - 4\pi)$

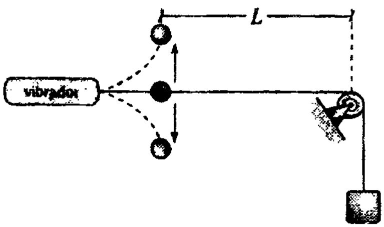
E) $50\pi\cos(20\pi t - 4\pi)$

20. Una O.M. plana incide sobre una superficie que separa a dos medios diferentes tal como se muestra, si la onda transmitida incrementa en un 20% su rapidez, con respecto a la rapidez de incidencia, ¿cuánto es la desviación de la dirección de propagación de la onda?



A) 74° B) 53° C) 30°
D) 21° E) 18°

21. Un bloque de aluminio cuelga del extremo de una cuerda que vibra en su primer armónico cuando su longitud es L, si el bloque se sumerge en alcohol, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto?



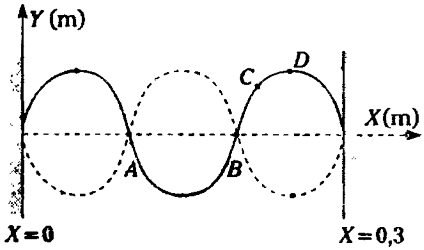
I. La longitud de onda del primer armónico disminuye.
II. Para que la rapidez del primer armónico no cambie, la nueva longitud de la cuerda vibrante debe ser $L.\sqrt{\frac{\rho_{Al}-\rho_{alcohol}}{\rho_{Al}}}$
III. La rapidez de la onda en la cuerda disminuye.
IV. La frecuencia de oscilación de la onda aumenta.

A) I, II y III B) II, III y IV C) II y III
D) III y IV E) II y IV

22. Una cuerda de una guitarra tiene 50 cm de longitud y una masa de 5×10^{-4} kg y está sometida a una tensión de 8,1 N. Determine las frecuencias del primer armónico (frecuencia de la nota fundamental), segundo armónico y tercer armónico respectivamente.

A) 90 Hz ; 180 Hz y 270 Hz
B) 60 Hz ; 120 Hz y 180 Hz
C) 90 Hz ; 45 Hz y 22,5 Hz
D) 60 Hz ; 90 Hz y 150 Hz
E) 60 Hz ; 200 Hz y 250 Hz

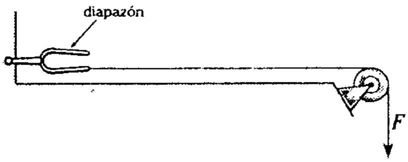
23. La gráfica muestra una onda estacionaria en una cuerda, indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.



I. La energía cinética de una partícula ubicada en A es cero.
II. La amplitud de la partícula C es igual al de la partícula D.
III. La energía cinética máxima de la partícula D es mayor que la energía cinética máxima de C.
IV. Si la frecuencia de la onda estacionaria es 80 Hz entonces la rapidez de la onda es 8 m/s.

A) VFFF B) FFFV C) VVVF
D) FFFF E) FVVV

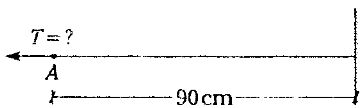
24. Si el diapasón que se muestra vibra con una frecuencia f, en la cuerda de masa m se forman ondas estacionarias de cuatro vientres. Determine la rapidez de las ondas que se generan.



A) $\frac{2f}{F.m}$ B) $\frac{F}{f.m}$ C) $\frac{3F}{f.m}$

D) $\frac{2F}{f.m}$ E) $\frac{3f}{F.m}$

25. Calcule el módulo de la tensión para obtener ondas estacionarias con tres vientres en una cuerda de 90 cm y de 0,6 g, cuyo extremo A estará unido a un diapasón que realiza 100 oscilaciones por segundo.



A) 1,2 N B) 2,4 N C) 3,2 N

D) 3,6 N E) 4,8 N

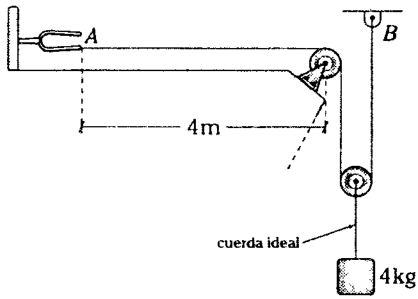
26. Las cuerdas de una guitarra tienen una longitud de 0,6 m . Al perturbar una cuerda, ella emite un sonido de frecuencia fundamental igual a 220 Hz . La frecuencia cuando se rasga la misma cuerda al fijar un dedo en el traste a 12 cm del extremo más cercano a las clavijas en Hz es

A) 300 B) 275 C) 232

D) 176 E) 72

27. Si el sistema mostrado se encuentra en equilibrio, determine la frecuencia para el tercer armónico. Considere poleas ideales y de pequeñas dimensiones.

$$\left(\mu = 0{,}05\ \text{k/m}; g = 10\ \text{m/s}^2 ; L_{\text{cueida}} = 4{,}5\ \text{m}\right)$$



A) 5,33 Hz B) 6,33 Hz C) 4,85 Hz

D) 7,52 Hz E) 10,63 Hz

28. Una cuerda de 2 m de longitud y densidad lineal 50 g/m está tensa con 20 N y fija por sus extremos. ¿Con qué frecuencia se debe perturbar a la cuerda para originar el primer sobretono (segundo armónico)?

A) 10 Hz B) 20 Hz C) 5 Hz

D) 15 Hz E) 25 Hz

29. Dos ondas armónicas de igual amplitud, frecuencia y rapidez viajan en direcciones contrarias. Si al interferir dicho fenómeno queda descrito por la siguiente función

$$\vec{y}(x,t) = 0{,}2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)m$$

la rapidez de las ondas es

A) $\frac{\pi}{2}$m/s B) $\frac{\pi}{4}$m/s C) π m/s

D) $\frac{2\pi}{3}$m/s E) 2π m/s

CLAVES

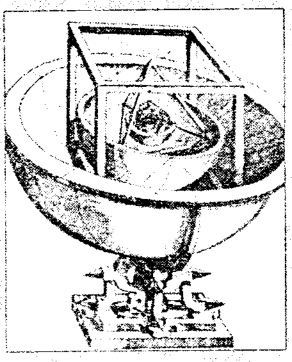
1	C	10	A	19	A
2	A	11	C	20	D
3	D	12	C	21	A
4	D	13	B	22	A
5	B	14	A	23	D
6	A	15	D	24	D
7	B	16	B	25	B
8	B	17	B	26	B
9	E	18	B	27	D
28	A	29	A		

XV

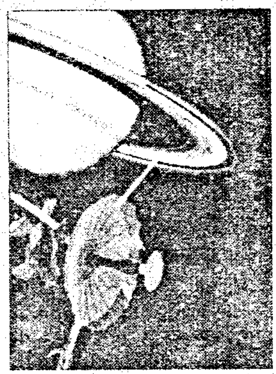
CAPÍTULO

Gravitación

(a)



(c)



(b)

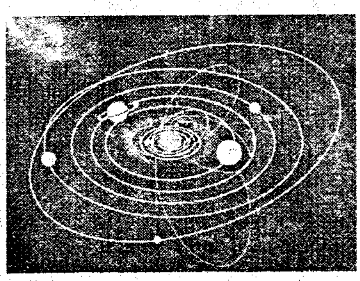


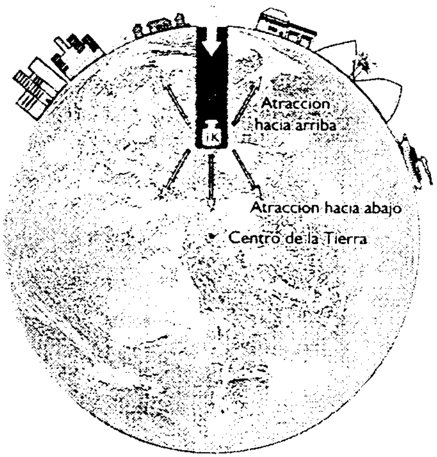
Fig. (a) Por mediados del siglo XVI el científico J. Kepler sobre la base de algunas observaciones, imaginó a los planetas moviéndose sobre esferas y los cinco poliedros regulares que existen situados entre ellas. **Fig. (b)** En la actualidad sabemos como están dispuestos los planetas y cómo se mueven en torno del sol. **Fig. (c)** El lanzamiento y puesta en órbita de los diversos satélites artificiales representan uno de los mayores logros de las leyes de la gravitación.

L E C T U R A

¿DÓNDE PESAN MÁS LOS CUERPOS?

La fuerza con que la esfera terrestre atrae los cuerpos disminuye a medida que los alejamos de su superficie. Si levantásemos una pesa de a kilo a una altura de 6 400 km, es decir, si la alejásemos del centro de la Tierra hasta una distancia igual a dos radios de la misma, la fuerza de atracción disminuiría en 2^2, es decir, en 4 veces, y esta misma pesa, colocada en una balanza de resorte (dinamómetro), sólo comprimiría su muelle hasta 250 g, en lugar de hasta 1000 g. Según la ley de la gravitación universal, la esfera terrestre atrae a los cuerpos que se encuentran fuera de ella, de la misma forma que si toda su masa estuviera concentrada en el centro, y la disminución de esta fuerza atractiva es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. En nuestro caso, la distancia desde la pesa hasta el centro de la Tierra se duplicó y, por consiguiente, la atracción disminuyó en 2^2, es decir, en 4 veces. Alejando la pesa hasta 12 800 km de la superficie de la Tierra, es decir, triplicando su distancia hasta el centro de la Tierra, disminuiríamos la atracción en 3^2, es decir, en 9 veces, y la pesa de 1 000 g solo pesaría 111 g, y así sucesivamente.

Razonando lógicamente, si hundiéramos esta misma pesa en las entrañas de la Tierra, es decir, si la aproximáramos al centro de nuestro planeta, deberíamos observar un aumento de la atracción. En las profundidades de la Tierra la pesa debería pesar más. Sin embargo, esta suposición es errónea; al profundizar en la Tierra, el peso de los cuerpos no aumenta, sino al contrario, disminuye. Esto se explica, porque, en este caso, las partículas de la Tierra que lo atraen se encuentran ahora, no por un lado del cuerpo, sino por lados distintos. Obsérvese dibujo. En ella se ve cómo la pesa que se encuentra en las profundidades de la Tierra es atraida hacia abajo por las partículas que se encuentran debajo de ella, pero al mismo tiempo es atraída también hacia arriba, por las partículas que se encuentran encima. Puede demostrarse, que, en fin de cuentas, solamente tiene importancia. La atracción que ejerce la esfera cuyo radio es igual a la distancia que hay desde el centro de la Tierra hasta el sitio en que se encuentra el cuerpo.



Por esto, a medida que el cuerpo se va introduciendo a mayor profundidad en la Tierra, su peso va disminuyendo rápidamente. Al llegar al centro de la Tierra, el cuerpo pierde su peso por completo, es decir, se hace ingrávido, ya que las partículas que lo rodean lo atraen en todas direcciones con igual fuerza.

De todo lo antedicho se deduce, que donde los cuerpos pesan más, es en la misma superficie de la Tierra, y que a medida que se alejan de ella, sea hacia fuera o hacia dentro, su peso disminuye*.

---

* Así ocurriría efectivamente si la esfera terrestre tuviera una densidad homogénea, pero en realidad, la densidad de la Tierra va en aumento al acercarse a su centro. Por esto, al profundizar en la Tierra, al principio hay un cierto espacio en que la fuerza de la gravedad aumenta, pero después comienza a disminuir.

FUENTE: Física recreativa. AUTOR: Y. Perelman. Editorial MIR. Pág.: 39 Tomo I

Gravitación

OBJETIVOS

- Conocer algunos aspectos históricos sobre cómo evolucionó la Teoría de la gravitación.
- Conocer las leyes de Kepler para el movimiento planetario y cómo estas fueron deducidas.
- Conocer la ley Universal de la gravitación y los argumentos que permitieron establecerla.
- Establecer qué es el campo gravitatorio como ente responsable de la interacción gravitacional, así también las magnitudes que lo caracterizan su intensidad y la energía potencial gravitatoria.
- Ver que la ley Universal de la gravitación encuentra aplicación en el movimiento satelital y en el cálculo de las velocidades cósmicas.

INTRODUCCIÓN

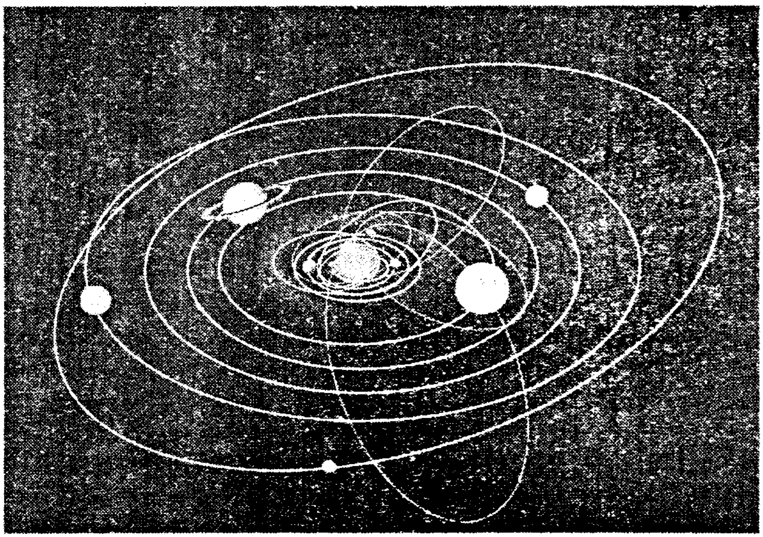
Hablar de gravitación implica referirnos indudablemente a T. Brahe, J. Kepler, Isaac Newton, debido a que este gran matemático y filósofo de la naturaleza, le dio forma y comprensión a algo, que para su época era incomprensible: El movimiento de los planetas. Sin embargo el estudio del movimiento planetario no se inicia con Newton, sino mas bien data desde que el hombre percató que los eventos desarrollados en la Tierra guardaban cierta relación con la posición de los astros, es decir a fenómenos periódicos como las estaciones que se vinculaban con las cosechas. Desde los albores de la civilización el hombre se preguntaba sobre el planeta que habitamos, la Tierra es plana, es redonda, flota, ¿sobre que flota? Posteriormente el hombre se preguntaba sobre el equilibrio del sistema solar y hoy en día la ley Universal de la gravitación no solo permite dar explicación a ello sino que además explica el movimiento de los cometas, el efecto de las mareas, etc.

La gravitación como ciencia se inicio con la astrología, para luego tomar cuerpo como astronomía. En la actualidad el problema del sistema solar, la formación de estrellas y galaxias es visto por la astrofísica. Este campo nos permite entender cómo el universo se ha ido formando y evolucionando. Si nosotros queremos llegar a comprender los conocimientos actuales que se derivan de la astrofísica, como por ejemplo pulsares, quasáres, agujeros negros, etc; primero debemos conocer los inicios de la gravitación y es por ello que pasaremos a narrar una breve reseña histórica de los hechos más significativos en el desarrollo de dicha teoría.

EL MOVIMIENTO PLANETARIO

Históricamente fue estudiado por la Astronomía a partir de una serie de observaciones de fenómenos como el día y la noche, los climas, las estaciones, etc. y sus efectos que ejercieron y ejercen sobre las diversas actividades de los pueblos. ¿Qué tan importante era definir la época de siembra y cosecha? La importancia de la posición del Sol, la Luna y las estrellas motivó la investigación y elaboración de teorías que explicaron dichos fenómenos y sus respectivos movimientos.

¿Cómo se explicó inicialmente el movimiento de los cuerpos celestes? Uno de los primeros en analizar y plantear esta situación fue el filósofo griego Anaxágoras, oriundo de Asia Menor, que residía en Atenas hace más de dos mil años. Éste afirmaba que: La Luna habría caído en la Tierra si no fuera por su movimiento como lo hace una piedra al ser lanzada por la honda. Este planteamiento no fue entendido a cabalidad en su tiempo, de acuerdo a simples observaciones un conjunto de astrónomos griegos lanzó una teoría denominada **Teoría Geocéntrica.**



Actualmente sabemos que nuestro sistema solar, está constituido por ~~nueve~~ planetas principales que se desplazan en torno al Sol, su gravedad los mantiene en órbitas elípticas.

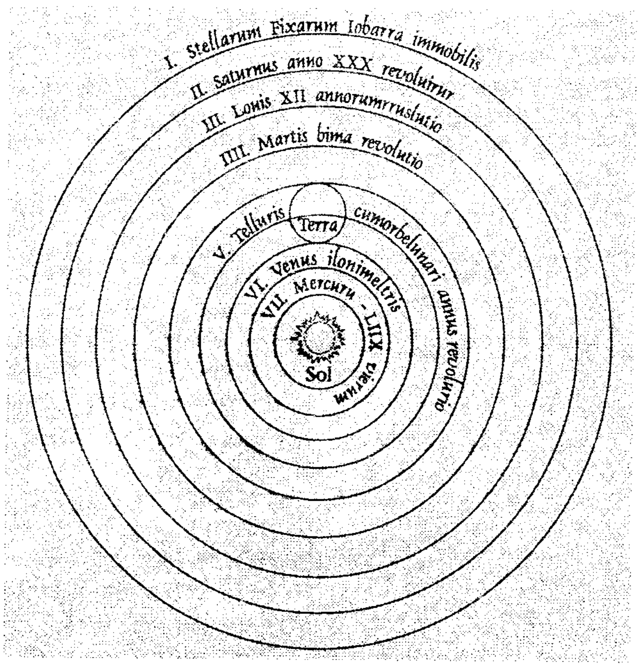
TEORÍA GEOCÉNTRICA

Fue sustentada por Claudio Ptolomeo, quien postuló que la Tierra era el centro del universo y que a su alrededor giraban en órbitas circunferenciales los demás planetas, incluso el Sol.

En la Edad Media esta teoría tuvo una gran aceptación, no obstante su complicada sustentación; el desarrollo de nuevos instrumentos de observación modificó estos planteamientos y dio inicio al desarrollo de una nueva teoría, la teoría heliocéntrica.

En 1543 se publicó la nueva teoría acerca del movimiento planetario, desarrollada por el polaco Nicolás Copérnico. Según esta teoría, la Tierra no se encontraría en el centro del Universo, así como los planetas y el Sol no girarían en torno a ella. Ésto negaba lo afirmado anteriormente por el astrónomo griego Ptolomeo.

Todo observador advertirá sin dificultad que no es la Tierra la que se mueve, sino el Sol que traza un arco correcto en el cielo, levantándose en el Este y poniéndose en el Oeste. Por el cielo nocturno se mueven siguiendo distintas órbitas la Luna y los planetas lo que hace más sustentable a la teoría geocentrista. No obstante, Copérnico contradecía los hechos observables y apuntalaba a cuestionar la limitación en lo experimental y comprobación científica. Esto le permitió explicar, desde la vía más sencilla y exacta, los fenómenos en estudio, predecir los fenómenos nuevos y otorgar una base a la experimentación científica en el campo del estudio del movimiento de los cuerpos celestes.



Cuadro del Universo según Copérnico

Teoría revolucionaria que fue sustentada por el astrónomo polaco Nicolás Copérnico en el siglo XVI, según la cual el Sol está en reposo y los planetas, incluyendo la Tierra, giran alrededor de él en órbitas circulares (trayectorias circunferenciales).

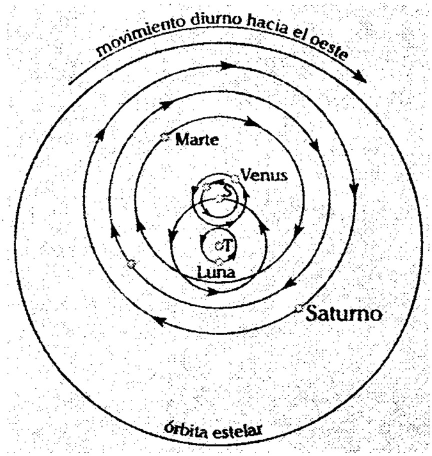
De acuerdo a sus observaciones Copérnico estableció que era la Tierra la que se movía y no el Sol, éste está fijo y la Tierra con los demás planetas describían trayectorias circunferenciales en torno al Sol.

Esta teoría, mucho más sencilla que la de Ptolomeo, permitía una explicación más satisfactoria, pero que cuestionaba la creencia de aquel entonces las creencias religiosas, de gran arraigo se respaldaban en que la Tierra era el centro del Universo y esta teoría tuvo que prohibirse por la Iglesia en su época.

LEYES DE KEPLER

El sistema de Copérnico fue presentado como un problema matemático para que así el santo oficio no tomará represalia contra el autor, debida a que dicho sistema estaba en contra del dogma que protegía la iglesia: el hombre, la creación divina, debe estar en el centro del universo, la Tierra. Actualmente, sabemos que es completamente falso.

Años más tarde un astrónomo danés y descendiente de nobles, Tycho Brahe (1546-1601), propuso un sistema planetario muy peculiar. Éste consideraba a la Tierra como el centro del universo, mientras que los planetas solo giraban en torno al Sol, el cual a su vez giraba en torno a ésta.



Esquema del modelo planetario planteado por Tycho Brahe en base a sus observaciones.

En 1572 un objeto luminoso surgió repentinamente en la constelación de Casiopea para que después de dos años desapareciera. Este hecho dio un fuerte golpe al dogma que pregonaba la iglesia acerca de la inmutabilidad de los cielos. Así mismo este hecho marco el interés de Tycho Brahe por hacer observaciones al firmamento; lo cual posteriormente lo convertiría en uno de los mejores observadores de los cielos sin hacer uso de un telescopio (estos fueron inventados por Galilei recién en 1609).

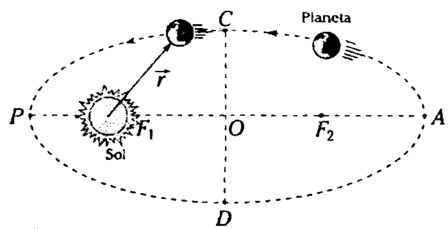
Durante casi 20 años Tycho Brahe pudo observar el cielo durante las noches y ello le permitió establecer las posiciones de los diferentes planetas con respecto al fondo de las estrellas, que él las consideraba fijas. En el segundo mes de 1600, Tycho Brahe conoce a Johannes Kepler (1571-1630), por ese entonces destacado matemático y astrólogo alemán, y lo contrata para trabajar en un gran proyecto: ajustar su voluminosa información (producto de sus observaciones) con el sistema copernicano.

PRIMERA LEY: (Ley de las órbitas)

Tycho Brahe, después de su muerte (1601), le dejó a Kepler información bien precisa del movimiento de Marte, mas éste al querer ajustar los datos al movimiento circunferencial uniforme dejado por Copérnico determinó, luego de cuatro años de intensa labor, que esto no podía hacerse. Kepler siguió unos años más de continua labor, son la finalidad de mejorar la teoría de Copérnico y ajustarla a las observaciones hechas por Tycho Brahe.

Mientras Kepler estudiaba las trayectorias descritas por los planetas, se le ocurrió unas curvas ovaladas llamadas elipses. Al aceptar que la elipse es la trayectoria natural de un planeta, se obtenía un cuadro geométrico del sistema solar de gran simplicidad según lo cual, Kepler estableció:

Todo planeta que gira alrededor del Sol describe una órbita elíptica, en uno de cuyos focos se sitúa el Sol.



donde

CD : Eje menor de la elipse

PA : Eje mayor de la elipse

OA : Semieje mayor de la elipse

$\vec{r}$: Radio vector o vector posición del planeta.

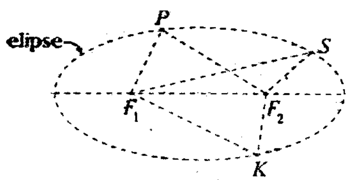
A : Es el afelio, la posición más lejana del planeta respecto del Sol.

P : Es el perihelio; la posición más cercana del planeta respecto del Sol.

F_1; F_2: Focos de la elipse.

Nota

Con respecto a la elipse, esta curva es una cónica y está definida como el lugar geométrico de todos los puntos, cuyas distancias hacia dos puntos fijos (llamados focos) dan una suma constante.



Por la definición dada, se debe verificar

$$\boxed{F_1P + F_2P = F_1S + F_2S = F_1K + F_2K = \text{cte.}}$$

Esta ley dada por Kepler derrumbó un planteamiento que se conservaba por entonces establecido por el filósofo griego Platón: *Los planetas presentan un movimiento circunferencial uniforme* (M.C.U.). No obstante, gracias al trabajo hecho por Newton, se convenció a la humanidad acerca de la realidad de las elipses como trayectorias naturales del movimiento de los planetas. Debe quedar bien en claro que esta ley no nos dice nada acerca de cómo es el movimiento de los planetas sobre la elipse.

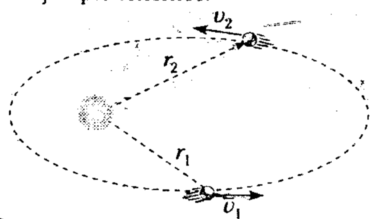
SEGUNDA LEY: (Ley de las áreas)

Después de revisar el trabajo de Kepler, uno concluye que todo su aporte a la descripción cinemática del movimiento planetario fue obtenido a partir del estudio que realizó para el establecimiento de la segunda ley. El camino que siguió Kepler para esta ley, es actualmente muy contradictorio, ya que usó hipótesis que son consideradas falsas para obtener una sentencia correcta.

Por ejemplo Kepler hablaba de una acción magnética del Sol sobre los planetas que disminuía de manera inversa a la distancia, también supuso que la rapidez del planeta debería ser proporcional a la acción del Sol; con lo cual llego a establecer que:

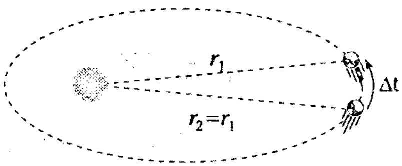
La rapidez de un planeta es inversamente proporcional a su distancia del sol.

Por ejemplo tenemos:

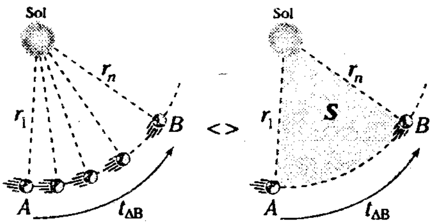


Como $r_2 > r_1 \Rightarrow v_2 < v_1$

Kepler consideró un recorrido pequeño para un planeta, con lo cual planteó que el tiempo que tardó en hacerlo es proporcional a su distancia al Sol (esto es aproximadamente correcto).



Con esto se propuso calcular el tiempo que emplea un planeta en cubrir un recorrido grande. Se sumó las distancias Sol - planeta para cada uno de los pequeños arcos que se puedan tomar. Él suponía que la suma de estas distancias era igual al área barrida por el radio vector.



De aquí formuló

t_{AB} es proporcional a $r_1+........+r_n$

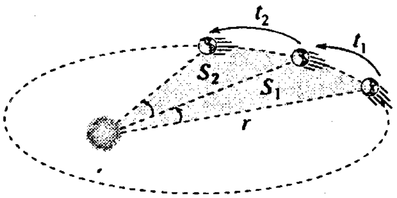
pero como $S=r_1+..................+r_n$ concluyo que:

$$\boxed{S \text{ es proporcional al } t_{AB}}$$

La segunda ley, como hoy se le conoce a esta conclusión de Kepler, sigue una línea de razonamientos erróneos, sin embargo; establece que

El radio vector o vector posición ($\vec{r}$) de un planeta barre áreas que son directamente proporcionales al tiempo empleado.

Podemos tener:



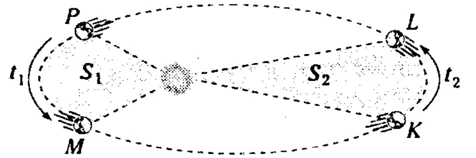
Aquí se verifica que: $\boxed{\dfrac{S_1}{t_1}=\dfrac{S_2}{t_2}}$

Para el caso que $S_1=S_2$

$\Rightarrow t_1=t_2$

Con esto se concluye que para tiempos iguales el vector posición barre áreas iguales.

Después de seguir el razonamiento de Kepler, el cual era erróneo, se fijó que los planetas se mueven más rápido mientras estén más cerca al Sol, esta sentencia es del todo correcta y verificable con el trabajo de Newton.



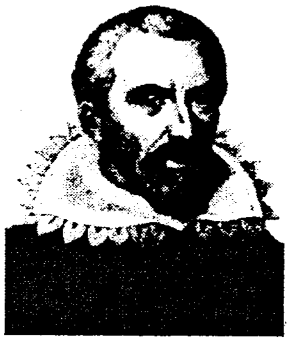
Siendo $S_1=S_2 \Rightarrow t_1=t_2$

¿Pero cómo es posible que el arco PM, que es mayor que el arco *KL*, se puede cubrir en igual tiempo? Esto es posible si el planeta se mueve más rápido cuando esta más cerca al Sol.

Nota

Esta ley es aplicable al movimiento de satélites naturales o artificiales cuando se mueven entorno a un planeta inclusive si los satélites siguen trayectorias circunferenciales.

A pesar de la inexactitud de las hipótesis planteadas para la deducción de esta segunda ley, ella describe aproximadamente el movimiento real de los planetas alrededor del Sol.

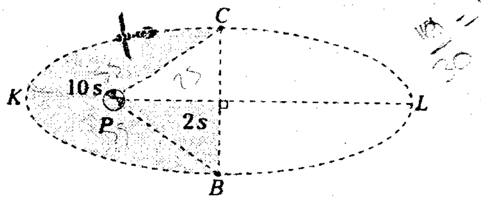


Johannes Kepler (1571–1630)

Destacado científico alemán, que dentro de sus trabajos en el campo de la física y matemáticas introducía interpretaciones místicas – religiosas. Se dedicó a desarrollar la astronomía casi con el mismo afán con que incentivo la astrología.

Ejemplo 1

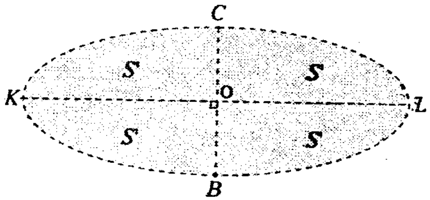
Un satélite al orbitar un planeta sigue el trayecto mostrado. Si emplea 30 horas en ir de C hacia B, ¿cuántas horas empleará en dar una vuelta completa? (AB y KL ejes principales).



Resolución

El tiempo que nos piden es el periodo de satélite (T_S), para calcularlo primero debemos tener en cuenta lo siguiente

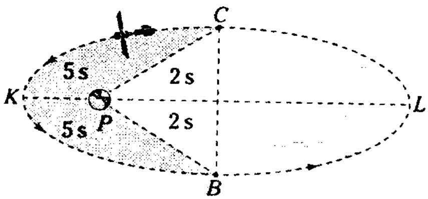
Al ser KL y CB los ejes principales de la elipse estos dividen a esta en cuatro regiones de igual área:



Aquí se cumple que

$$S_{COK} = S_{COL} = S_{BOK} = S_{BOL} = \frac{S_{\text{elipse}}}{4} = S'$$

Según esta propiedad para el satélite tenemos que



$$\frac{S_{\text{elipse}}}{4} = 7\text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad S_{\text{elipse}} = 28\text{ s}$$

Ahora para calcular el número de horas en dar una vuelta (T_{sat}), consideremos la Segunda Ley de Kepler

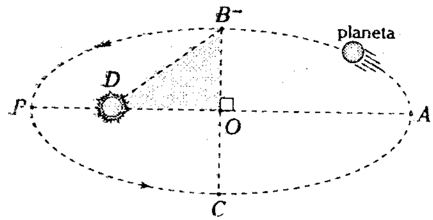
$$\frac{S_{CKBP}}{t_{CB}} = \frac{S_{\text{elipse}}}{T_{\text{sat}}}$$

$$\frac{10\text{ s}}{30\text{ h}} = \frac{28\text{ s}}{T_{\text{sat}}}$$

$$\therefore \quad T_{\text{sat}} = 84\text{ h}$$

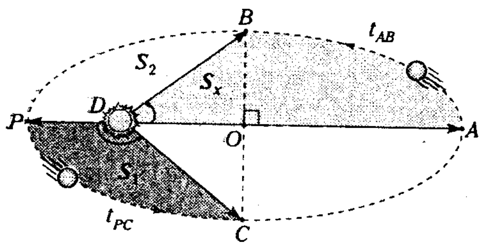
Ejemplo 2

Un planeta orbita en torno al Sol y describe una trayectoria elíptica, como indica la figura. Si el planeta demora 30 días al ir de P hacia C y de A hacia B 50 días y el área de toda la elipse es S, calcule el área SOB.



Resolución

Por dato $t_{PC} = 30$ días y $t_{AB} = 50$ días. Ahora a partir del Sol trazamos el radio vector y sombreamos las áreas que barre al orbitar el planeta



Nuestra tarea es expresar S_x en función de S (área total de la elipse)

Aprovechando la simetría respecto de los ejes PA y BC se tiene

$$S_{BDP} = S_{PDC}$$

Haciendo uso de la Segunda Ley de Kepler

$$\frac{S_{PDC}}{30} = \frac{S_{ADB}}{50} \Rightarrow \frac{S_{PDC}}{3} = \frac{S_{ADB}}{5} = b$$

$$\Rightarrow \quad S_{PDC} = 3b \text{ y } S_{ADB} = 5b$$

Del gráfico

$$S_{PDC} + S_x = S_{ADB} - S_x$$

$$3b + S_x = 5b - S_x$$

$$\boxed{S_x = b}$$

Finalmente se debe cumplir que

$$\underbrace{S_{PDC} + S_x}_{} = \frac{S}{4} \quad \left(\begin{array}{c}\text{la cuarta parte}\\ \text{del área total}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4b = 4S_x = \frac{S}{4}$$

$$\therefore \quad S_x = \frac{S}{16}$$

TERCERA LEY (Ley de los periodos)

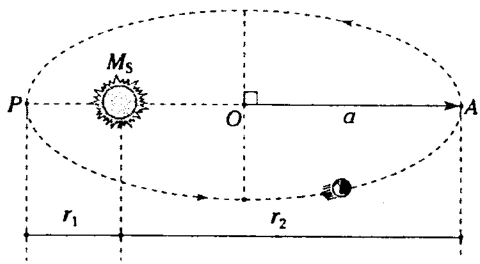
Kepler dio a conocer lo que hoy llamamos las dos primeras leyes del movimiento planetario en un libro titulado Nueva Astronomía (1609). En estas leyes no se encuentra ninguna relación entre el movimiento de los planetas, le pareció que cada planeta tiene su propia trayectoria elíptica y velocidad. A pesar de esto, Kepler estaba totalmente convencido de que debía haber una regla simple que permita relacionar el movimiento de los planetas. Para esto siguió una profunda tendencia que se ha manifestado casi a lo largo de toda la historia de la ciencia: **la simplicidad y uniformidad de la naturaleza**, esta creencia en lo simple para poder explicar las cosas ha sido manantial de inspiración y desarrollo.

Al buscar esta regla, Kepler incursionó en el campo musical y espero, así como los pitagóricos, encontrar una relación entre las órbitas y las notas musicales. Por esto su trabajo de 1629 se tituló **Armonías del mundo,** este libro resultó la continuación de otro **Misterio cosmográfico** (1597) y que reflejaba una obsesión de toda la vida: revelar el secreto del universo en una síntesis total de geometría, música, astrología y epistemología.

Esta ley que se expresa por una relación simple entre periodos y semiejes de la elipse, fue el resultado de toda una serie de pruebas, que al final representaba una serie de pacientes y constantes intentos, para lo cual Kepler luego halló una justificación: las cosas deben ser así y no de otra manera.

En virtud a lo cual Kepler estableció que

El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta que gira en torno al Sol es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica que describe.



En la figura para el planeta que órbita alrededor del Sol, su periodo

$$\boxed{T^2 = Ka^3}$$

(3ra Ley para un planeta)

donde

a = semieje mayor de la elipse y verifica

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Siendo K = constante que depende inversamente proporcional de la masa fija alrededor de la cual gira el planeta.
Al ser el Sol una masa fija se demuestra que

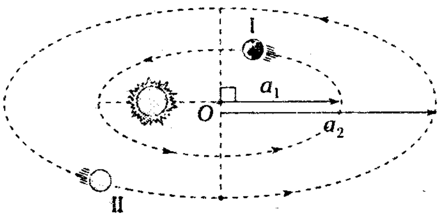
$$K = \frac{b}{M_{Sol}};\ b \text{ también es constante}$$

Si la masa fija es la Tierra,

$$K' = \frac{b}{M_{Tierra}}$$

Tercera Ley de Kepler para dos planetas que giran alrededor del Sol

Si los planetas giran con semiejes mayores R_1 y R_2 alrededor del Sol; podemos establecer lo siguiente



Para el primer planeta

$$T_1^2 = Ka_1^3 = \frac{b}{M_{Sol}}.a_1^3 \qquad \text{(I)}$$

Para el primer planeta

$$T_2^2 = Ka_2^3 = \frac{b}{M_{Sol}}.a_2^3 \qquad \text{(II)}$$

Dividiendo (I) ÷ (II)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}}$$

(Ley de los periodos para dos planetas)

A partir de esta relación podemos deducir que el planeta que tenga mayor semieje tendrá mayor periodo, es decir demorará mas en dar una vuelta entorno al Sol. Aquí podemos entender por qué los planetas más alejados del Sol; Neptuno, Urano y Plutón, demoran muchos más años (terrestres) en dar una vuelta.

Generalizando, la Tercera Ley de Kepler para los planetas que giran alrededor del Sol, tendremos

$$\boxed{\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^2} = \ldots = \frac{T_n^2}{a_n^3}}$$

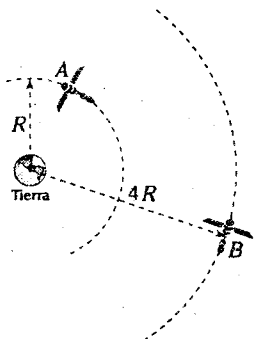
Esta ley, por consiguiente, también es válida para satélites que giran alrededor de un planeta.

Nota

La veracidad de esta ley se demuestra con la Ley de Gravitación de I. Newton. Por otro lado también es aplicable cuando la trayectoria de los planetas o satélites sea considerada prácticamente circunferencial, en este caso se cambia el semieje mayor (a) por el radio de la circunferencia.

Ejemplo 3

Se muestran dos satélites artificiales en torno de la Tierra con trayectorias circunferenciales. Si el de menor periodo da media vuelta en 32 horas, ¿cuál es el periodo del otro?



Resolución

Por lo dicho en la teoría, el satélite de mayor periodo debe estar más alejado de la Tierra, y el de menor periodo más cerca. Así el satélite da media vuelta en 32 h con lo cual presenta un periodo T_A = 64 h.

Para calcular el periodo del satélite B (T_B) podemos hacer uso de la Tercera Ley de Kepler.

$$\frac{T_A^2}{R_A^3}=\frac{T_B^2}{R_B^3}=\text{cte.} \quad \text{como } R_A=R \ \text{ y } \ R_B=4R$$

$$\Rightarrow \frac{(64\text{ h})^2}{R^3}=\frac{T_B^2}{(4R)^3} \Rightarrow \frac{(64\text{ h})^2}{\cancel{R^3}}=\frac{T_B^2}{64\cancel{R^3}}$$

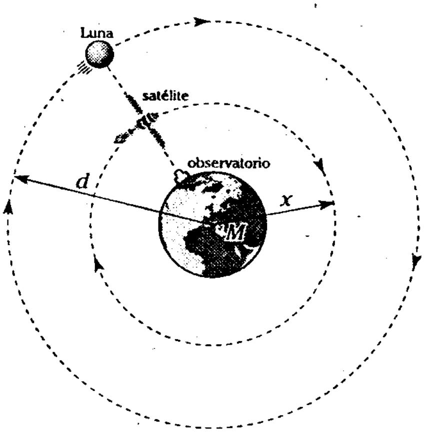
$$\therefore \ T_B=512\text{ h}$$

Ejemplo 4

Desde un observatorio, cuyo telescopio está orientado colinealmente al radio terrestre, se afirma que las posiciones de la Luna y un satélite artificial se vuelven a superponer. Cuando dicho satélite ha dado ocho vueltas alrededor de la Tierra, ¿a qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el satélite? (Considere que la distancia desde el centro de la Tierra hasta el centro de la luna es d y que las trayectorias son circunferenciales).

Resolución

Según el enunciado, podemos construir la siguiente gráfica:



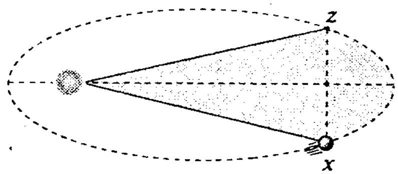
El satélite da ocho vueltas para que se vuelva alinear con la Luna, ello implica que demora menos tiempo en dar las vueltas, es decir, tiene menor periodo y por lo tanto le corresponde menor radio a su trayectoria. Se debe cumplir que $T_{\text{Luna}}=8T_{\text{sat}}$ para calcular x. Para determinar x, para la Luna y el satélite planteamos la Tercera Ley de Kepler.

$$\frac{T_{\text{Luna}}^2}{d^3}=\frac{T_{\text{sat}}^2}{x^3} \Rightarrow \frac{(8T_{\text{sat}})^2}{d^3}=\frac{T_{\text{sat}}^2}{x^3}$$

$$\therefore \ x=\frac{d}{4}$$

Ejemplo 5

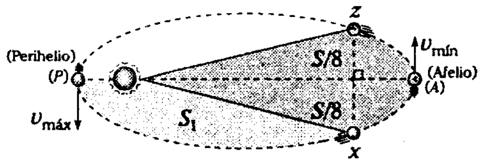
Un planeta P gira alrededor del Sol en órbita elíptica y demora 3 meses en llegar al punto x después de alcanzar su máxima rapidez. ¿Qué tiempo se demora en llegar a z, después que alcanzó su mínima rapidez? (Considere el área sombreada representa un cuarto del área de la elipse)



Resolución

Las posiciones $x-z$ son simétricas respecto al eje mayor de la elipse. ¿Dónde la rapidez del planeta es máxima y mínima? Al plantear la Segunda Ley de Kepler se estableció que la rapidez de un planeta y su distancia al Sol guardan relación inversa. Concluimos de esta manera que

- En el perihelio, punto más cercano al Sol, la rapidez es máxima.
- En el afelio, punto más lejano al Sol, la rapidez es mínima.



Dato: área sombreada es $\dfrac{S}{4}$

Nos piden tiempo desde el afelio (A) hasta z: $t_{AZ} = ?$

De acuerdo a la ley de las áreas de Kepler, el área barrida es proporcional al tiempo

A_{barrida} D.P. t

Por dato, el tiempo desde el perihelio (p) hasta x es

$\Rightarrow \quad t_{px} = 3$ meses

Luego en la figura, el área barrida en dicho intervalo sería

$$S_1 = \frac{S}{2} - \frac{1}{8}S = \frac{3}{8}S$$

desde el perihelio (p) hasta x, por ley de áreas tenemos

$$\frac{S_1}{t_{px}} = \frac{S/8}{t_{AZ}}$$

$$\frac{\frac{3}{8}S}{3} = \frac{\frac{5}{8}}{t_{AZ}}$$

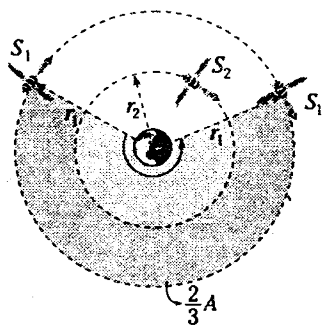
$$\therefore \quad t_{AZ} = 1 \text{ mes}$$

Ejemplo 6

Dos satélites S_1 y S_2, orbitan circunferencialmente alrededor de un mismo planeta. El primer satélite barre en 144 horas los 2/3 del área total de su órbita. Si el segundo satélite tiene un periodo igual a 27 horas, halle la relación r_1/r_2 de los radios orbitales.

Resolución

Bosquejemos lo que acontece



El satélite S_1 tiene un radio orbital r_1 que barre $\frac{2}{3}A$ de su área total en un $t = 144$ horas. Podemos plantear regla de tres simple para saber en cuanto tiempo barre su área total (A).

$$A(\text{área total}) \xrightarrow[\text{en}]{\text{barre}} t = T_1 (\text{periodo})$$

Por lo tanto

$$\frac{2}{3}A \xrightarrow[\text{en}]{\text{barre}} 144 \text{ h}$$

$$\Rightarrow \cancel{A}(144) = \frac{2}{3}\cancel{A}(T_1)$$

$$T_1 = 216 \text{ h}$$

El satélite S_2 tiene un radio r_2 que barre toda el área circular a un tiempo $t = 27$ h, el cual es su periodo.

$\Rightarrow \quad T_2 = 27$ h

Para hallar r_1/r_2 usaremos la Tercera Ley de Kepler.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

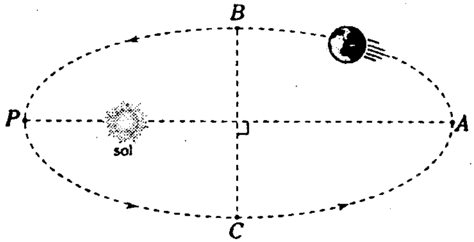
$$\Rightarrow \quad \frac{(216)^2}{r_1^3} = \frac{(27)^2}{r_2^3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{216}{27}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{r_1}{r_2} = 4$$

Ejemplo 7

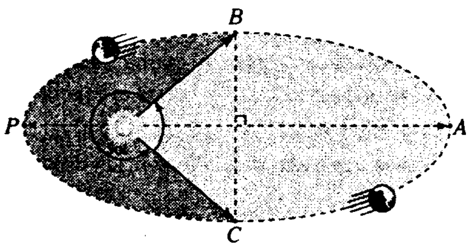
Dado el movimiento planetario mostrado examine las proposiciones siguientes e indique cuáles son verdaderas o falsas.



- El tiempo que emplea el planeta en ir de B hacia C es igual al tiempo que demora en ir de C hacia B.
- El intervalo de tiempo que emplea el planeta en ir de P hacia C es menor que al ir de A hacia B.
- El tiempo que demora el planeta en ir de A hacia B es similar al tiempo que demora en ir de B hacia P.

Resolución

De acuerdo a la Segunda Ley de Kepler, las áreas que barre el radio vector es proporcional al tiempo transcurrido.



Vemos que

$$\left.\begin{array}{l} A_{BPC} = Kt_{BPC} \\ A_{CAB} = Kt_{CAB} \end{array}\right\} \frac{A_{BPCS}}{A_{CABS}} = \frac{t_{BPC}}{t_{CAB}}$$

se puede notar que

$$A_{BPC} < A_{CAB}$$

$$\therefore\ t_{BPC} < t_{CAB}$$

La primera proposición es **falsa**

De la figura se cumple que

$$\underbrace{A_{PCS}} < \underbrace{A_{ABS}}$$

$$\Rightarrow \cancel{K}t_{PCS} < \cancel{K}t_{ABS}$$

$$\therefore\ t_{PCS} < t_{ABS}$$

La segunda proposición es **verdadera**

En el tramo de A hacia B se puede apreciar que

$$\underbrace{A_{ABS}} > \underbrace{A_{BPS}}$$

$$\Rightarrow \cancel{K}t_{ABS} > \cancel{K}t_{BPS}$$

$$\therefore\ t_{ABS} > t_{BPS}$$

La tercera proposición es **falsa**

Observaciones sobre las Leyes de Kepler

1. Las leyes de Kepler nos permiten describir cinemáticamente el movimiento de los planetas.
2. La causa del movimiento planetario no es la rotación del Sol como la planteó Kepler quien estableció que el Sol al girar, con impulsos magnéticos constantes arrastra a los planetas que le rodean en la dirección de su rotación, pero quedaba la duda....¿por qué el tiempo de revolución de los planetas alrededor del Sol se diferencia del periodo de revolución del Sol alrededor de su eje?

Kepler al respecto afirmó : *Si los planetas no hubieran poseído resistencias naturales, sería imposible señalar las causas que les impidieran seguir la rotación del Sol. Sin embargo, a pesar de que en realidad todos los planetas (los que se conocían hasta ese entonces) se mueven en la misma dirección en que se realiza no es igual. La cuestión reside en que estos mezclan en ciertas proporciones la rutina de su propia masa con la rapidez de su movimiento.*

Kepler no pudo comprender que la coincidencia de las direcciones del movimiento de los planetas alrededor del Sol, con la rotación de éste alrededor de su eje, no estuviera relacionada con las leyes de carácter geométrico del movimiento planetario, sino con el origen de nuestro sistema planetario solar. Un satélite o planeta artificial puede ser lanzado tanto en la dirección de la rotación del Sol, como en contra de esta rotación.

Podemos comprender entonces las limitaciones que tenía Kepler para plantear y sustentar la causa del movimiento planetario. Esta limitación fue investigada, analizada y explicada por Newton. Producto de las profundas investigaciones y otros aportes de los científicos de su época, Newton descubre una de las leyes fundamentales de la naturaleza: la Ley Universal de la Gravitación.

DATOS PLANETARIOS

Nombre	Masa (comparada con la de la Tierra)*	Densidad media ($\times 10^3 Kg/m^3$)	Gravedad en la superficie (comparada con la de la Tierra)	Periodo Años
Mercurio	0,0553	5,43	0,378	0,24084
Venus	0,8150	5,24	0,894	0,61515
Tierra	1	5,515	1	1,00004
Marte	0,1074	3,93	0,379	1,8808
Júpiter	317,89	1,36	2,54	11,862
Saturno	95,17	0,71	1,07	29,456
Urano	14,56	1,30	0,8	84,07
Neptuno	17,24	1,8	1,2	164,81
Plutón	0,02	0,5-0,8	0,03	248,53

* Masa del planeta/masa de la Tierra, en donde $M_T=6,0\times 1024$kg

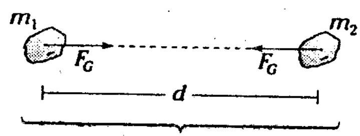
LEY UNIVERSAL DE LA GRAVITACIÓN

A través de los años se comenta y divulga que Newton comenzó sus estudios sobre la gravitación a raíz de la caída de una manzana de un árbol. No se sabe a ciencia cierta si este hecho es verídico, pero en lo que no cabe ninguna duda es en su aporte a este campo con su famosa ley de gravitación y las leyes del movimiento de los cuerpos celestes dadas a conocer simultáneamente, en 1687, cuando se publica su obra maestra *Principios matemáticos de la filosofía natural.*

A Newton le preocupó el movimiento de la Luna en torno de nuestro planeta, este hecho lo asemejó con el movimiento de una piedra dando vueltas atada a un hilo, con ello estableció que la Tierra ejerce una acción atractiva a la Luna. A partir de aquí, Newton se preguntaba: *si la caída de los cuerpos en la superficie de la Tierra y el movimiento de la Luna en torno a ella estaban sujetos a la misma ley natural?* Después de comparar la aceleración centrípeta de la Luna y la aceleración de caída de los cuerpos en la Tierra, el resultado obtenido permitió a Newton establecer lo siguiente:

Dos partículas cualesquiera se atraen mutuamente con una fuerza cuyo módulo es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

Según esto planteamos



Interacción gravitacional

$$\boxed{F_G = G\frac{m_1 m_2}{d^2}}$$

Ley universal de la gravitación

donde

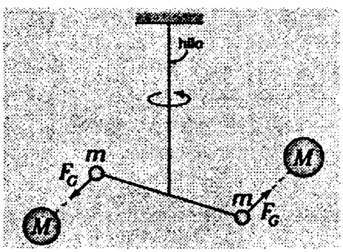
m_1 y m_2 : en kilogramo (kg)
d : en metro (m)
F_G : en Newton (N)
G : que es una constante de proporcionalidad hoy llamada constante de gravitación Universal en $\dfrac{N.m^2}{kg^2}$

Con respecto a la ley de gravitación se considera que es válida para partículas, vale decir para cuerpos cuyas dimensiones sean muy pequeñas comparadas con su separación. El propio Newton demostró, mediante el cálculo integral, que su ley es aplicable a esferas homogéneas y la distancia (d) se mide entre sus centros.

Nota

La fuerza de atracción gravitacional o fuerza gravitatoria es una fuerza central, que actúa a lo largo de la línea que une a las partículas o los centros de masa de cuerpos cuyas dimensiones se toman en cuenta.

Sobre a la constante de gravitación, Newton no pudo establecer su valor. Años posteriores de haberse establecido la ley universal de la gravitación el monje y físico inglés G. Cavendish empleó un instrumento extremadamente sensible, uno balanza de torsión. Con esta balanza (ver figura) pudo determinar la fuerza con la cual eran atraídas dos bolas pequeñas de plomo (730 g cada uno) por otras dos más grandes, también de plomo (158 kg cada uno)



Esquema simplificado de la balanza de torsión de Cavendish.

En sus experimentos, Cavendish notó por primera vez la atracción mutua entre dos cuerpos, también fue él quien determinó por vía experimental el valor de la constante de gravitación.

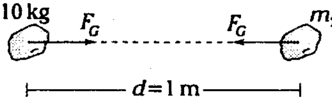
$$G = 6{,}64 \times 10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$$

Mediciones recientes han determinado que

$$\boxed{G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}}$$

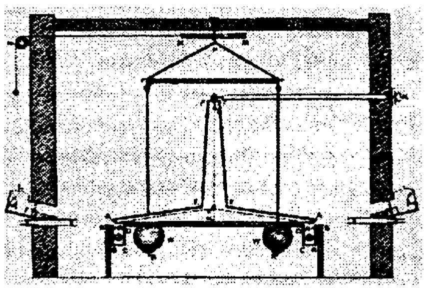
Podemos notar que el valor de la constante de gravitación es extremadamente pequeña. Esto trae como consecuencia, que el valor de la fuerza de atracción entre dos cuerpos de masa pequeña (comparada con la Tierra) sea despreciable. Por ejemplo evaluemos la fuerza de atracción entre dos cuerpos de 10 kg cada uno y separados 1 m.

Hacemos uso de la ley de gravitación



$$F_G = G\frac{m_1m_2}{d^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}(10)(10)}{(1)^2}$$

$$\therefore\ F_G = 6{,}67\times10^{-9}\,N = 0{,}00000000667\ N$$



El equipo usado por Cavendish le permitió determinar el valor de la constante de gravitación y a la vez ser el primero en pesar la Tierra. ($M_T = 6 \times 10^{24}$ kg).

Después de ver el resultado anterior, ¿en qué casos el valor de la fuerza de gravitación se toma en cuenta? Esto básicamente se aprecia cuando uno de los dos cuerpos que participa es de una masa considerable (un planeta, estrella, satélite, etc.)

Nota

La constante de gravitación universal (G) tiene un valor que puede ser interpretado físicamente. De la ley universal de la gravitación despejemos G.

$$G = \frac{F_G.d^2}{m_1.m_2} \qquad (\text{I})$$

y como

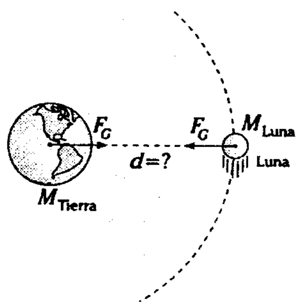
$$G = 6{,}67^{-11} \times \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{(6{,}67\times10^{-11}\text{N})(1\,\text{m})^2}{(1)^2} \qquad (\text{II})$$

Después de comparar (I) y (II) se concluye que la constante de gravitación es numérica igual a la fuerza con la cual se atrae dos cuerpos, cada uno de 1 kg y separados un metro.

Ejemplo 8

Se ha determinado que la Tierra ($M_{\text{Tierra}} = 6\times10^{24}$ kg) atrae a la Luna $\left(M_{\text{Luna}20} = 7\times10^{22}\text{ kg}\right)$ con una fuerza de módulo $(1{,}9).10^{20}$ N. ¿Qué distancia hay entre los centros de estos cuerpos?

Resolución



Considerando a la Tierra y la Luna como unas esferas homogéneas, podemos aplicar la ley de gravitación para determinar d.

$$F_G = G\frac{M_1M_2}{d^2}$$

Reemplazando datos

$$(1{,}9)\,10^{20} = \frac{(6{,}67\times10^{-11})(6\times10^{24})(7\times10^{22})}{d^2}$$

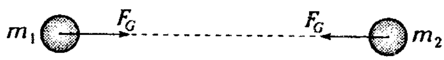
$$d^2 = 280{,}14\times\frac{10^{35}}{(1{,}9)10^{20}}$$

$$d^2 = 147{,}4\times10^{15}\text{ m}$$

$$\therefore\ d \approx 384\times10^{7}_{\text{m}} = 384\,000\text{ km}$$

Ahora pasemos a describir los argumentos que le permitieron a Newton establecer su famosa ley de gravitación.

1. La aceleración de la gravedad (de caída libre) en un lugar dado es igual para todos los cuerpos independientemente de sus masas. El hecho de que la aceleración no dependa de la masa del cuerpo se debe a que la propia fuerza con la cual la Tierra atrae a los cuerpos es proporcional a su masa. Según la ley de acción de reacción, las fuerzas de atracción entre cuerpos son de igual valor y con esto Newton señaló que dicha fuerza debe ser proporcional a la masa de cada uno de los cuerpos.

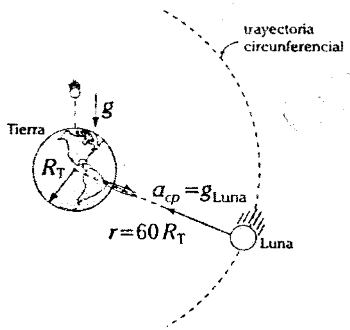


F_G D.P. m_1 y
F_G D.P. m_2

Si la fuerza de atracción es proporcional a la masa de cada cuerpo, entonces también es proporcional al producto de las masas.

F_G D.P. m_1m_2

2. Newton estableció la dependencia de la fuerza de atracción con la distancia. Llevando a cabo unos cálculos sencillos:



Si la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende en forma inversa al cuadrado de la distancia, la aceleración de caída libre para la Luna debe cumplir con

$$g_{Luna} = \frac{g}{(60)^2} = \frac{9{,}8\ m/s^2}{3\,600} = 2{,}72\times10^{-3}\ m/s^2$$

Según Newton, esta aceleración de la gravedad para la Luna debe ser su aceleración centrípeta.

$$a_{cp} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . r$$

donde

T: periodo de la Luna (apróx. 27,3 días)

r : radio de su trayectoria y equivale a 60 veces el radio terrestre (R_T = 6 370 km)

Reemplazando los valores

$$a_{cp} = \frac{4\pi^2(60\times6370\times10^3)}{(27{,}3\times86400)^2}$$

Efectuando

$$a_{cp} \approx 2{,}72\times10^{-3}\ m/s^2$$

Comparando los valores obtenidos tenemos

$$a_{cp} \approx g_{Luna} \approx 2{,}72\times10^{-3}\ m/s^2$$

Con este resultado Newton quedó completamente convencido de que la fuerza con la cual los cuerpos caen sobre la superficie y la fuerza que mantiene en órbita a la Luna son de la misma naturaleza y su valor depende en forma inversa del cuadrado de la distancia.

Las dos observaciones realizadas le permitieron a Newton formular matemáticamente su ley de gravitación como hoy la conocemos. Aquí hay que tener en cuenta que la ley de gravitación fue establecida siguiendo una generalización de datos experimentales, esto hace a la ley de gravitación una ley indemostrable que se obtuvo mediante un razonamiento inductivo, y que puede ser planteada ante cualquier hecho y verificar su validez.(la aplicación de esta se extiende a otros casos similares).

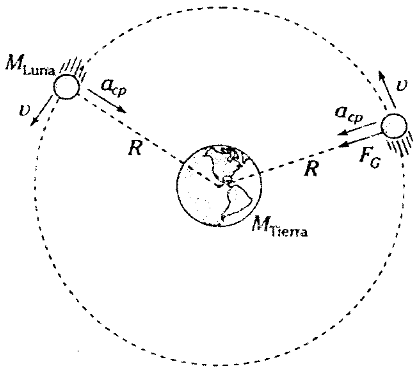
A pesar de que la ley de gravitación no se puede demostrar mediante argumentos teóricos, no implica que no tenga aplicaciones. Newton el hacer uso de su ley pudo explicar y demostrar las leyes de Kepler, también pudo explicar el surgimiento de las mareas en el día y la noche. Por otro lado, algunos científicos contribuyeron a que esta ley tenga más aceptación, entre ellos podemos citar a Edmond Halley, astrónomo inglés y amigo íntimo de Newton. Halley calculó con las fórmulas de Newton el tiempo que emplearía en su segunda aproximación al Sol, un cometa brillante (hoy cometa Halley) que se observaba en el cielo en aquellos tiempos. El cometa retorno en el intervalo de tiempo rigurosamente calculado, confirmando así la brillantez de la teoría.

Edmond Halley (1656 – 1742)

Conjuntamente con R. Hooke concluyeron, aunque por caminos diferentes, que la verdadera Ley de gravitación es la del inverso del cuadrado (conclusión a la cual había llegado Newton con anterioridad)

Ejemplo 9
Haciendo uso de la ley de gravitación, demuestre la tercera ley de Kepler para nuestro satélite natural.

Resolución
Podemos aproximar la trayectoria de la Luna entorno de la Tierra como una circunferencia y además considerar un M.C.U. para la Luna.



La atracción de la Tierra sobre la Luna $(\vec{F}_G)$, mantiene a esta en órbita alrededor de la primera y representa la fuerza centrípeta $(\vec{F}_{cp})$.
Considerando la Segunda Ley de Newton sobre la Luna.

$$F_{cp} = m_{\text{Luna}} a_{cp}$$

$$F_G = m_{\text{Luna}}(\omega^2 R); \text{ pero } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{GM_{\text{Tierra}} m_{\text{Luna}}}{R^2} = m_{\text{Luna}}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 .R$$

$$\Rightarrow \frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

De donde

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Tierra}}}$$

G : cte. de gravitación
M_{Tierra} : masa de la Tierra

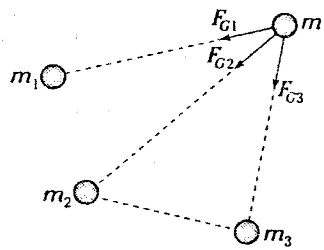
Como vemos los factores del segundo miembro 4, π, G y M_{Tierra} son constantes.

$$\therefore \frac{T^2}{R^3} = K(\text{cte.})$$

Esto refleja que el cuadrado del periodo de traslación de la Luna es proporcional al cubo del radio de su trayectoria circunferencial (Tercera Ley de Kepler).

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN PARA LA LEY DE GRAVITACIÓN

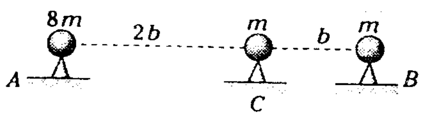
A partir de la experiencia se ha podido confirmar que si sobre un cuerpo se manifiesta la atracción simultánea de dos o más cuerpos, dichas atracciones se pueden superponer, vale decir sumar para un conjunto de partículas (distribución discreta) que podamos tener.



Se verifica que la fuerza gravitatoria resultante sobre m se determinaría como la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre dicha masa.

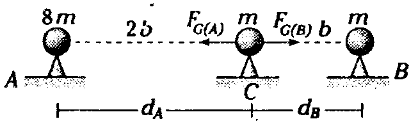
$$\boxed{\vec{F}_G = \vec{F}_{G1} + \vec{F}_{G2} + \vec{F}_{G3}}$$

Ejemplo 10
A partir de la figura, determine el módulo de la fuerza gravitatoria resultante sobre C.



Resolución

Las esferas A y B sobre C ejercen atracción.

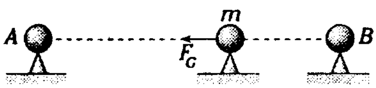


Haciendo uso de la ley de gravitación calculemos $F_{G(A)}$ y $F_{G(B)}$

$$F_{G(A)}=G\frac{m_Am}{d_A^2}=G\frac{(8m)m}{(2b)^2}=\frac{2Gm^2}{b^2}$$

$$F_{G(B)}=G\frac{m_Bm}{d_B^2}=G\frac{(m)m}{(2b)^2}=\frac{Gm^2}{b^2}$$

Notamos que como $F_{G(A)} > F_{G(B)}$, entonces C tiende a moverse hacia A.

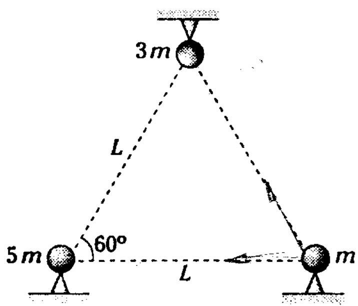


$$F_G=F_{G(A)}-F_{G(B)}$$

$$\therefore\ F_G=\frac{Gm^2}{b^2}$$

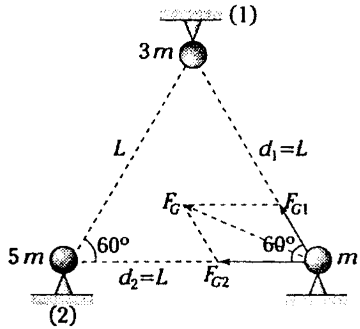
Ejemplo 11

Determine el módulo de la fuerza de gravitación resultante sobre m.



Resolución

Según las condiciones dados en el triángulo, él es equilátero. Ahora grafiquemos la atracción que ejerce $3m$ y $5m$ a M.



Mediante el método del paralelogramo hemos obtenido gráficamente la fuerza gravitatoria resultante sobre m, su valor lo obtenemos por medio de

$$F_G=\sqrt{F_{G1}^2+F_{G2}^2+2F_{G1}F_{G2}\cos 60^\circ} \qquad \text{(I)}$$

Determinemos F_{G1} y F_{G2} con la ley de gravitación.

$$F_{G1}=G\frac{m_1m}{d_1^2}=G\frac{(3m)m}{L^2}=3\frac{Gm^2}{L^2}$$

$$F_{G2}=G\frac{m_2m}{d_2^2}=G\frac{(5m)m}{L^2}=5\frac{Gm^2}{L^2}$$

Reemplazando en (I) y operando se obtiene

$$F_G=7G\frac{m^2}{L^2}$$

Ahora podríamos preguntarnos ¿qué esfera experimenta una mayor fuerza gravitacional?

Se puede demostrar, siguiendo los razonamientos anteriores, que la esfera de masa es **5 m** y que su valor es $5\sqrt{15}G\frac{m^2}{L^2}$.

LECTURA

DESCUBRIMIENTO DE UN NUEVO PLANETA: NEPTUNO

De todas las aplicaciones que ha recibido la ley newtoniana de la gravitación universal, probablemente ninguna excitó tanto la imaginación como la ayuda que prestó al descubrimiento del planeta Neptuno.

Desde el tiempo de las primeras noticias escritas los hombres conocían seis planetas. Ningún otro se había añadido a la lista en la historia de la Humanidad, hasta que en 1781 William Herschel (1738-1822) encontró durante su sistemático mapeo del cielo un objeto inusitado. Lo era porque se movía con lentitud contra el fondo de las estrellas, habiéndose pensado en un principio que se trataba de un cometa. Pronto se encontró que era un planeta en una órbita más allá de Saturno, y que necesitaba alrededor de 84 años para describir una revolución en torno al Sol. Se le dio el nombre de Urano. Los astrónomos, partiendo de observaciones poco distantes en cuanto a tiempo, encontraron posible trazar el curso futuro del planeta. Pero en 1821 se advirtieron discrepancias precisas entre las posiciones predichas y las observadas de este último planeta. Se proyectó la órbita de nueva cuenta, pero en 1844 fue evidente que alguna cosa estaba nuevamente en un error. Algunos astrónomos sugirieron que la ley de gravitación no operaba a la enorme distancia a la que se encontraba Urano; pensaron otros que un cometa o planeta distante podía ser la causa de la perturbación en su movimiento.

Fue esta seguida por un joven estudiante de la Universidad de Cambridge, J. G Adams. En su trabajo matemático, que continuó durante dos años después de su graduación, Adams finalmente concluyó que debía ser un planeta más allá de Urano el que afectaba el movimiento de este por atracción gravitacional. Incluso llegó a predecir la posición que el nuevo planeta tenía en el cielo. Siguió a ello un conjunto de acontecimientos desafortunados para Adams, quien perdió el crédito por el hallazgo del nuevo planeta.

En 1845 llevó su trabajo a Airy, el astrónomo real sólo para descubrir que éste estaba muy ocupado, le dejó un informe escrito para que lo examinase posteriormente y Airy escribió a Adams para recabar mayor información. Los observadores estaban atareadísimos, pero finalmente, uno de los miembros del observatorio dio principio a una investigación.

Mientras tanto en Francia, Leverrier realizaba independientemente estudios similares basados en la ley de Newton, y a su tiempo llegó también a una predicción del lugar del cielo ocupado por el planeta desconocido. Cuando en 1846 escribió al astrónomo alemán Gaulle, se emprendió inmediatamente una investigación y en una noche Gaulle había localizado el nuevo planeta. Tenía Leverrier, como descubridor, el derecho de bautizarlo y lo llamó Neptuno.

FUENTE: Ciencia Física. AUTOR: R. Lageman. Editorial UTEHA. Pág.: 168

CAMPO GRAVITATORIO

Hasta ahora hemos señalado que dos cuerpos al estar a cierta distancia se atraen mutuamente, mas ¿qué hace posible que ocurra ello? ¿por qué se originan fuerzas gravitacionales entre los cuerpos? El mecanismo de la interacción gravitacional ha sido un problema que muchos científicos han querido resolver.

Newton resaltaba que la causa de la interacción se puede hallar si primero se estudian las propiedades y características de la gravitación, durante muchos años meditó acerca del mecanismo de la interacción. La fuerza gravitacional actúa a centenares y miles de millones de kilómetros en el espacio, que al parecer es absolutamente vacío. Newton negaba este hecho y planteaba: *El suponer que un cuerpo pueda influir sobre otro a cualquier distancia en un espacio vacío, sin ayuda de algo, transmitiendo la acción y la fuerza, es, a mi juicio, un absurdo tan grande que resulta inconcebible para el que entiende bien los objetos filosóficos.*

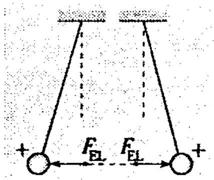
Newton, en su búsqueda a la solución del surgimiento de fuerza gravitacional, supone la existencia de un medio muy peculiar, **el éter**, que permitía la propagación de la fuerza.

Cuando a Newton se le preguntaba acerca de las propiedades de este nuevo medio, él respondía: *Carecemos de datos experimentales con los cuales las leyes de acción de ese éter estarían estrictamente determinadas y mostradas.* Newton, sin poder salir del embrollo que el mismo género, deja este medio fantástico, lo cual se ve reflejado cuando en sus principios (1687) enuncia su ley de gravitación sin hacer uso de un medio etéreo para explicar el surgimiento de la atracción.

En los últimos años de su actividad, Newton argumentaba que la atracción gravitatoria se lleva a cabo sin necesidad de un medio en particular o intermediario; además planteaba que dicha atracción se propagaba en el espacio con una velocidad fantástica (infinita). Con estos dos últimos detalles Newton sale airoso de dos inconvenientes que le generaban sus contemporáneos acerca de su ley de gravitación ¿Por qué su ley de gravitación no depende del medio que rodea a los cuerpos ni del tiempo?

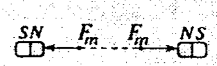
El lector podrá responder si analiza solamente los planteamientos últimos.

Tuvieron que pasar varias décadas para que se pudiera explicar el proceso de atracción entre cuerpos de cierta masa, pero la solución no se encontró en el terreno de la gravitación, sino en el terreno de la electricidad y el magnetismo. Entre los años 1820 y 1850 un científico inglés, Faraday, después de estudiar minuciosamente sus experimentos con imanes y cuerpos electrizados llegó a postular que la atracción o repulsión entre estos cuerpos se debe llevar a cabo por un intermediario, es decir un medio material entre ellos. A este medio hoy en día lo llamamos campo.



INTERACCIÓN ELÉCTRICA

Se describe mediante un campo eléctrico

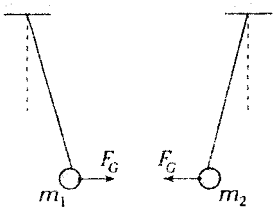


INTERACCIÓN MAGNÉTICA

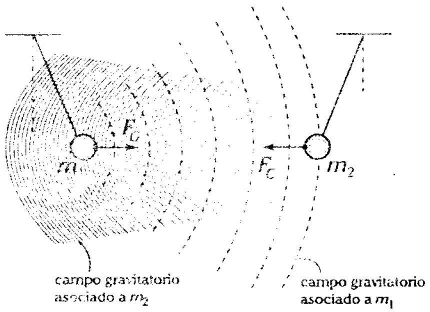
Se describe mediante un campo magnético

El campo, que surgió primero como una solución al paso, hoy en día sabemos que es una realidad objetiva; existe fuera e independiente de nuestra conciencia. Además el campo es un medio material (diferente a la sustancia) que nos explica en este nivel como se lleva a cabo el mecanismo de la interacción gravitacional.

Para hacer las descripciones, hoy en día planteamos lo siguiente **a todo cuerpo que tenga cierta masa le asociamos un campo gravitatorio**, el cual le permite actuar sobre otros cuerpos que tengan masa. Según lo cual, podemos plantear lo siguiente:



Esto lo explicamos asociando a cada masa, m_1 y m_2, un campo gravitatorio y se tendría descrita la interacción gravitacional.



En la figura se muestra que m_1 atrae a m_2 por medio de su campo y viceversa. Note que m_1 no actúa directamente sobre m_2, además que el campo gravitatorio es considerado como un agente transmisor de la acción de un cuerpo sobre otro.

Esta descripción dada para la atracción gravitacional entre dos masas está dentro de los márgenes clásicos, ya que en la actualidad la teoría general de la relatividad de A. Einstein la ha superado y explica la atracción gravitacional como consecuencia natural de la deformación del espacio y tiempo.

Nota

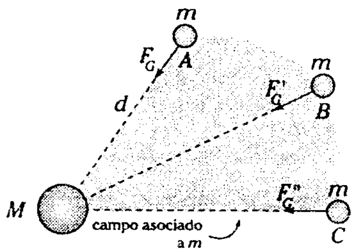
El campo gravitatorio es una forma particular de la materia se encuentra asociado a todo cuerpo masivo. Este medio material se diferencia de la sustancia (sólido, líquido o gas) ya que no es detectado directamente por nuestros sentidos, de ahí que al campo se le considere como un medio continuo material no sustancial.

Albert Einstein en 1916 publicó su teoría de la relatividad general que revisa la visión de Newton sobre el espacio y tiempo esta teoría fue comprobada durante un eclipse total del Sol, en 1919.

INTENSIDAD DE CAMPO GRAVITATORIO $(\vec{g})$

A todo cuerpo masivo le asociamos un campo gravitatorio, por ejemplo a la Tierra, gracias a su campo, atrae a todos los cuerpos que están cerca a su superficie y también a los que están lejos, como la Luna y demás planetas. Esto refleja que la acción que se transmite a través del campo se da en muchas posiciones, pero en cada una de ellas no se da con la misma intensidad; es por ello que resulta necesario caracterizar cada uno de los puntos donde el campo se encuentra extendido.

Consideremos a un cuerpo de masa M y una masa de prueba m, cuyo m es pequeño para que así no distorsione mucho el campo gravitatorio asociado a M.



La masa de prueba m en las posiciones que se indica experimenta una fuerza gravitacional. El cuerpo M también experimenta una fuerza contraria de igual valor, sin embargo lo que nos interesa es lo que pasa con m en las posiciones dadas.

Para la posición A, la fuerza de atracción viene dada por $F_G = G\dfrac{Mm}{d^2}$, según esto al ir en aumento m, la F_G también lo hace en la misma medida. Entonces en A planteamos que

F_G es D.P. m

$$\Rightarrow \frac{F_G}{m} = \text{cte.} = g_A$$

donde

g_A : es intensidad de campo gravitatorio en la posición A.

¿Y qué viene a ser la intensidad de campo gravitatorio?

La intensidad del campo gravitatorio es una magnitud física que caracteriza vectorialmente cada uno de los puntos de una región donde existe un campo gravitatorio. En un punto se define matemáticamente cómo la fuerza de atracción gravitatoria experimenta una masa de prueba por unidad de masa

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}}$$

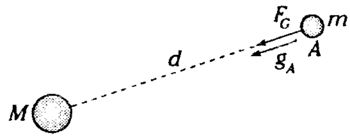
Unidades

$\vec{F}_G$: en Newton (N)

m : en kilogramo (kg)

$\vec{g}$: en $\dfrac{\text{N}}{\text{kg}} <> \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Como sabemos m siempre es una cantidad positiva, ello trae como consecuencia que la $\vec{g}$ y la $\vec{F}_G$ siempre tengan la misma dirección.



Para la posición A determinemos la g_A y por definición

$$g_A = \frac{F_G}{m} = \frac{G\dfrac{M\cancel{m}}{d^2}}{\cancel{m}} = \frac{GM}{d^2}$$

$$\therefore \boxed{g_A = G\frac{M}{d^2}} \qquad \text{(I)}$$

Unidades

M : kilogramo (kg)

d : metro (m)

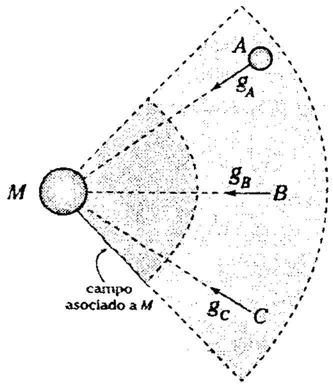
g : $\dfrac{\text{N}}{\text{kg}} <> \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Esta última fórmula permite establecer algo muy importante.

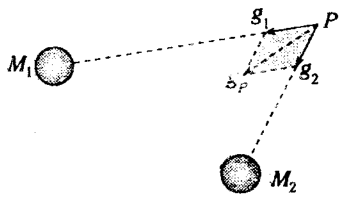
La intensidad de campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto del espacio es independiente de la masa de prueba que se coloque en dicho punto. Esta conclusión permite expresar que el campo gravitatorio es continuo en el espacio y en el tiempo.

Después de este último comentario, podemos resumir para las cuestiones prácticas lo siguiente:

1. A cada punto de una región donde exista un campo gravitatorio le definimos una intensidad de campo gravitatorio. Para el caso de un cuerpo (partícula) se tiene



2. La intensidad de campo gravitatorio en un punto debido a una partícula se grafica en dirección a esta a lo largo de la línea que une al punto y la partícula.
3. **Principio de superposición.**
   Para una distribución discreta de partículas masivas, la intensidad de campo gravitatorio en un punto se determina al superponer (sumar) la intensidad que origina cada partícula en dicho punto. Por ejemplo



Aquí se verifica

$$\boxed{\vec{g}_p = \vec{g}_1 + \vec{g}_2}$$

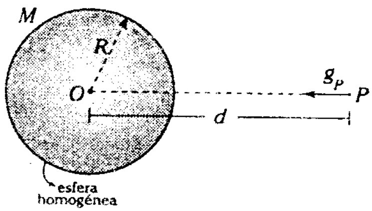
$\vec{g}_p$: representa la intensidad de campo gravitatorio resultante en p.

Para el caso de n cuerpos (partículas) se plantea que

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \ldots + \vec{g}_n}$$

Nota

La fórmula que se demostró (θ); es válida para partículas, es decir, cuerpos cuyas dimensiones sean pequeñas comparadas con las distancias. Sin embargo dicha fórmula también es aplicable para cuerpos esféricos homogéneos, por ejemplo:



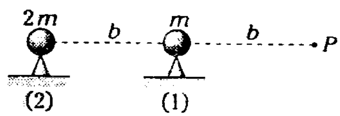
Se demuestra, por ejemplo, mediante el cálculo integral

$$\boxed{\vec{g}_p = G\frac{M}{d^2}}$$

Como se nota aquí d se mide a partir del centro del cuerpo esférico.

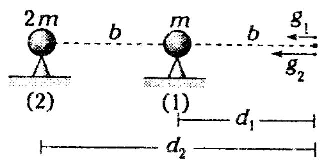
Ejemplo 12

A partir de la figura, determine la intensidad del campo gravitatorio en P.



Resolución

Debemos graficar la intensidad de cada partícula ya que nos piden la resultante en P.



En P se verifica que

$$g_P = g_1 + g_2 \qquad \text{(II)}$$

ya que tienen la $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ misma dirección.

Determinamos g_1 y g_2 haciendo uso de la fórmula (II):

$$g_1 = G\frac{m_1}{d_1^2} = G\frac{(2m)}{(2b)^2} = \frac{1}{2}G\frac{m}{b^2}$$

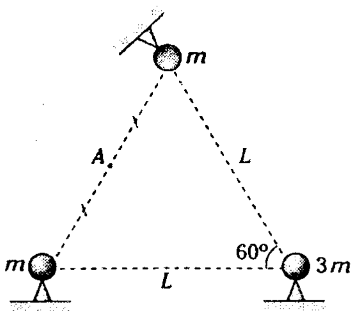
$$g_2 = G\frac{m_2}{d_2^2} = G\frac{(m)}{b^2} = G\frac{m}{b^2}$$

Reemplazando en (II)

$$g_P = \frac{3}{2}G\frac{m}{b^2}$$

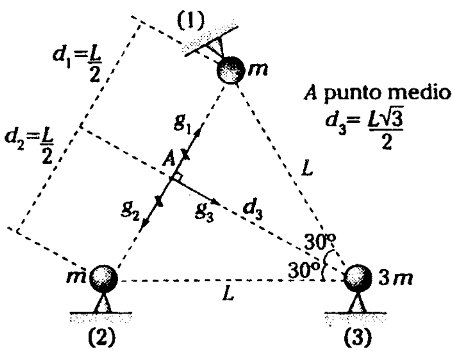
Ejemplo 13

Para el sistema de partículas, determine el módulo de la intensidad de campo gravitatorio en A.



Resolución

Por la geometría dada se deduce que las partículas están en los vértices de un triángulo equilátero. Para calcular la $\vec{g}$ en A, primero pasamos a graficar la intensidad de cada partícula en A según ello tenemos



Como $m_1 = m_2$ y $d_1 = d_2$, entonces los módulos de $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ son iguales y al tener direcciones contrarias se pueden cancelar.

Entonces en A la intensidad resultante recae en g_3.

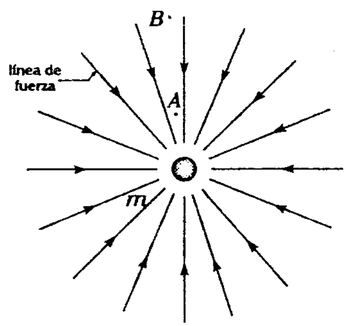
$$g_A = g_3 = G\frac{m_3}{d_3^2} = G\frac{(3m)}{\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ g_A = 4\frac{Gm}{L^2}$$

REPRESENTACIÓN DEL CAMPO GRAVITATORIO

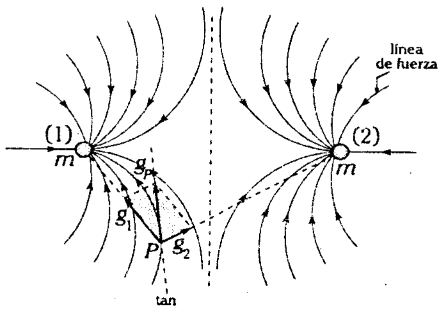
En una de las notas se planteó que el campo gravitatorio es un medio no sustancial, en otras palabras, no lo podemos ver directamente, pero sí percibir sus efectos indirectamente. A veces pareciera poco creíble que entorno de un cuerpo masivo exista un campo gravitacional, mas la experiencia y la práctica confirman estas tesis. Si bien es cierto no lo podemos ver, al menos lo vamos a representar mediante unas líneas imaginarias denominadas **líneas de fuerza del campo gravitatorio**.

Para una partícula aislada su campo se representa por



Para la partícula se verifica que $g_A > g_B$, esto nos permite establecer que donde más juntas estén las líneas de fuerza (mayor densidad de líneas) la intensidad de campo gravitatorio es mayor.

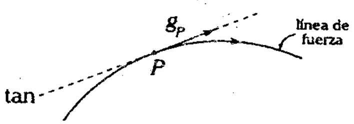
Para el caso de dos partículas de igual masa



Aquí se verifica que la intensidad de campo gravitatorio en un punto es tangente a la línea de fuerza que pase por dicho punto.

Según los casos mostrados podemos establecer algunas propiedades para las líneas de fuerza del campo gravitatorio.

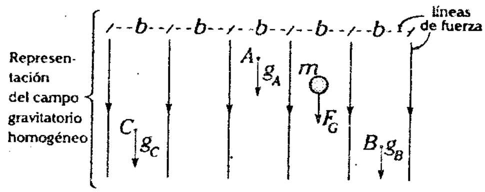
1. Se orientan desde el infinito hacia los cuerpos masivos.
2. Donde sea mayor su densidad, los efectos del campo gravitatorio son más intensos.
3. La intensidad de campo gravitatorio $\left(\vec{g}\right)$ es tangente a la línea de fuerza y tiene su misma orientación.



4. Estas líneas nunca se cortan, es decir por un punto solo **pasa** una línea de fuerza.

CAMPO GRAVITATORIO HOMOGÉNEO

Sabemos que en una región donde existe un campo gravitatorio, de punto a punto la intensidad de campo gravitatorio varía tanto en valor como en dirección. Nosotros podemos considerar una región en donde $\vec{g}$ no cambie apreciablemente, en dichas condiciones decimos que se tienen en la región un campo gravitatorio homogéneo o uniforme.



Consideramos que

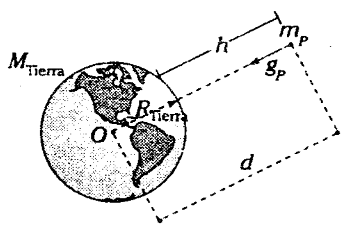
$$\vec{g}_A = \vec{g}_P = \vec{g}_C = \text{cte.} \quad y \quad \vec{F}_G = \text{cte.}$$

La fuerza gravitacional $\left(\vec{F}_G\right)$ que experimentaría un cuerpo en un campo homogéneo es constante (en valor y dirección)

¿En que condiciones se puede tener un campo gravitatorio homogéneo? Esta interrogante puede responderse en el siguiente apartado.

Intensidad de campo gravitatorio terrestre

Consideremos a la Tierra una perfecta esfera, homogénea y de masa M, Definimos la intensidad del campo gravitatorio terrestre en P, como



$g_P = G\dfrac{M_{\text{Tierra}}}{d^2}$; como d se mide del centro de la Tierra a P, entonces

$$\boxed{g_p = G\frac{M_{\text{Tierra}}}{(R+h)^2}} \qquad (I)$$

donde

M_{Tierra} : masa de la Tierra $\approx 6\times10^{24}$ kg

R_{Tierra} : radio de la Tierra $\approx 6\ 370$ km

G : constante de gravitación universal

Si en (I) hacemos $h = 0$ tenemos la intensidad de campo gravitatorio sobre la superficie de la Tierra $\left(\vec{g}_{\text{sup}}\right)$ entonces

$$\boxed{g_{\text{Sup}} = G\frac{M_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}}}$$

Si reemplazamos los valores de cada factor, tenemos

$$g_{\text{sup}} = 6{,}67\times10^{-11}\frac{6\times10^{24}}{(6370\times10^3)^2} \approx 9{,}8\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} <> \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\therefore\ g_{\text{sup}} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$$

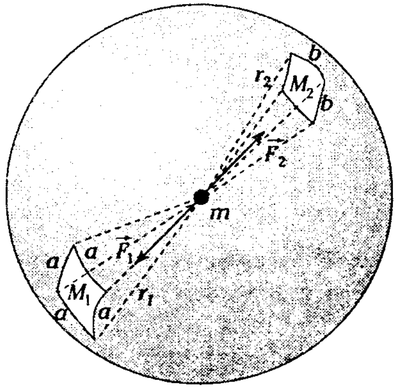
Como vemos, la intensidad de campo gravitatorio en la superficie terrestre tiene el mismo valor que la aceleración de la gravedad, esto nos permite plantear que sobre la superficie de la Tierra la intensidad de campo gravitatorio no es otra cosa que la aceleración de la gravedad.

Nota

Cuando la altura (h) que se mide desde la superficie de la Tierra sea pequeña respecto al radio terrestre ($h << R_{\text{Tierra}}$), el valor de la $\vec{g}$ no cambia de manera apreciable, es decir se le puede considerar constante. Por este motivo, la superficie terrestre el campo gravitatorio asociado a la Tierra puede ser considerada homogéneo o uniforme. Recién aquí podemos justificar porque para alturas pequeñas comparadas con R_{Tierra} la aceleración de la gravedad o de caída libre se consideraba constante.

Intensidad de campo gravitatorio en el interior de una esfera hueca homogénea

Para calcular dicha intensidad coloquemos en un punto interior cualquiera una partícula de masa m.



Ahora escojamos de la cáscara esférica dos porciones pequeñas, de masas M_1 y M_2, que son colineales como la partícula m.

En la figura, m interactúa con una porción esférica de masa M_1 y se establece una fuerza gravitacional dada por

$$F_1 = G\frac{M_1 m}{r_1^2} \qquad \text{(I)}$$

También al proyectar en forma simétrica, m interactúa con la porción esférica de masa M_2 y se establece otra fuerza de atracción dada por

$$F_2 = G\frac{M_2 m}{r_2^2} \qquad \text{(II)}$$

Luego, sobre m la fuerza gravitacional resultante es

$$F_G = F_1 - F_2$$

Reemplazando (I) y (II)

$$F_G = G\frac{M_1 m}{r_1^2} - G\frac{M_2 m}{r_2^2}$$

$$F_G = Gm\left[\frac{M_1}{r_1^2} - \frac{M_2}{r_1^2}\right] \qquad \text{(III)}$$

2. La fuerza gravitacional resultante de cada cascarón (encima de P) sobre m es cero.

Podemos concluir que sobre la partícula m los cascarones esféricos homogéneos no ejercen fuerza gravitacional ($F_G = 0$).

A m solo lo atrae la esfera compacta de radio r. ¿Qué fuerza de atracción hay entre m y la esfera de radio r? Considerando m_0 a la masa de la esfera de radio r, podemos determinarla con

$$m_0 = \rho v_0 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{(I)}$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de la esfera

$$\left(\rho = \frac{m}{v}\right)$$

De la figura $R = r + H$

$$\Rightarrow \quad r = R - H$$

En (I)

$$m_0 = \rho\frac{4}{3}\pi(R-H)^3$$

La fuerza de atracción gravitacional entre m_0 y m la calculamos con la ley de gravitación

$$F_G = G\frac{mm_0}{r^2} = G\frac{m\rho\frac{4}{3}\pi(R-H)^3}{(R-H)^2}$$

$$\therefore \quad F_G = \frac{4}{3}\rho m\pi(R-H)$$

La intensidad de campo gravitacional en P es

$$g_P = \frac{F_G}{m} = \frac{\frac{4}{3}\rho m\pi(R-H)}{m}$$

$$\therefore \quad \boxed{g_P = \frac{4}{3}\pi\rho G(R-H)}$$

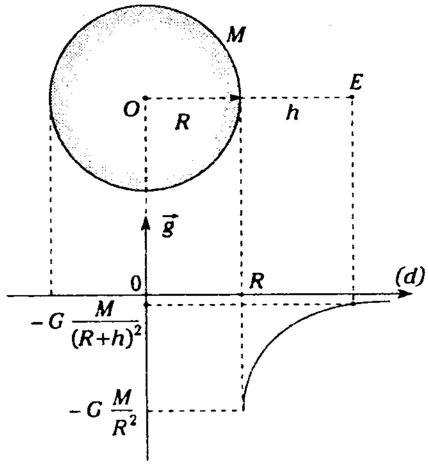
Si consideramos que ρ = cte.

La intensidad de campo varía en forma proporcional a $(R-H)$ ya que cuanto mayor sea la profundidad H menor es $(R-H)$. De ahí que tanto menor será el módulo de la intensidad de campo gravitatorio, cuando $H = R$ (En el centro de la esfera)

$$\therefore \quad \boxed{g_{centro} = 0}$$

Ahora pasemos a expresar los resultados obtenidos, de las esferas, la hueca y la maciza en unas gráficas (intensidad de campo gravitatorio versus la distancia medida desde sus centros)

Esfera hueca



Según lo calculado en una esfera hueca podemos resumir para la intensidad de campo gravitatorio

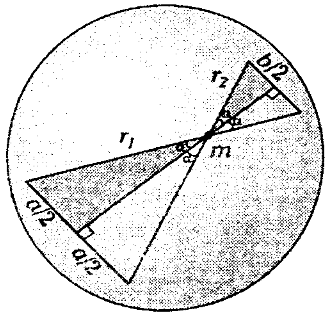
PUNTO	INTENSIDAD DE CAMPO
Interior	Cero
Superficie	$G\frac{M}{R^2}$
Exterior	$G\frac{M}{(R+h)^2}$
Centro	Cero

Observe que la porción M_1 tiene un área a^2 y M_2 un área: b^2. Si la esfera (cáscara) es homogénea, entonces podemos plantear para su densidad superficial (σ)

$$\text{Densidad superficial} = \frac{\text{masa}}{\text{área}}$$

$$\therefore\ \sigma = \frac{M_1}{a^2} = \frac{M_2}{b^2} = \text{cte.} \qquad \text{(IV)}$$

Enfoquemos las porciones tomando un perfil de las áreas (casi plana) de M_1 y M_2, así tenemos aproximadamente.



En los triángulos sombreados

$$\tan\alpha = \frac{a/2}{r_1} = \frac{b/2}{r_2}$$

$$\therefore\ \frac{a}{r_1} = \frac{b}{r_2}$$

Elevando al cuadrado

$$\Rightarrow \frac{a^2}{r_1^2} = \frac{b^2}{r_2^2}$$

De donde $a^2 = b^2\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2$

En (IV)

$$\frac{M_1}{\cancel{b}^2\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{M_2}{\cancel{b}^2}$$

$$\therefore\ \frac{M_1}{r_1^2} = \frac{M_2}{r_2^2}$$

En (III) se obtiene que

$$\boxed{F_G = 0}$$

La fuerza gravitacional resultante sobre la partícula de masa m en el interior del cascarón es nula. Si seguimos analizando para otro par de pequeñas porciones de masa sobre la esfera colineales con m, también resulta nula la fuerza gravitacional resultante sobre m.

Por lo tanto, la intensidad de campo gravitatorio en puntos interiores a la cáscara esférica también es nula.

Se sabe que

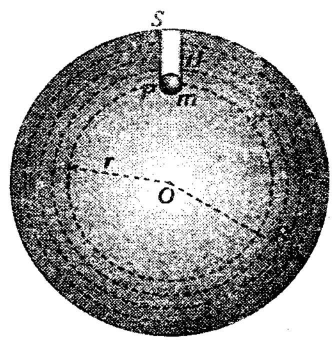
$$g_{\text{interior}} = \frac{F_G}{m} = \frac{0}{m} = 0$$

$$\therefore\ \boxed{g_{\text{interior}} = 0}$$

Intensidad de campo gravitatorio en el interior de una esfera homogénea compacta

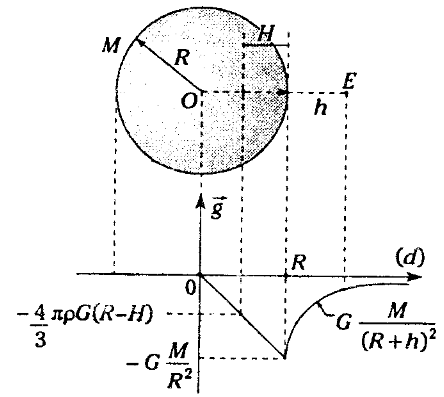
Para evaluar esta intensidad debemos tener en cuenta el resultado anterior, en la cual un cascarón esférico homogéneo en su interior no ejerce fuerza gravitacional y la intensidad del campo gravitatorio es nulo.

Ahora en el punto P a una profundidad H se desea evaluar la intensidad de campo ¿Qué hacemos?



1. La esfera es homogénea y la podemos dividir imaginariamente en n cascarones desde la superficie S hasta el punto P.

Esfera maciza y homogénea



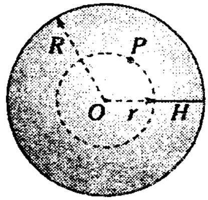
Igualmente, para la esfera maciza y homogénea podemos resumir

PUNTO	INTENSIDAD DE CAMPO
Interior	$\frac{4}{3}\pi\rho G\ (R-H)$
Superficie	$G\frac{M}{R^2}$
Exterior	$G\frac{M}{(R+h)^2}$
Centro	Cero

Se ha deducido que en un punto interior cualquiera de una esfera homogénea, la intensidad de campo gravitatorio es

$$g_P = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-H) \qquad \text{(I)}$$

esfera compacta



como $R-H=r$ y $\rho=\frac{M}{v}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Reemplazando en (I)

$$g_P = \frac{4}{3}\pi G\left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)r$$

$$g_P = G\frac{M}{R^3}(r) = G\frac{M}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde

$g_{sup} = G\frac{M}{R^2}$: intensidad de campo en la superficie de la esfera

$$g_p = g_{sup}\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{g_{sup}}{\underset{\text{cte.}}{\underbrace{R}}}.(r)$$

R : radio terrestre = 6400 km

r : radio de la esfera interna a la profundidad H

Por lo tanto la intensidad de campo en el interior de una esfera homogénea aumenta linealmente con r, como se observa en la gráfica anterior. Un detalle importante para la esfera maciza es que el máximo valor de la intensidad de campo gravitatorio se tendrá cuando r sea máximo ($r = R$). ¡En la superficie de la esfera!

Nota

La Tierra no es exactamente esférica (achatada en los polos) y tampoco es homogénea pues no es del todo sólida, de ahí que el comportamiento de g cerca de la superficie terrestre (que se puede observar hasta las profundidades de 5 km bajo el nivel del mar); no obedece a la ecuación

$$g_P = g_{sup}\left(\frac{r}{R}\right)$$

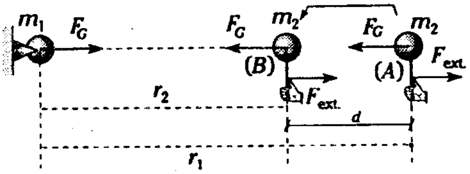
que es válida para esfera homogénea. Los experimentos muestran que en estas capas, por el contrario, g aumenta con la profundidad. La diferencia entre el experimento y la fórmula se explica porque no se habían asumido las diferentes densidades a diversas profundidades.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Al saber que dos partículas cualesquiera se atraen mutuamente debido a sus masas, planteamos que interactúan gravitacionalmente. Esta interacción la medimos vectorialmente mediante la ley de gravitación de Newton, mas no es la única manera de medir la interacción gravitacional.

Esta también puede ser medida mediante la magnitud escalar denominada **energía potencial gravitatoria** (E_{PG})

Para establecer como se define matemáticamente revisemos lo siguiente. Consideremos dos masas, m_1 y m_2, separadas una distancia r_1 inicialmente y luego acercamos a m_2 hasta la distancia r_2, como se indica.



- La fuerza de gravitación entre m_1 y m_2 traslada a m_2 una distancia $d=r_1-r_2$, por lo que dicha fuerza realiza trabajo. Para determinar este trabajo debemos constatar que la fuerza varía con la inversa de la distancia al cuadrado y si buscamos abreviar y simplificar esta situación necesitamos considerar que m_2 avanzó muy poco

$$\therefore \ d=r_1-r_2 \approx 0$$

(r_1 y r_2 se diferencian poco entre sí) por consiguiente, la fuerza atracción gravitatoria (F_G) experimentará una mínima variación y su trabajo se podría calcular así

$$W_{A\to B}^{F_G}=F_G.d \qquad \text{(I)}$$

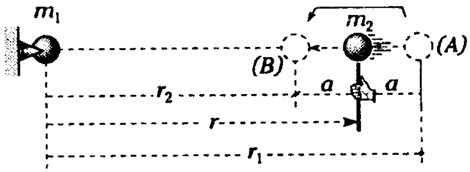
Donde F_G será evaluada cuando m_2 haya recorrido hasta el punto medio de $\overline{AB}$.

$$F_G=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Se requiere una relación entre r con r_1 y r_2, para determinarlo consideremos que

$$W_{A\to B}^{F_g}=G\frac{m_1\,m_2}{r^2}.(r_1-r_2) \qquad \text{(II)}$$

No obstante,



De la figura

$$r=r_2+a=r_2+\left(\frac{r_1-r_2}{2}\right)$$

$$\therefore \ r=\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ 2r=r_1+r_2$$

Elevando al cuadrado

$$(2r)^2=(r_1+r_2)^2$$

$$4r^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2$$

$$4r^2-2r_1r_2=r_1^2+r_2^2 \qquad \text{(III)}$$

Además, el desplazamiento de m_2 fue muy pequeño

$$\therefore \ d_{AB}\to 0$$

$$r_1-r_2\approx 0$$

Elevando al cuadrado

$$(r_1-r_2)^2\approx 0^2$$

$$r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\approx 0$$

$$r_1^2+r_2^2\approx 2r_1r_2 \qquad \text{(IV)}$$

(III) $\approx$ (IV)

$$4r^2-2r_1r_2=2r_1r_2$$

$$\cancel{4}r^2=\cancel{4}r_1r_2$$

$$\Rightarrow \ r^2=r_1r_2$$

En (II)

$$W_{A\to B}^{F_G}=G\frac{m_1 m_2}{r_1 r_2}(r_1-r_2)$$

$$=G\frac{m_1 m_2}{r_2}-G\frac{m_1 m_2}{r_1}$$

Lo cual puede escribirse así

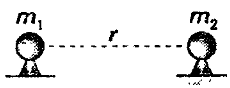
$$W_{A\to B}^{F_G}=\underbrace{-G\frac{m_1 m_2}{r_1}}_{E_{PG(A)}}-\underbrace{\left(-G\frac{m_1 m_2}{r_2}\right)}_{E_{PG(B)}}$$

$$\therefore\ W_{A\to B}^{F_G}=E_{PG(A)}-E_{PG(B)}$$

$E_{PG(A)}$: es energía potencial gravitatoria en la posición inicial A.

$E_{PG(B)}$: es la energía potencial gravitatoria en la posición final B.

Para evaluar la energía potencial gravitatoria entre dos partículas a partir de lo obtenido, se define de esta manera:



$$\Rightarrow \boxed{E_{PG}=-G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Unidades

m_1 y m_2 : kilogramos (kg)

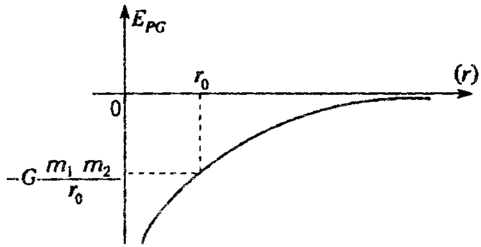
r : metros (m)

E_{PG} : Joule (J)

Analizando la fórmula

1. Si la separación entre masas es muy grande $(r\to\infty)$
   $\Rightarrow\ E_{PG}=0$
   no hay interacción gravitacional a grandes distancias y tampoco hay atracción.
2. Si la separación entre masas disminuye la energía potencial gravitatoria también disminuye pues a cuenta de ella un agente externo realiza un trabajo negativo.
3. En la fórmula para el cálculo de la E_{PG} el signo menos nos indica que las partículas forman un sistema atractivo.

Gráfica E_{PG} vs. r



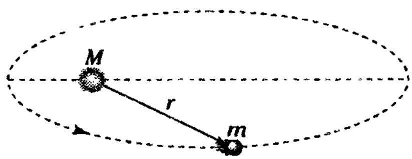
Nota

Los planetas que orbitan alrededor del Sol debido a su traslación tienen energía cinética

$$\left(E_C=\frac{1}{2}mv^2\right)$$

y debido a su interacción gravitacional con el Sol, el sistema Sol–planeta tiene energía potencial gravitatoria dada por

$$\left(E_{PG}=-G\frac{mM}{r}\right)$$



la energía mecánica (E_M) del sistema Sol-planeta vendría dado por

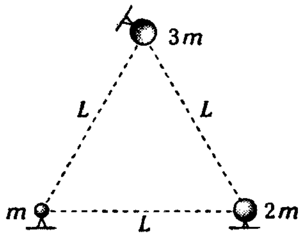
$$\Rightarrow\ E_M=E_C+E_{PG}$$

$$\boxed{E_M=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{mM}{r}}$$

Este resultado lo obtenemos sin considerar la energía cinética de rotación del propio planeta.

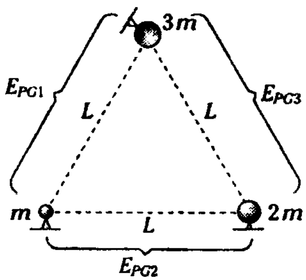
Ejemplo 14

Para la siguiente configuración determine la energía potencial gravitatoria del sistema.



Resolución

La fórmula dada para el cálculo de E_{PG} es válida solo para dos partículas ¿Cómo se trabaja para el caso de tres o más partículas? En este caso se pueden tomar de dos en dos a las partículas y evaluar su E_{PG}. Luego la E_{PG} del sistema viene expresada como la suma de los cálculos parciales, es decir



$$E_{PG}^{\text{sist}} = E_{PG1} + E_{PG2} + E_{PG3}$$

Luego haciendo uso de $E_{PG} = -G\dfrac{m_1m_2}{d}$ tenemos

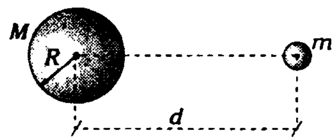
$$E_{PG}^{\text{sist}} = \left[-G\frac{(m)(3m)}{L}\right] + \left[-G\frac{(m)(2m)}{L}\right] + \left[-G\frac{(2m)(3m)}{L}\right]$$

Efectuando y reduciendo

$$E_{PG}^{\text{sist}} = -11\frac{Gm^2}{L}$$

Nota

Para el cálculo de la energía potencial gravitatoria en un sistema donde participe una esfera homogénea, por ejemplo los planetas, (apróx.) se plantea que



$$\boxed{E_{PG} = -\frac{GMm}{d}}$$

donde d se mide desde el centro de la esfera.

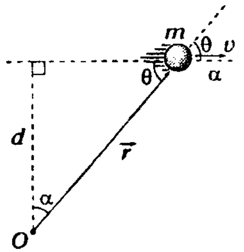
CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR (MOMENTUM ANGULAR) $(\vec{L})$

Estudiaremos otro concepto mecánico cuyo conocimiento nos da la oportunidad de enunciar otra nueva e importante ley del movimiento. A este concepto se le denomina cantidad de movimiento angular, momentum angular o momento de la cantidad de movimiento. Estas denominaciones le dan analogía con el momento de una fuerza y esta magnitud al igual que el momento de una fuerza, demanda la precisión de un punto respecto al cual se determina el momento.

¿Qué es y qué nos caracteriza la cantidad de movimiento angular?

Es una magnitud física vectorial que nos expresa la capacidad de giro que posee la cantidad de movimiento $(\vec{p})$ con respecto a un centro de rotación.

En la figura



Respecto del punto O la cantidad de movimiento angular de la partícula se define por

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad \text{(I)}$$

donde

$\vec{r}$: posición de la partícula respecto a O, en metros (m)

$\vec{P}$: cantidad de movimiento de la partícula en kg.m/s

$\vec{L}$: cantidad de movimiento angular de la partícula, en kg.m^2/s

Observe que $\vec{L}$ está definido como el producto vectorial entre la $\vec{r}$ y la $\vec{P}$. El módulo de $\vec{L}$ queda definido (revisar el producto vectorial de vectores)

$$L = rp\operatorname{sen}\theta$$

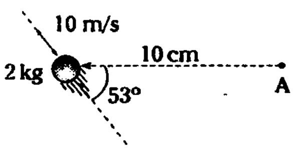
Pero en la figura $r\operatorname{sen}\theta$ y $p=mv$, reemplazando tenemos

$$\boxed{L = mv.d} \qquad \text{(II)}$$

donde d es la distancia hacia la velocidad de la partícula. Notar que d es perpendicular a la $\vec{v}$

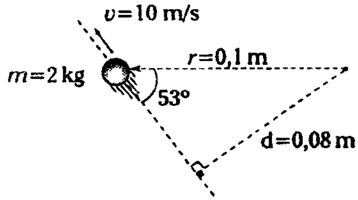
Ejemplo 15

A partir de la figura, calcule el momentum angular ($\vec{L}$) de la partícula respecto de A.



Resolución

Según las condiciones dadas, tenemos que



Para calcular el módulo de $\vec{L}$ de la partícula usamos la expresión (II)

$$L = mvd$$

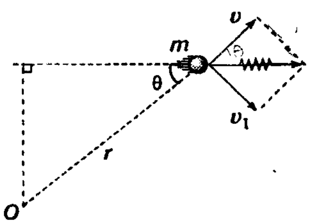
Reemplazando datos

$$L = (2)(10)(0{,}08)$$

$$\therefore\ L = 1{,}6\ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

Nota

El módulo de la $\vec{L}$ también se puede calcular de la siguiente manera:



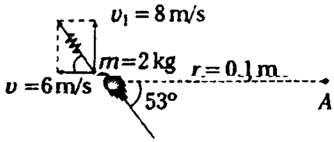
Después de descomponer rectangularmente a la velocidad, tenemos que

$$v_1 = v\operatorname{sen}\theta$$

$$\therefore\ \boxed{L = mv_1 r} \qquad \text{(III)}$$

En este caso $\vec{r}$ es perpendicular a la componente de la velocidad $\vec{v_1}$. Señalamos que este procedimiento para calcular el módulo de la cantidad de movimiento angular es más adecuado que el planteado por la fórmula (II).

Resolvamos el ejemplo anterior mientras hacemos uso de la nota.



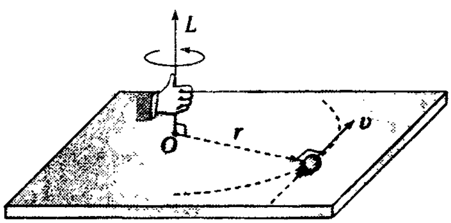
Respecto de A, planteamos

$L = mv_1 r$

$L = 2(8)(0,1)$

$\Rightarrow \quad L = 1,6$ kg.m^2/s

Hemos visto como determinar el módulo de la $\vec{L}$, mas nos preguntamos cómo se puede obtener su dirección si una partícula al moverse en el espacio (tres dimensiones) generalmente cambia continuamente la dirección de su $\vec{L}$, pero si se mueve en un plano (dos dimensiones), como ocurre con los planetas y satélites aproximadamente, la dirección de la $\vec{L}$ se mantiene constante y en forma práctica la podemos obtener al hacer uso de la regla de la mano derecha.



Los dedos principales de la mano derecha deben coincidir con el sentido de giro de la partícula respecto de O, ya que al separar el dedo pulgar, éste indicará la dirección de la $\vec{L}$. Tener presente que para cualquier posición la dirección de la $\vec{L}$ es perpendicular al plano que forman $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Cuando sobre un cuerpo el momento resultante es diferente de cero, éste al rotar variará su velocidad angular con $(\vec{\omega})$ y así cada partícula que conforma a la barra varía también en su velocidad y en su cantidad de movimiento angular. Podemos concluir que si sobre un cuerpo se tiene momento resultante diferente de cero, $(\vec{M}^{res} \neq \vec{0}) \Rightarrow \vec{L}$, éste varía.

A partir de estos comentarios podemos establecer lo siguiente:

Si sobre un cuerpo o sistema, respecto a un punto, el momento resultante es nulo; entonces su cantidad de movimiento angular no varía, es decir se conserva.

Podemos resumir con

Si $\vec{M}^{res} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}$ no varía

Esta sentencia representa una ley de conservación muy importante en la Física, ya que se hace uso de ella en el micromundo (átomos, moléculas, electrones, etc) y también en el macromundo (satélites, planetas, estrellas, estrellas dobles, cometas, etc)

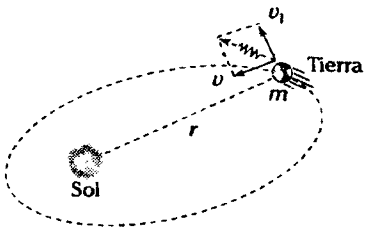
¿Dónde verificamos esta ley de conservación? Consideremos dos esferas unidas con una cuerda y se lanza una de ellas con fuerza, entonces la segunda esfera irá detrás de la primera con la cuerda tensa. Una esfera alcanzará a la otra y la traslación hacia adelante irá acompañada de una rotación.

Ahora pensemos que las esferas no están unidas por la cuerda y que el lanzamiento se efectúa en el espacio cósmico (se desprecia todo efecto gravitatorio sobre ellas) ¿Qué sucederá? Examinando, las fuerzas entre las esferas serían las de atracción gravitatoria, es decir, fuerzas de acción y reacción (de igual módulo). Al ser los brazos de ambas fuerzas iguales, con respecto a cualquier punto, definen momentos de fuerzas opuestas, y por consiguiente, definen un momento resultante nulo sobre el sistema y la cantidad de movimiento angular será constante para el sistema.

Nota

Para el caso de fuerzas centrales, la fuerza de gravitación presenta un momento nulo respecto a cualquier punto que se tome a lo largo de su línea de acción. Por ello para el movimiento de satélites o planetas respecto de un planeta o estrella respectivamente su cantidad de movimiento angular se conserva, es decir se mantiene constante.

Por ejemplo para el movimiento de la Tierra entorno al Sol.

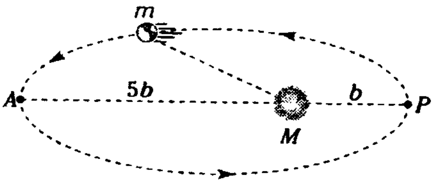


De una posición a otra la Tierra respecto al Sol conserva su cantidad de movimiento angular, por ello planteamos.

$$\boxed{r.mv_1 = \text{cte.}}$$

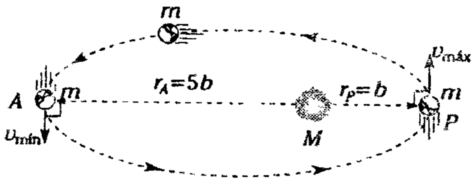
Ejemplo 16

Se muestra la trayectoria seguida por un planeta alrededor de una estrella de masa. Halle la mínima rapidez del planeta, si su máxima rapidez es 30 km/s .



Resolución

En A hay mínima interacción gravitacional y la rapidez es mínima, mientras que en P la interacción gravitacional es máxima y la rapidez es máxima.



Según la nota anterior, mientras el planeta se mueva entorno a la estrella, éste tendrá la misma cantidad de movimiento angular. Por tanto podemos plantear para las posiciones A y P que

$$L_A = L_P$$

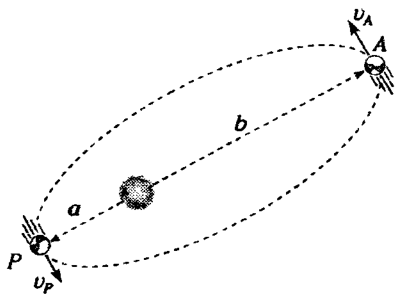
$$\cancel{m}v_{mín}.r_a = \cancel{m}v_{máx}.r_b$$

$$v_{mín}(5b) = (30\ \text{km/s})\ (b)$$

$$\therefore\ v_{mín} = 6\ \text{km/s}$$

Dado que la cantidad de movimiento angular (momentum angular) se conserva, podemos deducir lo que Kepler había supuesto: cuando el planeta está más cerca al Sol se moverá más rápido y cuando está más lejos su movimiento será lento.

Veamos



Sabemos que

$$L_{sist} = \text{cte.} \Rightarrow a\cancel{m}v_P = b\cancel{m}v_A$$

$$\Rightarrow av_P = bv_A$$

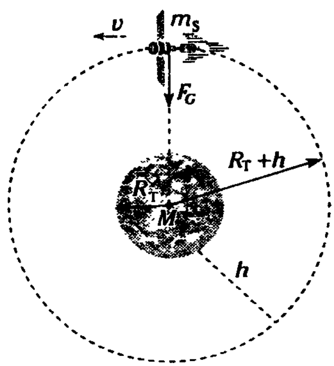
ahora como $a < b$

$$\Rightarrow \text{se concluye } v_P > v_A$$

VELOCIDADES CÓSMICAS

PRIMERA VELOCIDAD CÓSMICA

Es la mínima velocidad que hay que comunicar a un cuerpo para que pueda ser satélite de la Tierra, el orbitar circularmente cerca de su superficie . Para colocar en órbita un satélite, se elevan mediante poderosos cohetes hasta una altura no menor a 160 km . Una vez alcanzada la altura deseada, son lanzados horizontalmente y el satélite por inercia se moverá en línea recta, pero como es atraído por la Tierra cambia la dirección de su velocidad para describir una trayectoria circunferencial como indica la figura siguiente:



Si el satélite realiza movimiento circunferencial, entonces sobre él actúa una

$$F_{cp}=m_S a_{cp}$$

$$\Rightarrow\quad F_G=m_S\frac{v^2}{r}$$

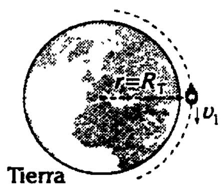
$$\Rightarrow\quad \frac{GM_1\cancel{m_S}}{(R_T+h)^{\cancel{2}}}=\cancel{m_S}\frac{v^2}{\cancel{(R_T+h)}}$$

$$\Rightarrow\quad v=\sqrt{G\frac{M}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{R_T^2}{R_T+h}.g_S}$$

$$\therefore\ \boxed{v=R_T\sqrt{\frac{g_S}{R_T+h}}}$$

Con esta fórmula podemos calcular la velocidad de un satélite artificial que órbita circunferencialmente a la altura h respecto de la superficie terrestre. Aquí g_S viene a ser la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

Para el cálculo de la primera velocidad cósmica hacemos $R_T>>h$, entonces $(R_T+h)\approx R_T$



Luego

$$\boxed{v_1=\sqrt{g_S R_T}}\qquad (1)$$

Si reemplazamos $g_S\approx 9{,}8\ m/s^2$ y $R_T=6\,400\ km$ en la fórmula se obtiene aproximadamente

$v_1\approx 7{,}9\ km/s$

SEGUNDA VELOCIDAD CÓSMICA

Denominamos así a la velocidad que le debemos comunicar a un cuerpo, que es lanzado perpendicular a la superficie terrestre y luego se pueda alejar de manera definitiva de la Tierra.

¿Como calculamos la velocidad de lanzamiento de un cuerpo para que escape de la atracción terrestre? Para esto el satélite debe vencer la atracción terrestre, es decir, debe vencer la energía potencial gravitatoria en valor absoluto.

$$\left(G\frac{Mm_S}{R_T}\right)$$

Pero esta energía de atracción gravitacional debe ser superada con la energía cinética de lanzamiento del cuerpo, es decir

$$E_C^{\text{lanzamiento}} \geq E_{PG}^{\text{atraccion}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}_S v_2^2 \geq G\frac{\cancel{m}_S M}{R_T}$$

$$v_2 \geq \sqrt{2G\frac{M}{R_T}}$$

$$v_2 \geq \sqrt{G\frac{M}{R_T^2\left(2\frac{R_T^2}{R_T}\right)}} = v_2 \geq R_T\sqrt{2\left(\frac{g_S}{R_T}\right)}$$

Por lo tanto la velocidad que le permitiría escapar al cuerpo del influjo terrestre sería

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2g_S R_T}} \qquad \text{(II)}$$

Al reemplazar $g_S \approx 9{,}8\ \text{m/s}^2$ y $R_T = 6\,400\ \text{km}$ se obtiene

$v_2 \approx 11{,}2\ \text{km/s}$

Aquí para la reflexión debe quedar que este resultado de la primera y segunda velocidad cósmica es debido a que se considera a la Tierra en reposo. Queda para la reflexión lo siguiente, sabiendo que la Tierra se traslada y rota a la vez. ¿Qué velocidades deben ser realmente?

Nota

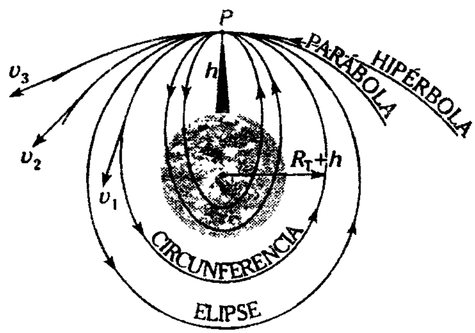
Si comparamos las fórmulas obtenidas (I) y (II) se puede deducir que

$$\boxed{v_2 = v_1\sqrt{2}}$$

Esta sería la relación que existe entre la primera y segunda velocidad cósmica para un cuerpo lanzado desde la superficie terrestre.

Diagrama de trayectorias

Los satélites lanzados desde $h \geq 160\ \text{km}$ con diferente rapidez en P.



donde

$$v_2 \geq R_T\sqrt{\frac{2g_S}{R_T+h}}$$

La mínima rapidez de lanzamiento para que el satélite venza la atracción terrestre es

$$v_{2(\min)} = 11{,}03\ \text{km/s} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Despreciando la resistencia}\\ \text{de la atmósfera}\end{array}\right)$$

Con esta rapidez el satélite describe una trayectoria parabólica, y la Tierra lo deja escapar, sin alejarse demasiado ¿Por qué? Porque el Sol lo atrae gravitacionalmente y el cuerpo se convierte en un satélite del Sol. Esto sucede cuando los lanzamientos se efectúan con rapideces comprendidas entre

$$11{,}03\ \text{km/s} \leq \upsilon < 16{,}2\ \text{km/s}$$

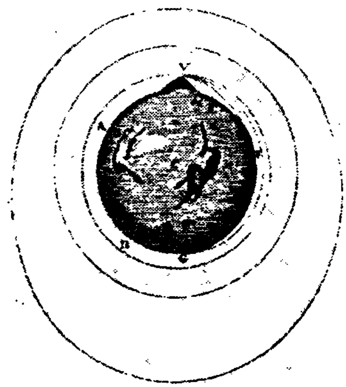
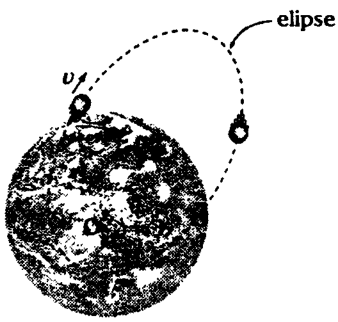


Diagrama original de Newton para el lanzamiento de satélites.

Nota

Cuando un cuerpo es lanzado oblicuamente respecto de la superficie terrestre, con una rapidez pequeña, asumimos que su trayectoria es una parábola, mas esto no es cierto debido a que la trayectoria que sigue el cuerpo en estas condiciones es una elipse en donde el centro de la figura es uno de los focos de dicha elipse.



TERCERA VELOCIDAD CÓSMICA

¿Con qué rapidez mínima se debe lanzar un satélite hacia las estrellas lejanas? Para esto es necesario que abandone el sistema planetario solar; y así vencer la atracción gravitacional terrestre y solar.

Para evaluar esta rapidez, vamos a utilizar los siguientes argumentos:

La primera velocidad cósmica es

$$\upsilon_1 = \sqrt{GMR_T}$$

La segunda velocidad cósmica es

$$\upsilon_2 = \sqrt{2GMR_T}$$

Interpretando, υ_1 es la rapidez orbital del satélite sobre la superficie de la Tierra y υ_2 es la rapidez de lanzamiento para vencer la atracción gravitacional terrestre, ambas verifican

$$\upsilon_2 = \sqrt{2}\ \upsilon_1$$

Usando la interpretación anterior y considerando a la Tierra como un satélite del Sol esta rapidez es aproximadamente $\upsilon_1 = 30$ km/s y para que pueda vencer a la atracción solar en la analogía anterior de los casos 1 y 2 debe desplazarse con

$$\upsilon_2 = \sqrt{2}\ \upsilon_1 \approx 42\ \text{km/s}.$$

Al ser esta una gran rapidez tendremos que aprovechar el movimiento de la Tierra para mandar un proyectil a las estrellas lejanas

$$(\upsilon_1 = 30\ \text{km/s}).$$

De esta manera, únicamente le transmitiremos una rapidez de

$$42 - 30 = 12\ \text{km/s}$$

La energía cinética que se debe transferir para vencer la atracción terrestre es

$$\frac{1}{2}mv_{\text{mín}}^2 = \frac{1}{2}m(11{,}03)^2$$

La energía cinética que se debe transferir para vencer la atracción solar es

$$\frac{1}{2}mv_{\text{mín}}^2 = \frac{1}{2}m\,(12)^2$$

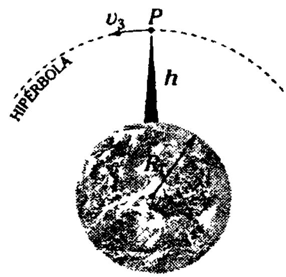
La energía cinética mínima para lanzar un satélite hacia las estrellas lejanas que supere la atracción terrestre y solar es

$$E_C^{\left(\substack{\text{entregada}\\ \text{al satélite}}\right)} = E_C^{\left(\substack{\text{vence atracc.}\\ \text{terrestre}}\right)} + E_C^{\left(\substack{\text{vence atracc}\\ \text{solar}}\right)}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}v_3^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}(11{,}03)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}(12)^2$$

$$v_3 \approx \sqrt{11^2+12^2} \approx 16{,}2\ \text{km/s}$$

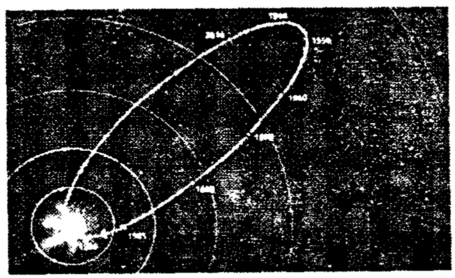
En consecuencia, el cohete con 11,03 km/s abandona a la Tierra, pero no va muy **lejos** ¿por qué si la Tierra lo deja escapar el Sol no lo va a dejar en libertad ya que lo atraerá y convertirá el cohete en un satélite de la gran masa solar. El cohete emplea la tercera rapidez cósmica (v_3) y sale con una trayectoria hiperbólica tal como se muestra



Con esta rapidez el cohete logra escapar de la atracción solar, y viaja por el espacio estelar. No obstante, requiere prácticamente duplicar la primera rapidez cósmica.

$$\frac{16{,}2}{7{,}9} \approx 2;$$

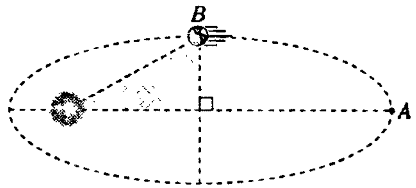
Esta situación implica un gran incremento de la potencia de los motores del cohete y sus limitaciones técnicas.



La figura muestra la trayectoria elíptica del cometa Halley es una evidencia mas de la validez de la teoría de la gravitación.

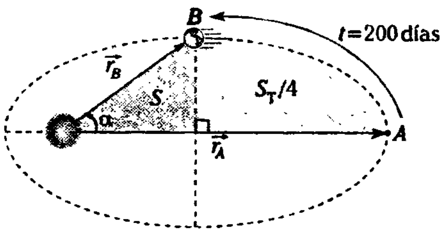
Problema 1

El periodo de un planeta que se traslada en torno a una estrella es igual a 700 días. Si cuando el planeta va desde A hacia B emplea 200 días y el área sombreada es igual a S, determine el área de la región que encierra la trayectoria elíptica.



Resolución

Sea S_T el área total limitada por la trayectoria elíptica, podemos plantear:



Recordando la 2da Ley de Keppler

(Área barrida por $\vec{r}$) D.P. (tiempo empleado)

es decir

$$\frac{A_{barrida}}{t} = \text{cte.}$$

entonces a partir de la figura planteamos

$$\frac{S_T}{T} = \frac{\left(S + \frac{S_T}{4}\right)}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{S_T}{700d} = \frac{\left(S + \frac{S_T}{4}\right)}{200d}$$

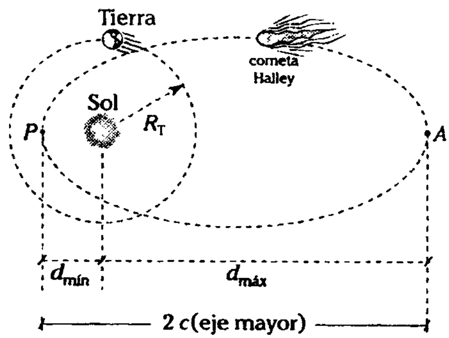
$$\therefore \; S_T = 28\,S$$

Problema 2

¿A qué distancia máxima del Sol se aleja el cometa Halley? Su periodo de traslación alrededor del Sol es 76 años y la distancia mínima al Sol es $1{,}8 \times 10^8$ km. (Considere el radio de la órbita de la Tierra es $1{,}5 \times 10^8$ km)

Resolución

La trayectoria del cometa Halley es elíptica, pero la trayectoria de la Tierra respecto al Sol es aproximadamente una circunferencia tal como se muestra a continuación.



donde

$$2c = d_{mín} + d_{máx}$$

$$\therefore \; d_{máx} = 2c - d_{mín} \qquad \text{(I)}$$

Calculemos c con la 3ra Ley de Kepler, puesto que se conoce el periodo de rotación de la Tierra alrededor del Sol (T_1=1 año) y el periodo de rotación del cometa Halley (T_H=76 años)

Entonces usamos la 3ra Ley de Kepler

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_H^2}{c^3}$$

donde

R_T : radio orbital de la Tierra

c : semieje mayor de la trayectoria elíptica del cometa.

Luego tenemos:

$$\Rightarrow \quad c = R_T\left(\frac{T_H}{T_T}\right)^{2/3} = 1{,}5\times10^8\left(\frac{76}{1}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad R \approx 2{,}7\times10^9 \text{ km}$$

Reemplazando en (I)

$$d_{máx} = 2(2{,}7\times10^9) - 1{,}8\times10^8$$

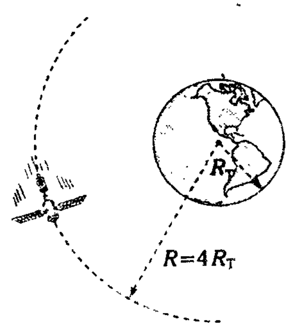
$$\Rightarrow \quad d_{máx} = 5{,}2\times10^9 \text{ km}$$

Problema 3

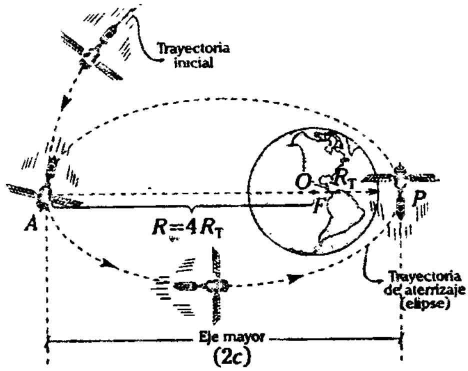
Un satélite artificial orbita en torno de la Tierra y sigue una trayectoria circunferencial de radio $R = 4R_T$ (R_T : radio de la Tierra) con un periodo T_0. Si los tripulantes de dicho satélite deciden aterrizar, ¿en cuánto tiempo lo lograrían?

Resolución

Según lo que se plantea, tenemos



Por otro lado, de la práctica de movimiento satelital se sabe que para que un satélite pueda aterrizar, es decir llegar a la superficie terrestre, debe pasar a una trayectoria de aterrizaje, la cual es elíptica, tangente a la trayectoria inicial y a la superficie terrestre. Por último, si el centro de la Tierra debe de coincidir con uno de los focos de la elipse (1ra Ley de Kepler), de acuerdo a lo cual planteamos.



El tiempo pedido sería t_{AP}, el cual representa la mitad del periodo de la trayectoria elíptica de aterrizaje (T_F). Para determinarlo podemos aplicar la 3ra Ley de Kepler (ley de periodos) y relacionar los periodos de las dos trayectorias que presenta el satélite.

$$\frac{T^2_{\substack{\text{trayec}\\\text{inic}}}}{R^3} = \frac{T_F^2}{c^3};$$

donde c es el semi eje mayor, que por tratarse de una elipse verifica

$$c = \frac{5R_T}{2};$$

también por dato

$$T_{\substack{\text{trayec}\\\text{inic}}} = T_0$$

Reemplazando los datos tenemos

$$\frac{T_0^2}{(4R_T)^3} = \frac{T_F^2}{\left(\frac{5R_T}{2}\right)^3}$$

De donde

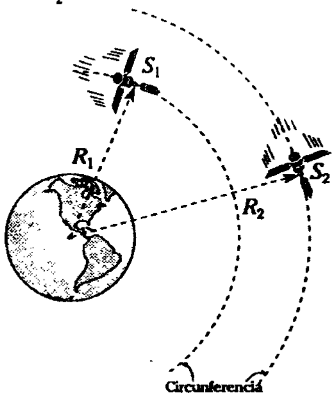
$$T_F = \frac{5}{32}\sqrt{10}\,T_0$$

Por lo tanto, el tiempo de aterrizaje sería

$$t_{AP} = \frac{T_F}{2} = \frac{5}{64}\sqrt{10}\,T_0$$

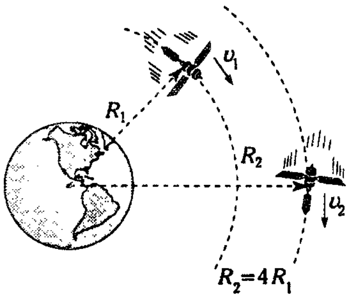
Problema 4

Se muestra un planeta que orbita por dos satélites, ¿En que relación está la rapidez de los satélites? Considere $\frac{R_1}{R_2}=4$



Resolución

Antes de hacer el cálculo podemos recordar que mientras un planeta o satélite describe una circunferencia en torno a una estrella o planeta respectivamente, presenta un M.C.U. (su rapidez de traslación es constante).



Ahora para calcular $\frac{v_1}{v_2}$; podemos relacionar cada rapidez con el radio que le corresponde y luego hacer uso de la 3ra Ley de Kepler.

El recorrido de cada satélite en una vuelta (tiempo$=T$) viene dado por

$$e_1=v_1T_1 \quad \text{y} \quad e_2=v_2T_2$$

$$\Rightarrow \; 2\pi R_1=v_1T_1 \;\; \text{y} \;\; 2\pi R_2=v_2T_2$$

Dividiendo ambas expresiones

$$\frac{v_1T_1}{v_2T_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2}=\frac{T_2}{4T_1} \qquad \text{(I)}$$

Se requiere relación de periodos, usando la 3ra Ley de Kepler se tiene

$$\Rightarrow \frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{(4R_1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=8 \qquad \text{(II)}$$

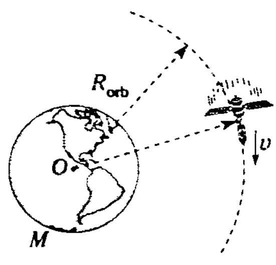
Finalmente reemplazamos (II) en (III)

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{8T_1}{4T_1} \quad \therefore \frac{v_1}{v_2}=2$$

Este resultado nos confirma que los satélites que orbiten más cerca a un planeta lo hacen con mayor rapidez. Esta conclusión es aplicable a los planetas que se mueve en torno al Sol.

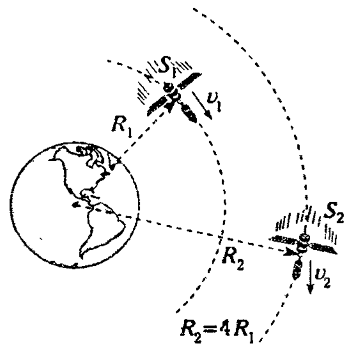
Otro método

En la teoría desarrollada se demostró que si un satélite orbita circunferencialmente a un planeta, su rapidez, que es constante. es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia hacia el planeta medida desde el centro del planeta.



$$v=\sqrt{\frac{GM}{R_{orb}}} \Rightarrow v=\frac{\text{cte.}}{\sqrt{R_{orb}}}$$

Para nuestro caso se tendría



$$v_1=\frac{\text{cte.}}{\sqrt{R_1}} \quad \text{y} \quad v_2=\frac{\text{cte.}}{\sqrt{R_2}}$$

Entonces al dividir ambas expresiones

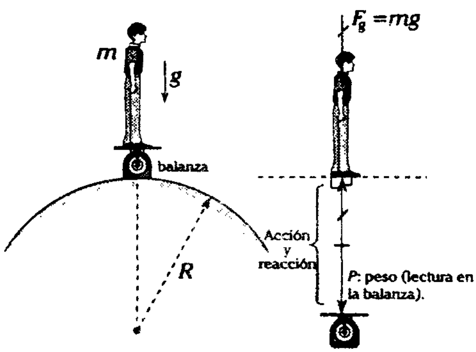
$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}=\sqrt{\frac{4R_1}{R_1}}$$

$$\therefore \ \frac{v_1}{v_2}=2$$

Problema 5

¿En qué porcentaje debería variar el radio terrestre para que el peso de un cuerpo en la superficie terrestre se reduzca a la mitad?

Resolución



Del equilibrio del cuerpo tenemos

$$P=Fg=mg$$

Vemos que el peso depende de la intensidad de campo gravitatorio g en la superficie terrestre. (El peso P es directamente proporcional a g)

Pero sabemos que en la superficie terrestre

$$g=\frac{GM_{\text{Tierra}}}{R^2}$$

Luego podemos concluir que el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es inversamente proporcional al cuadrado del radio terrestre.

$$P=\left(\frac{\text{cte.}}{R^2}\right)$$

Con esta última relación y de acuerdo al caso inicial se plantea

$$P_0=\frac{\text{cte.}}{R_0^2} \Rightarrow P=\frac{\text{cte.}}{R_T^2} \qquad \text{(I)}$$

Para el caso en que el radio se ha variado

$$P_F=\frac{\text{cte.}}{R_F^2} \Rightarrow \frac{P}{2}=\frac{\text{cte.}}{R_F^2} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) podemos obtener

$$PR_T^2=\frac{P}{2}R_F^2$$

$$\Rightarrow R_F=R_T\sqrt{2}$$

En porcentaje

$$R_F=141\%\,R_T$$

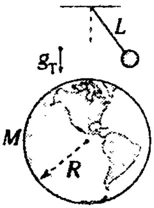
Este resultado permite señalar que el peso de un cuerpo se reduce a la mitad, si el radio terrestre lo incrementamos en un 41% y se mantiene constante su masa.

Problema 6

En la superficie terrestre un péndulo simple presenta un periodo de 3 s y es llevado a un planeta cuya masa es 9 veces la masa de la Tierra así como su radio es 2 veces el radio terrestre. ¿Cuántas oscilaciones realizara el péndulo en aquel planeta, durante el mismo tiempo en que realiza 2 oscilaciones en la Tierra?

Resolución

- En la Tierra



Por cada oscilación, el péndulo emplea un intervalo de tiempo dado por

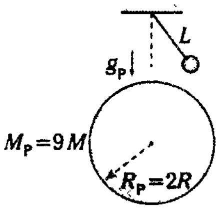
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}}$$

y como $g_T = \frac{GM}{R^2}$

Entonces tenemos,

$$T_0 = 2\pi R\sqrt{\frac{L}{GM}}$$

- En el otro planeta



la aceleración de la gravedad se expresa por

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} = \frac{G(9M)}{(2R)^2} = \frac{9}{4}\frac{(GM)}{R^2}$$

Por cada oscilación, el péndulo empleará un intervalo de tiempo

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_P}} \quad \text{y como} \quad g_P = \frac{9}{4}\left(\frac{GM}{R^2}\right)$$

Se tendrá

$$T_F = \frac{2}{3}2\pi R\sqrt{\frac{L}{GM}} = \frac{2}{3}T_0$$

Ahora determinemos la cantidad de oscilaciones que realizará el péndulo simple durante $(2T_0)$ segundos, en la superficie del planeta P.

en $T_F = \frac{2}{3}T_0 \longrightarrow 1$ oscilación

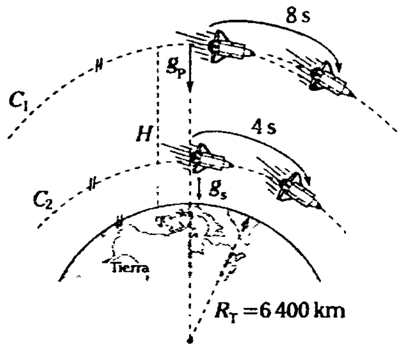
en $2T_0 \longrightarrow x$

$\therefore\ x = 3$ oscilaciones

Problema 7

Cuando una nave vuela horizontalmente, muy cerca de la superficie terrestre, un cuerpo abandonado desde el techo de la nave, cae al piso de la nave en 4 s. Cuando la nave vuela paralelamente a la superficie de la Tierra a una altura H, el cuerpo abandonado cae en 8 s, ¿cuál es el valor de H? ($R_T = 6\,400$ km)

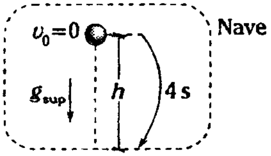
Resolución



- La nave sobrevuela la Tierra en 2 trayectorias circunferenciales C_1 y C_2.
- Si la nave vuela con rapidez constante, el cuerpo abandonado en el techo de la nave, por inercia, inicia un movimiento parabólico respecto a un observador fijo en Tierra. Sin embargo, respecto de un observador dentro de la nave, el cuerpo realizaría M.V.C.L. con una aceleración $\vec{g}$ dependiente de H, R_T y g_s en la superficie terrestre.

Para hallar H, analicemos el M.V.C.L. del cuerpo respecto a un observador dentro de la nave.

En C_2 (cerca a la Tierra)

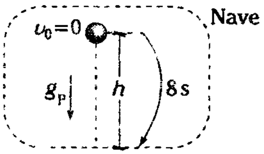


Podemos usar

$$h=\cancel{v_0 t}+g_s.\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad h=g_s.\frac{(4)^2}{2}=8g_s \qquad \text{(I)}$$

En C_1 (a una altura H de superficie terrestre)



Para esta posición de la nave, en su interior se verifica

$$g_s=g_{sup}\left(\frac{R_T}{H+R_T}\right)^2$$

En este caso como tenemos M.V.C.L nuevamente usamos

$$h=\cancel{v_0 t}+g_P\frac{t^2}{2}$$

$$h=g_{sup}\left(\frac{R_T}{H+R_T}\right)^2.\frac{(8)^2}{2} \qquad \text{(II)}$$

Finalmente igualamos las relaciones (I) y (II)

$$8g_s=8\cancel{g_{sup}}=\cancel{g_{sup}}\left(\frac{R_T}{H+R_T}\right)^2.\frac{(8)^2}{2}$$

$$\frac{1}{4}=\left(\frac{R_T}{H+R_T}\right)^2$$

$$\therefore \quad H=R_T=6\,400 \text{ km}$$

Este problema se ha resuelto tomando en cuenta que la aceleración $(\vec{g})$ en el interior de la nave es prácticamente constante.

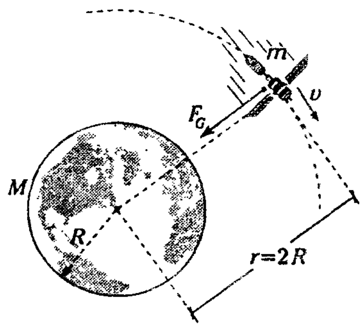
Problema 8

El radio medio de la Tierra, es aproximadamente igual a $R=6\,400$ km. Si un satélite geoestacionario está orbitando a una distancia $2R$ del centro de la Tierra, ¿con qué rapidez se traslada dicho satélite? (En la superficie terrestre, el módulo de la aceleración de la gravedad es de $g=10$ m/s^2).

Resolución

Tratándose de un satélite geoestacionario, su rapidez angular con que gira en torno a la Tierra será igual a la rapidez angular con que esta rota en torno a su eje y en consecuencia, respecto de un habitante de la Tierra, el satélite no se mueve porque siempre se mantiene frente a él.

Otro aspecto importante, es que respecto a un sistema de coordenadas no rotatorio que pasa por el centro de la Tierra, la trayectoria del satélite geoestacionario resulta ser una circunferencia alrededor de la Tierra.



Considerando solo la interacción gravitatoria entre la Tierra y el satélite, se tiene un M.C.U., donde para calcular la rapidez v podemos hacer uso de

$$F_{cp}=F_G$$

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{(2R)^2}=\overbrace{\left(\frac{GM}{R^2}\right)}^{g}\frac{m}{4}=\frac{mg}{4}$$

Como $r=2R$, entonces tenemos

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{2R}=\frac{g}{4}$$

$$v=\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

$$v=\sqrt{\frac{(10)(64\times10^5)}{2}}$$

$$v=4\sqrt{2}\ \text{km/s}$$

Adicionalmente, podemos determinar el ángulo barrido por el vector posición del satélite y como la rapidez angular de éste es contante podemos plantear

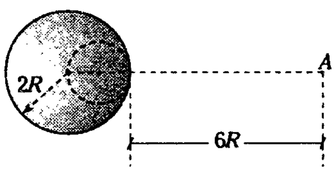
$$\omega=\frac{\theta}{T}=\frac{2\pi}{24\ \text{horas}}$$

$$\Rightarrow\ \omega=\frac{2\pi}{24\times3\,600\,\text{s}}$$

$$\therefore\ \omega=\frac{\pi}{43\,200}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\diamond 15°/\text{hora}$$

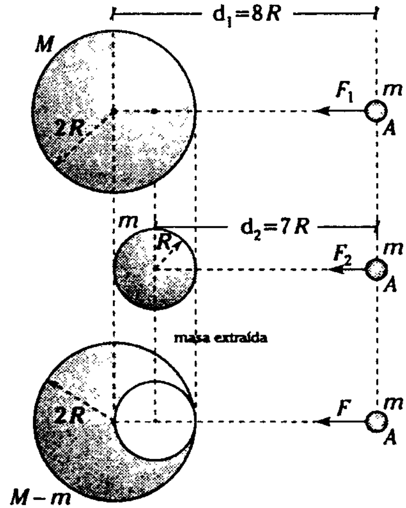
Problema 9

De la esfera maciza y homogénea de radio $2R$, se extrae una esfera de radio R y masa m. Determine el módulo de la fuerza de gravedad que afectará a una partícula de masa m ubicada en el punto A, tal como se indica. (Analice sólo la interacción gravitatoria entre las partes mostradas)



Resolución

La interacción gravitatoria entre la esfera (con masa extraída) y la esfera de masa m pueden ser analizadas bajo el principio de superposición. Primero calculamos el efecto de toda la esfera maciza sobre m, luego el efecto de la parte que se va a quitar y finalmente restamos dichos efectos para determinar el efecto de la esfera hueca.



En la esfera más grande (M) y en la esfera extraída (m), la masa está distribuida uniformemente y se verifica:

(masa) D.P. (volumen)

De manera directa para las esferas mencionadas planteamos

$$\frac{m}{M}=\frac{R^3}{(2R)^3}\ \Rightarrow\ M=8m$$

Para la atracción entre M y la partícula colocada en A usamos la ley universal de la gravitación

$$F_1=\frac{GMm}{(d_1^2)^2}=\frac{G(8m)m}{(8R)^2}=\frac{Gm^2}{8R^2}$$

Si la esfera extraída de radio R interactuará con la partícula ubicada en A, se tendría la fuerza

$$F_2=\frac{Gm.m}{d_2^2}=\frac{Gm^2}{(7R^2)}=\frac{Gm^2}{49R^2}$$

Ahora, cuando interactúa la esfera grande (con masa extraída) y la partícula ubicada en A, se tendrá una fuerza gravitatoria de módulo dado por F_1-F_2. Este planteamiento es válido en el sentido de que al extraerle cierta masa a la esfera, esta parte ya no ejerce acción sobre la partícula, por lo tanto la acción de la esfera sobre la partícula disminuye en esa acción de la parte que quitó

$$\Rightarrow \quad F = F_1 - F_2$$

$$\Rightarrow \quad F_1 - F_2 = \frac{Gm^2}{8R^2} - \frac{Gm^2}{49R^2}$$

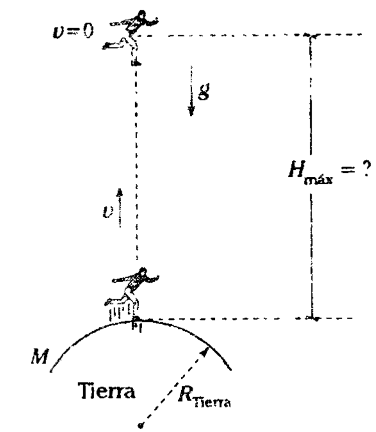
$$\therefore \quad F_1 - F_2 = \frac{37Gm^2}{392R^2}$$

Problema 10

En la Tierra un hombre puede saltar verticalmente hasta una altura H. ¿Qué altura como máximo podrá saltar la misma persona en un planeta de igual densidad media que la Tierra, pero el doble de radio? (considere $H << R_{Tierra}$)

Resolución

Como la altura (H) alcanzada por el hombre es mucho menor al radio terrestre, debido al salto, el hombre realiza un M.V.C.L. donde la máxima altura que logra dependerá de la intensidad $\vec{g}$ de campo gravitatorio en la superficie (g_{sup}).



Del M.V.C.L. del joven

$$H_{max} = \frac{v^2}{2g}$$

Como vemos, en el planeta (P) y en la Tierra la $\vec{g}$ no depende de la masa del cuerpo que hace el salto. Si se tiene la misma rapidez (v) para el salto, entonces

$$H_{máx} \ \text{I.P.} \ g \qquad \text{(I)}$$

Ahora pasemos a demostrar la dependencia que hay entre la aceleración de la gravedad con la densidad (ρ) del planeta y su radio (R).

Se sabe

$$g = \frac{GM}{R^2} \ \text{y}$$

también

$$\rho = \frac{M}{v} \Rightarrow M = \rho v = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

Entonces reemplazando tenemos

$$g = \frac{G\left[\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\right]}{R^2}$$

$$g = \underbrace{\frac{4}{3}\pi G}_{\text{cte}}(\rho R) = (\text{cte.})\rho R \qquad \text{(II)}$$

Ahora, de (II) y (I)

$$\frac{H'_{máx}(\text{en el planeta } P)}{H_{máx}(\text{en la Tierra})} = \frac{g_{Tierra}}{g_P}$$

$$H'_{máx} = \frac{(\text{cte.})\rho_T . R_{Tierra}}{(\text{cte.})\rho_P . R_p} . H$$

$$H'_{max} = \frac{\rho_{Tierra} R_{Tierra}}{\rho_p R_p} H \qquad \text{(III)}$$

Por condición del problema

$$\rho_{Tierra} = \rho_P \ ; R_p = 2R_{Tierra}$$

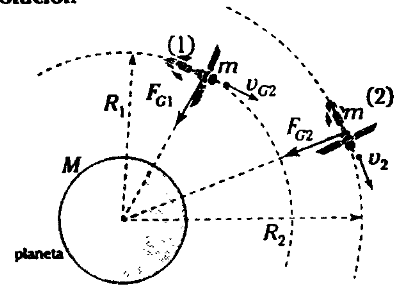
Reemplazando en (III)

$$H'_{máx} = \frac{H}{2}$$

Problema 11

Un planeta presenta dos satélites de igual masa y sus periodos de traslación están relacionados según $\frac{T_1}{T_2} = 8$. ¿En qué relación se encuentran sus energías cinéticas?

Resolución



Se pide determinar la relación de energías cinéticas de los satélites, es decir

$$\frac{E_{C1}}{E_{C2}}.$$

Del movimiento circunferencial de los satélites, se tiene

$$F_{G1} = F_{cp}$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{R_1^2} = \frac{mv_1^2}{R_1} = \overbrace{\left(\frac{m_1 v_1^2}{2}\right)}^{E_{C1}}\frac{2}{R_1}$$

$$\Rightarrow E_{C1} = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GmM}{2R_1} \qquad \text{(I)}$$

Por analogía, para el satélite (II) se demuestra que

$$\Rightarrow E_{C2} = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{GmM}{2R_2} \qquad \text{(II)}$$

Luego de (I) y (II) obtenemos

$$\frac{E_{C1}}{E_{C2}} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \text{(III)}$$

Del dato, se conoce la relación de periodos de traslación de los satélites

$$\frac{T_1}{T_2} = 8;$$

además sabemos que esta relación se observa también en la 3ra Ley de Kepler; donde

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 (8)^2$$

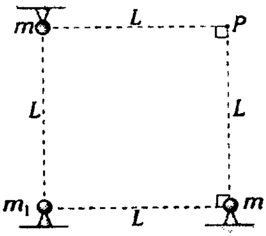
$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{4} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III)

$$\therefore \frac{E_{C1}}{E_{C2}} = \frac{1}{4}$$

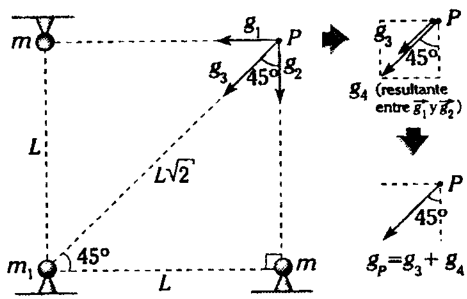
Problema 12

Para el sistema de partículas dado, determine el módulo de la intensidad de campo gravitatorio en P. $\left(m_1 = 2\sqrt{2}m\right)$



Resolución

Para determinar la intensidad de campo gravitatorio en P(resultante) primero debemos graficar la intensidad que origina cada partícula en dicho punto. Como sabemos, se gráfica con dirección hacia la partícula a lo largo de la línea que lo une con el punto P.



$m_1 = 2\sqrt{2}$ m

A partir del gráfico podemos establecer que

$$g_1 = g_2 = \frac{Gm}{L^2},\ g_3 = \frac{Gm_1}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} \text{ y } g_4 = g_1\sqrt{2}$$

Según el gráfico, en P tenemos

$$g_P = g_3 + g_4$$

$$g_P = \frac{Gm_1}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} + g_1\sqrt{2}$$

$$g_P=\frac{G}{\cancel{2}L^2}(\cancel{2}\sqrt{2}m)+\left(\frac{Gm}{L^2}\right)\sqrt{2}$$

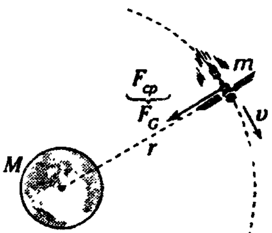
$$\therefore\ g_P=\frac{Gm}{L^2}(2\sqrt{2})$$

Problema 13

Un satélite de 10 toneladas orbita a una distancia R_T respecto de la superficie terrestre y sigue una trayectoria circunferencial. Se pretende que el satélite describa una trayectoria semejante, pero alejado una distancia $3R_T$ de la superficie terrestre. Determine la cantidad de energía que se le debe transferir para lograr tal propósito.
(R_T=6 400 km; g = 10 m/s^2 en la superficie terrestre)

Resolución

Antes de plantear el problema, primero es conveniente que determinemos la energía mecánica del sistema Tierra-satélite (E_M) cuando este describe una trayectoria circunferencial de radio r.



Según el gráfico

$$E_M=E_C^{\text{satélite}}+E_{PG}^{\text{sistema}}$$

$$E_M=\frac{mv^2}{2}+\left(-G\frac{Mm}{T}\right) \qquad \text{(I)}$$

se requiere mv^2; para determinarlo planteamos sobre la satélite la 2da Ley de Newton. (Al movimiento circunferencial)

$$F_{cp}=ma_{cp}$$

$$\Rightarrow\ F_G=m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow\ G\frac{Mm}{r^{\cancel{2}}}=\frac{mv^2}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow\ mv^2=\frac{GMm}{r} \qquad \text{(II)}$$

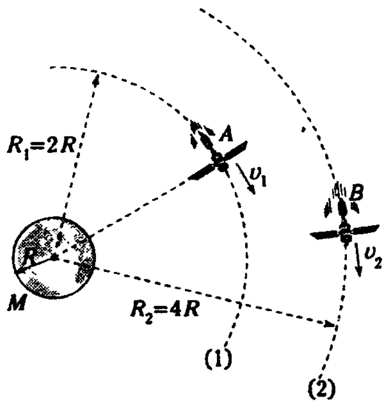
Ahora reemplazamos (II) en (I)

$$E_M=\frac{1}{2}\left(\frac{GMm}{r}\right)-\frac{GMm}{r}$$

$$\therefore\ E_M=-\frac{GMm}{2r}$$

El signo menos (–) nos indica que el sistema es de atracción y la trayectoria del satélite debe ser cerrada (circunferencia), además r es el radio de la trayectoria.

Según el enunciado, planteamos



Cuando el satélite se traslada de la órbita (1) hacia la orbita (2) se le debe suministrar (por sus motores) cierta cantidad de energía (E) para que pueda vencer la atracción de la Tierra y así alejarse ella. Debemos de entender que la cantidad de energía consumida o absorbida por el satélite va a ser igual con el cambio de energía mecánica del sistema (planeta – satélite).

$$E=\Delta E_M$$

$$E=E_{M(B)}-E_{M(A)}$$

Para determinar la energía mecánica del sistema tanto en A y B usamos la expresión que se ha demostrado anteriormente

$$\Rightarrow \quad E=\left(-\frac{GMm}{2R_2}\right)-\left(-\frac{GMm}{2R_1}\right)$$

Como $R_1=2R$ y $R_2=4R$ quedaría

$$E=\frac{GMm}{8R} \qquad \text{(II)}$$

En (II) multiplicamos y dividimos por R

$$E=\frac{GMm}{8R^2}.R\text{, como } g=\frac{GM}{R^2}=10\text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad E=\frac{gR.m}{8}$$

Reemplazando los datos se obtiene

$\therefore \quad E=8\times10^8\,\text{J}$

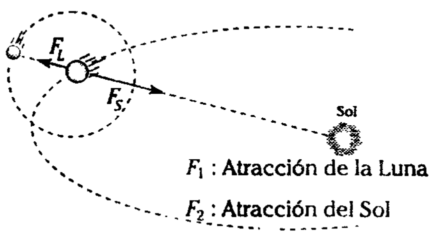
Problema 14

Identifique la proposición incorrecta

I. La variación de las mareas es provocada por el movimiento de traslación de la Tierra.
II. Cuando la Tierra se aleja del perihelio, la energía potencial gravitatoria del sistema Sol-Tierra aumenta.
III. La cantidad de energía del sistema Sol-cometa Halley es negativa.
IV. Un joven en el Ecuador pesa menos que en los polos.
V. Los satélites geoestacionarios se concentran en el plano ecuatorial (cinturón de Clarke).

Resolución

I. **Falso**, porque el ascenso o descenso del nivel de las mareas es provocado por la atracción de la Luna y el Sol.



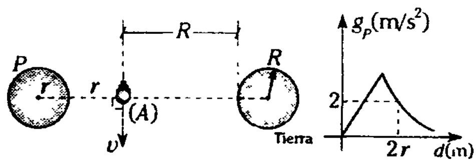
F_1 : Atracción de la Luna
F_2 : Atracción del Sol

En la porción mostrada, el agua del mar es atraída con la suficiente fuerza como para *elevarse* sobre superficie terrestre y ocasionar la marea.

II. **Verdadero**, porque la energía potencial gravitatoria es negativa y por lo tanto aumenta el valor a medida que la Tierra se aleja del perihelio. (alejarse del sol)
III. **Verdadero**, pues, a pesar de que el cometa Halley presenta un gran periodo (aprox. 76 años) en su movimiento alrededor del Sol, aún sigue interactuando gravitacionalmente. Por ende existe atracción y energía potencial gravitatoria negativa.
IV. **Verdadero**, el peso del joven sobre la superficie terrestre depende de intensidad del campo gravitatorio y sabemos que ella es menor en el Ecuador. Por lo tanto en el Ecuador, el joven pesa menos que en los polos.
V. **Verdadero**. Actualmente se sabe que el tránsito satelital es estable en el plano ecuatorial aproximadamente a 36 000 km sobre la superficie terrestre.

Problema 15

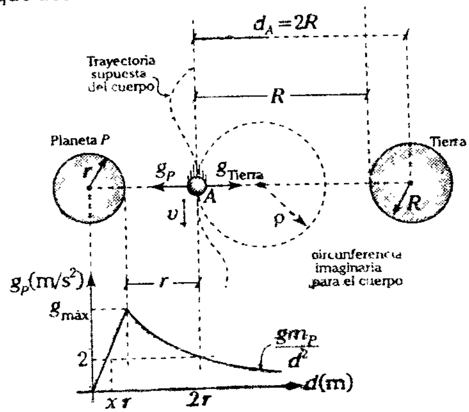
Se muestra cierto cuerpo que pasa por A entre la Tierra y un planeta P, cuya intensidad de campo gravitatorio en función de la distancia medida de su centro se describe en la gráfica adjunta. Considerando que v = 300 m/s, determine el radio de curvatura de la trayectoria del cuerpo al pasar por A. (Considere g=10 m/s^2 en la superficie terrestre).



Resolución

El radio de curvatura ρ de la trayectoria del cuerpo al pasar por A se relaciona con la rapidez v y la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ en dicho punto. Esta última depende de la intensidad de campo gravitatorio $(\vec{g})$ que origina en A cada planeta.

A continuación ilustraremos aproximadamente lo que acontece



En base a la gráfica g_P vs. d se deduce que

$g_P=2\text{m/s}^2$

Mientras que

$$g_{Tierra}=g\frac{GM}{d_A^2}=\frac{GM}{(2R)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{GM}{R^2}\right)=\frac{1}{4}g$$

$$\Rightarrow\quad g_{Tierra}=2{,}5\ \text{m/s}^2$$

En las condiciones dadas si hacemos uso de la ley universal de la gravitación se demuestra que en A, el cuerpo tendrá una aceleración centrípeta dada por

$$a_{cp}=g_{Tierra}-g_P=0{,}5\ \text{m/s}^2\ (\rightarrow)$$

Finalmente para el cuerpo en A usamos

$$a_{cp}=\frac{v^2}{\rho}\quad\Rightarrow\quad 0{,}5=\frac{(300)^2}{\rho}$$

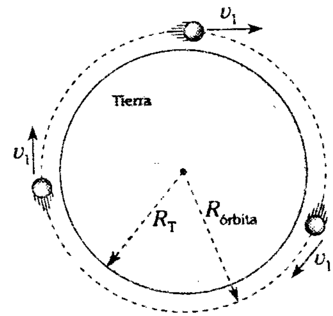
$$\therefore\ \rho=180\ \text{km}$$

Problema 16

Un objeto es lanzado perpendicular a la superficie de la Tierra con una rapidez que es igual a la primera rapidez cósmica. ¿Qué distancia como máximo se logra alejar de la superficie?

Resolución

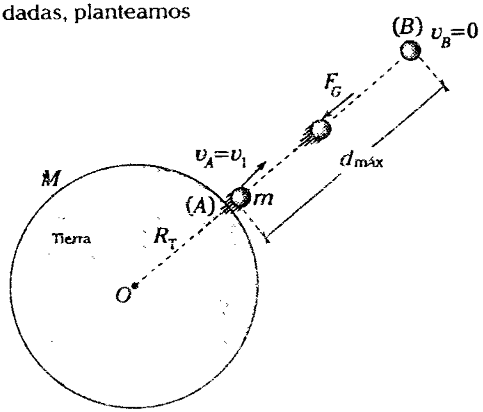
En la teoría hemos planteado que la primera rapidez cósmica es aquella rapidez que se le debe comunicar a un cuerpo para que luego se ponga a orbitar rasante a la superficie terrestre.



Se considera que $R_{órbita}\approx R_T$

Con lo cual se verifica $v_1=\sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T}}$ (ver teoría)

Si a un objeto se le lanza con las condiciones dadas, planteamos



Una vez lanzado el cuerpo M, por inercia, empieza a alejarse de la superficie terrestre y mientras lo hace la atracción terrestre $(\vec{F}_G)$ disminuye su rapidez hasta que se detiene por un instante. Esto permite señalar que en dicho instante se tendría su máximo alejamiento ($d_{máx}$) y se entiende además que la Tierra luego lo puede hacer regresar.

Ahora calculemos $d_{máx}$. Este alejamiento se puede calcular al hacer uso de la cinemática y dinámica, pero como la $\vec{F}_G$ es de valor variable origina una aceleración variable lo cual implicaría usar el cálculo integral y diferencial. Esto se evita si se aplican las nociones de energía. Como nuestro sistema Tierra–Cuerpo es un sistema conservativo, entonces para el sistema planteamos

$$E_{M_0} = E_{M_F}$$

$$\Rightarrow \quad E_{C(A)}^{esf} + E_{PG(A)}^{sist} = E_{PG(B)}^{sist}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cancel{m} v_A^2}{2} + \left(-\frac{GM\cancel{m}}{R_T}\right) = -\frac{GM\cancel{m}}{(R_T + d_{máx})}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{GM}{R_T}}\right)^2 - \frac{GM}{R_T} = -\frac{GM}{(R_T + d_{máx})}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{GM}{2R_T} = -\frac{GM}{(R_T + d_{máx})}$$

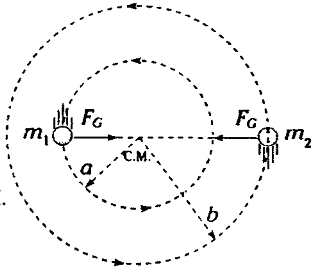
$$\therefore \quad d_{máx} = R_T$$

Problema 17

Dos estrellas bajo la acción mutua de la fuerza gravitacional describen órbitas circulares alrededor de su centro de masa con un periodo de 2 años terrestres y la suma de sus masas es $m_1 + m_2 = 2M$. Si M es la masa del Sol, calcule la distancia entre dichas estrellas ya que la distancia de la Tierra al Sol es $1{,}5\times10^8$ km. (Considere que la masa de la Tierra es despreciable con respecto a la masa del Sol).

Resolución

Analicemos el caso de las 2 estrellas: m_1 y m_2, que orbitan alrededor del C.M.



en el C.M. se tiene $m_1 + m_2$

La estrellas están separadas, $D = a + b$, y se atraen con una fuerza cuyo módulo lo calculamos con la ley universal de la gravitación.

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{(a+b)^2} \qquad \text{(I)}$$

Como las estrellas completan vueltas simultáneamente entonces tienen igual periodo (T) y la misma rapidez angular (ω) respecto del centro de masa del sistema.

Ahora determinemos una relación en a y b con la masa del Sol

Por propiedad del C.M. se cumple que

$$am_1 = bm_2$$

y por dato $m_1 + m_2 = 2M$

Combinando estas relaciones obtenemos que

$$m_2 = 2M\left(\frac{a}{a+b}\right) \quad \text{y} \quad m_1 = 2M\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

Si uno de estos resultados (el de m_2) lo reemplazamos en (I) se obtiene

$$F_G = G\left[2M\left(\frac{a}{a+b}\right)\right]\frac{m_1}{(a+b)^2} \qquad \text{(I)}$$

Por otro lado la fuerza $\vec{F}_G$ para m_1 representa la fuerza centrípeta.

$$\Rightarrow \quad F_G = F_{cp} = m_1 a_{cp2}$$

$$\Rightarrow \quad F_G = m_1 \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad F_G = m_1\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad \text{(II)}$$

Igualando las relaciones (I) y (II)

$$\frac{2MG\cancel{m}_1}{(a+b)^3} = \cancel{m}_1\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2MG}{D^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \text{(III)}$$

Con respecto al sistema Sol–Tierra se puede obtener una relación similar donde

$$M_{Sist} = M_{Sol} + M_{Tierra}$$

$\Rightarrow \quad M_{Sist} = M_{Sol} = M$; ya que $M_{Sol} >> M_{Tierra}$

Además

$$d = 1{,}5\times10^8 \text{ km y } T_{Tierra} = \frac{T}{2} = 1 \text{ año}$$

Los datos mencionados los reemplazamos en (III) y obtenemos

$$\frac{MG}{d^3}=\frac{4\pi^2}{(T/2)^2} \qquad \text{(IV)}$$

Ahora dividamos (III) entre (IV)

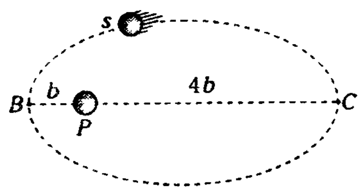
$$\frac{2d^3}{D^3}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \; D=2d$$

$$\therefore \; D=a+b=3\times 10^8 \text{ km}$$

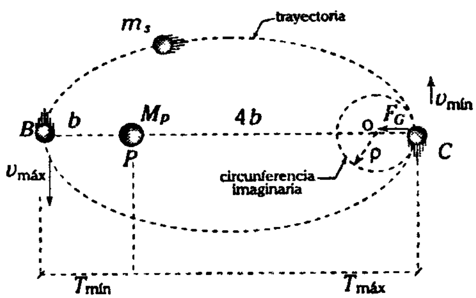
Problema 18

En la figura se muestra cómo un satélite orbita en torno de un planeta. Determine su radio de curvatura en el lugar donde su rapidez es mínima.



Resolución

Sabemos que el satélite para este tipo de trayectoria, elíptica, presentará su menor rapidez en la posición más alejada respecto del planeta (sería en C). Por lo dicho en dinámica y cinemática, el radio de curvatura desde una trayectoria curvilínea viene a ser el radio de una circunferencia imaginaria tangente a la trayectoria. Para nuestro caso tenemos



En C: para calcular ρ consideramos

$$a_{cp}=\frac{v_{mín}^2}{\rho} \Rightarrow \frac{F_{cp}}{m_s}=\frac{v_{mín}^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \; \rho=\frac{v_{mín}^2 m_s}{F_{cp}} \qquad \text{(I)}$$

Pero

$$F_{cp}=F_G=G\frac{M_p m_s}{(4b)^2}$$

Reemplazando en (I)

$$\rho=\frac{v_{mín}^2 \cancel{m_s}}{G_G \cancel{m_s}/(4b)^2}=\frac{16b^2 v_{mín}^2}{G_G}$$

$$\rho=\frac{16b^2}{G_G}v_{mín}^2 \qquad \text{(II)}$$

Según esta relación (II) hay que establecer una relación entre $v_{mín}^2$, G y M_p la cual en realidad se puede obtener si se considera primero que

$T_{mín}v_{máx}=T_{máx}v_{mín}$ (ver teoría)

$$\Rightarrow \; \cancel{b}\times v_{máx}=4\cancel{b}\times v_{mín}$$

$$\Rightarrow \; v_{máx}=4v_{mín} \qquad \text{(III)}$$

Segundo, sabemos también que un sistema planeta-satélite conforma un sistema conservativo $\left(E_M^{\text{sistema}}=\text{cte.}\right)$, entonces entre las posiciones B y C hacemos el balance de energía mecánica para el sistema.

$$E_{M(B)}=E_{M(C)}$$

$$\Rightarrow \; E_{C(B)}^{\text{satélite}}+E_{PG(B)}^{\text{sistema}}=E_{C(C)}^{\text{satélite}}+E_{PG(C)}^{\text{sistema}}$$

$$\Rightarrow \; \cancel{m_s}\frac{v_{máx}^2}{2}+\left(-G\frac{M_p\cancel{m_s}}{b}\right)=\frac{\cancel{m_s}v_{mín}^2}{2}+\left(-G\frac{M_p\cancel{m_s}}{4b}\right)$$

Aquí reemplazamos la relación (III)

$$\Rightarrow \; \frac{\left(4v_{mín}^2\right)^2}{2}-\frac{v_{mín}^2}{2}=\frac{GM_p}{b}-\frac{GM_p}{4b}$$

$$\Rightarrow \; \frac{15v_{mín}^2}{2}=\frac{3GM_p}{4b}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{mín}^2}{GM_p}=\frac{1}{10b} \qquad \text{(IV)}$$

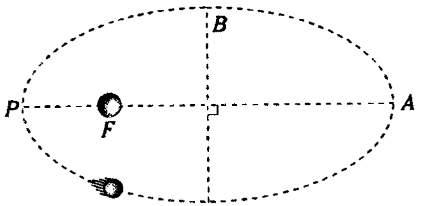
Finalmente reemplazamos (IV) en (II)

$$\rho=16b^2\left(\frac{1}{10b}\right)$$

$$\therefore\ \rho=1{,}6b$$

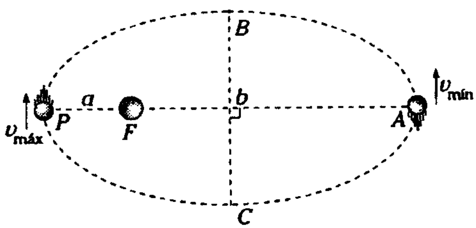
Problema 19

Un planeta está orbitando elípticamente alrededor de una estrella si su rapidez máxima y mínima son como 3 a 1 y sus ejes están en la relación de $\sqrt{3}$ a 2, exprese la rapidez que tiene cuando pasa por B en función de su máxima rapidez ($v_{máx}$)



Resolución

Por la teoría descrita sabemos que la máxima y mínima rapidez las alcanzará el planeta cuando pase por el lugar más cercano y alejado de la estrella respectivamente. Según esto, planteamos



Dados los datos

$$\frac{v_{máx}}{v_{mín}}=\frac{3}{1},$$

Si recordamos la teoría se debe verificar

$$a.v_{máx}=b.v_{mín}$$

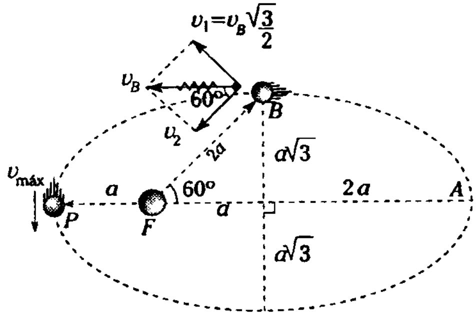
$$\Rightarrow \frac{v_{máx}}{v_{mín}}=\frac{b}{a}=3$$

$$\therefore\ b=3a$$

Por otro lado se ha mencionado que la longitud de las ejes PA y BC están en la relación de a 2 a $\sqrt{3}$, así

$$\frac{BC}{PA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \frac{BC}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ BC=2a\sqrt{3}$$

Según esto, cuando el planeta esté pasando por B se tendría el siguiente gráfico



Ahora para determinar la v_B en función de $v_{máx}$ planteamos la conservación del momentum angular del planeta ($\vec{L}=\text{cte.}$)

$$\begin{pmatrix}\text{módulo del}\\ \text{vector}\\ \text{posición}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{módulo de la}\\ \text{componente de la}\\ \text{velocidad} \perp \text{al}\\ \text{vector posición}\end{pmatrix}=\text{cte}$$

Entonces de la figura, en las posiciones B y P se plantea

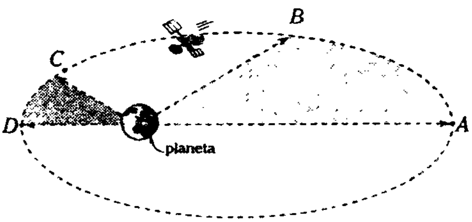
$$FB\times v_1=FP\times v_{máx}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cancel{a}\left(\frac{v_B\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)=\cancel{a}v_{máx}$$

$$\therefore\ v_B=\frac{v_{máx}}{3}\sqrt{3}$$

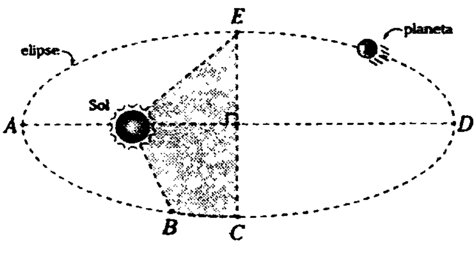
Problemas Propuestos

1. Un satélite orbita alrededor de un planeta tal como se muestra. Si tarda de A hasta B 80 días y el radio vector barre un área $4S$; determine el tiempo que tarda el satélite de C hasta D. El radio vector barre una área S.



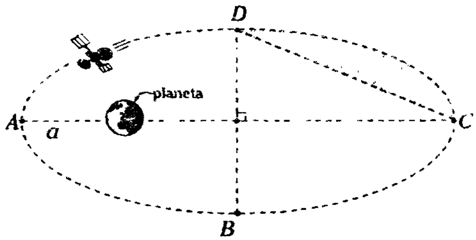
A) 10 días B) 20 días C) 30 días
D) 80 días E) 100 días

2. Se muestra un planeta que orbita alrededor del Sol con un periodo de 40 meses y demora 12 meses al trasladarse del punto D a E y 1 mes del punto B a C. Determine el área de la región sombreada, si el área encerrada por la elipse es S.



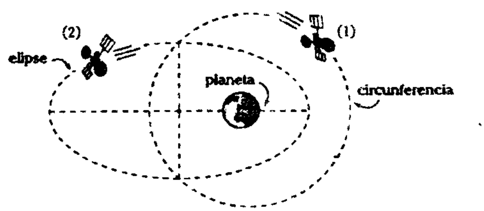
A) $\frac{8S}{9}$ B) $\frac{4S}{7}$ C) $\frac{3S}{8}$
D) $\frac{5S}{8}$ E) $\frac{S}{8}$

3. Un satélite describe una orbita elíptica como se muestra, que al trasladarse de D hasta A demora 4 meses terrestres y de B hasta C 12 meses terrestres. Si el área limitada por la elipse es S, determine el área de la región sombreada.
Considere el radio medio de la elipse $4a$.



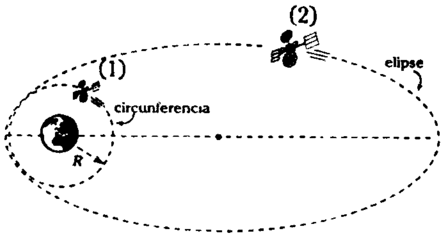
A) $\frac{S}{6}$ B) $\frac{3}{5}S$ C) $\frac{7}{5}S$
D) $\frac{S}{12}$ E) $\frac{3}{12}S$

4. Los satélites describen las órbitas mostradas. Si el periodo del satélite (1) es 30 días, determine el periodo del satélite (2).



A) 10 días B) 20 días C) 30 días
D) 40 días E) 50 días

5. Dos satélites orbitan alrededor de un planeta tal como se muestra. Determine el máximo alejamiento del satélite (2) respecto del planeta, si su periodo es 8 veces el periodo del satélite (1)



A) 8 R B) 6 R C) 4 R
D) 7 R E) 12 R

6. El periodo de la Tierra alrededor del Sol es T_0. Si consideramos que estuviese en órbita a una distancia que es la mitad de su distancia inicial, ¿cuándo tiempo se tomaría en dar media vuelta en la supuesta órbita? (El movimiento de la Tierra se examina a partir del Perihelio)

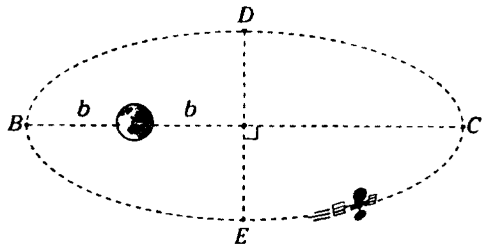
A) $\frac{T_0\sqrt{2}}{16}$ B) $\frac{T_0}{4}$ C) $\frac{T_0\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{T_0\sqrt{2}}{8}$ E) $\frac{T_0\sqrt{2}}{4}$

7. Determine a qué distancia máxima del Sol se aleja el cometa Halley si su periodo de traslación alrededor del sol es $T=76$ años terrestres, la distancia mínima del Sol al cometa es $R_{mín} = 1{,}8.10^8$ km y el radio medio de la órbita de la Tierra es $R_0=1{,}5\times10^8$ km.

A) $4{,}8.10^9$ km B) $5{,}2.10^9$ km
C) $6{,}4.10^8$ km
D) $7{,}2.10^9$ km E) $10{,}8.10^8$ km

8. Se muestra el trayecto seguido por un satélite en torno de un planeta



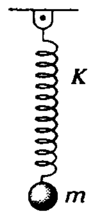
Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F)

- Los intervalos de tiempo que emplea el satélite de C hacia D y de B hacia E son iguales
- El intervalo de tiempo que emplea el satélite para el trayecto DBE es menor que en ECD.
- La energía cinética del satélite en la posición C y D está en la relación 1 a 9.
- El periodo del satélite es proporcional a $2b\sqrt{2b}$

A) FVFF B) VVVV C) FVFV
D) FVVV E) FFVV

9. La esfera mostrada está próxima a la superficie de la Tierra. Dicha esfera está en reposo y la deformación del resorte es 10 cm. Determine la deformación del resorte, si el sistema mostrado es llevado a la superficie de un planeta cuya densidad es 2 veces mayor que la densidad de la Tierra y su radio es la mitad del radio terrestre.

A) 10 cm
B) 15 cm
C) 20 cm
D) 25 cm
E) 30 cm



10. Dos satélites (1) y (2) orbitan a un planeta con trayectorias circunferenciales, cuyos radios guardan la relación $R_1=4R_2$. Si el periodo del satélite (2) es de 50 días, ¿cuántos días demora el otro en dar un cuarto de vuelta?

A) 50 B) 100 C) 200
D) 250 E) 400

11. Un satélite que órbita en las cercanías de la superficie terrestre sale de su órbita y a cierta distancia d respecto del centro de la Tierra, se observa que su velocidad presenta módulo v y forma 30° con respecto al eje que pasa por el centro de la Tierra. Determine d, si el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es igual a g, además $R_{Tierra}=R$.

A) $4g\dfrac{R^2}{v^2}$ B) $2g\dfrac{R^2}{v^2}$ C) $g\dfrac{R^2}{v^2}$

D) $\dfrac{2}{v}\sqrt{gR^3}$ E) $\dfrac{4}{v}\sqrt{gR^3}$

12. Determine la profundidad respecto de la superficie terrestre, o en la que se debe estar, para obtener un valor de la aceleración de la gravedad igual al que se tiene a una altura R. (R: radio de la Tierra)

A) $R/3$ B) $3R/4$ C) $2R/3$
D) $R/2$ E) $4R/5$

13. Considerando que el periodo de la Tierra en órbita circular alrededor del Sol es de 365 días y que su radio orbital es de $R=15\times10^7$ km, determine la masa del Sol

A) 3×10^{29} kg B) 5×10^{25} kg C) 2×10^{30} kg
D) 4×10^{32} kg E) 4×10^{31} kg

14. En 1610, Galileo descubrió cuatro de los dieciséis satélites de Júpiter, siendo el más grande Ganímedes. Si esta Luna joviana gira alrededor del planeta y describe una trayectoria casi circunferencial de radio aproximadamente igual a $1{,}07.10^6$ km con un periodo de 7,16 días terrestres, determine la masa de Júpiter.

A) $0{,}8\ 10^{26}$ kg B) $1{,}9\ 10^{27}$ kg C) 2.10^{26} kg
D) $1.7.10^{27}$ kg E) $1{,}9.10^{17}$ kg

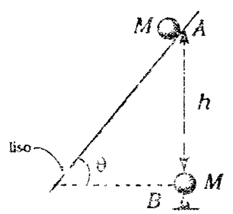
15. Determine la altura a la cual orbita un satélite geoestacionario (mov. circunferencial y sobre el plano ecuatorial)

A) [illegible] $\times10^6$ m B) 28×10^6 m C) 36×10^6 m
D) 45×10^6 m E) 42×10^6 m

16. Se muestran 2 esferas idénticas, donde una de ellas se suelta en A. ¿Qué proposiciones son verdaderas cuando la esfera desliza? (Desprecie el efecto gravitatorio de la Tierra)

I. La fuerza que le ejerce el plano inclinado aumenta.
II. La energía potencial gravitatoria del sistema disminuye.
III. La mayor fuerza de atracción gravitacional entre esferas tiene un módulo igual a

$$G\left(\frac{M\cos\theta}{h}\right)^2$$



A) VFF B) FFF C) FVF
D) VFV E) VVF

17. Un planeta describe una trayectoria elíptica alrededor de un sol, donde los semiejes son a y b $(b>a)$. Determine el radio de curvatura de la trayectoria del planeta, cuando se encuentra a una distancia b del Sol.

A) $\frac{a^2}{b}$ B) $\frac{b^2}{a}$ C) $\frac{a^2+b^2}{a}$

D) $\frac{b^2-a^2}{b}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

18. Una nave se traslada por una órbita circular alrededor de la Tierra y en el plano de la órbita de la Luna con la velocidad angular. igual a la velocidad angular de rotación esta en torno a la Tierra En el curso del movimiento la nave se encuentra en la recta que enlaza los centros de la Luna y de la Tierra. La distancia entre la nave y la Tierra es tal que las fuerzas de atracción que actúan sobre la nave por parte de la Tierra y la Luna son iguales en módulo. ¿Funcionan o no los motores de la nave? ¿Cuál es el peso del cosmonauta que se encuentra a bordo de la nave?
La masa del cosmonauta es 70 kg, el periodo de rotación de la Luna respecto a Tierra es 27,3 días. $m_{\text{Tierra}}=81\ m_{\text{Luna}}$ $d_{\text{Tierra-Luna}}=60\ R_T$
R_T=6400 km

A) no; 0,171 N B) si; 0 C) si; 0.171 N
D) si; 0,28 N E) no; 700 N

19. Un planeta hipotético de masa M tiene sobre una misma trayectoria circunferencial tres satélites de igual masa m. Si el radio de la trayectoria es r, ¿con qué rapidez se mueve cada satélite para que se mantenga tal configuración? (M: masa del planeta; G: constante de gravitación)

A) $\sqrt{\frac{G}{3r}(\sqrt{3}m+3M)}$

B) $\sqrt{\frac{G}{r}(2m+3M)}$

C) $\sqrt{\frac{G}{3r}(m+3M)}$

D) $\sqrt{\frac{3G}{2r}(m+M)}$

E) $\sqrt{\frac{2G}{3r}(m+M)}$

20. El Sol pierde masa debido a las radiaciones nucleares a razón de 4 millones de toneladas por segundo. Calcule el cambio fraccional o relativo de la fuerza gravitacional sobre la Tierra durante un periodo de 1000 años. Para este mismo intervalo de tiempo, el cambio fraccional de la duración del año.
M : masa inicial del Sol
M_p: masa perdida por el Sol durante este periodo

A) $\left(\frac{M-Mp}{M}\right);\sqrt{\frac{M}{M-M_p}}$

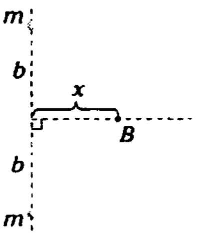
B) $\left(\frac{M-Mp}{2M}\right);\sqrt{\frac{2M}{M-M_p}}$

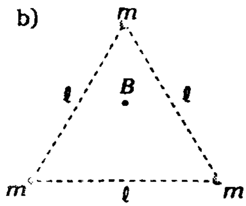
C) $2\frac{(M-M_p)}{M};2\sqrt{\frac{M}{M-M_p}}$

D) $\left(\frac{M-M_p}{3M}\right);\sqrt{\frac{3M}{M-M_p}}$

E) $\frac{3(M-M_p)}{M};\sqrt{\frac{5M}{M-M_p}}$

21. Para las configuraciones de partículas que se muestran, determine el módulo de la intensidad de campo gravitatorio en B.

a) 

b) 

B: Baricentro

A) $\dfrac{2Gmx}{\sqrt{x^2+b^2}}$; 0

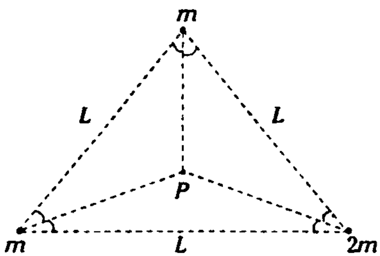
B) $\dfrac{Gmx}{(x^2+b^2)^{3.2}}$; $\dfrac{3Gm}{l^2}$

C) $\dfrac{2Gmx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$; 0

D) $\dfrac{Gm}{x^2}$; $\dfrac{3Gm}{2l}$

E) $\dfrac{2Gmx}{(x^2+b^2)}$; $\dfrac{3Gm}{l^2}$

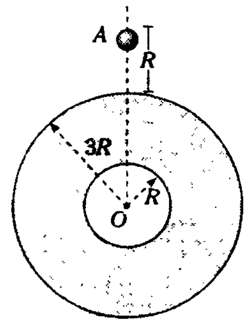
22. Determine el módulo de la intensidad del campo gravitatorio resultante debido a los tres cuerpos en P. (P: baricentro)



A) $3\dfrac{mG}{L^2}$ B) $2\dfrac{mG}{L^2}$ C) $8\dfrac{mG}{L^2}$

D) $\dfrac{6mG}{L^2}$ E) $10\dfrac{mG}{L^2}$

23. De la esfera maciza homogénea de radio $3R$ se sustrae una porción de masa M esférica de radio R tal como se muestra. Determine el módulo de la fuerza que le ejerce este cuerpo a la partícula de masa m ubicada en A.
(G: constante de gravitación universal)



A) $\dfrac{GmM}{2R^2}$ B) $\dfrac{GmM}{LGR^2}$ C) $\dfrac{13GmM}{8R^2}$

D) $\dfrac{GmG}{3R^2}$ E) $\dfrac{GmM}{24R^2}$

24. Consideremos a la Tierra como una esfera homogénea (densidad constante) en cuya superficie $g=9{,}8$ m/s^2. Por una gigantesca explosión nuclear se suprime un tercio de la masa del planeta situada en la parte más externa y se mantiene la homogeneidad. Determine el nuevo valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera resultante.

A) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}.g$ B) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{6}}.g$ C) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.g$

D) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.g$ E) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{2}{5}}.g$

25. De las siguientes proposiciones, indique si son verdaderas (V) o falsas (F)

- Para I. Newton, su ley de gravitación no depende del medio ya que la interacción gravitacional es a distancia.
- La 2da Ley de Kepler se justifica con la conservación del momento angular.
- Si un sistema conformado por dos cuerpos tiene energía mecánica negativa, entonces los cuerpos se alejan uno del otro.

A) FVF B) VFF C) FFV
D) VVF E) VVV

26. Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se mueven en torno a su centro de masa que está en reposo. Si la separación entre dichos cuerpos es L, calcule la energía total de dicho sistema.

A) $-\dfrac{2Gm_1m_2}{L}$ B) $-\dfrac{Gm_1m_2}{4L}$ C) $-\dfrac{Gm_1m_2}{L}$

D) $-\dfrac{Gm_1m_2}{2L}$ E) $-\dfrac{4Gm_1m_2}{L}$

27. Un satélite orbita a una altura $H=3R$ de la superficie terrestre y describe una trayectoria circunferencial.
Indique que proposiciones son falsas (F) o verdaderas (V).
m: masa del satélite.
g: aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.
R: radio de la superficie terrestre.

I. La rapidez del satélite es $v=\dfrac{1}{2}\sqrt{gR}$

II. La energía cinética del satélite es $\dfrac{m}{4}gR$

III. La energía mecánica del sistema satélite planeta es $-\dfrac{gRm}{8}$

A) FFF B) FFV C) VVF
D) VFV E) VVV

28. Un cuerpo se le lanza perpendicular a la superficie de la Tierra y con una rapidez que es igual a la mitad de la segunda rapidez cósmica si lo único que influye sobre el cuerpo es la Tierra, ¿cuál es el máximo alejamiento respecto de la superficie de la Tierra? (R_T: Radio terrestre)

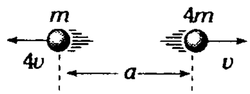
A) $3R_T$ B) $4R_T$ C) $\dfrac{4R_T}{3}$

D) $\dfrac{R_T}{3}$ E) $\dfrac{3R_T}{4}$

29. La rapidez angular de un planeta que gira alrededor de una estrella es: 2×10^{-8} rad/s. Determine la rapidez angular del planeta, si su distancia a la estrella se reduciría a la cuarta parte.

A) 2×10^{-8} rad/s B) 4×10^{-8} rad/s C) 8×10^{-8} rad/s
D) 12×10^{-8} rad/s E) 16×10^{-8} rad/s

30. Dos esferas aisladas se lanzan tal como se muestra. Determine la máxima separación que experimentan.

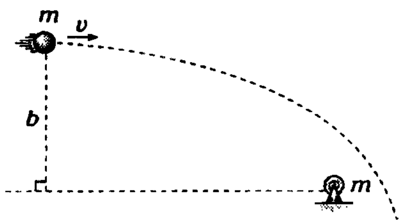


A) $\dfrac{Gmav}{4av^2-m^2}$ B) $\dfrac{Gma}{4av^2-Gm}$

C) $\dfrac{Gm}{av^2-Gm}$

D) $\dfrac{2Gma}{2Gm-5v^2a}$ E) $\dfrac{3Gm}{v^2-aG}$

31. El sistema mostrado es aislado y está conformado por cuerpos de igual masa: uno fijo y el otro es proyectado desde un lugar muy alejado para después seguir la trayectoria indicada. Determine la menor separación entre los cuerpos. (Considere que $mG=bv^2$)



A) $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{b}{4}(\sqrt{2}+1)$ C) $\frac{b\sqrt{2}}{4}$

D) $b(\sqrt{2}-1)$ E) $\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1)$

32. Dos cuerpos idénticos se mueven alrededor de una estrella en un mismo sentido por trayectorias tangentes. El primer cuerpo se mueve por una circunferencia de radio R y el segundo cuerpo posee un periodo que es ocho veces el del primero. Si ambos cuerpos se acoplan ¿qué máximo alejamiento de la estrella logra el sistema acoplado aproximadamente luego de esto?

A) R B) $1{,}2R$ C) $1{,}4R$

D) 2R E) $2{,}4R$

33. A la Tierra se le ha practicado un túnel delgado a lo largo de su diámetro. Si a un pequeño cuerpo se le abandona en la boca del túnel y se desprecia toda resistencia, determine la máxima rapidez que adquiere dicho cuerpo (considera a la Tierra una esfera maciza y homogénea).

M_T: masa de la Tierra

R_T: radio de la Tierra

A) $2\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ B) $\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$ C) $\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$

D) $\sqrt{\frac{GM_T}{2R_T}}$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$

34. Tres cuerpos de masa m se encuentran cada uno en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Demuestre que las partículas, bajo sus interacciones gravitatorias mutuas, pueden describir una órbita circunferencial cuyo centro es el centro del triángulo y señale cuál será la rapidez angular del movimiento.

A) $\left(\frac{3mG}{2a^3}\right)^{1/12}$ B) $\left(\frac{mG}{a^3}\right)^{1/2}$ C) $\left(\frac{mG}{3a^3}\right)^{1/2}$

D) $\left(\frac{mG}{2a^3}\right)^{1/2}$ E) $\left(\frac{3mG}{a^3}\right)^{1/2}$

35. Un satélite orbita en torno a un planeta y describe una trayectoria elíptica, cuyos alejamientos máximos y mínimos son R y r, respectivamente. Indique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

I. La máxima rapidez que alcanza el satélite es $\sqrt{\frac{2RGM}{r(r+R)}}$; M es masa del planeta.

II. El menor radio de curvatura de la trayectoria descrita por el satélite es $\frac{2rR}{r+R}$.

III. La menor energía potencial gravitatoria se alcanza en la posición de máximo alejamiento.

A) FVF B) FFV C) VVF

D) VVV E) FVV

CLAVES

1	B	9	B	17	E	25	D
2	E	10	B	18	C	26	D
3	D	11	A	19	A	27	D
4	C	12	B	20	A	28	D
5	D	13	C	21	C	29	E
6	D	14	D	22	A	30	D
7	B	15	C	23	C	31	D
8	C	16	B	24	D	32	D
33	B	34	E	35	C		